Саратовский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра математической физики
и вычислительной математики

С.Н. Кабанов, Д.С. Лукомский,
С.И. Поликарпов, А.Ю. Трынин, В.А.Юрко

ЗАДАНИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Учебное пособие для студентов
механико-математического факультета

2013

ББК 22.193я73
К772
УДК 519.61(075.8)

С.Н. Кабанов, Д.С. Лукомский,
С.И. Поликарпов, А.Ю. Трынин, В.А.Юрко

К772 Задания по численным методам решения уравнений в частных производных.: Учебное пособие для студентов механико-математического и физического факультетов . - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.

ISBN 5 - 292 - 01789 - 2

Пособие содержит задания по численным методам решения уравнений в частных производных, которые снабжены минимально необходимым теоретическим материалом.

Для студентов механико-математического и физического факультетов в качестве руководства при изучении курса численных методов.

Рекомендуют к печати:
кафедра математической физики и вычислительной математики
Саратовского госуниверситета,
кандидат физико-математических наук В.П. Скляров

1602070000 - 185
К --------------------- Без объявл. ББК 22.193я73
176(02) - 96

ISBN 5 - 292 - 01789 - 2

Задания по численным методам.

Курс 4, семестр 1.

1. Эллиптические уравнения.

Уравнение:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1,x_2),\ \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}=\text{прямоугольник D.}$$

$u|\Gamma = \mu,\ \ \Gamma =$границе прямоугольника D.

Разностная схема:

$$\mathrm{A}_1 y_{ij} + \mathrm{A}_2 y_{ij} = \tilde{f}_{ij},\ \ 1 \le i \le N_1 - 1,\ \ 1 \le j \le N_2 - 1.$$

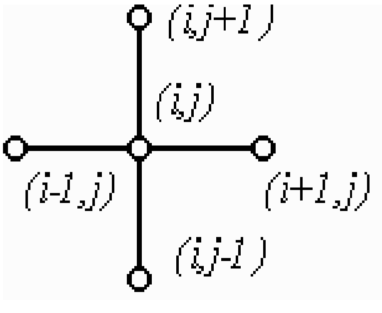
$x_{ij} = (ih_1, jh_2)$-узлы. $0 < i < N_1$ и $0 < j < N_2$-внутренние.

Остальные граничные $=\gamma_h$. $(h = (h_1,h_2), |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2})$.

$$\mathrm{A}_1 y_{ij} = -\frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{h_1^2},\ \ \mathrm{A}_2 y_{ij} = -\frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{h_2^2}.$$

$y_{ij} = 0,$ когда $x_{ij} \in \gamma_h$.

$$\tilde{f}_{ij} = \begin{cases} f_{ij},\ \ (1 < i < N_1 - 1) \wedge (1 < j < N_2 - 1) \\ f_{ij} + \sum\limits_{\pm} \dfrac{\mu_{i\pm1,j}}{h_1^2} + \dfrac{\mu_{i,j\pm1}}{h_2^2} \end{cases}$$



Сумма берется по тем узлам, окружающим узел (i,j), которые попали на границу, т.е. либо $i-1 \vee i+1 \in \{0, N_1\}$, либо $j-1 \vee j+1 \in \{0, N_2\}$.

1.1. Метод Якоби.

$$\begin{cases} y_{ij}^{n+1} = \left(\dfrac{2}{h_1^2}+\dfrac{2}{h_2^2}\right) = \dfrac{y_{i+1,j}^n + y_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \dfrac{y_{i,j+1}^n + y_{i,j-1}^n}{h_2^2} + \tilde{f}_{ij} \\ y_{ij} = 0,\ x_{ij} \in \gamma_h \end{cases}$$

1.2. Метод Зейделя.

$$y_{ij}^{n+1} = \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right) = \left(\frac{y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{y_{j,j-1}^{n+1}}{h_2^2}\right) + \left(\frac{y_{i+1,j}^{n}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n}}{h_2^2}\right) + \tilde{f}_{ij}$$

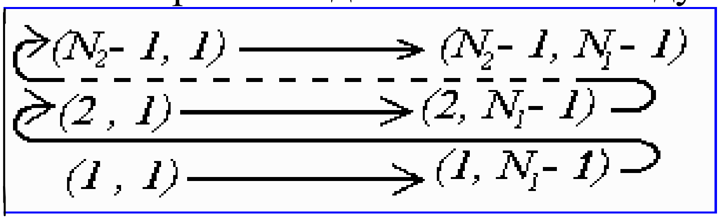
1.3. Метод верхней релаксации.

$$\frac{2}{\omega}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_{ij}^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) y_{ij}^{n} + \left[\frac{y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}\right] + \left[\frac{y_{i+1,j}^{n}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n}}{h_2^2}\right] + \tilde{f}_{ij},$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \;\; 1 \le j \le N_2 - 1.$$

$$\omega_{opt} = 2(1 - \sqrt{2C_1})\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \; C_1 = 2\pi^2 (l_1^{-2} + l_2^{-2}).$$

Во всех трех методах вычисления идут по возрастанию i и j:



1.4. Попеременно-треугольный метод.

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + A^- y^{n+1/2} + A^+ y^n = \tilde{f}, \\ \dfrac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + A^- y^{n+1/2} + A^+ y^{n+1} = \tilde{f} \end{cases}$$

$$A^- y_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij} - y_{i,j-1}}{h_2^2},$$

$$A^+ y_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij} - y_{i,j+1}}{h_2^2}.$$

Подробнее:

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^{n}}{\tau} + \frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_2^2} + \frac{y_{ij}^{n} - y_{i+1,j}^{n}}{h_1^2} + \frac{y_{ij}^{n} - y_{i,j+1}^{n}}{h_2^2} = \tilde{f}_{ij},$$

откуда определяются $y_{ij}^{n+1/2}$, вычисления ведутся по возрастанию индексов i, j; далее

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{\tau}+\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2}+\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_2^2}+\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{i+1,j}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{i,j+1}^{n+1}}{h_2^2}=\tilde{f}_{ij},$$

откуда определяются y_{ij}^{n+1}, вычисления ведутся по убыванию индексов i, j.

1.5. Метод переменных направлений.

$\mathrm{A}=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2,\ y^n=\{y_{ij}^n\}_{i=1,\,j=1}^{N_1-1,\,N_2-1},\ y_{ij}\big|_{\gamma_h}=0.$

$$\begin{cases}\dfrac{y^{n+1/2}-y^n}{\tau}+\mathrm{A}_1 y^{n+1/2}+\mathrm{A}_2 y^n=\tilde{f}\\[2ex] \dfrac{y^{n+1}-y^{n+1/2}}{\tau}+\mathrm{A}_1 y^{n+1/2}+\mathrm{A}_2 y^{n+1}=\tilde{f}\end{cases}$$ - итерации.

Начальное приближение y^0-произвольно.

Можно так:

$$\begin{cases}y_{ij}^{n+1/2}-\dfrac{\tau}{h_1^2}[y_{i+1,j}^{n+1/2}-2y_{ij}^{n+1/2}+y_{i-1,j}^{n+1/2}]=y_{ij}^n-\dfrac{\tau}{h_2^2}[y_{i,j+1}^n-2y_{ij}^n+y_{i,j-1}^n]+\tau\tilde{f}_{ij}\\ y_{0j}^{n+1/2}=y_{N_1 j}^{n+1/2}=0\end{cases}$$

j фиксировано, $1\le j\le N_2-1$. Система решается методом прогонки.

Оптимальное значение параметра $\tau=\dfrac{l_{\max}*h_{\min}}{2\pi}$,

Количество итераций для достижения точности ε

$$n_0(\varepsilon)=\frac{\ln(1/\varepsilon)*l_{\max}}{2\pi}*\frac{1}{h_{\min}}=\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)*\frac{\tau}{h_{\min}^2}.$$

$l_{\max}=\max(l_1,l_2),\ h_{\min}=\min(h_1,h_2).$

Эллиптические уравнения. Задания.

$$-\Delta u=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=f\,.$$

Задание 1. $f = 1, \;\; 0 \le x \le 4, \;\; 0 \le y \le 1, \;\; u = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.

$$u\big|_{y=0} = -\frac{1}{4}x^2; \;\; u\big|_{x=4} = -\frac{y^2}{4} - 4; \;\; u\big|_{y=1} = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4}; \;\; u\big|_{x=0} = -\frac{y^2}{4}.$$

Задание 2. $u = x^2 + y^2, \;\; 0 \le x, y \le 1.$

$$u\big|_{x=0} = 2y^2, \;\; u\big|_{x=1} = x^2 + 4y^2, \;\; u\big|_{y=0} = 0, \;\; u\big|_{y=1} = x^2 + 2x + 2.$$

Задание 3. $u = \sin xy, \;\; 0 \le x \le 2, \;\; 0 \le y \le 10.$

Задание 4. $u = \sin^2(x/2) + \cos^2(y/4), \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 4.$

Задание 5. $u = x + y, \;\; 0 \le x \le 8, \;\; 0 \le y \le 2.$

Задание 6. $u = \dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \;\; 0 \le x \le 2, \;\; 0 \le y \le 4.$

Подсказка: должно быть $\Delta u = 0$.

Задание 7. $u = \dfrac{1}{\pi}\left(arctg\,\dfrac{2-x}{y} - arctg\,\dfrac{1-x}{y}\right), \;\; 0 \le x \le 5, \;\; 0 \le y \le 1.$

Подсказка: u - гармоническая, и $u\big|_{x=0} \equiv \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ 0, & x \notin [1,2] \end{cases}$

Задание 8.

$$u = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{16}, \;\; a = 4, \;\; b = 2; \;\; 0 \le x \le 4, \;\; 0 \le y \le 2.$$

Подсказка: должно быть $\Delta u \equiv 1$.

Задание 9. $u = [\ln(x^2 + y^2)]\frac{1}{2}, \; 0 \le x \le 1, \; 2 \le y \le 4.$

Подсказка: должно быть $\Delta u \equiv 0$.

Задание 10. $u = arctg\,\dfrac{y}{x}, \;\; 2 \le x \le 4, \;\; 0 \le y \le 1.$

<u>Задания</u>

А) Решить задачу методами Якоби (установления) и Зейделя и сравнить. Погрешность результата оценить по правилу Рунге.

Б) Решить задачу методом верхней релаксации при $\omega = \omega_o$, где ω_o – оптимальное значение, и методом Зейделя. $\varepsilon = 0.01$. Погрешность результата оценить по правилу Рунге.

В) Решить задачу попеременно-треугольным методом. $\varepsilon = 0.01$. Погрешность результата оценить по правилу Рунге.

Г) Решить задачу методом переменных направлений. $\varepsilon = 0.01$. Погрешность результата оценить по правилу Рунге.

2. Параболические уравнения

2.1. Одномерное.

$$\begin{cases} \text{Ур-е :} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ \text{НУ:} & u(x,0) = u_0(x) \\ \text{ГУ :} & u(0,t) = m_1(t), \quad u(l,t) = m_2(t). \end{cases}$$

1. Явная разностная схема.

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} - \dfrac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} = \tilde{f}_{i0} \\ \text{НУ :}\ y_i^0 = u_{0i}, \quad \text{ГУ :}\ y_0^n = \mu_{1n},\ y_N^n = \mu_{2N} \end{cases}$$

n=0

Пересчет поточечно

2. Неявная разностная схема.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} - \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \tilde{f}_i^{\,n+1}, \quad i = 1 \ldots N-1.$$ НУ и ГУ те же.

Переход от слоя ”n” к слою ”n+1” - решение (N-1) уравнения с (N-1) неизвестными $y_i^{n+1}, \ i = 1 \ldots N-1$.

3. Схема с весами.

Устойчивость $\Leftrightarrow \sigma \geq \sigma_* = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\gamma}, \ \gamma = \tau / h^2$.

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}-\sigma\Lambda_1 y_i^{n+1}-(1-\sigma)\Lambda_1 y_i^n=\varphi_i^n$$

3.1. $\sigma=\sigma_*=\dfrac{1}{2}-\dfrac{h^2}{2\tau}$, $\varphi_i^n = f_i^{n+1/2}+\dfrac{h^2}{12}(f'')_j^{n+1/2}$, погрешность аппроксимации равна $O(\tau^2+h^4)$.

Схема повышенного порядка аппроксимации.

3.2. $\sigma=\dfrac{1}{2}$, $\varphi_i^n = f_i^{n+1/2}$, погрешность аппроксимации $O(\tau^2+h^2)$.

3.3. В остальных случаях погрешность аппроксимации $\mathrm{O}(\tau+\mathrm{h}^2)$.

$$y_i^{n+1}=y_i^n+(\gamma\sigma y_{i+1}^{n+1}-2\gamma\sigma y_i^{n+1}+\gamma\sigma y_{i-1}^{n+1})+\gamma(1-\sigma)\Lambda_1 y_i^n+\tau\varphi_i^n.$$

Решается методом прогонки для переменных $y_1^{n+1}\ldots y_{N-1}^{n+1};\ \gamma=\tau/\mathrm{h}^2$.

2.2. Двухмерное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ \ \mathrm{D}:\ \{0\le x_a\le l_a\}$$

НУ: $u(x,0)=u_0(x)$;

ГУ: $u(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=\mu(x)$, Γ = граница D. t>0.

а) Явный шаблон

Устойчивость: $\tau(\dfrac{4}{h_1^2}+\dfrac{4}{h_2^2})\le 2.$

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{iy}^n}{\tau}=\Lambda_1 y_{ij}^n+\Lambda_2 y_{ij}^n+\tilde{f}_{ij},\ \ i=1\ldots N_i-1;\ \ j=1\ldots N_2-1;\ \ y_{ij}\big|_{\gamma_h}=0.$$

$\gamma_h=$ {граничных узлов} сетки $D_h=\{(ih_1, jh_2)\mid i=0\ldots N_1; j=0\ldots N_2\}$.

граничный узел $\Leftrightarrow i=0 \cup i=N_1 \cup j=0 \cup j=N_2$.

б) Неявный шаблон $\sigma=\dfrac{1}{2}$. $\dfrac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^n}{\tau}=\Lambda_1 y_{ij}^{n+1}+\Lambda_2 y_{ij}^{n+1}+\tilde{f}_{ij}^{\,n+1}$

Погрешность аппроксимации равна $O(\tau+|h|^2)$.

в) Схема с весами (аналогично одномерной)

Устойчивость: $\sigma\ge\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\tau(\frac{4}{h_1^2}+\frac{4}{h_2^2})}$. ($\sigma=\dfrac{1}{2}$ - схема Кранка-Никольсона)

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+\sigma Ay^{n+1}+(1-\sigma)Ay^n=\tilde{f}.$$

г) Метод переменных направлений

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{ij}^n}{\tau/2}=\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2 y_{ij}^n$$ - решается прогонкой по i,

j и n - фиксированы. Затем j изменяется от 1 до N_2-1.

При этом $y_{0j}^{n+1/2}$ и $y_{N_1 j}^{n+1/2}$ доопределяются соотношениями:

$$y_{0j}^{n+1/2}=\frac{\mu_{0j}^{n+1}+\mu_{0j}^n}{2}-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{0j}^{n+1}-\mu_{0j}^n),$$

$$y_{N_1 j}^{n+1/2}=\frac{\mu_{N_1 j}^{n+1}+\mu_{N_1 j}^n}{2}-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{N_1 j}^{n+1}-\mu_{N_1 j}^n),\ \ j=1\ldots N_2-1;$$

После нахождения $y^{n+1/2}$ вектор y^{n+1} находится так:

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2 y_{ij}^{n+1},\ \ 1\le i\le N_1-1,\ \ j=1..N_2-1.$$

Параболические уравнения. Задания.

Задачи. $u_t=u_{xx},\ \ 0<x<l,\ \ t>0.\quad u=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-(k\pi/l)^2 t}\sin(k\pi x/l).$

$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ \forall t>0.\quad l=10.$

Задание 1. $u_0(x)=\sin\frac{\pi x}{l}.$

Задание 2. $u_0(x)=2\sin\frac{\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}$

Задание 3. $u_0(x)=3\sin\frac{\pi x}{l}+2\sin\frac{2\pi x}{l}+\sin\frac{\pi x}{l}$

Задача ”k”. $u_0(x)=k\sin\frac{\pi kx}{l}+(k-1)\sin\frac{\pi x}{l}(k-1)+\ldots+\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{j=1}^{k}j\sin\frac{\pi jx}{l}.$

Решение задачи ”k”: $u(x,t)=\sum_{j=1}^{k}je^{-(j\pi/l)^2 t}\sin\frac{\pi jx}{l}.\ \ 0<x<l,\ \ t>0.$

Задания.

А) Решить задачу ”k” явной и неявной схемой ($\sigma=1$).

$0<t\le T.$ T=10. Точность $\varepsilon=0{,}01.$

Б) Решить задачу ”k” схемами с весами:

а) схемой повышенного порядка аппроксимации

$$\left(\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}\right).$$

б) схемой Кранка-Николсона ($\sigma = \frac{1}{2}$). T=40. $\varepsilon = 0.01$.

Многомерные задачи.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 \le x \le l_1, \quad 0 \le y \le l_2.$$

$u|\Gamma=0$. $u\big|_{t=0} = u_0(x,y)$.

$$u(x,y,t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} A_{jk} e^{-\lambda_{jk} t} *$$

$$* \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{k\pi y}{l_2}$$

$$\lambda_{jk} = \left(\frac{j\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{l_2}\right)^2.$$

Задача "jk". $u_0(x,y) = \sin\frac{j\pi x}{l_1}\sin\frac{k\pi y}{l_2}$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$.

Задания. Решить задачу "jk" : а) явным методом. T=2. $\varepsilon = 0{,}01$.

б) неявным методом $(\sigma = 1)$.

в) методом переменных направлений.

3. Гиперболические уравнения.

3.1. Одномерные.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T.$$

НУ: $u(x,0) = u_0(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$, $0 < x < l$.

ГУ: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $0 \le t \le T$.

Разностная схема (трехслойная):

$$\Lambda_t y_i^n = \sigma\Lambda_x(y_i^{n+1} + y_i^{n-1} + (1-2\sigma)y_i^n),$$

$$k\tau = T, \; Nh = l, \; n = 1..k-1, \; i = 1..N-1.$$

$$\Lambda_t y_i^n = \frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2}, \quad \Lambda_x y_i^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}.$$

НУ: $y_i^0 = u_{0i}$, $y_i^1 = \tilde{u}_{0i}$

ГУ: $y_0^n = 0, \; y_N^n = 0$.

Здесь $\tilde{u}_{0i} = \tilde{u}_0(x_i)$ подбираются так, чтобы погрешность аппроксимации НУ: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$ равнялась погрешности аппроксимации основного уравнения.

Скажем: $\tilde{u}_{0i} = u_{0i} + \tau\, u_{1i} + \frac{\tau^2}{2}\frac{1}{h^2}\Lambda_x u_{0i}$ аппроксимирует 2-е НУ порядка $0(\tau^2 + h^2)$.

Устойчивость: $\sigma > \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\nu}), \;$ где $\; \nu = \frac{\tau^2}{h^2}$.

Второй порядок аппроксимации уравнения:

Явная схема: $\sigma = 0$. Устойчива, если $\nu < 1$, т.е. $\tau < h$.

Гиперболические уравнения. Задания.

$u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \; 0 < x < l.$

$$u(x,t) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi x}{l})[a_k \sin\frac{k\pi t}{l} + b_k \cos\frac{k\pi t}{l}]$$

Решение:

$$u(x,0) \equiv u_0(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \equiv u_1(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\, a_k(\frac{k\pi}{l}).$$

Задача ”k”. $u_0(x) = b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \; u_1(x) = a_k(\frac{k\pi}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}, \; b_k = k, \; a_k = 1.$

$$u(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{l}[\sin\frac{k\pi t}{l} + k\cos\frac{k\pi t}{l}]. \quad l = 10.$$

Задания

А) Решить задачу “k ” трехслойной разностной схемой
$\tau = h, \; \sigma = 1$

Б) $\tau = h, \; \sigma = \frac{1}{2}$

В) $\tau = \frac{h}{2}, \; \sigma = \frac{3}{15}$

Г) Решить задачу “k” по явной схеме, $\sigma = 0$.

Во всех случаях $\varepsilon = 0.01$. Оценить погрешность решения по формуле Рунге.