Т.В. МАЗУР, С.Ю. СОВЕТНИКОВА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

По курсу "МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ"для бакалавров
по направлению
010200 – математика, прикладная математика

Численные методы решения уравнений в частных производных

2012

УДК 519.63
ББК 22.161;
С56

Мазур Т.В., Советникова С.Ю.

Рекомендовано кафедрой математической физики и вычислительной математики СГУ

Рецензент: д-р.ф.-м. наук, проф. Хромова Г.В.

1. Разностные методы для гиперболических уравнений

Рассмотрим уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$.

Зададим граничные условия

$$\mu(x,t) = \begin{cases} u(0,t) = u_1(t) \\ u(l,t) = u_2(t) \end{cases}, \tag{1.2}$$

и начальные данные

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u_0}(x). \tag{1.3}$$

Для построения разностного метода задачи (1.1), (1.2), (1.3) аппроксимируем заданную область сеточной областью:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \left\{(x_i, t_k) : x_i = ih, t_k = k\tau, i = \overline{0, N}, k = \overline{0, n_0}, Nh = l, n_0\tau = T\right\}$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \omega_{h\tau} \cup \gamma_{h\tau}.$$

Здесь $\omega_{h\tau}$ – внутренние точки сеточной области, $\gamma_{h\tau}$ – граничные точки сеточной области, h, τ - шаги сетки аргументов, выбираемые из условий заданной точности, порядка погрешности заданного метода и условий устойчивости.

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ выбираем девятиточечный шаблон (рис.1).

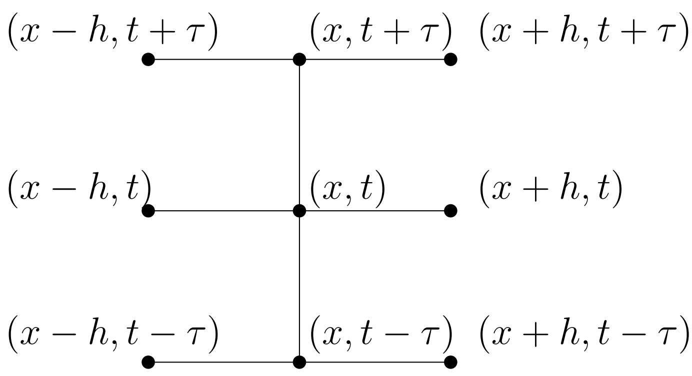

Рис.1. Девятиточечный шаблон

Разностная схема с весами на этом шаблоне имеет вид:

$$y_{\bar{t}t} = \sigma\hat{y}_{\bar{x}x} + (1-2\sigma)y_{\bar{x}x} + \sigma\check{y}_{\bar{x}x} + f(x,t), \quad x \in \omega_{h\tau}, \tag{1.4}$$

$$\vartheta(x,t)=\begin{cases} y(0,t)=u_1(t) \\ y(l,t)=u_2(t) \end{cases}, \tag{1.5}$$

$$y(x,0)=u_0(x), y_t(x,0)=\tilde{u}_0(x). \tag{1.6}$$

В (1.4) введены обозначения:

$$(y_{\bar{x}x})_i^{k+1}=\frac{y_{i+1}^{k+1}-2y_i^{k+1}+y_{i-1}^{k+1}}{h^2},$$

$$\hat{y}=y(x,t+\tau)=y_{k+1}, y=y(x,t)=y_k, \check{y}=y(x,t-\tau)=y_{k-1}, f_k=f(x,t_k).$$

Для производной по t функция определяется аналогично.

Уравнение (1.4) имеет погрешность аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$.

Предположим, что краевые условия и начальное условие $y(x,0)=u_0(x)$ заданы точно или с погрешностью $O(\tau^2)$. Используя представление по формуле Тейлора определим $\tilde{u}_0(x)$ так, чтобы $\tilde{u}_0(x)-u_t(x,0)=O(\tau^2)$. Получим

$$\tilde{u}_0(x)=\bar{u}_0(x)+0.5\tau(u_0''(x)+f(x,0)).$$

Таким образом, получим всю разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$.

При параметре $0.25(1-\dfrac{h^2}{\tau^2})\leq\sigma$, называемым весом, разностная схема устойчива.

Замечание 1.1. В практике вычислений берут обычно $0.25\leq\sigma\leq 0.5$.

Неявный метод $(0.25\leq\sigma\leq 0.5)$

Будем определять приближенное решение по временным слоям. После приведения подобных членов в (1.4), получим трехточечную краевую задачу:

$$\sigma\gamma^2 y_{i+1}^{k+1}-(1+2\sigma\gamma^2)y_i^{k+1}+\sigma\gamma^2 y_{i-1}^{k+1}=-F_i^k, i=\overline{1,N-1}, k=\overline{0,n_0-1}, \tag{1.7}$$

$$y_0^{k+1}=u_1(t_{k+1}), y_N^{k+1}=u_2(t_{k+1}), k=\overline{0,n_0-1}, \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} y_i^0=u_0(x_i), i=\overline{0,N}, \\ y_i^1(x)=u_0(x_i)+\tau\bar{u}_0(x_i)+0.5\tau^2(u_0''(x_i)+f(x_i,0)). \end{cases} \tag{1.9}$$

Для определения решения этой задачи на следующем слое по времени y_i^{k+1} из предыдущего y_i^k , задача решается при каждом k начиная с k=0. В (1.7) введены обозначения:

$$F_i^k = (2y_i^k - y_i^{k-1}) + \tau^2(1-2\sigma))\Lambda y_i^k + \sigma\tau^2\Lambda y_i^{k-1} + \tau^2\varphi_i^k,$$
$$\gamma = \frac{\tau}{h}, \varphi_i^k = f(x_i, t_k), i = \overline{1, N-1},$$

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Решение на k-м временном слое обозначим как $Y^k = [y_0^k, y_1^k, \ldots, y_N^k]^T$. Разностная схема (1.7) при каждом k решается методом прогонки.

Метод прогонки

Для решении систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки используются следующие расчетные формулы.

Прямой ход:

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = (C_j - A_j\alpha_j)^{-1},\ \alpha_1 = 0,\ j = \overline{1, N-1}, \\ \beta_{j+1} = (C_j - A_j\alpha_j)^{-1}(F_j + A_j\beta_j),\ \beta_1 = \vartheta_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Результаты α_j, β_j запоминаем.

Обратный ход:

$$y_i = \alpha_{j+1}y_{j+1} + \beta_{j+1},\quad y_N = g_N,\quad j = \overline{N-1, 0}. \tag{1.11}$$

Получаем для (1.7), (1.8), (1.9) приближенное решение: $y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)$.

Замечание 1.2. $A = \sigma\gamma^2 = B,\quad C = (1 + 2\sigma\gamma^2)$.

Алгоритм неявного метода

1) Определяем h, τ, N, n_0, σ с учетом погрешности метода и заданной точности ε .

2) Задаем коэффициенты при неизвестных y_i^{k+1} в левой части разностной схемы (1.7).

3) Задаем коэффициенты при неизвестных y_i^k в правой части F_i^k разностной схемы (1.7).

4) Задаем начальные условия

$$Y^0 = [y_0^0, y_1^0, \ldots, y_N^0]^T,\quad Y^1 = [y_0^1, y_1^1, \ldots, y_N^1]^T.$$

5) Образуем цикл по временным слоям $k = \overline{2, n_0 - 1}$.

6) Внутри цикла при каждом значении k из коэффициентов пункта 3) и функции $\varphi_i^k = f(x_i, t_k),\quad i = \overline{1, N-1}$, образуем сеточную функцию правой части $F_i^k,\quad i = \overline{1, N-1}$.

7) Внутри цикла при каждом значении k задаем краевые условия из (1.8).

8) Формируем массивы коэффициентов левой части из пункта 2) и краевых условий из пункта 7) построенной разностной схемы (1.7).

9) Методом прогонки получаем решения на каждом временном слое

$$Y^k = [y_0^k, y_1^k, \dots, y_N^k]^T$$

и формируем окончательное приближенное решение задачи (1.1), (1.2),(1.3) $Y = [Y^0, Y^1, \dots, Y^{n_0}]^T$.

Матричный вариант неявного метода

Матричный вариант формируется из (1.7) при $\sigma \neq 0$ в виде:

$$\begin{cases} BY^{k+1} = A_1 Y^k + A_2 Y^{k-1} + F^k, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ Y^0 = U_0(x), \\ Y^1 = \bar{U}_0(x). \end{cases} \tag{1.12}$$

Это векторное рекуррентное уравнение второго порядка, в котором для получения решения Y^{k+1} требуется задавать Y^{k-1} и Y^k , начиная с заданных начальных значений.

Здесь введены следующие обозначения для векторов:

$$\begin{cases} Y^k = [y_1^k, y_2^k, \dots, y_{N-1}^k]^T, \\ F^k = [\tau^2 \bar{\varphi}_1^k, \tau^2 \bar{\varphi}_2^k, \dots, \tau^2 \bar{\varphi}_{N-2}^k, \tau^2 \bar{\varphi}_{N-1}^k]^T, \end{cases}$$

где

$$\bar{\varphi}_\alpha^k = \varphi_\alpha^k + \frac{(1-2\sigma)}{h^2} u_\alpha(t_k) + \frac{\sigma}{h^2} u_\alpha(t_{k-1}) + \frac{\sigma}{h^2} u_\alpha(t_{k+1}), \alpha = \overline{1, N-1},$$

$$\begin{cases} U_0 = [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_{N-1})]^T, \\ \overline{U}_1 = [y_1^1, y_2^1, \dots, y_{N-1}^1]^T, \end{cases}$$

$$y_i^1 = u_0(x_i) + \tau \bar{u}_0(x_i) + 0.5\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u_0(x_i)}{\partial x^2} + f(x_i, 0) \right), \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$t_k = k\tau, \quad x_i = ih, \quad \varphi_i^k = f(x_i, t_k).$$

В уравнении (1.12) через символы B, A_1, A_2 обозначены трехдиагональные матрицы вида:

$$
M = \begin{pmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & c \end{pmatrix},
$$

где для матрицы

$$
B: \quad a = -\frac{\sigma\tau^2}{h^2}, \quad c = 1 + 2\frac{\sigma\tau^2}{h^2},
$$

$$
A_1: \quad a = (1-2\sigma)\frac{\tau^2}{h^2}, \quad c = 2(1-(1-2\sigma))\frac{\tau^2}{h^2},
$$

$$
A_2: \quad a = \frac{\sigma\tau^2}{h^2}, \quad c = -1 - 2\frac{\sigma\tau^2}{h^2}.
$$

Явный метод ($\sigma = 0$)

Разностная схема на этом шаблоне примет вид:

$$
y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + f(x,t), \quad x \in \omega_{h\tau}, \tag{1.13}
$$

$$
\vartheta(x,t) = \begin{cases} y(0,t) = u_1(t) \\ y(l,t) = u_2(t) \end{cases}, \tag{1.14}
$$

$$
y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x). \tag{1.15}
$$

Будем определять приближенное решение по временным слоям $y^k = [y_0^k, y_1^k, \dots, y_N^k]^T, \quad k = \overline{0, n_0}$. После элементарных преобразований в (1.13), получим двухшаговое рекуррентное уравнение и задачу для него в индексном виде:

$$
y_i^{k+1} = F_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, n_0 - 1}, \tag{1.16}
$$

где

$$
F_i^k = (2y_i^k - y_i^{k-1}) + \tau^2 \Lambda y_i^k + \tau^2 \varphi_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}
$$

$$
y_0^{k+1} = u_1(t_{k+1}), \quad y_N^{k+1} = u_2(t_{k+1}), \tag{1.17}
$$

$$
\begin{cases} y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \\ y_i^1(x) = u_0(x_i) + \tau\bar{u}_0(x_i) + 0.5\tau^2(u_0''(x_i) + f(x_i, 0)). \end{cases} \tag{1.18}
$$

Матричный вариант явного метода ($\sigma = 0$)

Матричный вариант формируется из (1.13), (1.16), (1.18) при $\sigma = 0$ в виде:

$$\begin{cases} Y^{k+1} = -Y^{k-1} + AY^k + F^k, \quad k = \overline{1, n_0 - 1}, \\ Y^0 = U_0(x), \\ Y^1 = U_0(x) + \tau \bar{U}_0(x) + 0.5\tau^2 V_0(x). \end{cases} \tag{1.19}$$

Это векторное рекуррентное уравнение второго порядка, в котором для получения решения Y^{k+1} требуется задавать Y^{k-1} и Y^k , начиная с заданных начальных значений.

В (1.19) введены следующие обозначения для векторов:

$$\begin{cases} Y^k = [y_1^k, y_2^k, \dots, y_{N-1}^k]^T, \\ F^k = [\tau^2 \bar{\varphi}_1^k, \tau^2 \bar{\varphi}_2^k, \dots, \tau^2 \bar{\varphi}_{N-2}^k, \tau^2 \bar{\varphi}_{N-1}^k]^T, \end{cases}$$

где

$$\bar{\varphi}_\alpha^k = \varphi_\alpha^k + \frac{1}{h^2} u_\alpha(t_k), \alpha = \overline{1, N-1},$$

$$\begin{cases} U_0 = [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_{N-1})]^T, \\ \overline{U}_1 = [\overline{u}_0(x_1), \overline{u}_0(x_2), \dots, \overline{u}_0(x_{N-1})]^T, \end{cases}$$

$$V_0 = \left[\frac{\partial^2 u_0(x_1)}{\partial x^2} + \varphi_1^0, \quad \frac{\partial^2 u_0(x_2)}{\partial x^2} + \varphi_2^0, \dots, \quad \frac{\partial^2 u_0(x_{N-1})}{\partial x^2} + \varphi_{N-1}^0 \right], \ i = \overline{1, N-1},$$

$$x_i = ih, \quad \varphi_i^0 = f(x_i, 0).$$

В уравнении (1.19) через символ A обозначена трехдиагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & c \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{\tau^2}{h^2}, \quad c = 2(1 - \frac{\tau^2}{h^2}),$$

Метод с формулами (1.16), (1.19) обладает (условной) устойчивостью с условием $\tau < h$. Погрешность метода имеет порядок $0(h^2 + \tau)$.

Задачи для уравнений гиперболического типа

Задание 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 0.5, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 1.1(x^2+1)\sin \pi x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

Задание 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 0.2, \end{cases}$$

$$u(x,0) = k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = kx \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

Задание 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 1.5(x^2+0.8)\sin \pi x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.1x,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

Задание 4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{-t}\cos x, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

$$u(x,0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\cos x,$$

$$u(0,t) = e^{-t}, \quad u(1,t) = e^{-t}\cos t.$$

Задание 5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{-x}\cos t, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

$$u(x,0)=e^{-x},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,$$
$$u(0,t)=\cos t,\quad u(1,t)=e^{-1}\cos t.$$

Задание 6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 1,\end{cases}$$
$$u(x,0)=\sin 2\pi x+\sin 4\pi x,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0.$$

Задание 7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 1,\end{cases}$$
$$u(x,0)=x+1,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,$$
$$u(0,t)=t+1,\quad u(1,t)=t^2+2.$$

Задание 8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1,\quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 1.5,\end{cases}$$
$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=1,$$
$$u(0,t)=t,\quad u(1,t)=1.$$

Задание 9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2-t^2,\quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 0.5,\end{cases}$$
$$u(x,0)=1.5(x^2+0.9)e^{-x},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=2.4e^{-t}.$$

2. Разностные методы для параболических уравнений

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности в одномерной области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.1}$$

Зададим граничные условия

$$\mu(x,t) = \begin{cases} u(0,t) = u_1(t) \\ u(l,t) = u_2(t) \end{cases}, \tag{2.2}$$

и начальные данные

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.3}$$

Для построения разностного метода задачи (2.1), (2.2), (2.3) аппроксимируем заданную область сеточной областью:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \left\{(x_i, t_k) : x_i = ih, t_k = k\tau, i = \overline{0, N}, k = \overline{0, n_0}, Nh = l, n_0\tau = T\right\}$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \omega_{h\tau} \cup \gamma_{h\tau}.$$

Здесь $\omega_{h\tau}$ – внутренние точки сеточной области, $\gamma_{h\tau}$ – граничные точки сеточной области, h, τ - шаги сетки аргументов, выбираемые из условий заданной точности ε, порядка погрешности заданного метода и условий устойчивости.

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ выбираем шеститочечный шаблон (рис.2).

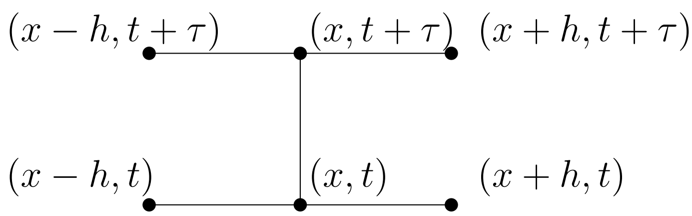

Рис.2. Шеститочечный шаблон

Разностная схема с весами на этом шаблоне имеет вид:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \sigma(y_{\bar{x}x})_i^{k+1} + (1-\sigma)(y_{\bar{x}x})_i^k + \varphi_i^{k+1/2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, n_0 - 1},$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N},$$

$$y_0^{k+1} = u_1^{k+1}, \quad y_N^{k+1} = u_2^{k+1}, \quad k = \overline{0, n_0}, \quad \varphi_i^{k+1/2} = f(x_i, t_k + 0.5\tau).$$

Параметр σ называют весом неявной разностной схемы.

Неявный метод

Более подробно в индексном виде разностная схема неявного метода имеет вид:

$$\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\sigma\frac{y_{i+1}^{k+1}-2y_i^{k+1}+y_{i-1}^{k+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{y_{i+1}^{k}-2y_i^{k}+y_{i-1}^{k}}{h^2}+\varphi_i^{k+1/2},$$

при $i=\overline{1,N-1}$, $k=\overline{0,n_0-1}$,

$$y_0^{k+1}=u_1^{k+1},\;\; y_N^{k+1}=u_2^{k+1},\;\; y_0^k=u_1^k,\;\; y_N^k=u_2^k,\;\; y_i^0=u_0(x_i),$$

при $i=\overline{0,N}$, $k=\overline{0,n_0}$.

Для определения решения на следующем шаге по времени y_i^{k+1} из предыдущего y_i^k надо решить трехточечную краевую задачу при каждом k, начиная с k=0:

$$y_i^0=u_0(x_i),\quad i=\overline{0,N},\quad k=\overline{0,n_0-1},\quad -\quad \text{начальное условие,}$$

$$\begin{cases}\sigma\gamma y_{i+1}^{k+1}-(1+2\sigma\gamma)y_i^{k+1}+\sigma\gamma y_{i-1}^{k+1}=-F_i^k, i=\overline{1,N-1},\\ y_0^{k+1}=u_1(t_{k+1}), y_N^{k+1}=u_2(t_{k+1})\end{cases}\tag{2.4}$$

Здесь введены обозначения

$$F_i^k=(1-\sigma)\gamma y_{i+1}^k+(1-2\gamma(1-\sigma))y_i^k+(1-\sigma)\gamma y_{i-1}^k+\tau\varphi_i^{k+1/2},$$

где

$$\gamma=\frac{\tau}{h^2},\quad \varphi_i^{k+1/2}=f(x_i,t_{k+0.5}),\quad i=\overline{1,N-1}$$

Решение на k-ом временном слое обозначим через $Y^k = [y_0^k,y_1^k,\ldots,y_N^k]^T$.

Разностная схема безусловно устойчива.

Погрешность метода для $\sigma=0.5$ порядка $O(h^2+\tau^2)$. Для $\sigma\neq 0.5$ – $O(h^2+\tau)$.

Разностная схема (2.4) при каждом k решается методом прогонки (см. (1.10), (1.11)).

Алгоритм неявного метода

1) Определяем h, τ, N, n_0, σ с учетом погрешности метода и заданной точности решения ε .

2) Задаем коэффициенты при неизвестных y_i^{k+1} в левой части разностной схемы (2.4) .

3) Задаем коэффициенты при неизвестных y_i^k в правой части F_i^k разностной схемы (2.4).

4) Задаем начальное условие $Y^0 = [y_0^0, y_1^0, \dots, y_N^0]^T$.

5) Образуем цикл по временным слоям $k = \overline{0, n_0 - 1}$.

6) Внутри цикла при каждом значении k из коэффициентов пункта 3) и функции $\varphi_i^{k+1/2} = f(x_i, t_{k+0.5}, \; i = \overline{0, N-1}$, образуем сеточную функцию правой части $F_i^k, \; i = \overline{0, N-1}$.

7) Внутри цикла при каждом значении k задаем краевые условия (2.4).

8) Формируем массивы коэффициентов левой части из пункта 2) и краевых условий из пункта 7) построенной разностной схемы (2.4).

9) Методом прогонки получаем решения на каждом временном слое $Y^k = [y_0^k, y_1^k, \dots, y_N^k]^T$ и формируем окончательное приближенное решение задачи (2.1), (2.2), (2.3): $Y = [Y^0, Y^1, \dots, Y^{n_0}]^T$.

Замечание 2.1. В расчетных формулах метода прогонки (1.10), (1.11) коэффициенты A, B, C могут быть постоянными. Так для трехточечной краевой задачи (2.4) $A = B = \sigma\gamma, \;\; C = (1 + 2\sigma\gamma)$. При этом для каждого k и $i = j$ в (2.5), (2.6):

$$F_i = (1-\sigma)\gamma y_{i+1}^k + (1 - 2\gamma(1-\sigma))y_i^k + (1-\sigma)\gamma y_{i-1}^k + \tau\varphi_i^{k+1/2},$$

где

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad \varphi_i^{k+1/2} = f(x_i, t_{k+0.5}), \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$\vartheta_0 = y_0^{k+1} = u_1(t_{k+1}), \quad g_N = y_N^{k+1} = u_2(t_{k+1}).$$

Задачи для уравнений параболического типа

Задание 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi \sin(x,t) + x, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 0.3, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 3x \cos \frac{\pi x}{2},$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

Задание 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 0.01, \end{cases}$$

$$u(x,0) = (1.1x^2 + 2.1)e^{-x},$$
$$u(0,t) = 2.1, \quad u(1,t) = 3.2e^{-1}.$$

Задание 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos(x+t), \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le t \le 0.9, \end{cases}$$

$$u(x,0) = \cos x + \sin x,$$
$$u(0,t) = \cos t + \sin t, \quad u(\frac{\pi}{2},t) = \cos t - \sin t.$$

Задание 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x(1-t), \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = te.$$

Задание 5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t\sin x, \quad \overline{G} = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le t \le 0.02, \end{cases}$$

$$u(x,0) = e^{-0.1x} \sin \frac{\pi x}{3},$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=e^{-0.1}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Задание 6.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0<t<\infty,\end{cases}$$

$$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0.$$

Задание 7.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0<t<\infty,\end{cases}$$

$$u(x,0)=2\sin\frac{\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l},$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0.$$

Задание 8.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 0.1,\end{cases}$$

$$u(x,0)=\sin\pi x+\sin 2\pi x,$$

$$u(0,t)=t^2, \quad u(1,t)=te^t.$$

Задание 9.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin x, \quad \overline{G}=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le t\le 0.2,\end{cases}$$

$$u(x,0)=\sin\pi x+\sin 3\pi x,$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0.$$

3. Разностные методы для эллиптических уравнений

Дана задача Дирихле для уравнения Пуассона на двумерной прямоугольной области G с границей Г.

$$\overline{G} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x),\ x = (x_1, x_2) \in G, \\ u(x)|_\Gamma = \mu(x) = \begin{cases} \mu_1(x_2),\ 0 \le x_2 \le l_2, \mu_2(x_1),\ 0 \le x_1 \le l_1, \\ \mu_3(x_2),\ 0 \le x_2 \le l_2, \mu_4(x_1),\ 0 \le x_1 \le l_1. \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

Для построения разностной задачи область $\overline{G}$ аппроксимируется сеточной областью:

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1,2\right\}, \quad \overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h. \tag{3.2}$$

Функции f, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 аппроксимируются сеточными функциями. Оператор Лапласа аппроксимируется на сетке ω_h разностным оператором:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx y_{\bar{x}_1,x_1} + y_{\bar{x}_2,x_2},$$

где

$$(y_{\bar{x}_1,x_1} + y_{\bar{x}_2,x_2})_{i_1,i_2} = \frac{1}{h_1^2}\left(y_{i_1+1,i_2} - 2y_{i_1,i_2} + y_{i_1-1,i_2}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(y_{i_1,i_2-1} - 2y_{i_1,i_2} + y_{i_1,i_2+1}\right),$$

$$y = \{y_{i_1,i_2}\}_{i_1=\overline{0,N_1}, i_2=\overline{0,N_2}}. \tag{3.3}$$

В результате аппроксимации задачи (3.1) получаем разностную схему для задачи Дирихле в области $\overline{\omega}_h$ с границей γ_h:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1,x_1} + y_{\bar{x}_2,x_2} = -f_h,\ (x_1, x_2) = (ih_1, ih_2) \in \omega_h, \\ y(x)|_\gamma = \mu(x) = \begin{cases} \mu_{0,j},\ 0 \le j \le N_2,\ \mu_{i,N_2},\ 0 \le i \le N_1, \\ \mu_{N_1,j},\ 0 \le j \le N_2,\ \mu_{i,0},\ 0 \le i \le N_1. \end{cases} \end{cases} \tag{3.4}$$

где введены обозначения: $i_1 = i,\ i_2 = j$. Разностная задача (3.4) дает решение задачи (3.1) с погрешностью порядка $|h|^2$, т.е. $\|u_h - y_h\| = O(|h|^2)$, где $u_h,\ y_h$ – соответственно точное и приближенное решение в узлах сетки ω_h, и $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Для применения итерационных методов решения, разностная схема (3.4) приводится к векторному или индексному виду.

При индексном представлении обозначим коэффициенты в (3.3) через

$$a = -\frac{1}{h_1^2},\ \ b = -\frac{1}{h_2^2},\ \ c = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_1^2}. \tag{3.5}$$

Тогда всю разностную схему (3.4) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$by_{i,j-1} + ay_{i-1,j} + cy_{i,j} + ay_{i+1,j} + by_{i,j+1} = f_{ij}, \tag{3.6}$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1},\ \ j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Векторную структуру этой СЛАУ легко видеть на примере $N_1 = 5,\ N_2 = 4$ (в этой записи нули опущены):

$$\begin{pmatrix}
c & a & & & b & & & & & & & \\
a & c & a & & & b & & & & & & \\
& a & c & a & & & b & & & & & \\
& & a & c & & & & b & & & & \\
b & & & & c & a & & & b & & & \\
& b & & & a & c & a & & & b & & \\
& & b & & & a & c & a & & & b & \\
& & & b & & & a & c & & & & b \\
& & & & b & & & & c & a & & \\
& & & & & b & & & a & c & a & \\
& & & & & & b & & & a & c & a \\
& & & & & & & b & & & a & c
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{42} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{43}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_{11} & -a\mu_{01} & -b\mu_{10} \\
f_{21} & & b\mu_{20} \\
f_{31} & & b\mu_{30} \\
f_{41} & -a\mu_{41} & -b\mu_{40} \\
f_{12} & -a\mu_{02} & \\
f_{22} & & \\
f_{32} & & \\
f_{42} & -a\mu_{42} & \\
f_{13} & -a\mu_{03} & -b\mu_{14} \\
f_{23} & & b\mu_{24} \\
f_{33} & & b\mu_{34} \\
f_{43} & -a\mu_{43} & -b\mu_{44}
\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что СЛАУ представлена в нормальной форме (слева матрица умножается только на вектор неизвестных, справа вектор с заданными элементами). Таким образом, СЛАУ принимает векторный вид:

$$Ay = F. \tag{3.8}$$

Для решения СЛАУ (3.8) применяется следующая итерационная схема:

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = 0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \ y_0 \neq 0. \tag{3.9}$$

Метод верхней релаксации

Метод верхней релаксации (МВР) – итерационный метод решения задачи (3.4), который является экономичным методом первого порядка и требует число операций порядка $O(|h|^2)$ на каждой итерации.

Если в МВР использовать векторную запись (3.7), (3.8), (3.9) разностной схемы и метода ее решения, то для построения итерационной формулы, матрица A представляется в виде суммы матриц:

$$A = A^- + D + A^+, \tag{3.10}$$

где A^- и A^+ – соответственно, строго (без диагонали) нижняя и строго верхняя трехугольные матрицы, D – диагональная матрица.

В (3.9) матрица B для МВР имеет вид $B = D + \omega A^-$. Параметр $\tau_{k+1} = \omega$.

В векторной записи итерационная формула МВР для любого начального вектора-приближения y^0 имеет вид:

$$y^{k+1} = y^k - \omega D^{-1}(A^- y^{k+1} + D y^k + A^+ y^k - F),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

ω - релаксационный параметр, подбираемый на интервале $\omega \in [1, 2)$.

Параметр ω подбирается таким образом, чтобы минимизировать число итераций $k_0(\varepsilon) = \min(k)$ для достижения заданной точности

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = \max_{i,j} |y_{i,j} - u(ih_1, jh_2)| \le \varepsilon.$$

Кроме того, для определения оптимального ω (вместо подбора) можно использовать формулы:

$$\delta = \frac{2h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_1^2}{2l_1} + \frac{2h_1^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2^2}{2l_2},\ \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{\delta(2 - \delta)}}. \tag{3.12}$$

При $\omega = 1$ имеем метод Зейделя.

В индексном виде итерационная формула МВР с учетом (3.5), (3.6), (3.7) примет вид:

$$\begin{cases} y_{i,j}^{k+1} = y_{i,j}^k - \omega c^{-1}(a y_{i-1,j}^{k+1} + b y_{i,j-1}^{k+1} + c y_{i,j}^k + a y_{i+1,j}^k + b y_{i,j+1}^k - f_{i,j}), \\ y_{i,0} = \mu_{i,0},\ y_{i,N_2} = \mu_{i,N_2},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ k = 1, 2, \ldots \\ y_{0,j} = \mu_{0,j},\ y_{N_1,j} = \mu_{N_1,j},\ j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Останов итераций делается при достижении неравенства оптимального числа итераций

$$\frac{1}{\tau\delta}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \le k_0\left(\varepsilon\right) < k,\ \varepsilon = O\left(h_1^2 + h_2^2\right),$$

где

$$\gamma = \frac{\delta}{1+\tau\delta+\tau^2\cdot\frac{\delta\Delta}{4}},\ \tau = \frac{2}{\sqrt{\delta(2-\delta)}},\ \Delta = 2$$

(при выбранном параметре ω в (3.12)).

Или по невязке

$$\|r\| \le \varepsilon,\ \varepsilon = O\left(h_1^2 + h_2^2\right),$$

где

$$r_{i,j} = ay_{i-1,j}^{k+1} + by_{i,j-1}^{k+1} + cy_{i,j}^{k} + ay_{i+1,j}^{k} + by_{i,j+1}^{k} - f_{i,j}, i = \overline{1, N_1-1},\ j = \overline{1, N_2-1}.$$

В результате вычислений получаем двумерный массив:

$$y(x_1,x_2) \approx u(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) = (ih_1, jh_2) \in \omega_h.$$

Попеременно-треугольный метод

Попеременно-треугольный метод (ПТМ) – итерационный метод решения задачи (3.1), который является экономичным методом первого порядка и требует число операций порядка $O(2\left|h\right|^2)$ на каждой итерации. Число итераций ПТМ меньше числа итераций МВР. Для ПТМ матрица B в (3.9) имеет вид

$$B = (E+\omega R_1)(E+\omega R_2) \tag{3.14}$$

В качестве R_1 и R_2 возьмем верхнюю и нижнюю треугольные матрицы: $R_1 + R_2 = A$. Диагонали у R_1, R_2 равны диагонали матрицы A, деленной пополам.

Индексный алгоритм ПТМ

1) Вычисляем δ, Δ, ω

$$\delta = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1^2}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2^2}{2l_2},\ \Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2},\ \omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}.$$

2) Вычисляем коэффициенты промежуточных решений $\bar{w}$ и w

$$\alpha = \frac{\omega h_2^2}{h_1^2h_2^2 + \omega(h_1^2+h_2^2)},\ v = \frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2h_2^2 + \omega(h_1^2+h_2^2)},\ \beta = \frac{\omega h_1^2}{h_1^2h_2^2 + \omega(h_1^2+h_2^2)}.$$

3) Вычисляем невязку

$$(r_k)_{i,j} = r_k(i,j) = (\tfrac{2}{h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2})y_k(i,j) - \tfrac{1}{h_1^2}(y_k(i-1,j) + y_k(i+1,j)) -$$
$$- \tfrac{1}{h_2^2}(y_k(i,j-1) + y_k(i,j+1)) - \varphi(i,j),$$
$$i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ y(x)|_\gamma = \mu(x).$$

Здесь введены обозначения $y_{i,j}^k = y_k(i,j)$.

4) Вычисляем

$$\bar{w}_k(i,j) = \alpha \bar{w}_k(i-1,j) + \beta \bar{w}_k(i,j-1) + v r_k(i,j),\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1}$$

при условиях на границе $\bar{w}_k(0,j) = 0,\ \bar{w}_k(i,0) = 0.$

5) Вычисляем

$$w_k(i,j) = \alpha w_k(i+1,j) + \beta w_k(i,j+1) + v \bar{w}_k(i,j),\ i = \overline{N_1 - 1, 1},\ j = \overline{N_2 - 1, 1}$$

при условиях на границе $w_k(N_1,j) = 0,\ w_k(i,N_2) = 0.$

6) Определяем параметр

$\tau_{k+1} = \dfrac{(r_k, w_k)}{(Aw_k, w_k)}, k = 1, 2, \ldots$

Для этого вычисляем:

a)

$$(Aw_k)_{i,j} = \left(\tfrac{2}{h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2}\right) w_k(i,j) - \tfrac{1}{h_1^2}(w_k(i-1,j) + w_k(i+1,j)) -$$
$$- \tfrac{1}{h_2^2}(w_k(i,j-1) + w_k(i,j+1)).$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

b)

$$(r_k, w_k) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} r_k(i,j), w_k(i,j) h_1 h_2.$$

c)

$$(Aw_k, w_k) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (Aw_k)_{i,j}, w_k(i,j) h_1 h_2.$$

7) Очередное $k+1$ - ое приближение для решения будет

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} w_k.$$

8) Останов итераций происходит при условии $\|r_k\| \le \varepsilon$.

Подставляя в (3.9) факторизованную матрицу (3.14) получим

$$(E + wR_1)(E + wR_2)\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ y_0 \neq 0.$$

Введя обозначения $w_k = \dfrac{y^{k+1} - y^k}{\tau_{k+1}}$, $r_k = Ay^k - F$ и промежуточную величину $\bar{w}_k$, получим формулы ПТМ в виде систем СЛАУ для каждой k-ой итерации:

$$\begin{cases} (E + \omega R_1)\bar{w}_k = r_k, \\ (E + \omega R_2)w_k = \bar{w}_k,\ k = 1, 2, \ldots \\ y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1}w_k, \end{cases}$$

где

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}},\ \tau_{k+1} = \frac{(r_k, w_k)}{(Aw_k, w_k)},\ \delta = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1^2}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2^2}{2l_2},\ \Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

Останов итераций происходит при $\|r_k\| \leq \varepsilon$.

$$\left\|r_k^2\right\| = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} r_k^2(i,j)h_1h_2 \qquad -$$

сеточная норма для сеточной вектор-функции.

Метод установления

Метод установления является частным случаем метода простой итерации для СЛАУ (3.6). Его идея базируется на том, что решение стационарной задачи (3.1) может быть получено как предел при $t \to \infty$ решения нестационарной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y), \tag{3.15}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),\ u|_\Gamma = \psi(x, y). \tag{3.16}$$

Построим явную схему для (3.15),(3.16).

$$\frac{u_{j,k}^{p+1} - u_{j,k}^p}{\tau} = \frac{u_{j,k+1}^p + u_{j,k-1}^p + u_{j+1,k}^p + u_{j-1,k}^p - 4u_{j,k}^p}{h^2} + f_{j,k}^p,\ p \geq 0, \tag{3.17}$$

$$j,k=\overline{1,N-1}$$

$$u^0_{j,k}=\varphi_{j,k},\ u^p_{j,k}|_\Gamma=\psi_{j,k}, \tag{3.18}$$

$\tau = rh^2,\ r \le \frac{1}{4}$. Из этих соотношений последовательно по слоям $p = 1,2,\ldots$ определим $u^p_{j,k}$. Можно доказать, что $\lim_{p\to\infty}\left|u^p_{j,k}-u_{j,k}\right|=0$.

Задачи для уравнений эллиптического типа

Задание 1.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin^2 \pi xy, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} \sin \pi y, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ \sin \pi y, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ x - x^2, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ x - x^2, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 2.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} 30 \sin \pi y, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 20y, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 20x, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ 30x(1-x), \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 3.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} 40y^2, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 40, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 40, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ 40 \sin \frac{\pi x}{2}, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 4.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -y, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \begin{cases} 0, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 1, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ x^3, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ x^3, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 5.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \begin{cases} y^2, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ (y-1)^2, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ x^2, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ (x-1)^2, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 6.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \begin{cases} 30y, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 30\cos\frac{\pi y}{2}, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 30\cos\frac{\pi x}{2}, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ 30x, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 7.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1.5; 0 \le y \le 1.5\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} y^4, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1.5 \\ y^4 - 13.5y^2 + 5.0625, \ x = 1.5, \ 0 \le y \le 1.5 \\ x^4, \ 0 \le x \le 1.5, \ y = 0 \\ x^4 - 13.5x^2 + 5.0625, \ 0 \le x \le 1.5, \ y = 1.5 \end{cases}$$

Задание 8.

$$\overline{G} = \{-1 \le x \le 0; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} e^{-y}, \ x = -1, \ 0 \le y \le 1 \\ 1, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 1, \ -1 \le x \le 0, \ y = 0 \\ e^{-x}, \ -1 \le x \le 0, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 9.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \begin{cases} 50 \sin \pi y, \ x = 0, \ 0 \le y \le 1 \\ 30y^2, \ x = 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 30\sqrt{x}, \ 0 \le x \le 1, \ y = 0 \\ 50 \sin \pi x, \ 0 \le x \le 1, \ y = 1 \end{cases}$$

Задание 10.

$$\overline{G} = \{0 \le x \le 3; 0 \le y \le 3\}\,, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(x^2 + y^2),\ (x, y) \in G,$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \begin{cases} 0,\ x = 0,\ 0 \le y \le 3 \\ 9y^2,\ x = 3,\ 0 \le y \le 3 \\ 0,\ 0 \le x \le 3,\ y = 0 \\ 9x^2,\ 0 \le x \le 3,\ y = 3 \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Московского ун-та: Наука, 2004

2. Самарский А. Я., Гулин А. В. Численные методы. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. -М.: Физматгиз, 1962. -т. 2.

4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М.. Численные методы. М., 2002.

5. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. -ИЛ, 1953.

6. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. -ИЛ, 1955.

7. Рябенький В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. -М.: Гостехиздат, 1956.

8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М. Наука, 1967.