Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

И.Ю. Выгодчикова

З А Д А Ч И
РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Учебное пособие для студентов
экономико-математических специальностей

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009

УДК [336 : 330.44] (072.8)
ББК 65.261 : 65.23я73
В92

Выгодчикова И.Ю.

В92 Задачи рационального поведения экономических агентов: Учеб. пособие для студентов экон.-мат. спец. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – 44 с.: ил.

ISBN 978-5-292-03906-8

В пособии содержатся некоторые вопросы математической экономики, относящиеся к моделированию и оптимизации поведения экономических агентов. Рассматриваются модели установления равновесной цены, задачи рационального поведения потребителя, максимизации прибыли фирмы, а также задачи, возникающие при взаимодействии производителей и потребителей. Приведены задачи линейного программирования и методы их решения с примерами и иллюстрациями. Даны задачи для самостоятельного решения, контрольная работа, тесты. Представлены рекомендации по использованию стандартных прикладных программ.

Для студентов экономико-математических специальностей в рамках учебных дисциплин «Математическая экономика», «Математические методы в экономике», «Математика».

Рекомендуют к печати:

Кафедра математической экономики
механико-математического факультета
Саратовского государственного университета
Кандидат физико-математических наук *В.П. Курдюмов*
Кандидат экономических наук *В.С. Федоляк*

УДК [336 : 330.44](072.8)
ББК 65.261 : 65.23я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-292-03906-8

ВВЕДЕНИЕ

Математической моделью реальной системы называется её упрощённая, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций и учитывающая её наиболее существенные свойства. При построении математической модели обычно сначала определяют *цель* системы, то есть наиболее желаемое для неё состояние. Затем происходит идентификация *переменных* (искомых величин), значения которых можно варьировать ради достижения поставленной цели, и *ограничений*, накладываемых на переменные.

К примеру, математическая модель, записанная в форме экстремальной задачи, имеет вид

$$f(x) \to \underset{x \in D \subset R^n}{\text{extr}},$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ – переменные, $D \subset R^n$ – допустимое множество, задающее ограничения задачи, f – целевая функция, которую требуется максимизировать или минимизировать в зависимости от поставленной задачи.

1. Задачи линейного программирования

Сложность поставленной задачи зависит от вида целевой функции и ограничений. Самыми простыми в теории экстремальных задач считаются задачи линейного программирования (ЛП) – задачи, в которых целевая функция $Z(x)$, а также функции, задающие ограничения, являются линейными.

В *общем виде* задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$Z(x) := \langle c, x\rangle \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i \in [1:k],$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i \in [k+1:m],$$
$$x_j \ge 0,\ j \in [1:s], \tag{1.1}$$

где $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $\langle c, x\rangle = c_1x_1 + ... + c_nx_n$.

Система равенств и неравенств (ограничений задачи) определяет в пространстве R^n множество Ω допустимых значений переменных задачи ЛП, называемое также *полиэдром планов*. Вектор $x \in \Omega$ называют *допустимым планом,* или просто *планом* задачи ЛП.

Обозначим

$$b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T \in R^m,$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$
$$A^i = (a_{i1}, ..., a_{in}),\ i \in [1:m],\ A_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^T,\ j \in [1:n].$$

Наряду с *общей формой* задач ЛП (1.1) выделяют также следующие формы.

А. *Основная* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax \le b. \tag{1.3}$$

Б. *Стандартная* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0_n. \tag{1.4}$$

В. *Каноническая* задача ЛП:

$$Z(x) := \langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0_n. \tag{1.5}$$

Здесь $0_n = (0, ..., 0)^T \in R^n$.

Путём замены переменных и эквивалентных алгебраических преобразований любая задача ЛП представляется в каждой из перечисленных форм. К примеру, система равенств $Ax = b$ эквивалентна системе неравенств $Ax \le b$, $(-A)x \le -b$, а любую переменную x_i, на которую не наложено требование неотрицательности, можно заменить разностью двух неотрицательных переменных $x_i = u_i - v_i$, $u_i \ge 0$, $v_i \ge 0$.

Пример 1.1. Привести к канонической форме задачу

$$-x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 \ge 2x_1 - 2, \quad x_1 - x_2 \le 1, \quad x_2 \ge 0. \tag{1.6}$$

Решение. 1. Преобразуем целевую функцию, умножив её на (-1):

$$x_1 - 2x_2 \to \max,$$

а ограничения запишем в виде

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 \le 2, \quad x_1 - x_2 \le 1, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Преобразуем ограничения – неравенства к форме равенств, введя дополнительные переменные $x_3 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$:

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0. \tag{1.7}$$

3. Добьёмся неотрицательности всех переменных, входящих в задачу. Рассмотрим два способа.

Способ 1. Делаем замену

$$x_1 = u_1 - v_1, \ u_1 \ge 0, \ v_1 \ge 0$$

и записываем задачу (1.6) в канонической форме:

$$u_1 - v_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$u_1 - v_1 + x_2 = 1, \quad 2u_1 - 2v_1 - x_2 + x_3 = 2, \quad u_1 - v_1 - x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_2 \ge 0, \ u_1 \ge 0, \ v_1 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0. \tag{1.8}$$

Способ 2. Выражаем переменную x_1, например, из первого равенства (1.7), $x_1 = 1 - x_2$, и подставляем в остальные равенства и в целевую функцию. Получаем задачу в канонической форме:

$$1 - 3x_2 \to \max,$$

$$-3x_2 + x_3 = 0, \quad -2x_2 + x_4 = 0,$$

$$x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0.$$

Заметим, что решение задачи не изменится, если вместо функции $1 - 3x_2$ максимизировать функцию $-x_2$.

При втором способе (исключении переменных, на которые не наложено требование неотрицательности) требуется производить дополнительные вычисления, однако полученная задача содержит меньше переменных, чем задача (1.8).

Пример 1.2. Исключив две переменные, записать задачу

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$$
$$x_i \ge 0,\ i \in [1:4],$$

в стандартной форме.

Решение. Используя преобразование матрицы системы, произведём исключение переменных x_1 и x_2:

$$\left(\begin{matrix} [1] & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & [5] & -13 & 10 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1.4 & 0 \\ 0 & 1 & -2.6 & 2 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1.4 \\ -0.6 \end{matrix}\right).$$

(сначала из второй строки матрицы вычли первую, умноженную на 3, а первую строку оставили без изменений; затем к первой строке прибавили вторую, делённую на 5, а вторую строку поделили на 5).

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 1.4x_3 = 1.4, \\ x_2 - 2.6x_3 + 2x_4 = -0.6, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x_1 = -1.4x_3 + 1.4, \\ x_2 = 2.6x_3 - 2x_4 - 0.6. \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения переменных x_1 и x_2 в целевую функцию и ограничения $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, получаем задачу ЛП с двумя переменными в стандартной форме:

$$-9.8x_3 + 3x_4 \to \max,$$
$$x_3 \le 1, \quad -13x_3 + 10x_4 \le -3, \quad x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Наиболее мощным численным методом решения задач ЛП является симплекс-метод (см., напр., [1]), который реализован во многих прикладных программах, в частности, MSExcel, MathCad, wxmaxima. При изложении алгоритма симплекс-метода удобно использовать вспомогательный инструмент – симплекс-таблицу, а основанием для итерационных преобразований служат 3 теоремы Данцига.

Ознакомимся с геометрическим методом решения задач ЛП. Сам по себе геометрический подход универсален в том плане, что он используется также для решения нелинейных задач, однако в последнем случае геометрические построения могут быть весьма сложными. Геометрическим методом целесообразно решать задачи с двумя переменными.

Задача ЛП с двумя переменными имеет вид

$$\begin{aligned} &Z(x) := c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Для многих экономических задач вводятся требования не отрицательности переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, которые можно рассматривать как два указанных в задаче (1.9) неравенства: $-1 \cdot x_1 + 0 \leq 0, 0 - 1 \cdot x_2 \leq 0$.

Для задачи (1.9) полиэдр планов, если он не пуст, будет многоугольным множеством (ограниченным многоугольником или неограниченным многоугольным множеством):

$$\Omega := \left\{x = (x_1; x_2) \in R^2 : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i \in 1:m\right\}.$$

Линией уровня целевой функции задачи ЛП называется прямая $\pi(\alpha) := \left\{ x \in R^2 : c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha \right\} \quad \forall\, \alpha \in R$. Все линии уровня параллельны между собой и имеют общую нормаль $c = (c_1; c_2)$. Вектор $c = (c_1; c_2)$ является градиентом целевой функции и указывает направление её возрастания.

Чтобы решить задачу геометрически, нужно смещаться с одной линии уровня к другой в направлении вектора c до того момента, когда полиэдр не останется по одну сторону от линии уровня, но при этом линия уровня будет иметь с полиэдром хотя бы одну общую точку. Эта точка или любая из них и даёт решение задачи.

На рис. 1 наглядно видно, что решение может быть как единственным, так и неединственным.

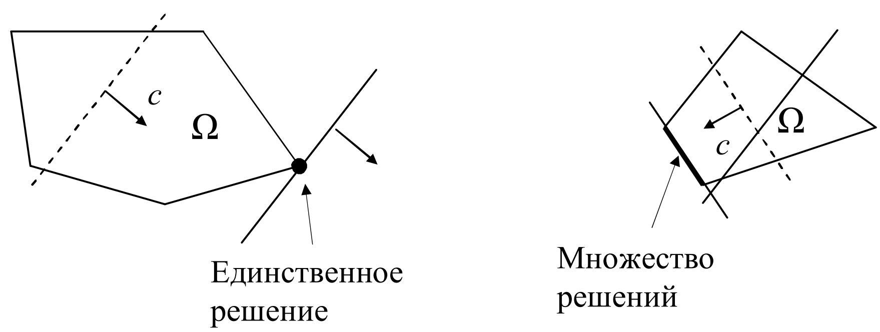

Рис. 1

Если при всех сколь угодно больших α пересечение линии $\pi(\alpha)$ с полиэдром Ω не пусто, то значение целевой функции на допустимом множестве может быть сколь угодно большим, и, следовательно, задача ЛП в этом случае не имеет решения (рис. 2).

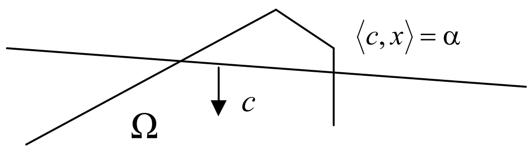

Рис. 2

Пример 1.3. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$(\mathrm{I})\quad x_1 - x_2 \ge -2,$$
$$(\mathrm{II})\quad x_1 + 2x_2 \le 7,$$
$$(\mathrm{III})\quad 4x_1 - 3x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Начинаем с построения полиэдра планов. По условию $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, значит, полиэдр располагается в первой четверти координатной плоскости. Каждое неравенство (I), (II), (III) определяет в пространстве R^2 полуплоскость.

Сначала строим прямую линию $x_1 - x_2 = -2$, например, по точкам $(0;2)$, $(-1;1)$. Чтобы определить ту из двух полученных полуплоскостей, которая определяется неравенством (I), берём любую точку, не принадлежащую прямой $x_1 - x_2 = -2$, например, точку $(0;0)$, и подставляем в неравенство (I). Получаем верное числовое тождество $0 \ge -2$. Следовательно, выбираем ту полуплоскость, которая содержит точку $(0;0)$.

Аналогично строим полуплоскости, определяемые неравенствами (II), (III). Затем находим пересечение этих трёх полуплоскостей и первой координатной четверти. Полученный пятиугольник Ω (рис. 3) является полиэдром планов задачи.

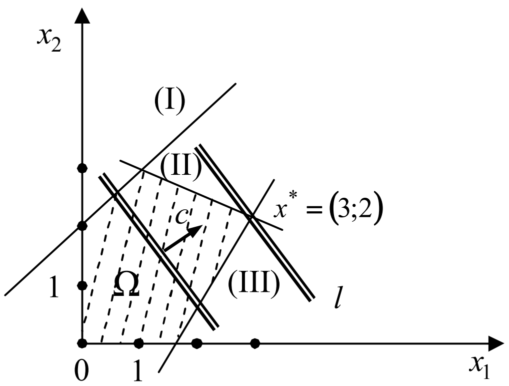

Рис. 3. Обозначения: $c = (2;1)$; Ω – заштрихованный пятиугольник; $x_1 - x_2 = -2$ (I); $x_1 + 2x_2 = 7$ (II); $4x_1 - 3x_2 = 6$ (III)

Далее, из любой точки пространства R^2 строим свободный вектор $c(2;1)$, проводим семейство прямых линий, перпендикулярных вектору c (то есть семейство линий уровня). Наконец, находим «последнюю в направлении вектора c» линию уровня, у которой ещё есть общие точки с полиэдром Ω. Из рис. 3 видно, что такой линией будет прямая l. Находим точку пересечения прямых линий

$$x_1 + 2x_2 = 7, \quad 4x_1 - 3x_2 = 6,$$

получаем $x^* = (3;2)$. Эта точка и будет решением задачи.

Пример 1.4. *Задача определения оптимального ассортимента продукции.* Предприятие изготавливает два вида продукции – Π_1 и Π_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – α и β. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Суточный расход сырья на 1 единицу продукции вида Π_1 и вида Π_2 и суточные запасы сырья даны в таблице.

Сырьё	Расход сырья в сутки на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
α	2	3	9
β	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 3 д.е., а $П_2$ – 4 д.е.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Обозначим через x_1 и x_2 суточные объёмы производства продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно. Поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограниченно имеющимся в распоряжении предприятия сырьём каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, получаем следующую систему ограничений:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ (\mathrm{II}) & 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ (\mathrm{III}) & x_1 - x_2 \le 1, \\ (\mathrm{IV}) & x_2 \le 2, \end{array} \qquad (1.10)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц $П_2$ составит $Z(x) := 3x_1 + 4x_2$. Нужно из всех объёмов выпуска x_1 и x_2, удовлетворяющих системе неравенств (1.10), выбрать те, при которых доход будет максимальным:

$$3x_1 + 4x_2 \to \max . \qquad (1.11)$$

Используя геометрические построения (рис. 4), найдём решение задачи (1.10), (1.11). Учитывая, что $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, строим полиэдр планов. Решение достигается в точке

$$x^* = (2.4;1.4),\ Z(2.4;1.4) = 12.8 .$$

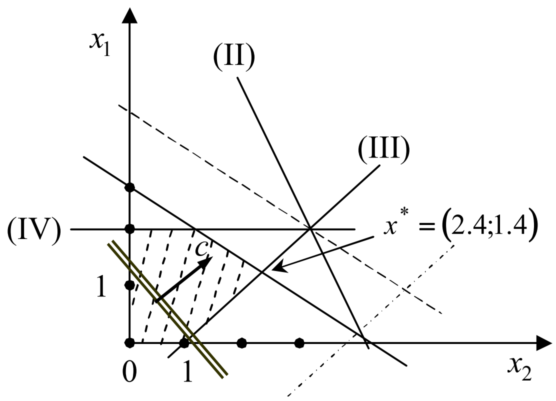

Рис. 4. Обозначения: $c = (3;4)$;
$2x_1 + 3x_2 = 9$ (I); $3x_1 + 2x_2 = 13$ (II);
$x_1 - x_2 = 1$ (III); $x_2 = 2$ (IV)

Рассмотрим решение задач ЛП в MSExcel. Можно таким же способом решать задачу в других электронных таблицах, например, Calc, Gnumeric.

Для выполнения этого задания нужно ввести в ячейки электронной таблицы MSExcel коэффициенты при переменных из целевой функции и левых частей ограничений. Пометить (можно цветом) ячейки, в которых будут вычислены оптимальные значения переменных. Воспользовавшись функцией СУММПРОИЗВ, в следующем столбце вычислить суммы произведений переменных и соответствующих коэффициентов (сначала столбец содержит 0). Первая ячейка в этом столбце будет служить целевой ячейкой при осуществлении «Поиска решения». Для решения задачи (1.10), (1.11) заносим исходные данные в таблицу MSExcel.

A	B	C	D	E
				Правые части огр.
Целевая функция	3	4	0	
Ограничение 1	2	3	0	9
Ограничение 2	3	2	0	13
Ограничение 3	1	– 1	0	1
Ограничение 4	0	1	0	2
Переменные				
	x_1	x_2		

Ячейка D2 =СУММПРОИЗВ(B2:C2;B$7:C$7).

Затем нужно воспользоваться надстройкой «Поиск решения». Устанавливаем: $D$2 – целевая ячейка, выбираем максимальное значение, $B$7:$C$7 – изменяемые ячейки, добавляем ограничения (добавить, выбираем слева ячейку D$3, знак $\leq$, а справа E$3, снова добавить, выбираем слева ячейку D$4, знак $\leq$, а справа E$4, и так далее), после занесения всех ограничений выполняем расчёты.

В итоге получаем такой результат.

A	B	C	D	E
				Правые части огр.
Целевая функция	3	4	12,8	
Ограничение 1	2	3	9	9
Ограничение 2	3	2	10	13
Ограничение 3	1	– 1	1	1
Ограничение 4	0	1	1,4	2
Переменные	2,4	1,4		
	x_1	x_2		

Ответ: $x^* = (2,4;1,4)$.

Можно потребовать целочисленности ограничений: добавить ограничения цел.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используется 3 вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в следующей таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		П1	П2
С1	20	2	5
С2	40	8	5
С3	30	5	6
Прибыль от реализации единицы продукции, руб.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

1.2. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем (за 8 недель) он составляет 1 фунт. Для того чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимых весовых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов (ингредиентов). В качестве ингредиентов рассмотрим следующие: известняк, зерно и соевые бобы. Требования к питательности рациона сформулируем, учитывая 3 вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, фунт/(фунт ингредиента)			Стоимость, долл./фунт
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	0	0	0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Бобовые	0,002	0,5	0,08	0,4

Смесь должна содержать не менее 0,8 %, но не более 1,2 % кальция, не менее 22 % белка и не более 5 % клетчатки.

Требуется определить для птицеводческой фермы количество (в фунтах) каждого из трёх ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Указание: провести расчёты для 1 цыплёнка.

Ответ: известняка 563,42 фунта; зерна 12 971,44 фунта; бобовых 6 465,14 фунта; стоимость смеси равна 4 554,31 долл.

1.3. Предприятие выполняет сборку автомашин «Москвич» и «Жигули». Для суточного выпуска в наличии имеются следующие материалы: 20 комплектов заготовок металлоконструкций, необходимых для сборки автомашин в количестве 5 и 3 единиц соответственно; 14 комплектов подшипников (соответственно 1 и 2 единицы); 9 двигателей с арматурой и электрооборудованием, необходимых по одному для каждой машины «Жигули» и «Москвич». Стоимость «Москвича» 70 тыс. руб., а «Жигулей» – 62 тыс. руб. Суточный объём выпуска «Москвичей» не должен превышать суточного объёма выпуска «Жигулей» более чем на 6 автомашин. Найти суточный план выпуска автомобилей, доставляющий предприятию максимальную выручку.

Задание:

1) решить задачи аналитически – составить математические модели, определив нужный набор переменных, ограничения на эти переменные и целевую функцию;

2) решить задачи графическим методом;

3) решить задачу в электронной таблице (MSExcel, Calc или др.);

4) решить задачи с использованием программы wxmaxima, для выполнения этого задания загрузить модуль simplex, воспользовавшись командой load(simplex), затем использовать функции linear_program, minimize_sx, maximize_sx.

2. Задачи выпуклого программирования

Множество $D \subset R^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x, y \in D$ и числа $\alpha \in [0,1]$ точка $z := \alpha x + (1-\alpha)y \in D$. Точка z называется *выпуклой комбинацией точек* x, y и лежит на отрезке, соединяющем эти точки.

Функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве D, называется *выпуклой* (*вогнутой*) на этом множестве, если для любых двух точек $x, y \in D$ и числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le (\ge) \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Если в определении выпуклости (вогнутости) функции дополнительно потребовать, чтобы $x \ne y, \alpha \in (0,1)$, а знак неравенства заменить строгим, то получим определение *строгой выпуклости* (*вогнутости*).

Ясно, что вогнутость функции f эквивалентна выпуклости функции $-f$. Кроме того, произведение выпуклой функции на положительное число – выпуклая функция, сумма, максимум выпуклых функций – выпуклая функция.

Известно (см., напр., [2]), что дважды дифференцируемая на открытом выпуклом множестве функция выпукла (строго выпукла) на этом множестве тогда и только тогда, когда матрица Гёссе неотрицательно (положительно) определена на этом множестве.

Для решения следующих задач можно использовать метод выпуклого программирования (теорему Куна – Таккера).

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$. Считаем, что $f_j(x)$, $j = \overline{0,m}$, – выпуклые и дифференцируемые на R^n функции, $D = \left\{x \in R^n : f_j(x) \le 0, j = \overline{1,m}\right\}$. Несложно показать, что заданное таким образом множество будет выпуклым.

Тогда имеем упрощённую задачу выпуклого программирования (ВП):

$$f_0(x) \to \min_{x \in D}. \tag{2.1}$$

Функция Лагранжа для задачи (2.1) запишется в виде

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x). \tag{2.2}$$

Говорят, что для множества D выполняется условие регулярности *Слейтера,* если $\exists \hat{x} \in R^n : f_j(\hat{x}) < 0, \forall j = \overline{1,m}$.

При выполнении условия Слейтера в формуле (2.2) можно считать $\lambda_0 = 1$.

Приведём следствие из теоремы Куна – Таккера [2 – 4].

Теорема (Куна – Таккера). Для того чтобы точка $x^* \in D$ была решением задачи (2.1), необходимо, а если выполняется условие Слейтера, то и достаточно, чтобы нашлись неотрицательные, не все равные нулю числа λ_j, $j = \overline{0,m}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial f_j(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \lambda_j f_j(x^*) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Пример 2.1. Фирме, производящей продукцию на четырёх заводах в количествах x_1, x_2, x_3 и x_4 условных единиц соответственно, нужно выпустить в месяц не менее 360 условных единиц продукции, причём следует минимизировать суммарные затраты. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе, если функции издержек заводов имеют вид $c_1(x_1) = 4x_1 + 0{,}05x_1^2$, $c_2(x_2) = 2x_2 + 0{,}02x_2^2$, $c_3(x_3) = x_3 + 0{,}01x_3^2$, $c_4(x_4) = 2x_4 + 0{,}02x_4^2$ соответственно?

Решение. Пусть $x = (x_1,...,x_4)$, $f_0(x) = \sum\limits_{i=1}^{4} c_i(x_i)$,

$$D = \left\{ x \in R^4 : 360 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \le 0 \right\}$$

(условие Слейтера, очевидно, выполняется). Полагаем $\lambda_0 = 1$ и решаем систему

$$\begin{cases} 4 + 0{,}1x_1 - \lambda = 0, \\ 2 + 0{,}04x_2 - \lambda = 0, \\ 1 + 0{,}02x_3 - \lambda = 0, \\ 2 + 0{,}04x_4 - \lambda = 0, \\ \lambda(360 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0, \end{cases} \underset{\Rightarrow}{\lambda \ne 0} \begin{cases} -x_1 = 40 - 10\lambda, \\ -x_2 = 50 - 25\lambda, \\ -x_3 = 50 - 50\lambda, \\ -x_4 = 50 - 25\lambda, \\ (360 + 190 - 110\lambda) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 75, \\ x_3 = 200, \\ x_4 = 75, \\ \lambda = 5. \end{cases}$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ решением системы является вектор x с отрицательными компонентами (он не принадлежит множеству D), следовательно, такой вариант не приводит к верному результату.

Ответ: (10,75, 200,75).

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Фермер нанимает трёх комбайнёров для обработки 100 га земли, обеспечивая их горючим и техникой. Обрабатывая *x* га, первый комбайнёр тратит $x^2 + x$ литров дизельного топлива, обрабатывая *y* га, второй комбайнёр тратит $0.25y^4 + 0.5y$ литров дизельного топлива, обрабатывая *z* га, третий комбайнёр тратит $2z^2 + z$ литров дизельного топлива. Какую площадь нужно предложить обрабатывать каждому комбайнёру, чтобы общие затраты топлива были минимальными?

2.2. Задача составления оптимального плана выпуска мебели [5]. Предприятие может выпускать два вида корпусной мебели. На их изготовление идёт древесина трёх видов. Запасы древесина на предприятии, нормы их расхода a_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,2}$, себестоимость c_j и оптовые цены указаны в таблице.

Порода	Запас сырья, м^3	Нормы расхода на изделие вида, м^3	
		1	2
Сосна	100	10	20
Берёза	120	20	10
Дуб	150	20	20
Себестоимость, тыс. руб.		5	10
Цена, тыс. руб.		7	13

Из-за брака в процессе производства расход древесины зависит от объёма x_j производства изделий и в первом приближении выражается функцией $a_{ij} + x_j$, а себестоимость продукции выражается функцией $c_j + 0{,}1\, x_j$. Изделия могут выпускаться в любых соотношениях, так как их сбыт обеспечен. По контракту предприятие обязано выпустить не менее двух комплектов каждого вида мебели. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Ответ: $(4;2)$.

2.3. Садовод-любитель планирует занять не менее 100 кв. м под томаты, перцы, клубнику, малину и крыжовник. Если количества этих культур составляют x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 десятков штук соответственно, то садовод в среднем тратит $0{,}01\left(3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_5^2 + x_5\right)$ часов в неделю на уход за этими культурами. Один томат занимает 1 кв. м, 1 перец занимает 0,1 кв. м, 1 куст клубники – 0,5 кв. м. Далее, 1 куст малины занимает 1 кв. м, 1 куст крыжовника – 1 кв. м. Сколько штук культур посадить, чтобы минимизировать время ухода за ними? (дробные части в ответе отбросить).

2.4. Фирме, производящей продукцию на трёх заводах в количествах x_1, x_2 и x_3 условных единиц соответственно, нужно выпустить в месяц не менее 210 условных единиц продукции, причём следует минимизировать суммарные затраты. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе, если функции издержек заводов имеют вид $c_1(x_1) = x_1 + 0{,}05x_1^2$, $c_2(x_2) = x_2 + 0{,}025x_2^2$, $c_3(x_3) = 2x_3 + 1/60x_3^2$ соответственно.

Ответ: (40,80,90).

Задание. Составить математические модели указанных задач и найти решение.

Указания: для аналитического решения воспользоваться теоремой Куна – Таккера, для решения задачи 2.4. загрузить в wxmaxima модуль load(lbfgs), ответ системы: C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.10.0/share/lbfgs/lbfgs.mac, загрузить load(augmented_lagrangian), ответ системы: C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.10.0/share/contrib/augmented_lagrangian.mac.

Воспользоваться функцией augmented_lagrangian_method.

3. Задача поведения рационального потребителя

Экономическим агентом назовём участника экономических отношений, обладающего некоторым набором экономических ресурсов, имеющего сформированную систему предпочтений и вступающего в товарно-денежные отношения с определённой целью. Основными экономическими агентами являются потребители, покупающие товары для удовлетворения своих потребностей, и фирмы-товаропроизводители.

Рассмотрим поведение рационального потребителя на рынке. Обозначим через $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_+^n$ набор количеств приобретаемых потребителем товаров (будем называть x *набором товаров*, а $C = R_+^n$ – *пространством товаров*), $p = (p_1, \ldots, p_n) \in R_+^n$ – цены этих товаров, а I – денежный доход потребителя, который он может израсходовать на покупку этих товаров. Множество доступных потребителю товаров $D = \left\{ x \in R_+^n : \langle p, x \rangle \le I \right\}$. *Бюджетным множеством* называется $Б = \left\{ x \in R_+^n : \langle p, x \rangle = I \right\}$. В случае двух товаров бюджетное множество является отрезком прямой линии.

Если потребитель закупит товары из бюджетного множества, то он израсходует весь свой доход.

Выбор потребителем того или иного набора товаров характеризуется некоторым отношением *предпочтения.* Считается, что относительно любых двух наборов товаров $x, y \in R_+^n$ потребитель может сказать, что либо один из них предпочтительнее другого, либо они для него одинаково привлекательны. Отношения предпочтения формализуются с помощью функции полезности $u(x)$, причём неравенство $u(x) > u(y)$ означает, что набор x предпочтительнее набора y, а равенство $u(x) = u(y)$ означает, что эти наборы для потребителя равно желаемы.

Обычно функция полезности удовлетворяет следующим свойствам (аксиомам полезности):

1) функция полезности $u(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема на пространстве товаров C;

2) все частные производные функции полезности первого порядка, называемые *предельными полезностями (*англ. *Marginal Utility),* являются положительными внутри C:

$$u'(x) = MU(x) = \left(MU_1(x),\ldots,MU_n(x)\right) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right),$$

$$MU_j(x) > 0, \quad j = \overline{1,n},$$

отсюда вытекает, что функция полезности возрастает по каждой переменной внутри C, то есть для потребителя «чем больше товара он получает, тем лучше»;

3) матрица Гёссе $u''(x)$ является отрицательно определённой внутри C. Это влечёт вогнутость функции полезности внутри C и, кроме того, отрицательность элементов главной диагонали (иногда требование вогнутости ослабляют, заменяя последним):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} MU_j(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial {x_j}^2} < 0, \; j = \overline{1,n},$$

то есть предельная полезность любого товара уменьшается по мере потребления (закон убывающей предельной полезности, или закон Госсена).

Замечание. Вспомним определение частной производной: это предел отношения приращения функции к приращению соответствующей переменной при условии, что последнее стремится к нулю, следовательно, предельная полезность приближённо показывает, на сколько измениться полезность при изменении количества соответствующего товара в наборе на единицу.

Функция полезности, удовлетворяющая таким требованиям, обычно называется *неоклассической.* Примерами могут служить следующие функции.

А. Функция с постоянной эластичностью замещения ($n = 2$)

$$u(x) = a\left[\frac{\delta}{{x_1}^{\rho}} + \frac{1-\delta}{{x_2}^{\rho}}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \; a > 0, \; 0 < \gamma \le 1, \; \rho \ge 0, \; 0 < \delta < 1.$$

Б. Мультипликативная функция (Кобба – Дугласа)

$$u(x) = a{x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_n}^{\alpha_n}, \; a > 0, \; \alpha_k > 0, \; k = \overline{1,\mathrm{n}}, \; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \le 1.$$

В. Логарифмическая функция

$$u(x) = \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n, \; \alpha_k > 0, \; k = \overline{1,n},$$

которая получается при логарифмировании функции Кобба – Дугласа ($a = 1$).

Рациональный потребитель выберет из множества доступных ему товаров такой набор, который принесёт ему наибольшее удовлетворение. Задача потребительского выбора формализуется следующим образом:

$$u(x) \to \max_{x \in D = \left\{ x \in R_+^n : \langle p, x \rangle \le I \right\}}. \qquad (3.1)$$

Вообще говоря, при постановке задачи (3.1) каких-либо ограничений на функцию полезности не накладывается, однако в неклассическом случае задача (3.1) сводится к задаче выпуклого программирования [2 – 4, 6], и при её решении может применяться теорема Куна – Таккера.

Можно показать, что оптимальный набор для потребителя (решение неоклассической задачи (3.1)) $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) \in D$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u\left(x^*\right)}{\partial x_j} : p_j = \dfrac{\partial u\left(x^*\right)}{\partial x_k} : p_k = \mu, \qquad j, k = \overline{1, n},\ j \ne k, \\ \left\langle p, x^* \right\rangle = I, \end{cases} \qquad (3.2)$$

где μ – неизвестный множитель, иногда называемый *предельной полезностью денег*. Систему (3.2) можно проинтерпретировать следующим образом: чтобы получить наибольшее удовлетворение от покупок, потребитель расходует свой доход $\left\langle p, x^* \right\rangle = I$ таким образом, что отношение предельной полезности к цене одинаково для всех закупаемых товаров.

Решение задачи (3.1) в общем случае зависит от цен потребительских товаров и дохода потребителя. Такое соответствие порождает *функции спроса* на потребительские товары, исследование которых позволяет выявить типологию потребительских товаров.

Например, если при росте своего благосостояния (при неизменных ценах на все товары) потребитель спрашивает больше данного товара, то товар называется *ценным*: $\dfrac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial I} > 0$, а в случае $\dfrac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial I} \le 0$ – *малоценным*.

Если с ростом цены товара i (при фиксированных ценах на другие товары и прежнем доходе) потребитель приобретает меньшее количество этого товара: $\dfrac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial p_i} < 0$, то товар называется *нормальным*, или подверженным закону спроса. А при $\dfrac{\partial x_i^*(p, I)}{\partial p_i} > 0$, то есть когда с ростом цены некоторого товара потребитель увеличивает спрос на него (при фиксированных ценах на другие товары и прежнем доходе), товар называется *товаром Гиффена*.

Типичными примерами товаров Гиффена служат товары первой необходимости (например, рис), составляющие основную долю в потреблении для малообеспеченных слоёв населения. Если цена риса возрастёт, то потребитель исключит из своего набора товаров относительно более дорогие товары (мясо, рыбу) и ещё более увеличит потребление риса.

Обычно при предельном анализе функций спроса используют известное в математической экономике уравнение Слуцкого [3, 4, 7, 8].

Вывод уравнения Слуцкого достаточно подробно изложен в [3, 4]. В непрерывной форме это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial x_i^*\left(p,I\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^*\left(p,I_{\text{comp}}\right)}{\partial p_j}-\frac{\partial x_i^*\left(p,I\right)}{\partial I}x_j^*\left(p,I\right),\; i,j=\overline{1,n}, \tag{3.3}$$

где $I_{\text{comp}}=I\left(p\right)\big|_{u=\text{const}}$, то есть уровень дохода потребителя изменяется наряду с изменением цен, но полезность сохраняется на прежнем уровне. Этот факт следует учитывать при отыскании частной производной функции $x_i^*\left(p,I(p)\right)$ по переменной p_j.

При малых изменениях цен товаров и дохода можно использовать дискретный аналог уравнения (3.3):

$$\frac{\Delta x_i^*\left(p,I\right)}{\Delta p_j}\approx\frac{\Delta x_i^*\left(p,I_{\text{comp}}\right)}{\Delta p_j}-\frac{\Delta x_i^*\left(p,I\right)}{\Delta I}x_j^*\left(p,I\right),\; i,j=\overline{1,n}.$$

Левая часть уравнения Слуцкого называется *общим эффектом* влияния изменения j-й цены на объём спроса на i-й товар, справа стоит разница между *эффектом замены*, вызванного изменением объёма спроса на i-й товар при замене одного товара другим с учётом изменения j-й цены и компенсированного изменения дохода (всегда $\dfrac{\partial x_i^*\left(p,I_{\text{comp}}\right)}{\partial p_i}<0$, поскольку спрос на относительно подорожавший товар при росте дохода падает, а спрос на подешевевший товар при снижении дохода повышается), и *эффектом дохода*, то есть изменение спроса при изменении дохода.

Подставим в уравнение (3.3) $i=j$:

$$\frac{\partial x_i^*\left(p,I\right)}{\partial p_i}=\frac{\partial x_i^*\left(p,I_{\text{comp}}\right)}{\partial p_i}-\frac{\partial x_i^*\left(p,I\right)}{\partial I}x_i^*\left(p,I\right),\; i=\overline{1,n}, \tag{3.4}$$

Заметим, что из неравенств $\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}>0$, $\dfrac{\partial x_i^*\left(p,I_{\text{comp}}\right)}{\partial p_i}<0$, $x_i^*\left(p,I\right)>0$ и уравнения (3.4) вытекает неравенство $\dfrac{\partial x_i^*\left(p,I\right)}{\partial p_i}<0$, поэтому ценные товары всегда являются нормальными. Из неравенств $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i}>0$, $\frac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_i}<0$, $x_i^*(p,I)>0$ и уравнения (3.4) вытекает неравенство $\frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}<0$, поэтому товар Гиффена всегда является малоценным.

Можно доказать [3], что выполняется *условие агрегации Энгеля:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}=1,$$

из которого следует, что *оптимальный набор потребительских товаров содержит хотя бы один ценный товар.*

Товары i и j называются *взаимозаменяемыми,* если

$$\frac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}>0,$$

то есть компенсированное ростом дохода увеличение цены на один товар приводит к увеличению спроса на другой. Поскольку спрос на один из этих товаров находится во взаимозависимости от спроса на другой, то

$$\frac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^*\left(x_j^*(p,I_{\text{comp}})\right)}{\partial x_j^*}\cdot\frac{\partial x_j^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}>0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial x_j^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}<0,$$

то

$$\frac{\partial x_i^*\left(x_j^*(p,I_{\text{comp}})\right)}{\partial x_j^*}<0.$$

Последнее неравенство означает, что уменьшение спроса на товар i приводит к увеличению спроса на товар j.

Если же $\frac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}>0$, то товары i и j образуют *взаимодополняющую друг друга пару* (компенсированное увеличение цены на один товар приводит к падению спроса на этот товар и на дополняющий его товар). Примерами взаимозаменяемых товаров служат, например, чай и кофе, мясо и рыба.

Примерами взаимодополняющих товаров служат автомобили и бензин, компьютер и программное обеспечение к нему.

Полученные результаты можно оформить в виде таблицы.

Классификация товаров

Индекс товара	Типы товара	Определение	Следствие
i	Ценный	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}>0$	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i}<0$
i	Товар Гиффена	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i}>0$	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}<0$
i	Малоценный, нормальный	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I}<0$, $\dfrac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_i}<0$	–
i,j	Взаимозаменяемые	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}>0$	–
i,j	Взаимодополняющие	$\dfrac{\partial x_i^*(p,I_{\text{comp}})}{\partial p_j}<0$	–

Пример 3.1. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1,x_2)=\ln x_1+\ln x_2$.

Решение. Требуется решить задачу: $u(x)\to\max\limits_{x\in D=\left\{x\in R_+^n:\langle p,x\rangle\le I\right\}}$.

Вычисляем $\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}=\dfrac{1}{x_j}$ для $j=1,2$ и подставляем в (3.2), получаем

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x_1^*}:p_1=\dfrac{1}{x_2^*}:p_2=\mu,\\ p_1x_1^*+p_2x_2^*=I,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2^*=\dfrac{p_1}{p_2}x_1^*,\\ p_1x_1^*+p_2x_2^*=I.\end{cases}\tag{3.5}$$

Из (3.5) получаем функции спроса на товары $x_1^*=\dfrac{I}{2p_1}$, $x_2^*=\dfrac{I}{2p_2}$ (оба товара являются ценными и нормальными), причём множитель $\mu=2/I$ выражает предельную полезность денег. Далее, продифференцируем тождество $u(x_1^*,x_2^*)=2\ln I-\ln p_1-\ln p_2-\ln 4\equiv\text{const}$ по p_1, считая, что доход потребителя зависит от цен товаров $I=I(p_1,p_2)$ (для наглядности аргументы I опускаем): $\dfrac{2}{I}\dfrac{\partial I}{\partial p_1}-\dfrac{1}{p_1}=0$, откуда получаем $\dfrac{\partial I}{\partial p_1}=\dfrac{I}{2p_1}$. Тогда $\dfrac{\partial x_1^*\big|_{\text{comp}}}{\partial p_1}=\dfrac{2p_1\partial I/\partial p_1-2I}{4p_1^2}=-\dfrac{I}{4p_1^2}$, $\dfrac{\partial x_1^*\big|_{\text{comp}}}{\partial p_2}=\dfrac{\partial I/\partial p_2}{2p_1}=-\dfrac{I}{4p_1p_2}$, $\dfrac{\partial x_2^*\big|_{\text{comp}}}{\partial p_2}=-\dfrac{I}{4p_2^2}$, $\dfrac{\partial x_2^*\big|_{\text{comp}}}{\partial p_1}=-\dfrac{I}{4p_1p_2}$. В данном примере товары являются взаимодополняющими.

Эластичность в экономике. Для наглядности рассмотрим функцию одной переменной. *Эластичностью* функции $z(y)$ называется величина

$$\varepsilon = \frac{dz}{dy} : \frac{z}{y} \approx \frac{\Delta z}{z} : \frac{\Delta y}{y} = \left(\frac{\Delta z}{z} \cdot 100\% \right) : \left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\% \right),$$

приближённо показывающая, на сколько процентов изменится значение функции при изменении значения аргумента на 1 %.

Эластичность позволяет сравнивать различные процессы на относительной основе, что весьма удобно ввиду различий в единицах измерения экономических показателей.

Выделяют ценовую (прямую при $i = j$ и перекрёстную при $i \neq j$) эластичность спроса

$$\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*(p,I)\right) = \frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial p_j} : \frac{x_i^*(p,I)}{p_j},$$

а также эластичность спроса по доходу

$$\varepsilon_I\left(x_i^*(p,I)\right) = \frac{\partial x_i^*(p,I)}{\partial I} : \frac{x_i^*(p,I)}{I}.$$

В примере 3.1 прямые эластичности спроса на каждый из товаров равны -1, перекрёстные равны 0, эластичности спроса по доходу равны 1.

Геометрическая интерпретация решения задачи выбора рационального потребителя для случая двух товаров. *Кривой безразличия* для потребителя называется геометрическое место точек пространства затрат, в каждой из которых полезность одинакова. Множество кривых безразличия представляет собой *карту безразличия*. Рассмотрим наборы товаров с кривой безразличия. Для них $u(x_1, x_2) = \text{const}$. Тогда $du(x_1, x_2) = 0$. Поскольку $du(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$, то $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{кр. безр}} = -\frac{MU_1(x_1, x_2)}{MU_2(x_1, x_2)} < 0$.

Если мы увеличим количество первого товара, то количество второго должно сократиться (полезность набора постоянна), причём предельная полезность первого товара сократится, а второго – возрастёт, с учётом знака, вдоль изокванты производная $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{кр. безр}}$ возрастает, что свидетельствует о выпуклости неявной функции $x_2 = x_2(x_1)$. Предельная норма замещения *i*-го товара *j*-м $S_{ij} = \frac{MU_1(x_1, x_2)}{MU_2(x_1, x_2)}$ характеризует относительную привлекательность товаров друг к другу.

Из (3.2) вытекает

$$\left.\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right|_{\text{кр. безр } u(x)=u\left(x^*\right)} = -\frac{MU_1\left(x_1^*, x_2^*\right)}{MU_2\left(x_1^*, x_2^*\right)} = -\frac{\dfrac{\partial u\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2},$$

$$x_2^* = -\frac{p_1}{p_2} x_1^* + \frac{I}{p_2}.$$

Отсюда следует, что касательная к кривой безразличия $\left\{x \in R_+^2 : u(x) = u\left(x^*\right)\right\}$ в точке $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ параллельна линии, содержащей бюджетное множество $\text{Б} = \left\{x \in R_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I\right\}$. А так как оптимальный для задачи потребительского выбора набор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ принадлежит одновременно кривой безразличия и бюджетному множеству, то он лежит в точке касания бюджетного множества и указанной кривой безразличия.

Пример 3.2. Функция полезности имеет вид $u\left(x_1, x_2\right) = 4x_1 x_2$, а доход, выделенный для покупки данных товаров, равен 24. В оптимальный набор вошли 2 единицы первого товара и 3 единицы второго товара. При каких ценах на товары p_1, p_2 потребитель сделал этот выбор?

Решение. Решим задачу геометрически. Поскольку количества товаров не могут быть отрицательными, построения производим в первом квадранте плоскости. Кривая безразличия $4x_1 x_2 = c$ является гиперболой (рис. 5).

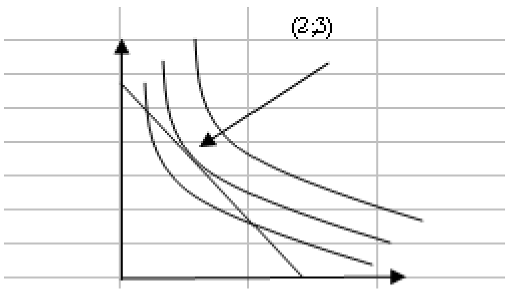

Рис. 5

Бюджетная линия $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 24$ и одна из кривых безразличия касаются в точке $(2;3)$, и в этой точке получаем $S_{12}(2;3) = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}(2;3) = 3/2$. Ввиду того что $2p_1 + 3p_2 = 24$, получаем $p_1 = 6$, $p_2 = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти функции спроса на товары двух типов для потребителя, функция полезности которого имеет вид: а) $u(x_1,x_2)=\sqrt[4]{x_1}\,\sqrt[4]{x_2}$, б) $u(x_1,x_2)=\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$, в) $u(x_1,x_2)=\ln x_1+\ln x_2$, где x_1 и x_2 – количества этих товаров в потребительском наборе (параметры p_1 и p_2 – рыночные цены товаров, I – денежный доход потребителя). Провести анализ товаров по видам (ценные или малоценные, нормальные или товары Гиффена, взаимозаменяемые или взаимодополняющие). Вычислить показатели эластичности спроса.

3.2. Фермер выращивает культуры *A* и *B* на площади 600 кв. фут. Каждая культура *A* занимает 1 кв. фут, а культура *B* – 4 кв. фута. Функция полезности имеет вид $u(x_A,x_B)=\sqrt[4]{x_A x_B}$, где x_A, x_B – число культур видов *A* и *B* соответственно. Сколько культур каждого вида посадить, чтобы максимизировать полезность?

4. Задача фирмы

Рассмотрим задачу оптимизации прибыли фирмы-товаропроизводителя. При математической формализации этой задачи часто используется понятие *производственной функции*.

Пусть фирма использует в производстве *n* видов ресурсов в количествах $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in T=R_+^n$ соответственно и изготавливает один вид продукции. *Производственной функцией (ПФ)* называется функция $f(x): R_+^n \to R$, которая каждому набору ресурсов $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in T$ ставит в соответствие максимальное количество готовой продукции $f(x)$, изготовленное при использовании этих ресурсов.

Обычно к ПФ предъявляются следующие требования (неоклассические свойства).

1. Функция $f(x)$ непрерывна на R_+^n, дважды непрерывно дифференцируема внутри пространства затрат *T*.

2. Градиент $f'(x)$ содержит лишь положительные компоненты внутри *T*. Отсюда вытекает, что функция $f(x)$ строго возрастает по каждой переменной внутри *T*.

3. Матрица Гёссе $f''(x)$ отрицательно определена внутри *T*. Отсюда вытекает строгая вогнутость функции $f(x)$, а также отрицательность элементов главной диагонали матрицы $f''(x)$.

По своим свойствам ПФ мало чем отличается от функции полезности потребителя. Существенным отличием является то, что значение ПФ является реальным экономическим показателем, выражая количество выпускаемой продукции в соответствующих единицах измерения.

Приведём примеры неоклассических функций:

1) квадратичная функция $f(x)=\langle xB,x\rangle+\langle a,x\rangle$, где B – симметричная отрицательно определённая матрица размерности n и $a+2xB>0$;

2) мультипликативная функция (Кобба – Дугласа)

$$f(x)=ax_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},\ a>0,\ \alpha_k>0,\ k=\overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\le 1.$$

При логарифмировании этой функции получаем следующую функцию ($a=1$):

$$f(x)=\alpha_1\ln x_1+\ldots+\alpha_n\ln x_n,\ \alpha_k>0,\ k=\overline{1,n}.$$

3) функция с постоянной эластичностью замещения ($n=2$)

$$f(x)=a\left[\frac{\delta}{x_1^{\rho}}+\frac{1-\delta}{x_2^{\rho}}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ a>0,\ 0<\gamma\le 1,\ \rho\ge 0,\ 0<\delta<1.$$

При $\rho\to+\infty$ эта функция преобразуется к виду

$$f(x)=\min\left\{ax_1^{\gamma};bx_2^{\gamma}\right\},\ a>0,\ b>0,\ 0<\gamma\le 1,$$

а при $\gamma=1$ называется *функцией Леонтьева*. Заметим, что функция с постоянной эластичностью не везде дифференцируема, но вогнута.

Будем считать, что производственная функция фирмы удовлетворяет неоклассическим требованиям. Градиент производственной функции содержит предельные продукты ресурсов. Из неоклассических свойств (второго и третьего) вытекает положительность предельных продуктов и отрицательность элементов главной диагонали матрицы Гёссе (предельный продукт любого ресурса убывает при увеличении применения того же ресурса).

Пусть $w=(w_1,\ldots,w_n)\in R_+^n$ – цены ресурсов. Тогда переменные издержки составят $\langle w,x\rangle$. Обозначим через c_0 постоянные издержки фирмы, $p>0$ – цену реализации готовой продукции. Тогда от продажи изготовленной продукции фирма получит прибыль

$$\Pi(x)=pf(x)-\langle w,x\rangle-c_0.$$

Поскольку постоянные издержки не зависят от объёма вовлекаемых в производство ресурсов, считаем их равными нулю, тогда получаем задачу:

$$\Pi(x)=pf(x)-\langle w,x\rangle\to\max_{x\in T}. \tag{4.1}$$

Оптимальный набор ресурсов (решение рассматриваемой задачи) обозначим через $x^*=\left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$. Таким образом, перед фирмой стоит задача выбора: в каких количествах применять ресурсы в производстве ($x = ?$), чтобы достичь максимальной прибыли?

Задача (4.1) называется *долгосрочной задачей фирмы,* поскольку в долгосрочной перспективе финансовые ресурсы фирмы не ограничены. Целевая функция в задаче (4.1) является линейной комбинацией строго вогнутой ПФ $f(x)$ и линейных функций x_j, $j = \overline{1,n}$, поэтому она строго вогнута внутри T, следовательно, достигает максимума на этом множестве в стационарной точке. Тогда решение задачи (4.1) сводится к решению относительно компонент вектора x системы уравнений

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (4.2)$$

К такому же выводу можно прийти, используя теорему Куна – Таккера (см. [2]).

Таким образом, вектор x^* является решением системы (4.2), следовательно, выполняются равенства

$$p\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = w_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (4.3)$$

Решение задачи фирмы $x^* = x^*(p,w)$ называют *вектор-функцией спроса на ресурсы,* а её компоненты – *функциями спроса на ресурсы.* Подставляя это решение в производственную функцию, получаем *функцию предложения* готовой продукции $q(p,w) = f\left(x^*(p,w)\right)$.

При предельном анализе поведения фирмы-товаропроизводителя используют понятие *предельный продукт ресурса (Marginal Product).* Предельным продуктом *j*-го ресурса в точке x называется частная производная $MP(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$.

На языке приращений предельный продукт *j*-го ресурса приближённо показывает, на сколько изменится объём выпуска готовой продукции при изменении количества вовлекаемого ресурса на единицу.

Соотношения (4.3) означают, что фирма достигнет максимальной прибыли при условии, что стоимости предельных продуктов ресурсов будут равны ценам этих ресурсов.

Для двухфакторной макроэкономической ПФ Кобба – Дугласа $Y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ предельный продукт капитала равен Y/K (фондоотдаче), а предельный продукт труда равен Y/L (производительности труда).

Однородность ПФ. Если все ресурсы увеличить в α раз, то производство может измениться в α^δ раз. В этом случае $f(\alpha x) = \alpha^\delta f(x)$ и тогда говорят, что ПФ однородна степени δ. Если $\delta > 1$, то ПФ характеризуется возрастающим эффектом масштаба производства, если $\delta < 1$, то убывающим, если $\delta = 1$, то постоянным (производство растёт в той же пропорции, что и затраты ресурсов).

В краткосрочной перспективе финансовые ресурсы фирмы ограничены. Пусть фирма планирует затратить на покупку ресурсов не более чем I денежных единиц. Получаем задачу

$$\Pi(x) \to \max_{x \in D = \left\{ x \in R_+^n : \langle w, x \rangle \le I \right\}} . \qquad (4.4)$$

Пользуясь теоремой Куна – Таккера, рассматриваем следующую систему:

$$p\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = w_j + \lambda, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\lambda\left(\langle w, x \rangle - I\right) = 0, \quad \lambda \ge 0. \qquad (4.5)$$

Для случая $\lambda = 0$ система уравнений (4.5) сводится к системе (4.2). Если при этом выполняется неравенство $\langle w,x \rangle \le I$, то решение будет оптимальным для задачи (4.4), причём оно совпадёт с решением долгосрочной задачи. Если же $\lambda > 0$, то получаем $\langle w,x \rangle = I$. Подставив последнее равенство в целевую функцию задачи (4.4), отбрасывая константы и множитель $p > 0$, получаем, что краткосрочная задача фирмы аналогична задаче (4.1).

Пример. Пусть производственная функция фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Решением долгосрочной задачи будут функции: $x_1^* = \frac{p^2}{4w_1^2}$, $x_2^* = \frac{p^2}{4w_2^2}$. Функция предложения $f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$, а оптимальная прибыль $\Pi^* = \frac{\mathrm{p}^2}{2}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) - \frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$. Такое же решение будет иметь и краткосрочная задача фирмы при условии, что $I \ge p^2 \frac{w_1 + w_2}{4w_1 w_2}$. Если последнее неравенство не выполняется, получаем для фирмы другое решение: $x_1^* = \frac{Iw_2}{w_1(w_1 + w_2)}$, $x_2^* = \frac{Iw_1}{w_2(w_1 + w_2)}$. При этом функция предложения имеет вид $f\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{\sqrt{Iw_1 w_2}}{\sqrt{w_1 + w_2}}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)$, а оптимальная прибыль составляет $\Pi^* = \mathrm{p}\frac{\sqrt{Iw_1 w_2}}{\sqrt{w_1 + w_2}}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) - I$.

Как правило, с ростом цен ресурсов фирма снижает спрос на них. Если фирма закупает большее количество ресурса с ростом цены своей продукции, то такой ресурс считается ценным (в примере оба ресурса ценные).

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Цена единицы готовой продукции предприятия, производство которого моделируется производственной функцией $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}$, где x_1 и x_2 – количества ресурсов, составляет 520 денежных единиц (д.е.). Цены ресурсов составляют 27 и 8 д.е. соответственно. При каких количествах ресурсов прибыль от реализации продукции будет максимальной? Привести аналитическое решение и геометрическую интерпретацию результата. Изменится ли решение, если ограничить затраты фирмы: а) 270 д.е.; б) 2700 д.е.? Найти функции спроса на ресурсы и предложения готовой продукции для заданной ПФ при условии, что p – цена продукции, w_1, w_2 – цены ресурсов. Проанализировать результат.

4.2. Цена единицы готовой продукции предприятия, производство которого моделируется производственной функцией $f(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2}$, где x_1 и x_2 – количества ресурсов, составляет 10 денежных единиц (д.е.). Цены ресурсов составляют 3 и 1 д.е. соответственно. При каких количествах ресурсов прибыль от реализации продукции будет максимальной? Привести аналитическое решение и геометрическую интерпретацию результата. Изменится ли решение, если ограничить затраты фирмы: а) 20 д.е.; б) 70 д.е.? Найти функции спроса на ресурсы и предложения готовой продукции для заданной ПФ при условии, что p – цена продукции, w_1, w_2 – цены ресурсов. Проанализировать результат.

4.3. Задана производственная функция фирмы

$$f(x_1, x_2) = \left(2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2}\right)^2.$$

Цена обоих факторов равна 1. Найдите способ производства 16 единиц продукции с наименьшими затратами. Пусть теперь цены продукции (p) и цены ресурсов (w_1, w_2) являются параметрами. Решить долгосрочную задачу фирмы на максимизацию прибыли (найти x_1 и x_2 в зависимости от этих параметров). Проанализировать результат.

5. Задачи экономических агентов с учётом ценовой динамики

Рассмотрим некоторые задачи, возникающие при учёте взаимодействия между экономическими агентами.

Задача оптимального выбора экономического агента существенно усложняется, если цену продукции считать не постоянной величиной, а зависящей от объёма спроса и предложения на продукцию $p = p(x)$.

Пусть фирма имеет чёткое представление, сколько ресурсов она должна использовать для производства того или иного количества продукции, и важно лишь знать, сколько произвести готовой продукции. В данном случае производственная функция не рассматривается.

Если фирма является на рынке монополистом, то она должна произвести столько товара, чтобы полностью удовлетворить платёжеспособный спрос на него, поэтому можно считать, что при сформировавшейся цене объёмы спроса и предложения совпадают (имеет место ситуация равновесия). Обозначим через q этот объём. Поскольку объёмы спроса и предложения зависят от цены товара, то существует и обратная зависимость – цены p от объёма q: $p = p(q)$. Предположим, что функция издержек фирмы зависит от объёма производства $c(q)$. Задача фирмы сводится к задаче максимизации функции прибыли, которая является действительной функцией одной переменной q:

$$\Pi(q) = p(q)q - c(q) \to \max_{q \ge 0}. \qquad (5.1)$$

В случае олигополии, когда на рынке некоторого товара конкурируют несколько фирм, каждая из них определяет свой объём производства, но увеличение общего объёма производства олигополистов приведёт к снижению рыночной цены продукции. Поэтому для определения оптимального объёма производства каждой фирмы нужно решить одновременно несколько задач:

$$\Pi^k(q_1,\dots,q_m) = p(q)q_k - c_k(q_k) \to \max_{q_k \ge 0},\ k = \overline{1,m},$$
$$q = q_1 + \ldots + q_m. \qquad (5.2)$$

где q_k – объём производства, $c_k(q_k)$ – издержки, $\Pi_k(\mathrm{q}_1,\dots,q_m)$ – прибыль k-й фирмы, q – объём спроса на товар при равновесной цене $p(q)$.

Пример. Спрос на товары описывается уравнением $q = 20 - p$, где p – цена продукции. Функция издержек каждой фирмы $c_k = q_k^2$, где q_k – объём производства k-й фирмы. Решением задачи монополиста: $\Pi(q) = q(20-q) - q^2 \to \max_{q \ge 0}$ будет стационарная точка функции прибыли $q^* = 5$, в которой она будет принимать своё максимальное значение, поскольку вторая производная отрицательна. При этом цена товара установится на уровне 15 д.е., прибыль монополиста составит 50 д.е.

В случае дуополии имеем две задачи:

$$\Pi_1(q_1) = q_1(20 - q_1 - q_2) - q_1^2 \to \max_{q_1 \ge 0}, \quad \Pi_2(q_2) = q_2(20 - q_1 - q_2) - q_2^2 \to \max_{q_2 \ge 0}.$$

Пусть объём выпуска каждой фирмы не зависит от объёма выпуска конкурента и считается постоянной величиной (условия Курно), тогда:

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1)}{\partial q_1} = 20 - 4q_1 - q_2 = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2(q_2)}{\partial q_2} = 20 - 4q_2 - q_1 = 0.$$

Решением будут объёмы выпуска $q_1^* = q_2^* = 4$ условные единицы, цена товара будет 12 д.е., а прибыли дуополистов по 32 д.е. Отметим, что при монополии товара выпускается меньше, чем при дуополии, цена выше и прибыль монополиста выше.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Цена единицы готовой продукции предприятия, производство которого моделируется производственной функцией $q = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$, где x_1 и x_2 – количества ресурсов, составляет 10 д.е. Цены ресурсов составляют 5 и 4 д.е. соответственно. При каких количествах ресурсов прибыль от реализации продукции будет максимальной? Найти функции спроса на ресурсы и предложения готовой продукции для заданной ПФ при условии, что p – цена продукции, w_1, w_2 – цены ресурсов. Найти функции спроса на ресурсы и предложения готовой продукции для заданной ПФ при условии, что $q_{\text{спроса}} = \dfrac{1}{p^2}$, p – цена продукции, w_1, w_2 – цены ресурсов и фирма является на рынке монополистом.

5.2. Выпуск продукции монополизированной отрасли описывается функцией $q = 150 - 0{,}5p$, а средние удельные издержки по производству выражаются функцией $\overline{c} = q - 60$. Найти оптимальный объём производства и цену.

Ответ: 60, 180.

Контрольная работа по линейному программированию

1. Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используется три вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		$П_1$	$П_2$
С1	20	2	5
С2	40	8	5
С3	30	5	6
Прибыль от реализации единицы продукции, руб.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

2. При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц питательного вещества A, не менее 8 единиц вещества B и не менее 12 единиц вещества C. Для составления рациона используют 2 вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм 1 вида	Корм 2 вида
A	3	1
B	1	2
C	1	6
Стоимость 1 кг корма, руб.	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

3. Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – α и β. Суточный расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и запасы сырья даны в таблице.

Сырьё	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, единиц
	$П_1$	$П_2$	
α	4	3	20
β	3	2	15

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 3 д.е., а $П_2$ – 2 д.е.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

4. Предприятие располагает тремя видами сырья и может выпускать одну и ту же продукцию двумя способами. При этом за один час работы первым способом выпускается 20, а вторым способом – 60 единиц продукции. Количество сырья (кг) того или иного вида, расходуемого за 1 ч работы при различных способах производства, и запасы сырья (кг) приведены в таблице.

Способ производства	Вид сырья		
	1	2	3
Первый	10	20	15
Второй	40	30	45
Запасы сырья, кг	200	190	150

Определить сочетание способов производства, при котором достигается максимальный выпуск.

5. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 5 м^2 площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 25 000 руб., при этом оно может приобретать оборудование двух видов. Комплект оборудования первого вида стоит 6 000 руб., а комплект оборудования второго вида стоит 4 000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида позволяет увеличить выпуск продукции за смену на 3, а одного комплекта оборудования второго вида – на 2 единицы. Зная, что для установки одного комплекта оборудования первого вида требуется 1 м^2 площади, а для установки одного комплекта оборудования второго вида – 1,5 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.

Тесты

ВЫПОЛНИТЬ ТЕСТЫ И ОБОСНОВАТЬ РЕЗУЛЬТАТ

1. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 + 4\sqrt{x_2}$. Тогда кривая безразличия задаётся уравнением:

а) $x_1 + 4\sqrt{x_2} = c$; б) $1 + 2/\sqrt{x_2} = c$; в) $x_1 / 4\sqrt{x_2} = c$; г) $4x_1\sqrt{x_2} = c$.

2. Функция спроса на товар имеет вид $d(p) = \dfrac{p+6}{p+1}$ (p – цена товара), а функция предложения $q(p) = 2p + 1.5$. Тогда равновесная цена и равновесный объём производства равны:

а) $p^* = 2,\ q^* = 5.5$; б) $p^* = 2,\ q^* = 8/3$; в) $p^* = 1,\ q^* = 3.5$; г) $p^* = 1,\ q^* = 7$.

3. Неоклассическая мультипликативная ПФ имеет вид (K – капитальные ресурсы, L – трудовые ресурсы):

а) $F(K, L) = 0.3K + 0.5L$; б) $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.5}$;

в) $F(K, L) = K^{0.3}L^{5}$; г) $F(K, L) = K^{-0.3}L^{-0.7}$.

4. Неоклассическая мультипликативная ПФ имеет вид (K – капитальные ресурсы, L – трудовые ресурсы) $F(K, L) = 0.3K^{0.4}L^{0.5}$. При увеличении объёма капитала на 1 % валовой выпуск увеличится на:

а) 0.4 %; б) 0.3 %; в) 0.5 %; г) 0.7 %.

5. Функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, а доход, выделенный для покупки данных товаров, равен 24. В оптимальный набор вошли 2 единицы первого товара и 3 единицы второго товара. При каких ценах на товары – p_1, p_2 потребитель сделал этот выбор?

а) $p_1 = 1,\ p_2 = 1$; б) $p_1 = 4,\ p_2 = 2$; в) $p_1 = 6,\ p_2 = 4$; г) $p_1 = 4,\ p_2 = 6$.

6. Фермер выращивает культуры A и B на площади 600 кв. футов. Каждая культура A занимает 1 кв. фут, а культура B – 4 кв. фута. Функция полезности имеет вид $u(x_A, x_B) = 4x_A x_B$, где x_A, x_B – число культур видов A и B соответственно. Сколько культур каждого вида посадить, чтобы максимизировать полезность?

а) $x_A^* = 220$, $x_B^* = 950$; б) $x_A^* = 175$, $x_B^* = 100$;

в) $x_A^* = 300$, $x_B^* = 75$; г) $x_A^* = 100$, $x_B^* = 200$.

7. В 1976 г. на Бразилию приходилась примерно треть мирового экспорта кофе. Когда в 1976–1977 гг. заморозки уничтожили около 75 % урожая кофе в Бразилии, цена кофе возросла на 400 %. Какова была эластичность спроса на кофе?

а) -0.045; б) 0.045; в) 0.06; г) -0.06.

8. В краткосрочном периоде ПФ фирмы имеет вид

$$F(l) = 15 + 8l + 5l^2 - l^3,$$

где l – число занятых сотрудников на фирме.
A. Сколько работников нанимать, чтобы достичь максимального выпуска?
B. При каком уровне занятости эластичность производства равна –0,5?

а) A. 4. B. 4; б) A. 5. B. 1; в) A. 4. B. 5; г) A. 5. B. 7.

9. В условиях дуополии Курно рыночный спрос задаётся соотношением $D = 300 - p$, где p – цена товара, а каждая фирма имеет постоянные предельные издержки, равные 10. Тогда параметры состояния равновесия Курно (объёмы производства и цена) равны:

а) 51.6, 51.6, 246.8; б) 96.7, 96.7, 106.6;

в) 51.6, 48.4, 246.8; г) 96.7, 96.7, 100.6.

10. Фирме, производящей продукцию на трёх заводах в количествах x_1, x_2 и x_3 условных единиц соответственно, нужно выпустить в месяц не менее 210 условных единиц продукции, причём следует минимизировать суммарные затраты. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе, если функции издержек заводов имеют вид $c_1(x_1) = x_1 + 0{,}05x_1^2$, $c_2(x_2) = x_2 + 0{,}025x_2^2$, $c_3(x_3) = 2x_3 + 1/60x_3^2$ соответственно?

а) (40,80,90); б) (70,70,70); в) (80,40,90); 4) (70,60,80).

11. Функции общих издержек в условиях дуополии Курно выражаются уравнениями $C_1 = 0.5q_1^2 + 4q_1 + 5$, $C_2 = q_2^2 + 5q_2 + 7$. Рыночный спрос $D = 40 - 2p$. Определите цену равновесия и величины выпусков на данном рынке в условиях равновесия.

а) (14.56, 7.04, 3.84); б) (14.56, 10.04, 3.84);

в) (12.56, 7.04, 3.84); г) (14.56, 7.04, 8.84).

12. Дана функция издержек монополиста $c = 5q + 0{,}25q^2$ и функция выпуска $q = 160 - p$. Найти оптимальную цену и объём производства продукции.

а) 72, 98; б) 82, 98; в) 32, 98; г) 62, 98.

13. ПФ фирмы имеет вид $Y = 100KL$. Цена труда составляет 30, а цена капитала – 120. Чему равны средние издержки производства 100 единиц продукции, если фирма выбирает самый дешёвый способ производства?

а) 120; б) 1.2; в) 2; г) 100.

14. Цена меди на мировом рынке составляет 0,75 долл. за фунт. Ежегодно продаётся 750 млн фунтов меди. Ценовая эластичность спроса на медь равна $-0{,}4$. Найти линейную функцию спроса на медь (*p* – цена).

а) $D = 1050 + 400p$; б) $D = 1050 - 400p$;

в) $D = 1050 - 200p$; г) $D = 1050 + 200p$.

15. Дана функция спроса на некоторый товар $D = 8 - 0.5p$. При какой цене p коэффициент эластичности спроса по цене равен -0.5?

а) 16; б) 16/3; в) 8/3; г) 32/3.

16. Издержки производства 100 штук некоторого товара составляют 300 тыс. руб., а 500 штук – 600 тыс. руб. Считая функцию издержек линейной, определите величину издержек для выпуска 400 штук изделий.

а) 500; б) 535; в) 525; г) 520.

17. Предположим, что когда фирма увеличивает применяемый капитал с 120 до 150, используемый труд с 500 до 625, выпуск продукции увеличивается с 200 до 220. Какой эффект роста масштаба производства имеет место в данном случае?

а) возрастающий;

б) убывающий;

в) ПФ не является однородной.

Модель оптимизации портфеля ценных бумаг. Задача Марковица

Рассмотрим математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 г.

Пусть в портфель планируется включить n видов активов. Обозначим доли активов в портфеле через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. Кроме того, считаем $\theta_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}$.

Последнее ограничение в некоторых случаях можно опустить. Если доля некоторого актива отрицательна, то содержательно это означает провести операцию «short sale» (короткая продажа). В таком случае можно рассматривать произвольные знаки неизвестных $\theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_n\right)$. Если такие операции невозможны, то необходимо ввести ограничения $\theta_i \geq 0$. Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги *i*-го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент, который присоединяет к своему капиталу, и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (не *i*-го вида) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше. Собственно, можно обойтись и без операции «short sale», если инвестору доступны займы денежных средств по безрисковой ставке.

Через несколько лет после исследования Марковица другой крупнейший американский экономист Д. Тобин заметил, что если на рынке есть безрисковые ценные бумаги (к таким можно отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается. При этом считается, безрисковые бумаги некоррелированы с остальными. Портфель Тобина – это портфель Марковица, включающий безрисковые ценные бумаги.

Приведём математическую формализацию задачи Марковица.

Пусть R_i – случайная величина, характеризующая доходность *i*-го актива, при условии, что все средства вложены только в него. Математическое ожидание доходности *i*-го актива обозначим m_i. Доходность портфеля – это случайная величина $R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i \theta_i$ с математическим ожиданием $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i$ и дисперсией $D\left(R_p\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j$. Мерой риска может служить корень квадратный из дисперсии.

Минимизируем квадрат риска (дисперсию портфеля):

$$F(\theta) := D\left(R_p\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j ,$$

где $b_{ij} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right)$.

Если в портфель включены статистически независимые друг от друга активы, то ковариационная матрица $B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ является диагональной, по диагонали стоят выборочные дисперсии активов.

Предположим, что требуемый уровень доходности портфеля задан и составляет m_p.

В результате получаем оптимизационную задачу:

$$F(\theta) := \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\theta_i\theta_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i = m_p,\ \theta_i \ge 0,\ i = \overline{1,n},$$

для решения которой можно применить один из известных методов, например, метод множителей Лагранжа, графический метод или метод исключения переменных, а также можно воспользоваться одной из стандартных математических программ или электронных таблиц, включающих инструментарий численных методов решения задач.

В целях упрощения решения, можно уменьшить число переменных на 2, воспользовавшись ограничениями.

Пример. Рассмотрим портфель, состоящий из трёх видов независимых ценных бумаг с ожидаемыми доходностями 14, 20 и 12 % и рисками (корень квадратный из дисперсии) 15, 40 и 12 соответственно. В таком случае ковариационная матрица является диагональной (по диагонали стоят дисперсии):

$$B = \begin{pmatrix} 225 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}.$$

Требуется сформировать портфель из трёх видов ценных бумаг с минимальным риском потерь капитала и ожидаемой доходностью 15 %. Следовательно, нужно найти, в каких долях $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ должны входить ценные бумаги в портфель. Получаем задачу:

$$F(\theta) := 225\theta_1^2 + 1600\theta_2^2 + 144\theta_3^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\theta_i = 1,$$

$$14\theta_1 + 20\theta_2 + 12\theta_3 = 15,$$

$$\theta_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3}.$$

Решая задачу методом множителей Лагранжа, приходим к системе:

$$2\cdot 225\theta_1 + \lambda + 14\mu = 0,$$

$$2\cdot 1600\theta_2 + \lambda + 20\mu = 0,$$

$$2\cdot 144\theta_3 + \lambda + 12\mu = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\theta_i = 1,$$

$$14\theta_1 + 20\theta_2 + 12\theta_3 = 15.$$

Ответ: $\theta_1 = 0{,}5357$; $\theta_2 = 0{,}2411$; $\theta_3 = 0{,}2232$.

Задачи. А. Предположим, инвестор имеет возможность составить портфель из четырех видов некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых даны в таблице.

I	1	2	3	4
e_i	2	4	8	12
σ_i	1	2	4	6

Найти оптимальный портфель из этих ценных бумаг с ожидаемой доходностью 6.

Ответ: 0,209877; 0,364198; 0,246914; 0,179012.

В. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительство предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено, по крайней мере, в 2 раза больше, чем акций В, причём последних можно купить не более чем на 100 тыс. руб. Дивиденды по акциям А составляют 8 % в год, по акциям В – 10 %. Какую максимальную возможную прибыль можно получить в первый год? (задача ЛП, load(simplex)…maximize_lp и т.п.).

С. Инвестор, имеющий в 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции А, В, С. Дивидендные ставки по акциям являются независимыми случайными величинами с математическими ожиданиями 8, 10 и 12% и стандартными отклонениями (σ), 1, 2 и 4 % соответственно. Как нужно скомбинировать покупку разных акций, чтобы за первый год получить в среднем 30 тыс. руб. дивидендов при минимальной дисперсии?

Указание: для решения задач А, С можно загрузить в wxmaxima модуль load(lbfgs), load(augmented_lagrangian), воспользоваться функцией augmented_lagrangian_method.

Для решения задачи В – load(simplex)…maximize_lp.

Микроэкономические модели установления равновесной цены

Рассмотрим паутинообразную модель равновесия с запаздыванием предложения и модель Эванса для случая линейных функций спроса и предложения:

$$D = b - ap,\ S = l + mp,\ a,b,l,m > 0.$$

Ясно, что $b > l$, поскольку при нулевой цене спрос превышает предложение.

<u>Паутинообразная модель с запаздыванием предложения</u> (рис. 6). Пусть $t = 0,1,...$ и в начальный момент времени сформировался спрос, который будет удовлетворён в следующий момент, но цена изменится, тогда

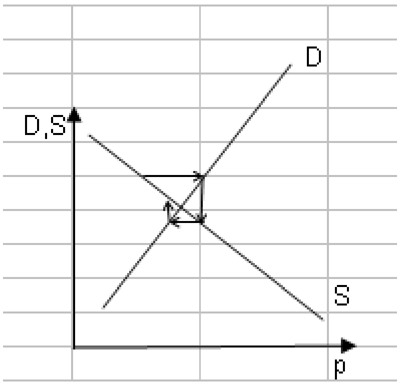

Рис. 6

$$D = b - ap_0 = l + mp_1 \Rightarrow p_1 = -\frac{a}{m} p_0 + \frac{b-l}{m};$$

$$D = b - ap_1 = l + mp_2 \Rightarrow p_2 = (-1)\frac{a}{m} p_1 + \frac{b-l}{m};$$

$$p_2 = (-1)^2 \left(\frac{a}{m}\right)^2 p_1 + \frac{b-l}{m}\left(1 - \frac{a}{m}\right);$$

$$\ldots$$

По индукции получаем формулу

$$p_n = (-1)^n \left(\frac{a}{m}\right)^n p_1 + \frac{b-l}{m}\left(1 - \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{m}\right)^{n-1}\right);$$

$$p_n = (-1)^n \left(\frac{a}{m}\right)^n p_1 + \frac{b-l}{m} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{a}{m}\right)^n}{1 + \frac{a}{m}} \xrightarrow{n \to \infty, a<m} p^* = \frac{b-l}{a+m}.$$

Следовательно, равновесная цена устанавливается только при $a < m$.

<u>Модель Эванса.</u> Предполагается, что положительное изменение цены пропорционально изменению спроса над предложением: $dp = \gamma(D - S)dt$, $\gamma > 0$, $p(0) = p_0$. Поставляя $D = b - ap$, $S = l + mp$, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием. Его решение всегда сходится к равновесной цене

$$p(t) = \frac{b-l}{a+m}\left(1 - e^{-\gamma(a+m)t}\right) + p_0\, e^{-\gamma(a+m)t} \xrightarrow{n \to \infty} p^* = \frac{b-l}{a+m}.$$

Макроэкономические производственные функции

Моделирование производственной системы может осуществляться как на микроуровне, так и на макроуровне. При моделировании экономики обычно используются двухфакторные ПФ (переменные x_1 и x_2 будем обозначать K и L). Экономика рассматривается как целостная неструктурированная единица, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат функционирования экономики в форме валового выпуска или валового внутреннего продукта (ВВП). Пусть K – объём основных и оборотных фондов, L – среднесписочное число занятых в экономике, Y – ВВП. Тогда ПФ принимает вид $Y = F(K, L)$.

Чаще всего для этих целей применяется ПФ Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2},$$

которая удовлетворяет неоклассическим требованиям: при $\alpha_i \in (0,1)$ $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Для оценки параметров ПФ Кобба – Дугласа используется известный в эконометрике метод наименьших квадратов (МНК). Сначала производится логарифмическая линеаризация модели, после соответствующей замены переменных эта функция становится линейной моделью множественной регрессии.

Регрессионный анализ статистических данных позволяет экспериментально определить параметры корреляционных зависимостей между экономическими показателями путём наблюдения за характером их изменений. С использованием полученной модели можно прогнозировать варианты развития экономических процессов и явлений, изучать тенденции изменения экономических показателей. Простой приём логарифмирования уравнения и замены переменных позволяет получить линейную регрессионную модель, параметры которой оцениваются традиционным МНК.

По данным о зависимости объёма выпуска Y от трудовых L и капитальных K затрат ресурсов оцениваются коэффициенты модели

$$Y = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2} \exp(\varepsilon),$$

где ε – случайная ошибка.

Пример. *Регрессионный анализ параметров ПФ Кобба – Дугласа по данным 12 наблюдений.*

Анализ исходных данных: логарифмируем уравнение, составляем на основании исходных данных (табл. 1) таблицу логарифмированных данных (табл. 2) и оцениваем параметры ПФ по МНК (программа «Регрессия» надстройки Excel «Пакет анализа»), сервис, анализ данных.

Таблица 1

T	Y	K	L
1	100	100	100
2	112	114	110
3	124	131	123
4	143	149	125
5	151	176	138
6	155	198	140
7	153	216	145
8	184	236	154
9	189	266	154
10	227	335	196
11	218	397	193
12	179	417	147

Таблица 2

lnY	lnK	lnL	ln $\hat{Y}$	Остатки
4,60517	4,6052	4,60517	4,62914	-0,024
4,7185	4,7362	4,70048	4,73654	-0,018
4,82028	4,8752	4,81218	4,86024	-0,04
4,96284	5,0039	4,82831	4,89429	0,06855
5,01728	5,1705	4,92725	5,01033	0,00695
5,04343	5,2883	4,94164	5,04115	0,00228
5,03044	5,3753	4,97673	5,08646	-0,056
5,21494	5,4638	5,03695	5,15518	0,05975
5,24175	5,5835	5,03695	5,17301	0,06874
5,42495	5,8141	5,27811	5,42973	-0,0048
5,3845	5,9839	5,26269	5,44081	-0,0563
5,18739	6,0331	4,99043	5,19711	-0,0097

1. Коэффициент детерминации R-квадрат, а также скорректированный R-квадрат с поправкой на число степеней, близки к 1, что свидетельствует о хорошем качестве регрессии (табл. 3).

Таблица 3

Регрессионная статистика		Наименования	Коэффициенты
Множественный R	0,984288223	Y-пересечение	– 0,302620532
R-квадрат	0,968823307	Переменная X 1	0,148805624
Нормированный R-квадрат	0,961895153	Переменная X 2	0,922089963
Стандартная ошибка	0,049408866		
Наблюдения	12		

Коэффициенты

$\ln\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\exp(\hat{\beta}_0)$
– 0,3026	0,14881	0,92209	0,73888

2. Выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\ln\hat{Y} = -0{,}303 + 0{,}149\ln K + 0{,}922\ln L,$$

откуда

$$\boxed{\hat{Y} = 0{,}739K^{0{,}149}L^{0{,}922}}$$

Примеры макроэкономических моделей

Рассмотрим пример линейной балансовой модели многоотраслевой экономики – статическую модель В.В. Леонтьева.

Пусть в экономике производится, продаётся и покупается n продуктов, причём каждая отрасль производит только один продукт. Пусть для производства единицы j-го продукта нужно затратить a_{ij} единиц i-го продукта (i-й отрасли), x_i и y_i валовой выпуск i-го продукта и конечный спрос на него соответственно. Модель Леонтьева:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i,\ i = \overline{1,n},$$

называется *продуктивной* (работоспособной), если она разрешима в неотрицательных x_i, $i = \overline{1,n}$.

В матричной форме

$$X - AX = Y,$$

$$X = \left(x_1,\ldots,x_n\right)',\quad A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},\quad Y = \left(y_1,\ldots,y_n\right)'.$$

$$X = (I - A)^{-1} Y.$$

I – единичная матрица $n \times n$.

Примеры. 1. $n = 1$, $a_{11} = 0.1$, $Y = 10$, получаем $X = 11{,}11$, модель продуктивна.

2. $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, получаем $X = \begin{pmatrix} 18.2 \\ 31.8 \end{pmatrix}$, модель продуктивна.

Модель Солоу с дискретным временем. В модели Солоу экономика рассматривается как единое неструктурированное замкнутое целое, производящее один универсальный продукт.

Показатели: Y (ВВП), I (валовые инвестиции), C (фонд потребления), K – основные производственные фонды (ОПФ), L (число занятых в производственной сфере).

Кроме того, задан μ – годовой коэффициент износа ОПФ, ν – годовой темп прироста числа занятых.

Модель содержит два статических звена (структура):

$$Y_t = F(K_t, L_t),\ Y_t = I_t + C_t$$

и два динамических звена:

$$K_t = (1-\mu)K_{t-1} + I_{t-1},\ L_t = (1+\nu)L_{t-1},\ t = \overline{0,T}.$$

При переходе к непрерывному времени получаем модель:

$$Y = F(K, L),\ Y = I + C,\ \frac{dK}{dt} = -\mu K + I,\ \frac{dl}{dt} = \nu L,\ t = \overline{0,T}.$$

Начальные значения ОПФ и трудовых ресурсов заданы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дудов С.И., Хромов А.П.* Методы оптимизации. Саратов, 2002.
2. *Дудов С.И., Сидоров С.П.* Курс математической экономики. Саратов, 2002.
3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М., 2005.
4. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики. Новосибирск, 2002.
5. *Орлова И.В., Половников В.А.* Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. М., 2007.
6. *Выгодчикова И.Ю.* Задачи рационального поведения экономических агентов // Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности: Сб. науч. статей. Саратов, 2007. Вып. 2. С. 60 – 66.
7. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика, промежуточный уровень. Современный подход. М., 1997.
8. *Пиндайк Р.С., Рубинфельд Д.Л.* Микроэкономика. М., 2001.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Microsoft Excel. М., 2008.

Франк Р.Х. Микроэкономика и поведение. М., 2000.

Корнейчук Б.Ф. Микроэкономика. Деловые игры. СПб., 2003.

Выгодчикова И.Ю. Процентный анализ финансовых потоков. Саратов, 2008.

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 1986.

Поисковый сайт. www.eboogle.ru (при поиске можно уточнить формат pdf или djvu).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Выгодчикова Ирина Юрьевна

ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Учебное пособие для студентов
экономико-математических специальностей

Ответственный за выпуск О.Л. Багаева
Технический редактор Л.В. Агальцова
Корректор Е.Б. Крылова
Оригинал-макет подготовлен О.Л. Багаевой

Подписано в печать 03.04.2009. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,56(2,75). Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 150 экз. Заказ 38.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.