Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

А.Д.Луньков, А.В.Харламов

Теория случайных процессов

Учебное пособие для студентов дневного отделения механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий

УДК 519.21

Луньков А.Д., Харламов А.В. Теория случайных процессов: Учеб. пособие для студентов дневного отделения механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий

Пособие содержит теоретические сведения по основным разделам теории случайных процессов, некоторые примеры.

Для студентов дневного отделения механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий.

УДК 519.21

© Луньков А.Д.,Харламов А.В., 2014

© Саратовский государственный университет, 2014

Содержание

1 Теория случайных процессов.Основные понятия.

Определение. Отображение $\xi(\omega, t) : \Omega \times T \to R$ называется случайным процессом, если $\forall t_0 \in T \;\; \xi(\omega, t_n)$ удовлетворяет определению случайной величины. $T \in R$ - измеримо. Если T счетно, то случайный процесс называют случайной последовательностью. Если T более чем счетно, то получаем случайную функцию. Если заменить R на R^n, то получаем случайное поле.

Траектория (реализация) и сечение.

Определение.Траекторией(реализацией) случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется любая функция вида $x(t) = \xi(\omega_o, t),$ где $\omega_0 \in \Omega$ (фиксируется исход). Конкретная траектория — это одна из возможностей развития процесса во времени.

Определение.Сечением называется случайного процесса любая случайная величина вида $\xi(\omega, t_0); t_0 \in T$ (фиксируется время). Сечение дает информацию о вероятностном распределении для конкретного момента времени.

Семейства конечномерных распределений.

Определение. Конечномерная функция распределения случайного процесса $\xi(\omega, t)$ - это любая функция вида

$F_{t_1 \ldots t_n}(x_1 \ldots x_n) = P\{\xi(\omega, t_1) < x_1, \ldots, \xi(\omega, t_n) < x_n\}.$

$t_1 < \ldots < t_n; t_i \in T; \quad x_i \in R.$

С другой стороны, это функция распределения $(\xi(\omega, t_1) \ldots \xi(\omega, t_n))$— случайного вектора . Меняя набор $n, t_1 \ldots t_n$, получим семейство конечномерных распределений случайного процесса.

Определение. Случайные процессы $\xi(\omega, t)$ и $\eta(\omega, t)$ стохастически эквивалентны, если $\forall t \in T \quad P\{\xi(\omega, t) = \eta(\omega, t)\} = 1$. Для последовательности определение можно дать в виде:

$$\forall n \in N \quad P\{\xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n)\} = 1.$$

Определение.Случайные процессы неразличимы, если

$$P\{\forall t \in T \quad \xi(\omega, t) = \eta(\omega, t)\} = 1.$$

Теорема о стохастически эквивалентных последовательностях. Стохастически эквивалентные последовательности являются неразличимыми.

Доказательство.

$$P\{\xi(\omega, t) \neq \eta(\omega, t)\} = P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi(\omega, t_n) = \eta(\omega, t_n)\} = 0.\blacksquare$$

Теорема Колмогорова об условиях существования случайного процесса с семейством конечномерных распределений, совпадающим с заданным семейством

Пусть $\{F_{t_1...t_n}(x_1...x_n)\}$ - семейство распределений со следующими свойствами:

1) Функция $F_{t_1...t_n}$ непрерывна слева по каждой из переменных при фиксации других.

2) $\forall i \quad \lim\limits_{x_i \to \infty}\{F_{t_1...t_n}(x_1...x_n)\} = 0.$

$\forall x_1...x_{i-1}, x_{i+1}...x_n \quad \lim\limits_{x_1 \to \infty}\{F_{t_1...t_n}(x_1...x_n)\} = 1.... \lim\limits_{x_n \to \infty}\{F_{t_1...t_n}(x_1...x_n)\} = 1$

3) $\forall h_i > 0 \quad \Delta_1(\Delta_2...(\Delta_n(F_{t_1...t_n}(x_1...x_n))...)) \geq 0$

$\Delta_i F = F(x_1...x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}...x_n) - F(x_1...x_i...x_n)$ - оператор конечной разности по i-й переменной.

4) $F_{t_1...t_n}(x_1...x_n)$ не меняется при любой перестановке пар индексов (t_i, x_i).

5) $\forall n > k \quad F_{t_1...t_k}(x_1...x_k) = F_{t_1...t_n}(x_1...x_k, +\infty....\infty)$

Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нем случайный процесс с семейством распределений, удовлетворяющим условиям теоремы.

Классификация случайных процессов

Опишем несколько способов классификации случайных процессов.

1)Классификация по распределению.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется гауссовским, если любому его конечномерному распределению соответствует гауссовский случайный вектор.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$,где $t > 0$,называется пуассоновским с параметром $\lambda > 0$, если:

а) Процесс "выходит"из нуля: $P\{\xi(\omega, t) = 0\} = 1$

б) Приращения процесса на неперекрывающихся интервалах независимы: $\xi(\omega, t_1) - \xi(\omega, t_0)$ и $\xi(\omega, t_3) - \xi(\omega, t_2)$ независимы $\forall 0 \quad \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

в) Приращения $\xi(\omega, t)$ являются пуассоновскими случайными величинами: $\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) \in \Pi(\lambda(t_2 - t_1))$,

Таким образом, $P\{\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) = k\} = \frac{(\lambda(t_2-t_1))^k e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{k!}$

г) Траектории $\xi(\omega, t)$ непрерывны справа с вероятностью 1.

2) Процессы второго порядка

Необходимо ввести такое понятие, как характеристики процесса.

Определение. Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется функция $m(t) = M_\xi(\omega, t) : T \to R$,которая каждому $t \in T$ сопоставляет математическое ожидание соответствующего сечения как случайной величины.

Дисперсия аналогично математическому ожиданию определяется с помощью дисперсии случайной величины: $D(t) = D\xi(\omega, t)$

Определение. Корреляционной функцией случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется функция

$$K_\xi(t_1, t_2) = cov(\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2)) = M(\xi(\omega, t_1) - M\xi(\omega, t_1)(\xi(\omega, t_2) - M_\xi(\omega, t_2)).$$

t$_1, t_2 \in T$.

Пронормировав $_xi(t_1, t_2)$ для приведения к стандартному виду, можем получить коэффициент корреляции.

$r_\xi(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{D_\xi(\omega,t_1)D_\xi(\omega,t_2)}}$ - показатель силы линейной связи между значениями случайного процесса для двух моментов времени.

Определение. Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $\xi(\omega, t)$ и $\eta(\omega, t)$ называется функция

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = cov(\xi(\omega, t_1), \eta(\omega, t_2)) = M((\xi(\omega, t_1) - M\xi(\omega, t_1))(\eta(\omega, t_2) - M\eta(\omega, t_2))).$$

Определение.Нормированной взаимной корреляционной функцией называется

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{D\xi(\omega, t_1)D\eta(\omega, t_2)}}.$$

Функция характеризует силу линейной связи двух случайных процессов в два, вообще говоря, разных момента времени.

Определение.Случайный процесс называется процессом второго порядка, если $\forall t_1, t_2 \in T \quad \exists K_\xi(t_1, t_2)$.

3.Стационарность.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется стационарным в узком смысле, если $\forall n \quad t_1 ... t_n \in T, h > 0$ распределения векторов $(\xi(\omega, t_1) .... \xi(\omega, t_n))$ и $(\xi(\omega, t_1 + h) .... \xi(\omega, t_n + h))$ совпадают. Таким образом, распределение процесса не зависит от сдвига по времени.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется стационарным в широком смысле, если $M_\xi(\omega, t) = const$ и $K_\xi(t_1, t_2) = f(t_2 - t_1)$.Здесь f- некоторая вещественная функция.

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле.

4) Характер связи между значениями процессов в различные моменты времени.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с независимыми значениями, если $\forall n \quad t_1 < t_2 < ..... < t_n; t_i \in T$ компоненты вектора $(\xi(\omega, t_1) ...... \xi(\omega, t_n))$ независимы.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если $\forall n, t_1 < t_2 < ..... < t_n; t_i \in T$ компоненты вектора $(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), ...\xi(\omega, t_n) - \xi(\omega, t_{n-1}))$ независимы.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с некоррелированными приращениями, если $\forall t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4; t_i \in T$

$cov(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3)) = 0.$

В частности,таким свойством обладает пуассоновский процесс. Заметим, что приращения рассматриваются на неперекрывающихся интервалах.

Определение.Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется процессом с ортогональными приращениями, если

$$\forall t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4; t_i \in T \quad M((\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1))(\xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3))) = 0.$$

Если учесть, что рассматривается пространство $L^2(\Omega)$(суммируемые с квадратом случайные величины), то скалярное произведение имеет вид:

$(\xi, \eta) = M(\xi, \eta)$. Тогда условия ортогональности представимы в виде:

$(\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_4) - \xi(\omega, t_3)) = 0$

5) По отсутствию/наличию памяти процесса

Определение. Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ называется марковским, если

$$\forall t_1 \cdots t_n \in T, \forall b \in B$$

$$P\{\xi(\omega, t_n) \in b \mid \xi(\omega, t_1) \cdots \xi(\omega, t_{n-1})\} = P\{\xi(\omega, t_n) \in b \mid \xi(\omega, t_1) \cdots \xi(\omega, t_{n-1})\}.$$

B-борелевская σ-алгебра.

В частных случаях $P---$вероятность для дискретного случая и плотность для абсолютно непрерывного.

2 Корреляционная теория(теория процессов 2-го порядка)

Определения и утверждения этого раздела справедливы для процессов 2-го порядка.

Определение. Говорят, что случайный процесс $\xi(\omega,t)$ сходится в среднеквадратичном к случайной величине η в точке t_0,если $\lim\limits_{t\to t_0} M(\xi(\omega,t)-\eta)^2=0$.

Скалярное произведение и норма имеют следующий вид:
$(\xi,\eta)=M(\xi\eta)$; $(\xi,\xi)=M(\xi)^2$; $\|\xi\|=\sqrt{M(\xi)^2}$.
Потому $\|(\xi(\omega,t)-\eta)\|^2=M(\xi(\omega,t)-\eta)^2$. Обозначим $l.i.m._{t\to t_0}(\xi(\omega,t)=\eta$.

Критерий сходимости процесса в среднеквадратичном.

Случайный процесс $\xi(\omega,t)$ в среднеквадратичном сходится в среднеквадратичном к η при $t\to t_0$ тогда и только тогда, когда:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} M\xi(\omega,t)=M\eta$.

2) $\lim\limits_{t_1\to t_0,t_2\to t_0} K_\xi(t_1,t_2)=D\eta$.

Доказательство.

Необходимость.

$|M\xi(\omega,t)-M\eta|=|M(\xi(\omega,t)-\eta)|\le M(|\xi(\omega,t)-\eta)|)\le\sqrt{M(\xi(\omega,t)-\eta)^2M(1)}$
(По неравенству Коши-Буняковского $M|\varphi\Theta|\le\sqrt{(M\varphi^2)(M\Theta^2)})$
Таким образом, $M\xi(\omega,t))\to\ M\eta$.
Введем обозначение для центрированного случайного процесса:
$\xi^0(\omega,t)=\xi(\omega,t)-M\xi(\omega,t)$.
В силу непрерывности скалярного произведения:

$$K_\xi(t_1,t_2)=(\xi^0(\omega,t_1),\xi^0(\omega,t_2))\to(\eta-M\eta,\eta-M\eta)=M(\eta-M\eta)^2=D\eta.$$

Достаточность.

$$||\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)\|^2=(\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2))=$$

$$(\xi^0(\omega,t_1),\xi^0(\omega,t_1))-(\xi^0(\omega,t_1),\xi^0(\omega,t_2))-(\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_1))+(\xi^0(\omega,t_2),\xi^0(\omega,t_2))=$$
$$=K_\xi(t_1,t_1)+K_\xi(t_2,t_2)-2K_\xi(t_1,t_2)\to 2D\eta-2D\eta=0.$$

Показана сходимость для центрированного процесса.Теперь докажем сходимость для исходного процесса $\xi(\omega,t)$.

$$\|\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,t_2)\|=\|\xi^0(\omega,t_1)+M\xi(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)-M\xi(\omega,t_2)\|\le$$

$$\le\|\xi^0(\omega,t_1)-\xi^0(\omega,t_2)\|+\|M\xi(\omega,t_1)-M\xi(\omega,t_2)\|\Rightarrow\|\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,t_2)\|\to 0$$

, при $t_1 \to t_2$

В $L^2(\Omega)$ критерий Коши выполняется, потому $\xi(\omega, t)$ сходится.$\blacksquare$

Замечание. Доказан сам факт сходимости случайного процесса, но не указано, к какой именно случайной величине он сходится.

Непрерывность случайных процессов.

Определение. Говорят, что процесс $\xi(\omega, t)$ непрерывен потраекторно, если $P\{\omega : \xi(\omega, t) -$непрерывная функция времени$\} = 1$.

Определение.Говорят, что процесс $\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0, если $L.i.m._{t\to t_0}\xi(\omega, t) = \xi(\omega, t_0)$ (другое обозначение: $\xi(\omega, t) \to \xi(\omega, t_0)$.)

Критерий непрерывности процесса в среднеквадратичном в точке.

Случайный процесс $\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном в точке t_0 тогда и только тогда, когда:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} M\xi(\omega, t) = M\xi(\omega, t_0)$;

2) $\lim\limits_{t_1\to t_0, t_2\to t_0} K_\xi(t_1, t_2) = D\xi(\omega, t_0)$

Доказательство. Оно следует непосредственно из критерия сходимости, если рассмотреть $\eta = \xi(\omega, t_0)$.$\blacksquare$

Критерий непрерывности процесса в среднеквадратичном на отрезке.

$\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном на отрезке $[T_1, T_2]$ тогда и только тогда, когда: 1)$M\xi(\omega, t)$ непрерывно на данном отрезке. 2)$K_\xi(t_1, t_2)$ непрерывна на диагонали квадрата $[T_1, T_2] \times [T_1, T_2]$.

Доказательство следует непосредственно из предыдущего критерия.

Теорема(необходимое условие непрерывности процесса на отрезке).

Если $\xi(\omega, t)$ непрерывен в среднеквадратичном на отрезке $[T_1, T_2]$, то $K_\xi(t_1, t_2)$ непрерывна на квадрате $[T_1, T_2] \times [T_1, T_2]$.

Доказательство.

$K_\xi(t_1, t_2) = M(\xi(\omega, t_1) - M(\xi(\omega, t_1)))(\xi(\omega, t_2) - M(\xi(\omega, t_1))) =$
$=\mathrm{M}(\xi^0(\omega, t_1)(\xi^0(\omega, t_2)) = (\xi^0(\omega, t_1), \xi^0(\omega, t_2))) \to (\xi^0(\omega, {t_1}^0)(\xi^0(\omega, {t_2}^0))) =$
$=\mathrm{K}_\xi({t_1}^0, {t_2}^0)$.

Непрерывность показана $\forall({t_1}^0, {t_2}^0)$.$\blacksquare$

Пример. Проверка процесса на непрерывность в среднеквадратичном.

$$xi(\omega, t) = \begin{cases} V_1, t < \frac{1}{2} \\ V_2, t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

V_1, V_2- независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечными положительными математическим ожиданием M и дисперсией D.

$M\xi(\omega,t) = M \Rightarrow M\xi(\omega,t)$ непрерывно.

Пусть $t_1 < \frac{1}{2}, t_2 \geq \frac{1}{2}$.

$K_\xi(t_1,t_2) = M((V_1 - MV_1)(V_2 - MV_2)) = M(V_1 - MV_1)M(V_2 - MV_2) = 0.$

Пусть $t_1 < \frac{1}{2}, t_2 < \frac{1}{2}$.

$\mathrm{K}_\xi(t_1,t_2) = M((V_1 - MV_1)(V_2 - MV_2)) = DV_1 = D$

Аналогично, если обе переменные $\geq \frac{1}{2}, K_\xi(t_1,t_2) = DV_2 = D \Rightarrow K_\xi(t_1,t_2)$ терпит разрыв в точке $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Если $t_1, t_2 \to \frac{1}{2}$ одновременно слева или справа, то предел = D, а если $t_1, t_2 \to \frac{1}{2}$ с разных сторон, то соответствующий предел корреляционной функции = 0 в силу независимости случайных величин$\Rightarrow$ $\xi(\omega,t)$ не является непрерывным в среднеквадратичном.

Дифференцирование случайных процессов в среднеквадратичном.

Определение. Производной в среднеквадратичном случайного процесса $\xi(\omega,t)$ в точке t_0 называется

$\xi'(\omega,t_0) = l.i.m._{t\to t_0}\frac{\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)}{t-t_0}.$

Очевидно, введенная производная сама является случайным процессом.

Критерий дифференцируемости в среднеквадратичном. Случайный процесс $\xi(\omega,t)$дифференцируем в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда М$\xi(\omega,t)$ дифференцируемо по t и $\exists\frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$, причем справедливы равенства:

1)$M\xi'(\omega,t) = (M\xi(\omega,t))'$;

2)$K_{\xi'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$

Интегрирование случайных процессов в среднеквадратичном.

Рассмотрим $[a,b] \in T$ и введем некоторое разбиение данного отрезка: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Введем интегральную сумму S= $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\omega,\tau_i)(t_i - t_{i-1})$. $\forall i$ произвольным образом выбирается число $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Определение. Если $\exists l.i.m._{max(t_i - t_{i-1})\to 0, n\to\infty} S$, не зависящий от разбиения и выбора точек внутри каждого элемента разбиения,то этот предел называется интегралом данного случайного процесса в среднеквадратичном на отрезке $[a,b]$и обозначается как

$$\int_a^b \xi(\omega,t)dt.$$

Интеграл в среднеквадратичном является случайной величиной.

Критерий интегрируемости случайного процесса в среднеквадратичном.

Случайный процесс $\xi(\omega,t)$ интегрируем в среднеквадратичном на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1)$M\xi(\omega,t)$ интегрируемо на $[a,b]$. 2)

$K_\xi(t_1, t_2)$ интегрируема на $[a, b] \times [a, b]$. Справедливы равенства:

$$1) M(\int_a^b \xi(\omega, t)dt) = \int_a^b M\xi(\omega, t)dt$$

$$2) D(\int_a^b \xi(\omega, t)dt) = \int_a^b \int_a^b K_\xi(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

3 Пуассоновский случайный процесс

Конечномерные распределения.

Рассмотрим $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ - моменты времени.Найдем соответствующее этим моментам вероятностное распределение.

$$P\{\xi(\omega,t_1)=k_1,\xi(\omega,t_2)=k_2\cdots\xi(\omega,t_n)=k_n\}=$$
$$\mathrm{P}\{\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,0)=k_1-0,\cdots\xi(\omega,t_n)-\xi_(\omega,t_n-1)=k_n-k_{n-1}\}=$$

$$=P\{\xi(\omega,t_1)-\xi(\omega,0)=k_1\}\cdots P\{\xi(\omega,t_n)-\xi_(\omega,t_{n-1})=k_n-k_{n-1}\}=$$

$$=\prod\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\lambda(t_i-t_{i-1})^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}=$$

$$=e^{-\lambda t_n}\lambda^{kn}\prod\nolimits_{i=1}^{n}\frac{(t_i-t_{i-1})^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}$$

Теорема о значениях пуассоновского процесса. Пусть $\xi(\omega,t)$ - пуассоновский случайный процесс с параметром $\lambda>0$. Пусть $\mathrm{N}^+=N\cup\{0\}$ Тогда $P\{\omega:\forall t\geq 0 \quad \xi(\omega,t)\in N^+\}=1$.

Почти любая траектория процесса содержит лишь неотрицательные целые числа.

Доказательство.

Обозначим $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность событий, таких, что $P\{A_n\}=1 \quad \forall n$. Тогда по свойствам вероятностной меры

$P\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\}=1$. Введем $A_t=\{\omega:\xi(\omega,t)\in N^+\}, t\in R$ −фиксировано.

Это событие связано с приращением процесса $\xi(\omega,t)=\xi(\omega,t)-\xi(\omega,0)$.

По определению пуассоновского случайного процесса $\forall t\in R\ P\{A_t\}=1$. Введем событие $B_n=\{\omega:\forall k\in N^+\xi(\frac{k}{n})\in N^+\}$.

$\mathrm{B}_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{\frac{k}{n}}\Rightarrow\forall n \quad P\{B_n\}=1$ из непрерывности вероятностной меры.

Введем $A_Q=\bigcap\limits_{t\in Q}A_t=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}B_n\Rightarrow P\{A_Q\}=1$.

Событие A_Q содержательно означает следующее: исход таков, что во всех рациональных точках значения процесса являются целыми и неотрицательными. Задавая исходы, задаем, таким образом, и множество траекторий.

Рассмотрим "неправильную"траекторию $\omega_0\in\Omega:\xi(\omega_0,t_0)\notin N^+$ для некоторого $t_0\geq 0$. Обозначим $\lambda=\xi(\omega,t_0)-[(\xi(\omega,t_0)]$. Используем тот факт,что траектория процесса непрерывна справа.

$\exists\delta > 0 : \forall t \in (t_0, t_0+\delta) |\xi(\omega_0, t) - \xi(\omega_0, t_0)| < min(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$.

Отсюда $\forall t \in (t_0, t_0+\delta)$ значение процесса $\xi(\omega_0, t)$ не будет целым. Если бы соответствующая траектория принадлежала A_Q,то значения в рациональных точках были бы целыми. Таким образом, $\omega_0 \in \overline{A_Q}$.

$P\{A_Q\} = 1. P\{\omega_0\} \le P\{\overline{A_Q}\} \Rightarrow P\{\omega_0\} = 0 \Rrightarrow P\{\omega_0 : \exists t_0 \ge 0 P(\omega_0, t_0) \notin N^+\} = 0 \Rightarrow P\{\omega_0 : \forall t \ge 0 \xi(\omega_0, t) \in N^+\} = 1$,что и требовалось доказать.■

Теорема о монотонном неубывании траекторий пуассоновского случайного процесса.

$P\{\omega : \forall t_2 > t_1 \quad \xi(\omega, t_2) \ge \xi(\omega, t_1)\} = 1$.

Траектория пуассоновского случайного процесса с вероятностью 1 является монотонно неубывающей .

Доказательство.

Введем для произвольных $t_1, t_2 \in R$ событие $A_{t_1,t_2} = \{\omega : \xi(\omega, t_2) \ge \xi(\omega, t_1)\}$. $\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) \in \Pi(\lambda(t_2 - t_1))\{A_{t_1,t_2}\} = 1$.

Аналогично теореме о значениях введем

$A_Q = \{\omega : \forall t_1 < t_2, t_1, t_2 \in Q\, \xi(\omega, t_1) \le \xi(\omega, t_1)\}$.

$\mathrm{A}_Q = \bigcap\limits_{t_1,t_2 \in Q} A_{t_1,t_2}, t_1 < t_2$. Q-счетное множество, $P\{A_{t_1,t_2}\} = 1 \Rightarrow P\{A_Q\} = 1$.

Рассмотрим "неправильную"траекторию:

$\{\omega_0 : \exists t_1, t_2 \in R, t_1 < t_2\, \xi(\omega_0, t_2) < \xi(\omega_0, t_1)\}$.

Из непрерывности справа следует:$\exists\delta > 0$

$\forall t \in (t_1, t_1+\delta) \xi(\omega_0, t) \in (\xi(\omega_0, t_1) - \frac{1}{2}, \xi(\omega_0, t_1) + \frac{1}{2})$.

$\forall t \in (t_2, t_2+\delta) \xi(\omega_0, t) \in (\xi(\omega_0, t_2) - \frac{1}{2}, \xi(\omega_0, t_2) + \frac{1}{2})$.

По предыдущей теореме почти во всех траекториях процесса значения целые.Потому без потери общности можно рассматривать именно такую траекторию.Значения целые, но в то же время на каждом из двух выделенных интервалов они отличаются менее чем на единицу, поэтому на интервалах наблюдается постоянство значений.

$\forall t \in (t_1, t_1+\delta) \xi(\omega_0, t) = \xi(\omega_0, t_1), \forall t \in (t_2, t_2+\delta) \xi(\omega_0, t) = \xi(\omega_0, t_2)$.

Постоянство наблюдается и в рациональных точках $t \in Q$.

Рассмотрим две именно такие точки $q_1 \in (t_1, t_1+\delta)$ и $q_2 \in (t_2, t_2+\delta)$

$\xi(\omega, q_1) = \xi(\omega_0, t_1) > \xi(\omega_0, t_2) = \xi(\omega, q_2); \xi(\omega, q_1) > \xi(\omega, q_2)$, $q_1, q_2 \in Q \Rightarrow \omega_0 \in \overline{A_{q_1,q_2}} \Rightarrow P\{\omega_0\} = 0$.■

Теорема о скачках пуассоновского случайного процесса.

Скачок траектории пуассоновского случайного процесса = 1 почти наверное.

Доказательство.

Введем для произвольных $t \ge 0, \delta \in R$ событие

$A_{t,\delta} = \{\omega_0 : \xi(\omega_0, t+\delta) - \xi(\omega_0, t-\delta) \ge 2\}$.

$\xi(\omega, t+\delta) - \xi(\omega, t-\delta) \sim \prod(2\lambda\delta)$.

$\mathrm{P}\{\mathrm{A}_{t,\delta}\} = 1 - P\{\xi(\omega, t+\delta) - \xi(\omega, t-\delta) = 0\} - P\{\xi(\omega, t+\delta) - \xi(\omega, t-\delta) = 1\} = 1 - \frac{e^{-2\lambda\delta}(2\lambda\delta)^0}{0!} - \frac{e^{-2\lambda\delta}(2\lambda\delta)^1}{1!} = 1 - e^{-2\lambda\delta} - 2\lambda\delta^{-2\lambda\delta} =$

Используем разложение Тейлора $e^{2\lambda\delta} = 1 + 2\lambda\delta + o(2\lambda\delta)$.

$\mathrm{P}\{\mathrm{A}_{t,\delta}\} = \mathrm{e}^{-2\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta} - 1 - 2\lambda\delta) = e^{-2\lambda\delta}o(\delta) = o(\delta)$.

Пусть $\exists t_0$, такое, что в этой точке случайный процесс имеет скачок > 1 .

Рассмотрим t,сколь угодно близкое к $t_0, \delta > 0$, сколь угодно малое, причем $\xi(\omega_0, t+\delta)$—на верхней ступеньке траектории(после скачка), $\xi(\omega_0, t-\delta)$—на нижней(до скачка, и других скачков не было).

Таким образом,скачок имеется в t_0 и некоторое время до t_0(включая $t-\delta$)ξ сохраняет значение.

Из наличия скачка$>$1 следует истинность события $A_{t,\delta}$.

$P\{$скачок в $\quad t_0 > 1\} \leq P\{\xi(\omega_0, t+\delta) - \xi(\omega_0, t-\delta) \geq 2\} = P\{A_t, \delta\} = o(\delta) \to 0, \delta \to 0.$■

4 Теория рекуррентных событий

Рассмотрим последовательность шагов, или испытаний. независимых случайных величин. Предполагается, что результаты каждого шага независимы, испытания проводятся в одних и тех же условиях. Именно по итогам испытания (с учетом предыстории) принимается решение о том, произошло или нет на данном шаге некоторое событие. Предыстория учитывается в следующем смысле: после того, как принято решение о том,событие произошло в очередной раз, результаты предыдущих шагов можно не учитывать - предыстория забывается. η_n - индикатор того, произошло ли событие на n-м шаге

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{событие произошло на n-м шаге} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Решение принимается по результатам испытаний, начиная со следующего за последним из тех, для которых $\eta_n = 1$. Если $\eta_n = 1$, то $\eta_k \ (k > n)$ не зависит от $\xi_1..\xi n$. Такие события называются рекуррентными.

Пример. Случайное блуждание. Вводится последовательность одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ со значениями -1 и 1.

$\eta_n = 1 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = 0$ - так вводится рекуррентное событие (оно соответствует каждому из моментов, когда сумма равна 0). После того, как сумма стала равна 0, для дальнейшего прогнозирования уже несущественно , каким образом это произошло.

Определим понятие рекуррентного события более формально.

Определение.Случайная величина η_n называется рекуррентным событием, построенным на основе независимых случайных величин $(\xi_1..\xi_n)$, если

1. $P\{\eta_n = 0\} + P\{\eta_n = 1\} = 1;$

2. $\forall n \, \eta_n$ - измеримо относительно $\mathcal{F}_n$ - минимальной σ - алгебры, порожденной случайными величинами $(\xi_1..\xi_n)$.

   $\mathcal{F}_n$ - минимальная σ-алгебра, содержащая все множества вида:

   $$\{\omega \colon \xi_1 < x_1, ..\xi_n < x_n\}.$$

   Меняя $n, x_1..x_n$, получаем новые множества. Измеримость в дискретном случае - это постоянство на атомах σ-алгебры. Атом - элемент σ-алгебры, неделимый в том смысле, что никакое его подмножество в σ-алгебру не входит.

3. Потеря памяти после наступления рекуррентного события.Если $\eta_n = 1$, то $\forall k > n\ \eta_k$ не зависит от $(\xi_1..\xi_n)$.

Введем в рассмотрение последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$u_n = P\{\eta_n = 1\}$ - вероятность того, что рекуррентное событие произошло на n-м шаге.

$$f_n = P\{\eta_n = 1/\eta_1 \neq 1, \eta_2 \neq 1, ..\eta_{n-1} \neq 1\}$$

- вероятность того,что рекуррентное событие впервые произошло на n-м шаге. В силу вложенности событий $f_n \leq u_n \quad \forall n$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1$, как сумма вероятностей несовместных событий. На $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ограничение отсутствует.

Полагаем,что на 0-м шаге рекуррентное событие происходит и потому $u_0 = 0$.

Определение.Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$, то рекуррентное событие называется возвратным.

Введем для данных последовательностей производящие функции.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

Известно, что оба ряда - аналитические внутри единичного круга. Найдем соотношение, связывающее ряды. Для этого надо выразить u_n через u_k и f_k, где $k < n$.

$u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{n-i} f_i.$

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} u_{n-i} f_i x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j f_n x^n = 1 + U(x)F(x)$$

$$U(x)(1 - F(x)) = 1$$

$$U(x) = \frac{1}{1 - F(x)}$$

. Получено соотношение между производящими функциями рекуррентного события.

Критерий возвратности событий

Рекуррентное событие возвратно тогда и только тогда, когда $\sum u_k$ расходится.

Доказательство.

$$U(1) = \lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

U(1) = $1\frac{}{1-F(1).}\sum_{k=1}^{\infty} f_k = F(1) = \begin{cases} 1, & \text{событие возвратно} \\ < 1, & \text{иначе} \end{cases}$

Соответственно,

$$u(1) = \begin{cases} \infty, & f(1) = 1, \text{если событие возвратно} \\ < \infty, & f(1) < 1, \text{если событие невозвратно} \end{cases}$$

■

Рассмотрим еще один способ классификации событий.

Определение.Рекуррентное событие называется периодическим, если множество $A = \{k\colon f_k > 0\}$ состоит из чисел, кратных некоторому $d > 1$

Пример. Случайные блуждания являются периодическими. Невозможно вернуться из 0 в 0 за нечетное число шагов. Количества значений k, для которых $\xi_k = 1$ и $\xi_k = -1$ в последовательности, предшествующей событию $\eta_n = 1$ должны совпадать. В данном случае

$$f_k = C_k^{k/2}(1-p)^{k/2}p^{k/2}; k = 2, 4, 6...$$

Множитель$C_k^{k/2}$ - возникает за счет выбора шагов, на которых появились эти k единиц.

Некоторые сведения из алгебры. Введем некоторые обозначения. A^+ - полугруппа,$A^\pm$ - группа.

Минимальная полугруппа на базе подмножества целых чисел содержит все возможные суммы элементов A, а минимальная группа, кроме того, содержит и разности тех же элементов.

Лемма 1.О наибольшем общем делителе некоторого множества целых чисел. Пусть $A \in N$, d=НОД(A). Тогда допустимо представление:

$$d = a_1 z_1 + ... + a_r z_r; a_i \in A; z_i \in Z \quad (4.1)$$

Доказательство. $A^\pm$ - минимальная группа, образованная на базе A(она содержит все суммы и разности элементов A). Рассмотрим $d^* = \min\{|a|, a \in A^\pm; a \neq 0\}$.

Пусть $x \in A^{\pm}$ - произвольный элемент. Справедливо представление: $x = kd^* + r; 0 \leq r < d^*$

$$r < d^*, r \geq 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow x = kd^*.$$

В качестве x можно взять $d \in A^{\pm}$. $d = kd^* \Rightarrow d/d^*; d^* \in A^{\pm} \Rightarrow d^* = a_1 z_1 + ... + a_r z_r$ $z_i \in Z; a_i \in A.a_i/d \Rightarrow d^{\pm}/d \Rightarrow d = d^{\pm}$.d=d* справедливо утверждение (4.1)■.

Лемма 2.О наибольшем общем делителе некоторого множества натуральных чисел. Пусть $A \in N; d =$НОД(A). Тогда $\exists k_0 \quad \forall k > k_0 A^+$ содержит все числа вида kd (A^+-минимальная полугруппа на базеA).

Доказательство.

$d = a_1 z_1 + ... + a_r z_r$-представление из предыдущей леммы; $a_i \in A; z_i \in Z$. Пусть $s = a_1 + .. + a_r$.Рассмотрим произвольный элемент $x \in A^+$, делим его на s:

$$x = ks + l;$$

$$0 \leq l < s;$$

$$l = x - ks = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i - ks.$$

Здесь $x = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i . b_i \in A, y_i \in N, k \in N\$.A^+$. По построению каждое из слагаемых делится на $d \Rightarrow l/d . 0 \leq l^* < \frac{s}{d}; l^* d = l$.

$$x = ks + l^* d = k(\sum_{i=1}^{r} a_i) + l^*(\sum_{i=1}^{r} a_i z_i) = \sum_{i=1}^{r} a_i (z_i l^* + k) =$$

Наложим условие на слагаемое в скобках: $l^* < \frac{s}{d}$, z_i может быть отрицательным

$$k > \frac{s}{d} \max \{|z_1|, |z_2| ... |z_n|\}; c_i = z_i l^* + k$$

x=$\sum_{i=1}^{r} a_i c_i$. (4.2)c_iзависит от k.

Для достаточно большого k (или для достаточно большого x, так как $x = ks + l$)справедливо представление (4.2). x_m - минимальный элемент A^+, для которого справедливо (4.2). Рассмотрим любое $x \in A^{\pm}, x > x_m$. Повторив рассуждения с начала, снова получим (4.2). Данный x будет одновременно принадлежать $A^{\pm}$, но и A^+, так как $c_i > 0$. По предыдущей лемме $\forall x \in A^{\pm}$ верно представление $x = kd, k \in N, d =$НОД(A). Ввиду того, что для достаточно больших k принадлежность к A^+ и $A^{\pm}$ равносильна, требуемое доказано. ■.

Лемма 3. О вероятностном распределении на множестве натуральных чисел. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ - вероятностное распределение на множестве натуральных чисел, $p_k = p\{\xi = k\}; A = \{k\colon P_k > 0\}$, $d =$НОД(A), $x_i \in [0;1]$. Предположим, верно рекуррентное представление $x_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n-k}p_k; x_0 = 1$. Тогда $\forall n \qquad x_n = 1$.

Доказательство

$$1 = x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k}p_k \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{-k}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow \forall k x_{-k}p_k = p_k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_k = 0, & k \notin A \\ x_{-k} = 1, & k \in A \end{cases}$$

$\forall k \in A x_{-k} = 1$ Рассмотрим произвольное $a \in A$ и применим к нему рекуррентную формулу:

$$1 = x_{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-a-k}p_k \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

(эти ряды равны)

$$\Rightarrow \forall k p_k = x_{-a-k}p_k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_k = 0, & k \notin A \\ x_{-a-k} = 1, & k \in A, a \in A \end{cases}$$

$$\forall l \in A^+ x_l = 1; l = a + k, a \in A, k \in A.$$

По лемме 2 A^+ содержит некоторый "хвост"натурального ряда(все элементы$>kd$). d=НОД(A)=1

$\exists k_0 \in N \quad \forall k > k_0, x_{-k} = 1$. Из того же рекуррентного соотношения получаем $x_{-k0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{-k0-k}p_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ $x_{-k0} = 1; \quad x_{-k0+1} = 1; \quad x_{-k0+2} = 1...$

■

Лемма 4.О пределе 2-мерной последовательности. Рассмотрим последовательность $q_{i,j}; i \in Z; j \in N; q_{i,j} \in R$. Тогда можно выделить подпоследовательность $i_{k k\in N}$ такую, что

$$\forall j \in N \quad \exists \lim_{k\to\infty} q_{i_k j}$$

.

Теорема о возвращении (о пределе вероятности появления рекуррентного события). Пусть рекуррентное событие возвратно и непериодично. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{M(T)},$$

где T - время между двумя соседними появлениями рекуррентного события.

Замечание. Пусть T_i-время между i-м и (i+1)-м появлением рекуррентного события.Очевидно, что $T_1, T_2, ..$ - разные случайные величины, но у них одно распределение, потому индекс можно опустить.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ необязательно существует, но $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ должен существовать, $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = l$. Ввиду ограниченности последовательности найдется подпоследовательность $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_{a_n} = l.$$

Построим специальную таблицу.В каждой строке записывается последовательность $\{u_n\}$ так, чтоб $u_{a1}, u_{a2}, u_{a3}...$ находились в одном столбце и именно в порядке возрастания номера. Слева каждая строка дополняется нулями. Используем

Таблица 1:

		0	0	u_1	u_2	...	u_{a_1}	u_{a_1+1}	u_{a_2}	
0	0	u_1	u_2	...	...	u_{a_2}	u_{a_2+1}	u_{a_3}	...	
u_1	u_2	...	...	...	...	u_{a_3}	u_{a_3+1}	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	u_{a_n}	u_{a_n+1}	...	...	

лемму 4, $q_{i,j}$ - элемент i-й строки, j-го столбца матрицы. Выделение подпоследовательности по первому индексу соответствует удалению определенного числа строк из матрицы. Оставшиеся строки обеспечат сходимость в каждом столбце, а не только в центральном. Новую последовательность обозначим $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, она имеет тот же предел.

$$\lim_{n\to\infty} u_{b_n} = l.$$

Введём единое обозначение для всех элементов таблицы, включая нули.

$$u^*_{b_{n+k}} = \begin{cases} u_{b_n+k}, & b_n + k > 0 \\ 0, & b_n + k \leqslant 0 \end{cases}$$

, где u_{b_n+k} - элементы столбца, сдвинутого на k вправо от центрального.

$$u_{b_n+k} = \sum_{p=1}^{b_n+k} u_{b_n+k-p} f_p + 0f_{p+1} + 0f_{p+2} + ... = \sum_{p=1}^{\infty} u^*_{b_n+k-p} f_p \leq \sum_{p=1}^{\infty} f_p = 1$$, где

$u_{b_n+k} = u^*_{b_n+k}$. Ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p$ сходится $\Rightarrow \exists N \ \forall n > N \sum\limits_{p=N+1}^{\infty} f_p < \varepsilon$.

$$0 \leq u^*_{b_n+k} - \sum_{p=1}^{N} u^*_{b_n+k-p} f_p = \sum_{p=N+1}^{\infty} \underbrace{u^*_{b_n+k-p}}_{\leq 1} f_p \leq \sum_{p=N-1}^{\infty} f_p < \varepsilon \Rightarrow u^*_{b_n+k}$$ сходится.

$\lim\limits_{n\to\infty} u^*_{b_n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{p=1}^{\infty} u_{b_n+k-p} f_p) \Rightarrow x_{-k} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} x_{-(k-p)} f_p$. Здесь по определению $x_{-k} = \lim\limits_{n\to\infty} u^*_{b_n+k}$. Таким образом, x_{-k} - предел в столбце матрицы, сдвинутом на k позиций вправо от центрального столбца.

Докажем, что пределы в каждом столбце совпадают. Рассмотрим 2 случая:

1)$l > 0$. Обозначим $\omega_k = x_{-k}$; $\omega_k = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{k-p}$ (4.3)

$\frac{\omega_k}{l} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \omega_{k-p}}{l}$ (4.4).

Рассмотрим последовательность $\{\frac{\omega_k}{l}\}$ применительно к условиям леммы о рекуррентном соотношении. Роль $\{p_k\}$ -вероятностного распределения на множестве N выполняет $\{f_p\}$. Таким образом, все условия леммы выполняются:

$x_k = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_k}{l} = 1 \Rightarrow \omega_k = l \Rightarrow x_k = l$. Пределы во всех столбцах одинаковы.

2) l = 0. $\omega_0 = l = 0 = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{-p}$ (4.5)

Рассмотрим множество $A = \{p : f_p > 0\}$. Рассмотрим слагаемые в (4.5). Они неотрицательны, но дают в сумме 0, и потому все они должны быть = 0. $p \in A \Rightarrow f_p \neq 0 \Rightarrow \omega_{-p} = 0$. $\omega_{-p} = \sum\limits_{q=1}^{\infty} f_q \omega_{-q-p}$.$p \in A, q \in A \Rightarrow f_q \neq 0 \Rightarrow \omega_{-p-q} = 0 \Rightarrow \forall p \in A^+ \ \omega_{-p} = 0$.

По условию теоремы рекуррентное событие не является периодичным и потому d = НОД(A) = 1. По лемме 2 A^+ содержит некоторый хвост натурального ряда, то есть все числа больше некоторого $k_0 \Rightarrow \omega_{-k} = 0 \ \forall k > k_0$. $\omega_{-k_0} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} f_p \omega_{-k_0-p}$ (следует из (4.4)) $k_0 + p > k_0 \Rightarrow \omega_{-k_0-p} = 0 \Rightarrow \omega_{-k_0} = 0$.

Аналогично выражаем ω_{-k_0+1} и ω_{-k_0+2}через ω с меньшими номерами $\Rightarrow$ $\omega_{-k} = 0 \ \forall k$.

Итак, в таблице, преобразованной с помощью удаления строк, для каждого столбца пределы не только существуют, но и равны. Осталось доказать, что частичные пределы являются полными и равны $\frac{1}{M(T)}$. Рассмотрим последовательность $\overline{F_k} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f_i$. Используем формулу $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k} f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k} \overline{F_{k-1}} - \overline{F_k}$,$f_k = \overline{F_{k-1}} - \overline{F_k}$

$u_n = \underbrace{\overline{F_0} u_{n-1}} - \overbrace{\overline{F_1} u_{n-1}} + \overline{F_1} u_{n-2} - \overbrace{\overline{F_2} u_{n-2}} + ... + \overline{F_{n-1}} u_0 - \overbrace{\overline{F_n} u_0}.$

$u_{n-1} = \underbrace{\overline{F_0} u_{n-2}} - \overline{F_1} u_{n-2} + \overline{F_1} u_{n-3} - \overline{F_2} u_{n-3} + ... + \overline{F_{n-2}} u_0 - \overline{F_{n-1}} u_0$

u$_1 = \underbrace{\overline{F_0} u_0} - \overline{F_1} u_0$.

Если суммировать левые и правые части каждого равенства, то всё, что не помечено, сократится. $u_1+...+u_n = -\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F_k}u_{n-k} + \underbrace{\overline{F_0}}_{=1}(u_{n-1}+...+u_0)$.

$u_n = u_0 - \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F_k}u_{n-k}$.

$u_n\overline{F_0} = u_0 - \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F_k}u_{n-k}$.

$\underbrace{u_0}_{=1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\overline{F_k}u_{n-k}$.

$\sum\limits_{k=0}^{n}\overline{F_k}u_{n-k} = 1.(4.6)$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{F_k}$ сходится. От противного предполагаем, что он расходится. В качестве n рассмотрим b_n+p. $1 = \sum\limits_{k=0}^{b_n+p}\overline{F_k}u_{b_n+p-k} \geqslant \frac{l}{2}\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{b_n+p}\overline{F_k}}_{\to\infty}$ ($u_{b_n+p-k}\to l$ при $n\to\infty \Rightarrow u_{b_n+p-k} > \frac{l}{2}$ для достаточно больших n), $1 \geqslant \infty$ - противоречие.

Найдём сумму этого ряда.$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{F_k} = (f_1+f_2+...)+(f_2+f_3+...)+(f_3...) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}kf_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}kP\{T_1=k\} = M(T_1) = M(T)$.

$\sum\overline{F_k}$ - сходится $\Rightarrow$ остаток $\to 0$. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon\ \forall k>k_\varepsilon\ \sum\limits_{i=k}^{\infty}\overline{F_i}<\varepsilon$.

$1 = \sum\limits_{k=0}^{b_n+m}\overline{F_k}u_{b_n+m-k} = \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon}\overline{F_k}u_{b_n+m-k} + \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m}\overline{F_k}u_{b_n+m-k}(4.7)$.Оценим (4.7) сверху.

$1 = \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon}\overline{F_k}\underbrace{u_{b_n+m-k}}_{\le 1} + \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m}\overline{F_k}\underbrace{u_{b_n+m-k}}_{\le 1} \le l\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon}\overline{F_k}}_{\to M(T)} + \underbrace{\sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{b_n+m}F_k}_{<\varepsilon}$.

$1 \le \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon}\overline{F_k}M(T)+\varepsilon$.

$\varepsilon\to 0 \Rightarrow k_\varepsilon\to\infty \Rightarrow 1\le lM(T)$

$1 \ge \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon}\overline{F_k}u_{b_n+m-k}$ - берём ограничение с другой стороны. $n\to\infty, \varepsilon\to 0 \Rightarrow b_n\to\infty, k_\varepsilon\to\infty \Rightarrow u_{b_n+m-k}\to l \Rightarrow 1 \ge \sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{F_k}l = l\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{F_k} = lM(T)$.

$1\ge lM(T); 1\le lM(T) \Rightarrow l = \frac{1}{M(T)}$.

Осталось доказать, что l полный предел, а не частичный. Докажем это от противного. Пусть $l_1 = \lim\limits_{r\to\infty} u_{n_r} < l$; $\{u_{n_r}\}$ - некоторая сходящаяся подпоследовательность. Рассмотрим равенство $\sum\limits_{k=0}^{n_r} \overline{F_k} u_{n_r-k} = 1$.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon\ \forall\ L > k_\varepsilon\ \sum\limits_{k>L} \overline{F_k} < \varepsilon$. ε и r подбираем таким образом, чтобы $k_\varepsilon < L < n_r$.

$1 = \overline{F_0} u_{n_r} + \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} u_{n_r-k} + \sum\limits_{k=L+1}^{n_r} \overline{F_k} u_{n_r-k} \le (\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ u_n < l + \varepsilon.$

k $\le L \Rightarrow$ если $n_r > N + L \Rightarrow n_r - k > N \Rightarrow u_{n_r-k} < l + \varepsilon) < \overline{F_0} u_{n_r} + \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} \underbrace{u_{n_r-k}}_{<l+\varepsilon} + \varepsilon < u_{n_r} + (l+\varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{F_k} + \varepsilon = u_{n_r} + (l+\varepsilon)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} - \overline{F_0} - \sum\limits_{k=L+1}^{\infty} \overline{F_k}) + \varepsilon =$
$u_{n_r} + l(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{F_k} - \overline{F_0} - \underbrace{\sum_{k=L+1}^{\infty}}_{=C} \overline{F_k}) + \varepsilon(1 + \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{F_k}) \le u_{n_r} + lMT - l - lC + \varepsilon + \varepsilon M(T) \le$
$u_{n_r} + \varepsilon MT + 1 + \underbrace{lM(T)}_{=1} - l.$

$1 \le 1 + u_{n_r} + \varepsilon(MT+1) - l \Rightarrow 0 \le u_{n_r} - l + \varepsilon(MT+1); \varepsilon \to 0, r \to \infty \Rightarrow 0 \le l_1 - l + 0 \Rightarrow l_1 \ge l.$

$l_1 \le l, l_1 \ge l \Rightarrow l_1 = l \Rightarrow$ l - полный предел.Мы предполагали, что $l \ne 0$. Иначе $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} u_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n = l = 0$. $l = \frac{1}{\underbrace{MT}_{\to\infty}} = 0$, что и требовалось доказать.

∎

5 Цепи Маркова

Частный случай марковского процесса—дискретная марковская цепь. Она возникает, если процесс с ненулевой вероятностью принимает не более чем счетное множество значений.

Тогда определение (для дискретного времени) принимает вид: Последовательность дискретных случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется дискретной марковской цепью, если

$$P\{\xi_n = x_n \mid \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 \cdots \xi_{n-1} = x_{n-1}\} = P\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (5.1)$$

(Будущее связано с прошлым через настоящее).

Если в (5.1) вероятности зависят лишь от $x_1 \cdots x_n$, но не от n, то цепь называется однородной.Чтобы задать такую цепь, достаточно определить начальное распределение и для каждого шага матрицу, содержащую $P\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\}$.Для неоднородной цепи переходную матрицу необходимо задавать на каждом шаге.

Здесь $\forall i\ x_i$ -вещественное число, обеспечивающее корректность задания упомянутых в определении условных вероятностей. Все такие числа образуют множество состояний E. Размерность матрицы определяется числом состояний.

Соответственно в однородном случае(он и будет рассмотрен в этой части пособия) P— матрица переходных вероятностей. $P_{i,j} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = x_i\}$, $i, j \in E$.

Обозначим $P_{i,j}^{(k)} = P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-k} = x_i\}$, соответственно $P^{(k)}$-матрица вероятностей перехода за k шагов.

Определение.Состояние марковской цепи $i \in E$ называется несущественным,если $\exists j \in E, j \neq i, \exists k \in N\ P_{i,j}^{(k)} > 0$, $\forall r \in N\ P_{i,j}^{(r)} = 0$ Таким образом, из состояния i можно за некоторое число шагов перейти в состояние j, но нельзя ни за какое число шагов вернуться обратно)

Определение. Состояние $i \in E$ называется периодическим с периодом $d{>}1$, если $\{k \in N : P_{i,j}^{(}k) > 0\}$ содержит лишь числа,кратные d, причем d- наибольшее из подходящих чисел. Если такого числа d не существует, состояние называют непериодическим.

Определение.Состояние $i \in E$ называется нулевым, если $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,i} = 0$

Пример. 2 корабля одновременно стреляют друг в друга. $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ - вероятность попадания для 1-го и 2-го соответственно.

Один шаг-это обмен выстрелами.Состояние цепи-число кораблей, оставшихся в строю. Построим переходную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$E = \{0, 1, 2\}$

Введем А и В - события, связанные с попаданием в цель 1-го и 2-го корабля соответственно. $P_{2,0} = P\{A * B\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4}$; $P_{2,2} = P\{\overline{A * B}\} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4}$; Существенными будут состояния будут 0 и 1, т.к. из 0 и 1 нельзя перейти в другие состояния. Состояние 2-несущественно,т.к. из него можно перейти в другие состояния, а обратно вернуться нельзя(число кораблей не увеличивается). Пусть вектор $p^0 = (p_1^0, p_2^0, ...)$- начальное распределение дискретной однородной цепи Маркова. Размерность вектора определяется числом состояний. $P_i^0 = P\{\xi_0 = i\}$.(вероятность того, что на нулевом шаге система находится в i-м состоянии).

Теорема (о вероятностном распределении для цепи на n-ом шаге) Пусть дана переходная матрица и начальное распределение p^0. Тогда вероятностное распределение на n-м шаге определяется так:$P\{\xi_n = j\} = \sum\limits_{k \in E} p_k^0 p_{k,j}^{(n)}$

Доказательство.

Используем формулу полной вероятности.

$P\{B\} = \sum\limits_k P\{B/A_k\}P\{A_k\}$. $A_k = P\{\xi_0 = k\} \Rightarrow P\{A_k\} = P_k^0, P\{B/A_k\} = p_{k,j}^{(n)}$.

Теорема Колмогорова-Чепмена о матрице перехода за k шагов

$P^{(k)} = P^k$. Матрица в правой части - k-я степень исходной матрицы.

Доказательство $P\{\xi_n = j/\xi_{n-k} = i\} = \frac{P\{\xi_n = j, \xi_{n-k} = i\}}{P\{\xi_{n-k} = i\}} = \sum\limits_{l \in E} \frac{P\{\xi_n = j, \xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\}}{P\{\xi_{n-k} = i\}} = \sum\limits_{l \in E} \frac{P\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\} \cdot P\{\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\}}{P\{\xi_{n-k} = i\}}$.

Покажем, что второе условие можно отбросить. $P\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\} =$

$\frac{P\{\xi_n = j, \xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\}}{P\{\xi_{n-1} = l, \xi_{n-k} = i\}} =$

$\sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, ...\xi_{n-k-1} = i_{n-k-1}, \xi_{n-k} = i, \xi_{n-k+1} = i_{n-k+1}, ..., \xi_n = j\} \frac{}{\sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, ...\xi_{n-k-1} = i_{n-k-1}, \xi_{n-k} = i, \xi_{n-k+1} = i_{n-k+1}, ..., \xi_{n-1} = l\}}$

$= \sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_n = j/\xi_1 = i_1, ...\xi_{n-1} = l\} P\{\xi_1 = i_1, ...\xi_n = l\} \frac{}{\sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, ...\xi_{n-1} = l\} =}$

$= \sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l\} P\{\xi_1 = i_1, ...\xi_n = l\} \frac{}{\sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} P\{\xi_1 = i_1, ...\xi_{n-1} = l\} =}$

P$\{\xi_n = j/\xi_{n-1} = l\}$.

Подставив в исходную вероятность, получаем: $= \frac{\sum\limits_{l\in E} P\{\xi_n=j/\xi_{n-1}=l\}\cdot P\{\xi_{n-1}=l,\xi_{n-k}=i\}}{P\{\xi_{n-k}=i\}} = \sum\limits_{l\in E}\underbrace{P_{l,j}P_{i,l}^{(k-1)}}_{P_{i,j}^{(k)}}$

$P^{(k)} = P^{(k-1)}P = ... = PP^{k-1} = P^k$. Скалярное равенство Колмогорова-Чепмена: $P_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{l\in E} P_{i,l}^{(m)}P_{l,j}^{(n-m)}$

Неравенство Колмогорова-Чепмена:$P_{i,j}^{(n)} \geq P_{i,l}^{(m)}P_{l,j}^{(n-m)}$

Промежуточных состояний может быть больше, например,три:

Тройное неравенство Колмогорова-Чепмена: $P_{i,j}^{(n)} \geq P_{i,k}^{(m_1)}P_{k,l}^{(m_2)}P_{l,j}^{(n-m_1-m_2)}$

Определение. Состояния цепи Маркова i и j называются сообщающимися, если $\exists k,l \in N : P_{i,j}^{(k)} > 0, P_{j,i}^{(l)} > 0$ (то есть можно перейти из i в j и наоборот).

Теорема (о сообщаемости как отношении эквивалентности)

Отношение сообщаемости является отношением эквивалентности на классе состояний цепи

Доказательство.Рефлексивность и симметричность очевидны, определение симметрично относительно i и j, каждое состояние сообщается с собой. Докажем транзитивность. Пусть i и j, j и k - две пары сообщающихся состояний $\Rightarrow \exists m,l \in N : P_{i,j}^{(m)} > 0, P_{j,i}^{(l)} > 0$.

по неравенству Колмогорова-Чепмена$P_{i,k}^{(m+l)} \geq \underbrace{P_{i,j}^{(m)}}_{>0}\underbrace{P_{j,k}^{(l)}}_{>0} > 0$. Аналогично

в другую сторону $\exists n,t \in N : P_{k,j}^{(n)} > 0, P_{j,i}^{(t)} > 0 . P_{k,i}^{(n+t)} \geq P_{k,j}^{(n)}P_{j,i}^{(t)} > 0 \Rightarrow$ i и k сообщаются. Что и требовалось доказать.

Определение. Цепь Маркова неприводима, если она состоит из одного класса сообщающихся между собой существенных состояний.

Пример: цепь с такой матрицей не является неприводимой.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Определение. Состояние называется возвратным или периодичным, если возвратно или периодично соответствующее рекуррентное событие - возврат в данное состояние.

Теоремы солидарности.

Первая теорема солидарности (о периодичности) Если в неприводимой цепи Маркова есть одно периодичное состояние с периодом d, то остальные состояния периодичны с тем же периодом, а все множество состояний можно разбить на d классов $x_0, ..., x_{d-1}$, причём из класса $x_k, k \neq d-1$ за один шаг можно перейти только в x_{k+1}, а из x_{d-1} только в x_0.

Доказательство. Предположим, состояние $1 \in E$ периодично. Рассмотрим другое состояние $i \neq 1, i \in E$. В силу неприводимости цепи $\exists l, m, n \in N : p_{1,i}^{(n)} > 0, p_{i,1}^{(m)} > 0, p_{i,i}^{(l)} > 0. p_{1,1}^{(n+m)} \geq p_{i,1}^{(m)} p_{i,i}^{(l)} > 0 \Rightarrow$ за $n+m$ шагов можно перейти из 1 в 1 $\Rightarrow n+m$ делит d. $p_n^{(l+n+m)} \geq p_{i,1}^{(m)} p_{i,i}^{(l)} p_{1,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow n+m+l$ тоже делит d $\Rightarrow$ l делит d, а l - произвольное число шагов, за которое можно вернуться из i в i. i периодично с периодом d_i и d_i/d. В рассуждениях 1 и i можно поменять местами $\Rightarrow d/d_i \Rightarrow d_i = d \Rightarrow$ все события периодичны с одним и тем же периодом.

Зафиксируем 1-е состояние $1 \in E, i \neq 1 \in E, \exists n, p_{1,i}^{(n)} > 0$. Обозначим $r_i = n \ mod \ d$. Покажем, что r_i не зависит от n.

$\exists l \in N, p_{i,1}^{(l)} > 0, p_{1,1}^{(n+l)} \geq p_{1,i}^{(n)} p_{1,i}^{(l)} > 0 \Rightarrow (n+l)/d$. Рассмотрим другое состояние $m \neq n$, такое, что $p_{1,i}^{(m)} > 0$ (предположим, что такое состояние есть). $p_{1,1}^{(m+l)} \geq p_{1,i}^{(m)} p_{i,1}^{(l)} > 0 \Rightarrow (m+l)/d$.

$n \ mod \ d = m \ mod \ d$.

Пусть $x_k = \{i \in E : p_{1,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow k = n \ mod \ d\}$.

Класс x_k содержит такие состояния, что при переходе в них из 1-го используется число шагов, дающее при делении на d остаток k. Рассмотрим j: $p_{i,j}^{(1)} > 0$, такое состояние существует, иначе из i нельзя было бы никуда перейти.

$p_{i,j}^{(n+1)} \geq p_{1,i}^{(n)} p_{i,j}^{(1)} > 0$

$$(n+1) \ mod \ d \ = \begin{cases} k+1, & k < n-1 \\ 0, & k = n-1 \end{cases}$$

Меняя j, мы перебираем состояния, в которые можно перейти из x_k за один шаг, и эти состояния действительно образуют класс с номером $k+1$ или 0. Это $x_{k+1}(k < n-1), x_0(k = n-1)$. Что и требовалось доказать.

Вторая теорема солидарности (о возвратности) Если в неприводимой цепи Маркова одно состояние возвратно, то и остальные тоже возвратны.

Доказательство. Используем критерий возвратности $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = \infty$. Добавим к обозначению для элементов ряда индекс сверху. Индекс (1), в частности, указывает на 1-е состояние. Предположим, что именно оно возвратно. Тогда $u_k^{(1)} = p_{1,1}^{(k)}$. Рассмотрим i∈E, i≠1. $\exists n, l \in N$: $p_{i,1}^{(n)} > 0$, $p_{1,i}^{(l)} > 0$. $p_{i,1}^{(n)} p_{1,i}^{(l)} > 0 \Rightarrow u_{n+m+l}^{(i)} \geqslant u_m^{(1)} \Rightarrow \sum\limits_{m=0}^{\infty} u_{n+m+l}^{(i)} = \infty \Rightarrow$ i-е состояние возвратно.■

Случайные блуждания. Критерий возвратности. Случайное блуждание возвратно тогда и только тогда, когда оно симметрично.

Цепь неприводима, так как все состояния существенны и сообщаются между собой. Если $p = \frac{1}{2}$, то блуждания называются симметричными.

$$p_{i,j} = P\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i\} \; = \begin{cases} 1-p, & j = i-1 \\ p, & j = i+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

■

Доказательство. Так как цепь неприводима, то достаточно рассмотреть одно состояние -0, соответствующее моменту, когда сумма индикаторов $\sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j = 0$. В это состояние можно вернуться на шагах с четными номерами. Рассмотрим сумму:

$\sum\limits_{i=1}^{N} p_{0,0}(2n) = \mathrm{p}_{0,0}(2n) = \mathcal{C}_{2n}^{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n.$

По формуле Стирлинга

$p_{0,0}(2n) \simeq \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{-n}}{(n)^{2n}2\pi n e^{-n}} p^n (1-p)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}.}$

$\sum\limits_{i=1}^{N} p_{0,0}(2n) = \begin{cases} \infty, & p = q = 0.5, \text{ ряд расходится} \\ < \infty, & p \neq, \text{ ряд сходится} \end{cases}$ ■

Третья теорема солидарности. Если в неприводимой марковской цепи одно из состояний нулевое, то остальные состояния тоже являются нулевыми.

Доказательство: Пусть i-е состояние - нулевое. $i \in E$. Рассмотрим $j \neq i, j \in E$. Цепь неприводима, следовательно, $\exists k, l \in N : p_{i,j}^{(k)} > 0, p_{j,i}^{(l)} > 0$. По неравенству Колмогорова-Чепмена: $p_{i,i}^{(k+n+l)} \geqslant p_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n)} p_{j,i}^{(l)} \geqslant C p_{j,j}^{(n)}$

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,i}^{(k+n+l)} \geqslant C \lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} \geqslant 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} = 0 \Rightarrow j$ - нулевое. ■

Определение. Переходная матрица марковской цепи P называется регулярной, если $\exists t > 0$, такое, что матрица $P^{(t)}$ не содержит нулевых элементов. Таким образом, есть число шагов, за которое все переходы возможны.

Первая предельная теорема. Рассмотрим конечную (с N состояниями) марковскую цепь с регулярной матрицей. Справедливо утверждение:

$\forall i, j \in \{1, N\} \exists \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = q_j$

Доказательство. Введем два вида последовательностей: $M_j(n) = \max\limits_{i=1,N} p_{i,j}^{(n)}$; $m_j(n) = \min\limits_{i=1,N} p_{i,j}^{(n)}$. Докажем их монотонность.

$\exists i_0 \in E M_j(n+1) = p_{i_0,j}^{(n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_0,k} p_{k,j}^{(n)} \leqslant M_j(n) \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_0,k} \Rightarrow M_j(n+1) \leqslant M_j(n).$

Последовательности - монотонно невозрастающие. Аналогично все последовательности $m_j(n)$- монотонно неубывающие. $M_j(n)$ и $m_j(n)$ монотонны и ограничены $\Rightarrow \forall j \qquad \exists m_j = \lim\limits_{n\to\infty} m_j(n)$, $\exists M_j = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n)$. Надо доказать, что $\forall j$ $m_j = M_j$.

Введем $q_{i,k,j}(n) = p_{i,j}^{(n)} - p_{k,j}^{(n)}$.

$\sum\limits_{j=1}^{N} q_{i,k,j}(n) = \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} - \sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}^{(n)} = 0$, и пусть t - одна из тех степеней, за счет которых достигается регулярность матрицы P.

$$q_{i,k,j}(n) = \sum_{l=1}^{N} p_{i,l}^{(t)} p_{l,j}^{(n-1)} - \sum_{l=1}^{N} p_{k,l}^{(t)} p_{l,j}^{(n-t)} = \sum_{l=1}^{N} (p_{i,l}^{(t)} - p_{k,l}^{(t)}) p_{l,j}^{(n-t)}.$$

$$0 = \sum_{l=1}^{N} q_{i,k,l}(t) = \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) + \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) \Rightarrow \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) =$$

$=$

$$- \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t).$$

$$q_{i,k,j}(n) = \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) p_{l,j}^{(n-t)} + \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) p_{l,j}^{(n-t)} \leqslant$$

$$\leqslant m_j(n-t) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)<0} q_{i,k,l}(t) + M_j(n-t) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) =$$

$$= (M_j(n-t) - m_j(n-t)) \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t).$$

$$q_{i,k}(t) = \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} q_{i,k,l}(t) = \underbrace{\sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} (p_{i,l}^{(t)} - p_{k,l}^{(t)}) <}_{} \sum_{l:q_{i,k,l}(t)>0} p_{i,l}^{(t)} \leq 1$$

$\forall k, l \quad p_{k,l}^{(t)} > 0$.

Обозначим $q = \max\limits_{i,k} q_{i,k}(t) < 1$

Таким образом, $p_{i,j}^{(n)} - p_{k,j}^{(n)} \leqslant q(M_j(n-t) - m_j(n-t))$. Подбираем i, k так, чтобы $p_{i,j}^{(n)}$ была максимальной из возможных, а $p_{k,j}^{(n)}$ минимальной. $p_{i,j}^{(n)} = M_j(n) p_{k,j}^{(n)} = m_j(n) \Rightarrow M_j(n) - m_j(n) \leqslant q(M_j(n) - m_j(n))$. Переходим к пределу: $M_j - m_j \leqslant q(M_j - m_j)$,$q < 1 \Rightarrow M_j - m_j = 0$.

С другой стороны, $m_j \leqslant p_{i,j}(n) \leqslant M_j \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = M_j = m_j$.■

Вторая предельная теорема. Пусть марковская цепь конечна и имеет N состояний, ее матрица P регулярна, тогда $\forall j \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\}$.

Доказательство. Справедливо равенство Колмогорова-Чепмена :

$p_k^{(n+m)} = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)} p_{j,k}^{(m)}$. Здесь $p_k^{(n+m)} = p\{\xi_{n+m} = k\}$.

Аналогично $p_j(n). \cdot \lim\limits_{n\to\infty} p_k^{(n+m)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)} p_{j,k}^{(m)}) =$

$q_k \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{j=1}^{N} p_j^{(n)}) = q_k$ - совпадает с результатом первой теоремы. Переходные вероятности и вероятности для состояний стремятся к одному и тому же пределу.

Нахождение предельных вероятностей.

Используем аналоги равенства Колмогорова-Чепмена для вероятностей состояний:

$p_k^{(n+1)} = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j(n) p_{j,k}$. Перейдем к пределу: $q_k = \sum\limits_{j=1}^{N} q_j p_{j,k}$. Рассмотрим вектор $q = (q_1 ... q_N); qE = qP; q(E-P) = 0$ - ноль-вектор. Имеем N уравнений с матрицей E-P. $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1; \sum\limits_{j=1}^{N} e_{i,j} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{N} (e_{i,j} - p_{i,j}) = 0$. Столбцы матрицы E-P линейно зависимы $\Rightarrow rang(E-P) < N \Rightarrow$ система имеет бесконечное число решений. Чтобы получить единственное решение, нужно добавить условие:

$\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)}) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{N} q_j; \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{N} q_j = 1.$

Стационарное распределение для цепи Маркова.

Пусть предельное распределение для цепи Маркова известно, оно вычислено, а начальное распределение совпадает с предельным(векторы p и q совпадают).

Используем равенство Колмогорова-Чепмена:

$q_k = \sum\limits_{j=1}^{N} q_i p_{i,j}$.

На это равенство можно смотреть с двух сторон. С одной стороны, это элемент системы,из которой находят предельные вероятность. С другой стороны, слева- вероятность того, что система на 1-ом шаге перейдет в k-е состояние, а справа q_i – предельная вероятность, следовательно, распределение на 1-ом шаге совпадает с начальным и предельным. Далее по аналогии получаем: слева- вероятность на 2-ом шаге, справа - предельная вероятность, она же вероятность на первом шаге,следовательно, распределение вероятностей на множестве состояний не зависит от шага. Это распределение принято называть стационарным.

6 Ветвящиеся процессы.

Это один из широко распространенных видов марковских дискретных неоднородных цепей. Рассмотрим популяцию, состоящую из однотипных частиц и последовательность моментов времени. На шагах, соответствующих определенным моментам, могут рождаться новые частицы. На нулевом шаге рождается одна частица. Любая частица, родившаяся на n-м шаге, на (n+1)-м шаге может дать некоторое число потомков. При этом вероятностное распределение количества частиц, порожденных одной частицей, на любом шаге не меняется.

Определение. Последовательность $\{\xi_n\}$ —- число вышеописанных частиц, порожденных на n-м шаге называется ветвящимся процессом.

Рассмотрим распределение на 1-м шаге:

$$\begin{matrix} \xi_1 & 0 & 1 & 2 & ... \\ p & p_0 & p_1 & p_2 & ... \end{matrix}$$

Это распределение дает нам возможность построить распределение и на всех последующих шагах.

Используем аппарат производящих функций:

$f_\xi(z) = M(z^\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{x_k} p_k = \sum\limits_{k=o}^{\infty} z^k p_k$

Известны свойства этих функций:

Если $\xi_1 ... \xi_n$ -независимы, то $f_{\xi_1 + ... + \xi_n}(z) = f_{\xi_1}(z) ... f_{\xi_n}(z)$; $f_\xi(1) = 1$.

Введем обозначения для числовых характеристик процесса и производящих функций.

$m = m_1 = M(\xi_1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP\{\xi_1 = k\}$

$m_n = M(\xi_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP\{\xi_n = k\}$

$f(z) = f_\xi(z) = f_{\xi_1}(z); f_k(z) = f_{\xi_k}(z)$

Теорема о рекуррентном соотношении для производящих функций ветвящегося процесса. Справедливо следующее равенство:$f_n(z) = f(f_{n-1}(z))$

Доказательство. $p_k(n) = p(\xi_n = k)$; $p_k(n) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p(\xi_1 = j) \cdot p(\xi_n = k | \xi_1 = j)$

Умножаем на^n и суммируем.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(n) z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j \cdot p(\xi_n = k | \xi_1 = j) z^k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j \sum\limits_{k=0}^{\infty} p(\xi_n = k | \xi_1 = j) z^k$.

$\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} + ... + \xi_n^{(j)} + ... \ \xi_n^{(l)}$ - число потомков l-ой частицы, полученное за n-1 шаг.

Всем шагам соответствует одно и то же распределение. Используем формулу для производящей функции суммы. Вложенная функция - это производящая функция за n-1 шаг.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(n)z^k = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(f_{\xi_n^{(1)}+\ldots+\xi_n^{(j)}}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(f_{n-1}(z))^j = f(f_{n-1}(z)). \blacksquare$$

Найдем связь между числовыми характеристиками процесса и производящей функцией.

$m_n = \sum_{i=0}^{\infty} kp_k(n),\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k \Rightarrow m_n = f_n^{'}(1)$

$f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \Rightarrow f_n^{'}(z) = f^{'}(f_{n-1}(z)) \cdot f_{n-1}^{'}(z)$

$f_{n-1}^{'}(1) = f_{(1)}^{'}(f_{n-1}(1))\ (f_j(1) = 1)$

$f_{n-1}^{'}(1) = f^{'}(1) \cdot f_{n-z}(1) \Rightarrow m_n = m \cdot m_{n-z} = m^n$

Определение.Ветвящийся процесс называется докритическим, если m<1, критическим, если m=1, надкритическим, если m>1.

Определение. Вероятностью вырождения процесса называется $\lim_{n\to\infty} p_0(n)$, где $p_0(n) = p\{\xi_n = 0\}$. Другими словами, это предел по числу шагов вероятности того, что на n-м шаге потомков не будет.

$p_0(n)$ - неубывающая и ограниченная последовательность.

$p = \lim_{n\to\infty} p_0(n)$.

$\mathrm{p}_0 = 0 \Rightarrow p = 0$. Механизм появления потомков один и тот же на каждом шаге .Если они есть и на первом шаге, то есть и на всех остальных.

Рассмотрим случай: $p_0 > 0$. Как находить вероятность вырождения?

Теорема о вероятности вырождения.

Вероятность вырождения ветвящегося процесса- это минимальный положительный корень уравнения $f(z) = z\ p_0 > 0$. $(f(z) = \sum_{(} k = 0)^{\{}\infty p_k z^k) \cdot f_1(z) = f_2(z) = f_{\xi_n}(z)$.

Доказательство.

Рассмотрим $f_n(z) = \sum_{(} k = 0)^{\infty} p_k(n) z^k$, соответственно $f_n(0) = p_0(n)$, обозначим это число λ_n. $\lambda_n = f_n(0) = p_0(n), n \in N$. $\lambda_1 = f_1(0) = f(0) = p_0 > 0$. $\lambda_1 > 0 \Rightarrow f(\lambda_1) > f(0) = p_0$.

$f(0) > 0 \Rightarrow f(f(0)) > f(0) \Rightarrow$по теореме о рекуррентном соотношении $f2(0) > f(0)$ Т.е. $\lambda_2 > \lambda_1$. Далее $f(f_2(0)) > f(f(0))$ т.е. $\lambda_3 > \lambda_2$. Построена возрастающая и ограниченная сверху последовательность $\{\lambda_n\}_n = 1^{\infty}$. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = p\ \lambda_(n+1) = f(\lambda_n)$,f-непрерывная. Перейдем к пределу: $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n) = f(\lim_{n\to\infty} \lambda_n) \Rightarrow p = f(p)$(т.е. показали, что это корень уравнения). Пусть $z_0 = f(z_0), z_0 < p$. $f(0) = \lambda_1 \Rightarrow z_o > \lambda_1\ z_0 = f - 2(z_0) > f_2(0) = \lambda_2 \Rightarrow z_o > \lambda_2 \ldots$ Перейдем к пределу: $z_0 \geqslant \lambda_n, \forall n \Rightarrow z_0 \geqslant p \Rightarrow z_0 = p$.т.е. это минимальный положительный корень.

Рассмотрим частный вид ветвящегося процесса, задав конкретное распределение для числа потомков одной частицы. Пусть распределение геометрическое:

$P\{\xi = k\} = pq^k; \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1$

p - вероятность того, что потомков нет.

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k = \frac{p}{1-q^z}$

$m = f'(1) = p\frac{q}{(1-qz)^2}|_{z=1} = \frac{q}{p}$

$m = M_\xi = m^n = (\frac{q}{p})^n$

Найдем вероятность вырождения:

$z = f(z)$

$\frac{p}{1-q^z} = z$

$p = z - qz^2$

$qz^2 - z + p = 0$

$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4qp}}{2q}; pq \leq \frac{1}{2} \rightarrow$ при p = 0.5 есть 2 решения.

$z^1 = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}$

Обозначим эту вероятность p. Тогда:

$m = \frac{q}{p}$.

$q > p$ – процесс надкритический.

$q = p$ – процесс критический.

$q < p$ – процесс докритический

Асимптотика надкритического процесса.

Если предположить, что у надкритического процесса $p(n) \rightarrow 1$, то $m_n \rightarrow 0$, но $m > 1 \Rightarrow p < 1$.

Исследуем поведение $f(z)$ на отрезке $[0, 1] = [0, p] \bigcup (p, 1]$. Рассмотрим [0,p]. $0 \leqslant z \leqslant p, f(0) \leqslant f(z) \leqslant f(p) = p \Rightarrow \lambda_1 \leqslant f(z) \leqslant p \leqslant\Rightarrow f(\lambda_1) \leqslant f(f(z)) \leqslant f(p) \Rightarrow \lambda_2 \leqslant f_2(z) \leqslant p$. По аналогии: $\lambda_1 \leqslant f_1(z) \leqslant p ... \lambda_n \leqslant f_n(z) \leqslant p, p$ - неподвижная точка. Переходя к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \leqslant p$. $p \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = p$

Рассмотрим (p,1]. $f(p) < f(z) \leqslant z \Rightarrow p < f(z) \leqslant z \leqslant f(p) < f_2(z) \leqslant f(z) \Rightarrow p < f_2(z) \leqslant f(z) \leqslant z \Rightarrow p < f_3(z) \leqslant f_{n-2}(z) \leqslant ... < z \Rightarrow \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность и ее предел больше или равен p. Пусть $\exists z_0 : \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) > p$. $f_n(z_0) = f(f_{n-1}(z_0))$. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(f_{n-1}(z_0)) = \alpha = f(\lim\limits_{n\to\infty} f_{n-1}(z_0)) = f(\alpha)$. Т.е. $\alpha = f(\alpha)$.

Другого корня уравнения $f(z) = z$ на $[p, z]$ быть не может, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = p \forall z \in [0, 1]$.

$\forall k \geq 1 \lim P_n(k) = 0$.Таким образом, для надкритического процесса вероятность порождения любого числа потомков стремится к нулю при $n \rightarrow 0$. Здесь используется тот факт, что $f(z) < z$ при $z \in (p, 1)$ ввиду выпуклости.

Список использованных источников

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Либроком, 2009

[2] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003

[3] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996

[4] Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. - М: ФИЗМАТЛИТ,2002.

[5] Розанов Ю.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, Физматгиз, 1982