

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Учебное пособие
для студентов механико-математического факультета

2013

УДК [517.984.54:530.1] (075.8)

Авторы: *С.А. Бутерин, М.Ю. Игнатъев, С.Н. Кабанов,
Ю.В. Курышова, Д.С. Лукомский, С. И. Поликарпов*

Метод обратной задачи в теории нелинейных волн

М54 /С.Н. Кабанов и др. – Учеб. пособие для студ. мех-матем. фак.

Пособие представляет собой курс лекций, посвященный применению метода обратной задачи рассеяния на вещественной оси к решению слабо нелинейных уравнений математической физики. Основной акцент сделан на применении указанного метода к решению уравнения Кортевега-де Фриза.

Для студентов механико-математического факультета, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Математика».

Рекомендовано кафедрой математической физики и вычислительной математики СГУ

Рецензент: кандидат физико-математических наук *В.С. Рыхлов*

УДК[517.984.54:530.1] (075.8)

© С.А. Бутерин,
М.Ю. Игнатъев, С.Н. Кабанов,
и др., 2013
© Саратовский государственный
университет, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс можно рассматривать как продолжение курса «Уравнения математической физики», где в качестве моделей физических и иных процессов рассматривались *линейные* уравнения в частных производных и изучались методы решения различных задач для них. Однако при моделировании многих волновых процессов возникают *нелинейные* дифференциальные уравнения (НДУ) в частных производных, которые, как правило, являются более сложным с точки зрения математики объектом для изучения. Для решения таких уравнений долгое время не имелось никаких подходов. Самое большое, что удавалось сделать с такими уравнениями, это определить отдельные классы точных решений или решить эти уравнения с использованием численных методов на компьютере.

Важный прорыв был сделан в октябре 1967 года с появлением статьи Гарднера, Грина, Крускала и Миуры^{*}, где было показано, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0,$$

можно представить как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений, одно из которых оказалось одномерным стационарным уравнением Шредингера

$$-\psi_{xx}(x, k) + u(x, t)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k), \quad -\infty < x < \infty.$$

Было отмечено, что если потенциал в этом уравнении меняется во времени согласно КдФ, то ψ удовлетворяет ещё одному линейному уравнению, а именно

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi.$$

Данное обстоятельство позволило авторам предложить процедуру построения бесконечных наборов точных решений уравнения КдФ и, в известном смысле, полностью его проинтегрировать.

Уравнение КдФ относится к числу простейших нелинейных волновых уравнений, которые могут служить моделями процессов различной физической природы. Это уравнение было выведено в конце XIX века в связи с задачами о длинных волнах на поверхности жидкости конечной глубины или о волнах на мелкой воде. Интерес к нему возобновился в начале 60-х годов XX века, когда выяснилось, что оно описывает некоторые типы волн в плазме. Вскоре стало ясно, что это уравнение имеет универсальный физический смысл, будучи приложимо ко всем ситуациям, в которых рассматриваются нелинейные волны в средах со слабой дисперсией.

^{*} Gardner G., Green J., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation//Phys. Rev. Lett. V.19, 1967, P.1095 — 1098.

Под дисперсией понимают зависимость скорости распространения от частоты и длины волны.

Метод решения уравнения КдФ, предложенный авторами, получил название «метод обратной задачи квантовой теории рассеяния», или короче «метод обратной задачи». Позже выяснилось, что этот метод может быть распространён и на другие уравнения, такие как нелинейное уравнение Шредингера, уравнение \sin -Гордона и многие другие.

По своим возможностям метод обратной задачи теории рассеяния сравним с методом Фурье для решения смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Характерной чертой интегрируемых методом обратной задачи нелинейных уравнений является существование у них специальных точных решений — *солитонов**. Под солитоном понимают решение нелинейного эволюционного уравнения, которое в каждый момент времени локализовано в некоторой области пространства, причём размеры этой области с течением времени остаётся ограниченными, а движение центра области можно интерпретировать как движение частицы. Солитон — одной из модификаций уравнений КдФ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает уединённую волну вида

$$u_s(x, t) = 3v \cdot ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{v}(x - vt - x_0)}{2} \right)$$

и однозначно определяется двумя параметрами: скоростью $v > 0$ и положением максимума в фиксированный момент времени $t = 0, x = x_0$. Это уравнение обладает также n -солитонными решениями, которые при больших временах ($t \rightarrow \pm\infty$) можно приближённо записать в виде суммы n слагаемых $u_s(x, t)$, каждое из которых характеризуется своей скоростью v_i и положением центра x_{0i}^{\pm} . Для n -солитонного решения набор скоростей до столкновения ($t \rightarrow -\infty$) и после столкновения ($t \rightarrow +\infty$) остаётся неизменным, возникают только сдвиги центров солитонов $x_{0i}^+ \neq x_{0i}^-$.

В физической литературе термин «солитон» означает частицеподобное решение нелинейных уравнений классической теории поля, для которого плотности энергии и импульса остаются локализованными в окрестности некоторой точки пространства в любой момент времени. Новейшее развитие теоретической физики показало, что солитоны играют важную роль во многих физических ситуациях: в гидродинамике, физике плазмы, физике конденсированных сред, в теории элементарных частиц и в космологии. Далёко не всегда реальные физические солитоны описываются ис-

* См. дополнение на стр. 102

ключительными с математической точки зрения интегрируемыми нелинейными уравнениями. Однако такие ситуации встречаются довольно часто. Начиная с 1967 года число публикаций о солитонах исчисляется сотнями и тысячами ежегодно.

Данное пособие посвящено изложению математических основ метода обратной задачи и организовано следующим образом.

Введение содержит обсуждение условий совместности. Приведенные здесь задачи могут быть использованы для практических занятий. Вывод уравнений КдФ и нелинейного уравнения Шрёдингера, содержащийся во введении, — математический, но использует понятия дисперсии и слабой нелинейности [1,5,8].

В главе 1 излагается элементарная теория линейного уравнения Шрёдингера и поясняется возникновение терминологии, используемой в дальнейшем изложении [2,3,12].

Глава 2 посвящена достаточно подробному и математически строгому изложению метода обратной задачи рассеяния на оси [4, 5, 9, 10, 13].

В главе 3 приводится решение задачи Коши для уравнения КдФ на всей оси. Здесь же содержится обсуждение полученных результатов. В частности, уравнение КдФ рассматривается как гамильтонова система. Подробнее с этим подходом можно ознакомиться в [11]. Другой аспект проблемы рассматривается в п.3.3 (об унитарной эквивалентности однопараметрического семейства операторов), подробнее см. [7]. В конце главы приведен список уравнений разрешимых методом обратной задачи и указан ряд примеров, где этот метод неприменим.

В главе 4 излагается связь между методом Фурье решения эволюционных уравнений и методом обратной задачи [6].

В главе 5 содержатся некоторые дополнительные свойства решений нелинейных эволюционных уравнений [6].

В дополнении приведена краткая историческая справка о возникновении понятия «солитон».

Введение

Волны в природе. Из школьного курса физики хорошо известно, что если в какой-либо точке упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить колебания, то они будут передаваться в другие места. Эта передача возбуждений обусловлена тем, что близкие участки среды связаны друг с другом. При этом колебания, возбужденные в одном месте, распространяются в пространстве с определенной скоростью. *Волной* принято называть процесс передачи возбуждений среды (в частности, колебательного процесса) от одной точки к другой.

Природа механизма распространения волны может быть различной. В простейшем случае связи между участками в среде могут быть обусловлены силами упругости, которые возникают из-за деформаций в среде. При этом в твердой упругой среде могут распространяться как продольные волны, при которых смещения частиц среды осуществляются в направлении распространения волны, так и поперечные волны, у которых смещения частиц перпендикулярны распространению волны. В жидкости или газе, в отличие от твердых тел, нет сил сопротивления сдвигу, поэтому в этих средах могут распространяться только продольные волны. Хорошо известный пример продольных волн в природе — звуковые волны, которые возникают из-за упругости воздуха.

Среди волн иной природы особое место занимают электромагнитные волны, передача возбуждений у которых происходит из-за колебаний электрического и магнитного полей. Среда, в которой распространяются электромагнитные волны, как правило, оказывает существенное влияние на процесс распространения волн, однако электромагнитные волны, в отличие от упругих, могут распространяться даже в пустоте. Связь между различными участками в пространстве при распространении таких волн обусловлена тем, что изменение электрического поля вызывает появление магнитного поля и наоборот.

Волны на поверхности *жидкости* — это отклонения поверхности жидкости от равновесного состояния, распространяющиеся под действием сил, стремящихся восстановить это состояние. Если рассмотреть доста-

точно глубокий бассейн, наполненный водой, и на его поверхности создать некоторое возмущение, то по поверхности воды начнут распространяться волны. Возникновение их объясняется тем, что частицы жидкости, которые находятся вблизи впадины, при создании возмущения будут стремиться заполнить впадину, находясь под действием силы тяжести. Развитие этого явления со временем и приведет к распространению волны на воде. Частицы жидкости в такой волне двигаются не вверх-вниз, а приблизительно по окружностям, поэтому волны на воде не являются ни продольными, ни поперечными. Они как бы смесь тех и других. С глубиной радиусы окружностей, по которым двигаются частицы жидкости, уменьшаются до тех пор, пока они не станут равными нулю.

Если анализировать скорость распространения волны на воде, то оказывается, что она зависит от ее длины. Скорость длинных волн пропорциональна корню квадратному из ускорения свободного падения, умноженному на длину волны. Причиной возникновения таких волн является сила тяжести.

Для коротких волн восстанавливающая сила обусловлена силой поверхностного натяжения, и поэтому скорость таких волн пропорциональна корню квадратному из частного, в числителе которого стоит коэффициент поверхностного натяжения, а в знаменателе — произведение длины волны на плотность воды. Для волн средней длины волны скорость их распространения зависит от перечисленных выше параметров задачи. Таким образом, волны на воде — довольно сложное явление.

В математике мы впервые сталкиваемся с волнами как решениями так называемого волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Легко показать, что решениями этого уравнения являются функции вида

$$u(x_1, \dots, x_n) = a \exp(i \sum_{j=1}^n k_j x_j - i \omega t),$$

где k_j — компоненты так называемого волнового вектора $k = (k_1, \dots, k_n)^T$, a и ω — постоянные величины, t — время.

Физически это решение обычно интерпретируется как плоская волна частоты ω , распространяющаяся в направлении вектора k , с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$. Волновой вектор входит в дисперсионное соотношение, то есть соотношение, связывающее частоту колебаний и волновой вектор k плоской волны по определенному закону.

Условия совместности. Убедимся*, что уравнение КдФ

$$u_t = buu_x - u_{xxx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (0.1)$$

можно представить как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений, одно из которых — одномерное стационарное уравнение Шредингера

$$-\psi_{xx}(x, k) + u(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k), \quad -\infty < x < \infty, \quad (0.2)$$

другое — следующее линейное уравнение

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi. \quad (0.3)$$

Для того чтобы убедиться в том, что (0.1) представляет собой условие совместности (0.2) и (0.3), можно поступить, например, следующим образом. Перейдём от уравнения второго порядка (0.2) к системе двух уравнений первого порядка, вводя новую неизвестную функцию ψ_1 , так что

$$\psi_x = ik\psi + \psi_1. \quad (0.4)$$

Тогда из (0.2) имеем

$$\psi_{1x} = -ik\psi_1 + u\psi. \quad (0.5)$$

Система (0.4), (0.5) очевидно тождественна (0.2). С помощью (0.4), (0.5) можно исключить все производные по переменной x из уравнения (0.3), в результате чего получим

$$\psi_t = 4ik^3\psi + 4k^2\psi_1 + 2iku\psi - u_x\psi + 2u\psi_1. \quad (0.6)$$

Из этого уравнения, используя (0.4) и (0.5), можно получить аналогичное уравнение для ψ_1 :

$$\psi_{1t} = 4ik^3\psi_1 + 4k^2u\psi + 2iku_x\psi - 2iku\psi_1 + (2u^2 - u_{xx})\psi + u_x\psi_1. \quad (0.7)$$

Формируя из ψ и ψ_1 столбец $\begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \varphi$, системы уравнений (0.4),

(0.5) и (0.6), (0.7) можно записать в компактной форме:

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \quad (0.8)$$

$$\varphi_t = V(\lambda)\varphi \quad (0.9)$$

с помощью матриц U и V , зависящих от параметра λ :

$$U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.10)$$

$$V(\lambda) = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} + 4i\lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ u_x & -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_x & 2u \\ 2u^2 - u_{xx} & u_x \end{pmatrix}.$$

Матрицы U и V зависят от переменных x, t посредством функции $u(x, t)$.

* См. предисловие

Система уравнений (0.8), (0.9) относительно вектора φ является переопределённой. Дифференцируя (0.8) по t , (0.9) — по x и приравнявая получившиеся выражения, получим условие совместности (0.8), (0.9):

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0, \quad (0.11)$$

где выражение $[U(\lambda), V(\lambda)] = U(\lambda)V(\lambda) - V(\lambda)U(\lambda)$ называется *коммутатором* матриц U и V .

Матрицы U и V зависят от произвольного комплексного параметра λ (в рассматриваемом случае U, V полиномы по λ). Поэтому левая часть (0.11) также представляет собой полином по λ . Поскольку соотношения (0.11) должны выполняться при всех значениях λ , то коэффициенты этого полинома должны быть равны нулю. Подставляя (0.10) в (0.11), находим, что указанная структура (0.10) матриц U и V обеспечивает обращение в нуль всех коэффициентов этого полинома, за исключением свободного члена, и левая часть (0.11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t - buu_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Требование тождественного равенства нулю этой матрицы означает, что $u(x, t)$ удовлетворяет КдФ.

Данное обстоятельство позволило предложить процедуру построения бесконечных наборов точных решений уравнения КдФ и, в известном смысле, полностью его проинтегрировать.

Коммутационное представление (0.11) подсказывает путь обобщения теории КдФ на другие эволюционные уравнения: интегрируемое уравнение должно представляться условием совместности уравнений (0.8), (0.9) с матрицами U и V , зависящими рациональным образом от спектрального параметра λ и содержащими в качестве коэффициентов решения рассматриваемого уравнения.

В качестве простых, но важных примеров мы ограничимся случаем, когда U и V являются матрицами 2×2 и U — линейная функция λ . Этот случай, как видно из (0.10), представляет собой естественное (и минимальное) обобщение КдФ и требует лишь незначительной модификации теории. Будем считать, что $U(x, t, \lambda)$ имеет вид

$$U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & p \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.12)$$

где p, z — вообще говоря, комплекснозначные функции x, t . Матрицы же $V(\lambda)$ будем подбирать из условия, чтобы (0.11) сводилось к некоторым уравнениям в частных производных для функций p и z . Уже такое минимальное обобщение окажется весьма содержательным.

Выбирая V в виде

$$V = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} 0 & p \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ -z_x & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} zp & 0 \\ 0 & -zp \end{pmatrix}, \quad (0.13)$$

убеждаемся, что (0.11) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} iz_t + z_{xx} + 2pz^2 &= 0, \\ ip_t - p_{xx} - 2zp^2 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $z = \bar{p}$ или $z = -\bar{p}$, получаем

$$iz_t + z_{xx} + 2p|z|^2 z = 0 \quad (z = \bar{p}), \quad (0.14a)$$

$$ip_t - p_{xx} - 2|z|^2 z = 0 \quad (z = -\bar{p}). \quad (0.14b)$$

Эти два уравнения (0.14) будем называть нелинейными уравнениями Шредингера.

Выбрав в качестве V матрицу

$$\begin{aligned} V = -4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4i\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & p \\ z & 0 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} pr & -ip_x \\ iz_x & -pz \end{pmatrix} + \\ + i \begin{pmatrix} pz_x - zp_x & ip_{xx} + 2ip^2 z \\ iz_{xx} + 2iz^2 p & -pz_x + zp_x \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (0.15)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} p_t + p_{xxx} + 6zpp_x &= 0, \\ z_t + z_{xxx} + 6pzz_x &= 0. \end{aligned} \quad (0.16)$$

Будем считать p и z вещественными. Частным случаем (0.16) при $z = -1$ является уравнение КдФ. Полагая же $z = p$ или $z = -p$, получаем

$$z_t + z_{xxx} + 6z^2 z_x = 0 \quad (z = p), \quad (0.17a)$$

$$z_t + z_{xxx} - 6z^2 z_x = 0 \quad (z = -p) \quad (0.17b)$$

— так называемые модифицированные КдФ (МКдФ) или КдФ с кубической нелинейностью. Если $p = -1 + \alpha z$, то

$$z_t + z_{xxx} - 6zz_x + 6\alpha z^2 z_x = 0.$$

Таким образом, это уравнение также попадает под действие метода обратной задачи.

Положим теперь $z = p = u_x / 2$ и рассмотрим матрицу

$$V = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \quad (0.18)$$

Для u получим из (0.11)

$$u_{xt} = \sin u, \quad (z = p = u_x / 2) \quad (0.19)$$

— уравнение синус-Гордона* (sin-Gordon).

Полагая же $z = -p = -u_x / 2$ и

$$V = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} chu & -ishu \\ ishu & -chu \end{pmatrix},$$

находим

$$u_{xt} = shu \quad (0.20)$$

— уравнение sh-Gordon.

Слабая нелинейность и дисперсия. Весьма широкий класс волновых процессов в самых различных однородных средах описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (0.21)$$

Это уравнение описывает распространение незатухающих волн с постоянной скоростью a . При выводе этого уравнения используются три основных обстоятельства. Во-первых, отсутствие *диссипации*. Оно выражается в инвариантности (0.21) относительно замены $t \rightarrow -t$ (обращение времени). Во-вторых, амплитуда колебаний должна быть достаточно мала. При этом нелинейные по колеблющейся величине u члены уравнения малы и ими можно пренебречь. Наконец, в рассматриваемом диапазоне волн должна отсутствовать *дисперсия*. Если отказаться от пренебрежения диссипацией, нелинейностью и дисперсией, то общность (универсальность) уравнения (0.21) исчезнет. Каждая среда будет описываться своей особой системой уравнений. Замечательно, однако, что если не пренебрегать полностью указанными эффектами, но считать их *малыми*, то снова можно получить уравнение, вид которого один и тот же для широкого класса явлений. Во-

* Заметим, что уравнение синус-Гордона записано в так называемых конических координатах. Впервые оно появилось в XIX веке в задачах геометрии. Именно, если задана метрика постоянной отрицательной кривизны на поверхности, то так называемое "уравнение вложения" этой метрики в евклидово пространство в наиболее естественных переменных точно сводится к уравнению синус-Гордона. Классиками геометрии были обнаружены (на геометрическом языке) так называемые преобразования Бэклунда для этого уравнения, то есть подстановки, которые позволяют из более простых решений строить более сложные. В настоящее время известно, что наличие преобразований Бэклунда (см. п.5.1) всегда (или почти всегда) указывает на интегрируемость слабо нелинейного уравнения методом обратной задачи, и наоборот. К уравнению синус-Гордона сводятся некоторые задачи теории сверхпроводимости и теории "n-поля", используемые в задачах геометрии и в моделях ферромагнетизма. Подробнее об уравнениях синус-Гордона см. [1, с. 370 — 374]. В отличие от уравнения КдФ и нелинейного уравнения Шредингера — уравнение синус-Гордона является точным.

прос состоит в следующем: имеет ли смысл учитывать эти малые поправки, то есть, имеются ли случаи, когда эти малые поправки приводят к *новым качественным* эффектам? В противном случае их не следовало бы принимать во внимание. Однако легко понять, что если процесс происходит достаточно длительное время, то все указанные эффекты могут существенно изменить решение. В самом деле, даже малая диссипация энергии приведёт к затуханию волны. Дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета, что также за достаточно большое время может исказить решение до неузнаваемости. Что касается нелинейных эффектов, то они приводят к "укручению фронтов" в решении — и это весьма значительный эффект (см. Дополнение 2, где обсуждается качественная картина укращения фронта волны и её разрыв на примере уравнения Хопфа).

Наша цель сейчас состоит в том, чтобы получить приближённое уравнение, которое будет правильно описывать эти "большие эффекты малых поправок". При этом мы ограничимся консервативными (без потерь энергии) системами, тем самым по-прежнему полностью пренебрегая диссипацией.

Вывод уравнения КдФ. Решение уравнения (0.21) имеет вид суммы двух волн, бегущих в противоположных направлениях

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at). \quad (0.22)$$

Легко убедиться в том, что и при учёте малой нелинейности и дисперсии, можно рассматривать волны, бегущие в разных направлениях, независимо. Физическая причина этого состоит в том, что такие волны слишком быстро движутся относительно друг друга, так что "накопление поправок" не успевает происходить. Это замечание позволяет существенно упростить нашу задачу. Каждая из бегущих волн в (0.22) удовлетворяет уравнению первого порядка. В частности, волна, бегущая в положительном направлении оси x , — уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (0.23)$$

Будем искать поправки именно к этому уравнению. Определим поправку, связанную с дисперсией. Путь точный закон линейных волн в нашей среде имеет вид

$$\omega = kv(k). \quad (0.24)$$

При $k \rightarrow 0$ скорость v должна стремиться к a . В общем случае $v(k)$ аналитическая функция k , разложимая по степеням k . Легко видеть, что в отсутствие диссипации это разложение происходит по степеням k^2 . Действительно, закон дисперсии (0.24) получается из некоторой системы дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами. Поэтому результат решения этой системы можно представить в виде зависимости $i\omega$ от ik с вещественными коэффициентами. Для того, чтобы ω в (0.24) была вещественной, (что выражает отсутствие диссипации), необходимо,

чтобы разложение ν шло по чётным степеням ik . С учётом сказанного, при малых k , зависимость $\omega(k)$ можно записать, учитывая только первую поправку, следующим образом

$$\omega(k) = ak - \beta k^3. \quad (0.25)$$

Сразу ясно, что для того, чтобы получить правильный закон дисперсии (0.25), нужно добавить в левую часть уравнения (0.23) слагаемое с третьей производной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (0.26)$$

Перейдём теперь к нелинейности. Это удобнее всего сделать, если учесть, что в консервативных системах, которые мы здесь рассматриваем, всегда имеются точные законы сохранения некоторых величин. Фактически, речь может идти о сохранении числа частиц. Запишем один из таких законов сохранения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (0.27)$$

Задача вывода состоит в том, чтобы приближённо выразить поток j через u . Из сравнения (0.27) и (0.26) видно, что в линейном по u приближении

$$j = au + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

В следующем приближении появится квадратный по u член

$$j = au + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2} u^2, \quad \alpha = \text{const}.$$

В результате получаем искомое уравнение, учитывающее первые неисчезающие поправки

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Произведя в последнем уравнении замену переменных $\xi = x - at$, $u = \frac{\beta}{\alpha} \tilde{u}$,

приходим к одному из стандартных видов уравнения КдФ

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3} = 0.$$

Вывод нелинейного уравнения Шредингера. Нетрудно получить уравнение, учитывающее слабые нелинейные поправки для полей, мало отличающихся от гармонических. Пусть поле имеет вид

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)), \quad (0.28)$$

где Ψ_0 — медленно меняется в пространстве и времени. Если $\Psi_0 = \text{const}$, то поле будет гармоническим. Тогда в спектральном разложении поля бу-

дуют лишь волновые векторы близкие к k_0 . Поэтому правую часть дисперсионного уравнения $\omega = \omega(k)$ можно разложить по степеням $k - k_0$

$$\omega = \omega(k_0) + a(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2.$$

Этому закону дисперсии соответствует линейное уравнение:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega_0 \Psi + a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \right) \Psi + \beta \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \right)^2 \Psi. \quad (0.29)$$

Если подставить в (0.29) поле в виде (0.28), то для Ψ_0 получается уравнение

$$i \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + a \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right) = -\beta \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}.$$

Для учёта нелинейности в случае слабых полей, мало отличающихся от гармонических, отметим, что закон дисперсии зависит от $|\Psi_0|^2$. Ψ_0 — это комплексная амплитуда поля $\Psi = \Psi_0 \exp[i(kx - \omega t)]$. В первом приближении можно учитывать только зависимость ω от k_0 и взять поправку порядка $|\Psi_0|^2$

$$\omega(k_0) = \omega_0 + \alpha |\Psi|^2.$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$i \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + a \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right) = -\beta \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \alpha |\Psi_0|^2 \Psi_0.$$

Пренебрегая правой частью, это уравнение описывает распространение волнового пакета с групповой скоростью $a = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$. Правая часть полученного уравнения Шредингера учитывает дисперсионные и нелинейные поправки.

ГЛАВА 1. ОДНОМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Определение. Уравнение вида

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - u(x))\Psi = 0 \quad (1.1)$$

называется в физике стационарным линейным уравнением Шредингера. В курсе «Математическая физика» это уравнение называлось уравнением Штурма—Лиувилля. Э. Шредингер в XX веке получал уравнение, одномерная редукция которого может быть записана в виде (1.1), в связи с задачами, возникающими в квантовой механике. Независимая переменная x называется декартовой координатой частицы; неизвестная функция Ψ , вообще говоря, комплекснозначная, называется *волновой функцией* частицы; решения уравнения Шредингера называются *состояниями* частицы; спектральный параметр E называется *энергией* частицы; известная функция u называется *потенциалом*, или потенциальной энергией частицы.

Квантовая механика занимается в основном исследованием свойств уравнения (1.1) и обобщающих его уравнений и систем уравнений с частными производными.

Пример 1.1. Пусть $u \equiv 0$. Тогда частица называется *свободной*. Наше уравнение Шредингера для свободной частицы с энергией $E = k^2$ имеет вид

$$\Psi_{xx} + k^2\Psi = 0. \quad (1.2)$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения $\Psi_+ = e^{ikx}$, $\Psi_- = e^{-ikx}$. Эти два решения называются частицей, движущейся вправо (с импульсом $k > 0$), и частицей, движущейся влево, соответственно. Таким образом, пространство состояний свободной частицы с энергией E , то есть *фазовое пространство*, — двумерное комплексное пространство.

Квадрат модуля волновой функции в физике называют *плотностью вероятности* того, что частица находится в данном месте. Таким образом, свободная частица с импульсом $k > 0$ с одинаковой вероятностью находится в любой точке пространства.

1.1. Потенциальные барьеры

Предположим, что потенциал финитен, то есть, отличен от нуля лишь в некоторой конечной области. Если $u \geq 0$, то говорят, что задан *потенциальный барьер*, а если $u \leq 0$ — *потенциальная яма*. Область, где потенциал отличен от нуля, называется носителем потенциала. Предположим, что энергия частицы $E = k^2$ — положительна. Тогда левее носителя уравнение Шредингера (1.1) совпадает с уравнением свободной частицы (1.2). Следовательно, уравнение Шредингера имеет два решения, которые левее носителя совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} , соответственно. Эти два решения называются *частицей приходящей слева* и *частицей уходящей влево* соответственно.

Заметим, что решения эти определены при всех x , но совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} лишь левее носителя. Точно также существуют два решения, которые совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} правее носителя. Эти решения называются *частицей уходящей вправо* и *частицей приходящей справа* соответственно (рис. 1.1).

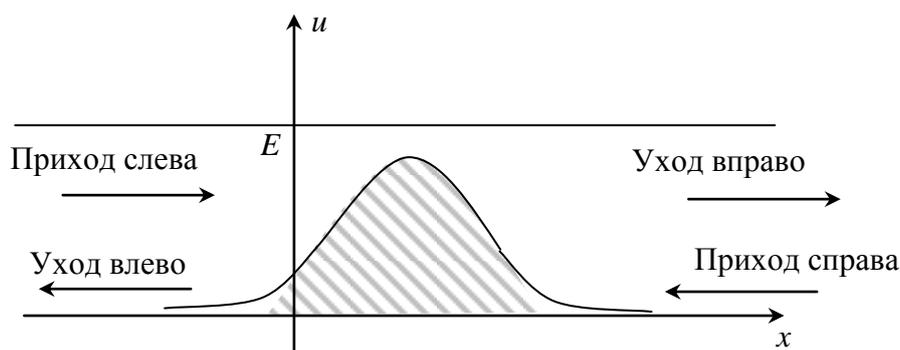


Рис. 1.1

Задача 1. Может ли частица, пришедшая слева, целиком отразиться влево (т.е. может ли волновая функция справа от барьера быть нулем, а слева нет)? Целиком уйти вправо?

1.2. Коэффициенты прохождения и отражения

Говорят, что частица, пришедшая слева с импульсом $k > 0$ прошла барьер с коэффициентом прохождения $|A|^2$ и коэффициентом отражения $|B|^2$, если уравнение Шредингера (1.1), в котором $E = k^2$ имеет решение Ψ , равное

$$\Psi = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx}, & \text{левее барьера,} \\ Ae^{ikx}, & \text{правее барьера.} \end{cases}$$

Такие Ψ , A и B существуют и единственны для любого $k > 0$.

Задача 2. Вычислить коэффициенты прохождения и отражения потенциала, равного константе u_0 при $0 \leq x \leq a$ и нулю в остальных местах (см. рис. 1.2).

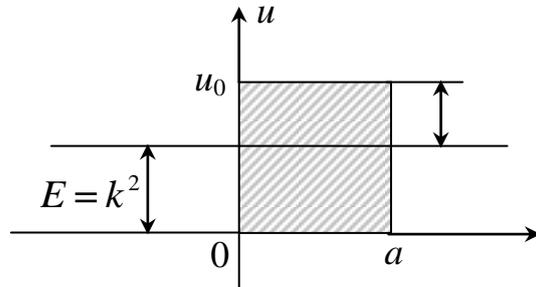


Рис. 1.2

Ответ. $|A|^2 = \frac{1}{1 + \frac{u_0^2 \sin^2 ak_1}{4E(E - u_0)}}$,

где $E = k^2$, $E - u_0 = k_1^2$.

Проходя под барьером, частица замедляется, поэтому плотность вероятности найти ее в пределах барьера больше, чем вне его. При больших E коэффициент отражения стремится к нулю.

$$|B|^2 \sim \frac{u_0^2}{4E(E - u_0)} \sin^2 ak_1.$$

Если энергия частицы меньше высоты барьера, то коэффициент прохождения экспоненциально мал:

$$|A|^2 = \frac{4k^2 k_2^2}{(k^2 + x^2) \text{sh}^2 ak_2 + 4k^2 k_2^2}, \quad E = k^2, \quad u_0 - E = k_2^2.$$

Хотя коэффициент прохождения через высокий и широкий барьер мал, он все же отличен от нуля. Это явление носит название туннельного эффекта: квантовая частица "проходит под барьером", непреодолимым для классической частицы.

1.3. Связанные состояния

Рассмотрим потенциал в виде финитной ямы ($u(x) \leq 0, u(\infty) = 0$). Говорят, что частица находится в яме, если $\Psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Очевидно, что частица может находиться в яме лишь если её энергия E отрицательна. Ле-

вее и правее ямы решение имеет вид линейной комбинации экспонент $e^{\aleph x}, e^{-\aleph x}$, где $\aleph^2 = -E, \aleph > 0$. Следовательно, условие нахождения частицы в яме состоит в том, что левее ямы обращается в нуль коэффициент при растущей влево экспоненте, а правее – при растущей вправо. Решение с такими свойствами существует не при всяком отрицательном значении энергии. Оказывается, если яма достаточно глубока и широка, то существует конечное число отрицательных значений энергии E , при которых частица может стационарно находиться в яме; этих значений тем больше, чем шире и глубже яма.

Соответствующие значения E называются *стационарными уровнями*, а волновые функции Ψ , затухающие при $x \rightarrow \pm\infty$, называются *связанными состояниями* (в случае, если яма не финитна, требуется $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty$).

Задача 2. Определить стационарные уровни энергии в прямоугольной яме глубины u_0 , расположенной между $x=0$ и $x=a$.

Ответ. $E = \left(4\xi^2/a^2\right) - u_0$, где ξ - корни уравнений

$\cos x = \pm\gamma\xi, \sin x = \pm\gamma\xi, (\gamma = \frac{1}{a}\sqrt{4/u_0}), (tg\xi > 0)$ для первого уравнения, $tg\xi < 0$ для второго уравнения).

1.4. Об одномерном стационарном уравнении Шредингера

Запишем уравнение Шредингера в следующем виде:

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.4)$$

Для заданной функции $q(x)$ (потенциала в задачах квантовой механики) граничные условия в точках a и b могут привести к тому, что уравнение (1.4) может иметь ненулевое решение — собственную функцию (с.ф.) $y_j(x)$ — только при некоторых специальных значениях постоянной λ — собственных значений (с.з.) λ_j . Задачей Штурма — Лиувилля в курсе уравнений математической физики называлась задача об определении зависимости решения y от параметра λ и зависимости с.з. λ_j от граничных условий. Простейший пример таких задач в случае $q(x) \equiv 0, y(a) = y(b) = 0$. Решение соответствующего уравнения $y'' + \lambda y = 0$, с указанными граничными условиями, показывает, что с.ф. этой задачи суть $y_j(x) = \sin \sqrt{\lambda_j} x$, а с.з. — $\lambda_j = (j\pi/(b-a))^2, j=1,2,\dots$. С ростом длины системы $(b-a)$ значения λ_j становятся всё более тесно расположенными, и в пределе при $b-a \rightarrow \infty$ мы получаем непрерывную область с.з.:

$\lambda \in (0, \infty)$. Если предыдущее уравнение описывает колебательную систему, то каждая с.ф. $y_j(x)$ представляет собой форму нормальной моды системы. Примером служит однородная струна, колеблющаяся в свободном пространстве, концы которой закреплены в точках $x = a$ и $x = b$. Так как с.з. связаны с резонансными частотами колебаний системы, то их обычно называют спектром с.з. В нашем случае ($q(x) \equiv 0$) в каждой нормальной моде колеблется вся система целиком. Однако существуют системы с неоднородностью, представленной функцией $q(x)$, для которых колебания ограничиваются только частью системы, в этом случае колебание ограничивается неоднородностью, а не границами. Пример: колеблющаяся струна, часть которой погружена в упругую среду. В последующем мы всегда будем иметь дело с бесконечно протяжёнными системами; следовательно, любые локализованные решения всегда будут связаны с неоднородностью.

Существует относительно мало функций $q(x)$, для которых решение уравнения (1.4) может быть выражено через стандартные трансцендентные функции. Например, если $q(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$, $y(\pm\infty) = 0$, то $\lambda_1 = -1$, $y_1 = \operatorname{sech} x$, то есть, $y_1 = \operatorname{sech} x$ является единственным решением уравнения

$$y_1'' + (-1 + 2 \operatorname{sech}^2 x) y_1 = 0,$$

обращающимся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. В квантовой теории интерпретация этого результата состоит в том, что частица заперта в потенциальной яме, форма которой пропорциональна $\operatorname{sech}^2 x$, а с.з. λ пропорционально энергии, которой может обладать частица в этой яме. В качестве классической интерпретации мы можем рассматривать туннельное распространение волны в среде с зависящим от глубины показателем преломления, $q(x) = -1 + 2 \operatorname{sech}^2 x$, где глубина измеряется от положения, соответствующего максимуму $q(x)$. Неоднородность создаёт в среде волновод. Волна может быть локализована на глубине, около которой показатель преломления достигает своего максимального значения. Если знак потенциала сменить на обратный, то потенциал является отталкивающим, и связанного состояния нет. Когда область $(b - a)$ становится бесконечной, уравнения типа (1.4) кроме дискретных отрицательных значений λ_j и связанных с ними локализованных волновых функций $y_j(x)$, могут также обладать непрерывным семейством решений, соответствующим различным положительным λ . В случае квантовой механики физическая интерпретация таких решений состоит в том, что некоторое препятствие, характеризуемое потенциалом $q(x)$, рассеивает падающую на него частицу с энергией, пропорциональной λ . В рассматриваемых задачах наличие рассеивателя обычно проявляется через отражение и прохождение падающей волны.

Как будет показано в следующей главе, решения уравнения (1.4) имеют вид:

$$y(\lambda, x) = e^{-i\rho x} + S(\lambda)e^{i\rho x} + o(1), \quad 0 < \rho^2 < \infty, \quad \rho^2 = \lambda;$$

$$y(i\rho_k, x) = m_k e^{-i\rho_k x} (1 + o(1)), \quad k = 1, \dots, N.$$

Таким образом, набор величин $\{S(\lambda), \rho_k, m_k\}$, называемый ещё *спектральным преобразованием* функции $y(\lambda, x)$, полностью определяет поведение на бесконечности всех волновых функций $y(\lambda, x)$. Для полного описания системы достаточно знать поведение на бесконечности всех волновых функций, так как оно позволяет описать все наблюдаемые эффекты. Естественно, поэтому возникает вопрос о том, определяет ли поведение Ψ -функций на бесконечности потенциал $q(x)$. Иными словами, можно ли восстановить потенциал $q(x)$ по экспериментальным данным? Эта задача называется *обратной задачей квантовой теории рассеяния*. Важность этой задачи, среди прочего, определяется ещё и тем, что с её помощью удалось найти решение задачи Коши для уравнения КдФ:

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0,$$

$$q(x, 0) = q_0(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x, t) = 0.$$

Поэтому сейчас мы перейдём к обратной задаче теории рассеяния.

ГЛАВА 2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ НА ОСИ

2.1. Данные рассеяния

2.1.1. *Решения Йоста.* Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.1.1)$$

Далее всюду в этой главе мы будем предполагать, что функция $q(x)$ вещественна и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x)| dx < \infty. \quad (2.1.2)$$

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + it$ и пусть для определённости $\tau := \text{Im } \rho \geq 0$.

Обозначим $\Omega_+ = \{\rho : \text{Im } \rho > 0\}$,

$$Q_0^+(x) = \int_x^{\infty} |q(t)| dt, \quad Q_1^+(x) = \int_x^{\infty} Q_0^+(t) dt = \int_x^{\infty} (t-x)|q(t)| dt,$$

$$Q_0^-(x) = \int_{-\infty}^x |q(t)| dt, \quad Q_1^-(x) = \int_{-\infty}^x Q_0^-(t) dt = \int_{-\infty}^x (x-t)|q(t)| dt.$$

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q_j^\pm(x) = 0$. В следующей теореме вводятся *решения Йоста* $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ с заданным поведением на $\pm\infty$.

Теорема 2.1.1. *Уравнение (2.1.1) имеет единственные решения $y = e(x, \rho)$ и $y = g(x, \rho)$, удовлетворяющие следующим интегральным уравнениям:*

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^{\infty} \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q(t) e(t, \rho) dt,$$

$$g(x, \rho) = \exp(-i\rho x) + \int_{-\infty}^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) g(t, \rho) dt.$$

Функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ обладают следующими свойствами:

- 1) для каждого фиксированного x функции $e^{(\nu)}(x, \rho)$ и $g^{(\nu)}(x, \rho)$ ($\nu = 0, 1$) являются аналитическими в Ω_+ и непрерывными в $\overline{\Omega_+}$;

2) для $\nu = 0, 1$

$$\left. \begin{aligned} e^{(\nu)}(x, \rho) &= \exp(i\rho x)((i\rho)^\nu + o(1)), & x \rightarrow +\infty, \\ g^{(\nu)}(x, \rho) &= \exp(-i\rho x)((-i\rho)^\nu + o(1)), & x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

равномерно в $\overline{\Omega}_+$. Более того, для $\rho \in \overline{\Omega}_+$

$$\left. \begin{aligned} |e(x, \rho) \exp(-i\rho x)| &\leq \exp(Q_1^+(x)), \\ |e(x, \rho) \exp(-i\rho x) - 1| &\leq Q_1^+(x) \exp(Q_1^+(x)), \\ |e'(x, \rho) \exp(-i\rho x) - i\rho| &\leq Q_0^+(x) \exp(Q_1^+(x)), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} |g(x, \rho) \exp(i\rho x)| &\leq \exp(Q_1^-(x)), \\ |g(x, \rho) \exp(i\rho x) - 1| &\leq Q_1^-(x) \exp(Q_1^-(x)), \\ |g'(x, \rho) \exp(i\rho x) + i\rho| &\leq Q_0^-(x) \exp(Q_1^-(x)); \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

3) для каждого фиксированного $\rho \in \Omega_+$ и каждого вещественного α , $e(x, \rho) \in \mathbf{L}_2(\alpha, \infty)$ и $g(x, \rho) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \alpha)$. Более того, с точностью до постоянного множителя функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ являются единственными обладающими этим свойством решениями уравнения (2.1.1);

4) для $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Omega}_+$, $\nu = 0, 1$,

$$\left. \begin{aligned} e^{(\nu)}(x, \rho) &= (i\rho)^\nu \exp(i\rho x) \left(1 + \frac{\omega^+(x)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \right), & \omega^+(x) &= -\frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) dt, \\ g^{(\nu)}(x, \rho) &= (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x) \left(1 + \frac{\omega^-(x)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \right), & \omega^-(x) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x q(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

равномерно для $x \geq \alpha$ и $x \leq \alpha$, соответственно;

5) для вещественных $\rho \neq 0$ функции $\{e(x, \rho), e(x, -\rho)\}$ и $\{g(x, \rho), g(x, -\rho)\}$ образуют фундаментальные системы решений уравнений (2.1.1) и

$$\langle e(x, \rho), e(x, -\rho) \rangle = -\langle g(x, \rho), g(x, -\rho) \rangle \equiv -2i\rho, \quad (2.1.7)$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$;

б) для функций $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ справедливы следующие представления:

$$\left. \begin{aligned} e(x, \rho) &= \exp(i\rho x) + \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt, \\ g(x, \rho) &= \exp(-i\rho x) + \int_{-\infty}^x A^-(x, t) \exp(-i\rho t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

где $A^\pm(x, t)$ — вещественные непрерывные функции, и

$$A^+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) dt, \quad A^-(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x q(t) dt, \quad (2.1.9)$$

$$|A^\pm(x, t)| \leq \frac{1}{2} Q_0^\pm \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \left(Q_1^\pm(x) - Q_1^\pm \left(\frac{x+t}{2} \right) \right). \quad (2.1.10)$$

Функции $A^\pm(x, t)$ обладают первыми производными

$$A_1^\pm(x, t) := \frac{\partial A^\pm}{\partial x}, \quad A_2^\pm(x, t) := \frac{\partial A^\pm}{\partial t};$$

функции $A_i^\pm(x, t) \pm \frac{1}{4} q \left(\frac{x+t}{2} \right)$ абсолютно непрерывны по x и t

$$\left| A_i^\pm(x, t) \pm \frac{1}{4} q \left(\frac{x+t}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} Q_0^\pm(x) Q_0^\pm \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp(Q_1^\pm(x)), \quad i = 1, 2. \quad (2.1.11)$$

Доказательство. Проведём доказательство только для функции $e(x, \rho)$. Для $g(x, \rho)$ рассуждения аналогичны. Рассмотрим интегральное уравнение

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^\infty \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q(t) e(t, \rho) dt, \quad (2.1.12)$$

равносильное дифференциальному уравнению (2.1.1) с граничным условием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-i\rho x) e(x, \rho) = 1.$$

Будем искать его решение в виде

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt. \quad (2.1.13)$$

Подставляя в уравнение (2.1.12) вместо $e(x, \rho)$ его представление (2.1.13), получаем

$$\begin{aligned} \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt &= \int_x^\infty \frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho s) q(s) ds + \\ &+ \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty \frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho u) A^+(s, u) du \right\} ds. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho u) = \frac{1}{2} \int_{-s+u+x}^{s+u-x} \exp(i\rho \xi) d\xi, \quad (2.1.14)$$

то

$$\int_x^\infty \frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho s) q(s) ds = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_x^{2s-x} \exp(i\rho t) dt ds$$

откуда, после перемены порядка интегрирования, находим

$$\int_x^\infty \frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho s) q(s) ds = \frac{1}{2} \int_x^\infty \exp(i\rho t) \int_{(x+t)/2}^\infty q(s) ds dt. \quad (2.1.15)$$

Снова используя формулу (2.1.14), получаем

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty \frac{\sin \rho(s-x)}{\rho} \exp(i\rho u) A^+(s, u) du \right\} ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty A^+(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} \exp(i\rho t) dt du \right\} ds. \end{aligned}$$

Продолжая функцию $A^+(s, u)$ нулём при $u < s$, находим для всех $s \geq x$

$$\begin{aligned} & \int_s^\infty A^+(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} \exp(i\rho t) dt du = \int_{-\infty}^\infty A^+(s, u) \left\{ \int_{-s+u+x}^{s+u-x} \exp(i\rho t) dt \right\} du = \\ & = \int_{-\infty}^\infty \exp(i\rho t) \left\{ \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) du \right\} dt = \int_x^\infty \exp(i\rho t) \left\{ \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) du \right\} dt, \end{aligned}$$

так как при $t < x$

$$\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) du = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty A^+(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} \exp(i\rho t) dt du \right\} ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_x^\infty \exp(i\rho t) \left\{ \int_x^\infty q(s) \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) ds du \right\} dt. \end{aligned}$$

Из этой формулы и формулы (2.1.15) следует, что равенство (2.1.12) выполняется, если функция $A^+(x, t)$, удовлетворяет уравнению

$$A^+(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^\infty q(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) ds du$$

и условию $A^+(x, t) = 0$ при $t < x$.

На рис. 2.1 изображена область интегрирования в двойном интеграле, стоящем в правой части последней, полученной нами формулы для $A^+(x, t)$. Эта область состоит из двух частей (1, 2). Но в области 2 $s > u$ и, следовательно, $A^+(x, t) = 0$. Поэтому фактически в уравнении для $A^+(x, t)$ двойной интеграл нужно брать только по области 1. Делая в этом интеграле замену переменных $u + s = 2\alpha$, $u - s = 2\beta$, приходим к следующему уравнению:

$$A^+(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^{\infty} q(s) ds + \int_{(x+t)/2}^{\infty} d\alpha \int_0^{(t-x)/2} q(\alpha - \beta) A^+(\alpha - \beta, \alpha + \beta) d\beta,$$

в котором уже учтено, что $A^+(x, t) = 0$ при $t < x$. Полагая

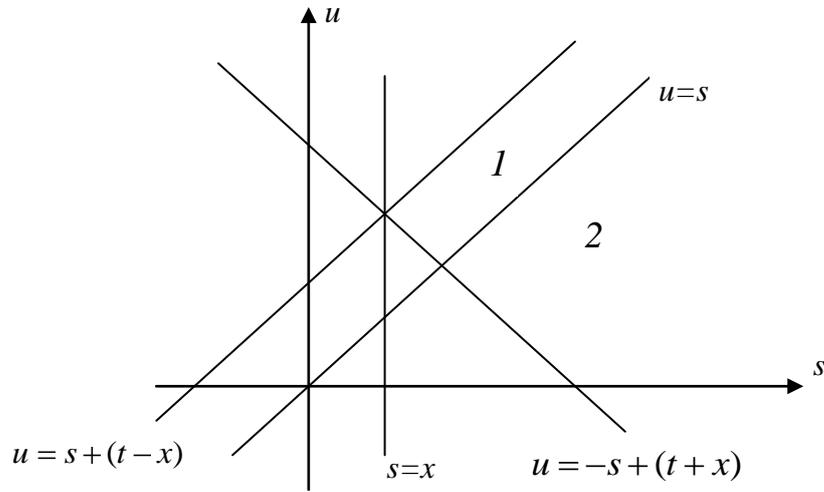


Рис. 2.1

$H(\alpha, \beta) = A^+(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, $x + t = 2u$, $t - x = 2v$, полученное уравнение можем переписать в таком виде

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^{\infty} q(s) ds + \int_u^{\infty} d\alpha \int_0^v q(\alpha - \beta) H(\alpha, \beta) d\beta.$$

Покажем теперь, что уравнение для $H(u, v)$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$|H(u, v)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(u) \exp(Q_1^+(u - v) - Q_1^+(u)). \quad (2.1.16)$$

Положим

$$H_0(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^{\infty} q(s) ds,$$

$$H_n(u, v) = \int_u^\infty d\alpha \int_0^v q(\alpha - \beta) H_{n-1}(\alpha, \beta) d\beta$$

и покажем, что

$$|H_n(u, v)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(u) \frac{(Q_1^+(u-v) - Q_1^+(u))^n}{n!}, \quad (2.1.17)$$

откуда, очевидно, и будет следовать, что ряд $H(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$ сходится, а его сумма $H(u, v)$ удовлетворяет неравенству (2.1.16) и является решением уравнения для $H(u, v)$.

Справедливость оценок (2.1.17) устанавливается по индукции. При $n=0$ такая оценка, очевидно, верна, и если она верна для $H_n(u, v)$, то, учитывая монотонность функций $Q_0^+(u)$ и $Q_1^+(u)$, получим

$$\begin{aligned} |H_{n+1}(u, v)| &\leq \int_u^\infty d\alpha \int_0^v |q(\alpha - \beta)| \frac{Q_0^+(\alpha) (Q_1^+(\alpha - \beta) - Q_1^+(\alpha))^n}{2n!} d\beta \leq \\ &\leq \frac{Q_0^+(u)}{2n!} \int_u^\infty (Q_1^+(\alpha - v) - Q_1^+(\alpha))^n (Q_0^+(\alpha - v) - Q_0^+(\alpha)) d\alpha = \\ &= \frac{Q_0^+(u)}{2} \frac{(Q_1^+(u-v) - Q_1^+(u))^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Формула (2.1.9) непосредственно следует из формулы

$$A^+(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^\infty q(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} A^+(s, u) du ds,$$

если положить $t = x$.

Замечание 2.1. Оператор $E + A^+$, определённый формулой

$$(E + A^+)f = f(x) + \int_x^\infty A^+(x, t) f(t) dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим на бесконечности асимптотику решений. Из оценки (2.1.10) следует, в частности, что оператор преобразования $E + A^+$ осуществляет взаимно однозначное отображение каждого из пространств $\mathbf{L}_i(a, \infty)$ ($i = 1, 2, \infty$) на себя, и обратный оператор $(E + A^+)^{-1} = E + \tilde{A}$ имеет такой же вид:

$$(E + \tilde{A})f = f(x) + \int_x^\infty \tilde{A}(x, t) f(t) dt.$$

Перейдём к доказательству оценок (2.1.11). Учитывая, что $H(u, v) = A^+(u - v, u + v)$, достаточно доказать существование производной функции $H(u, v)$. Но это непосредственно следует из уравнения

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^\infty q(s) ds + \int_u^\infty d\alpha \int_0^v q(\alpha - \beta) H(\alpha, \beta) d\beta$$

и оценки

$$|H(u, v)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(u) \exp(Q_1^+(u - v) - Q_1^+(u)),$$

причём

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} &= -\frac{1}{2} q(u) - \int_0^v q(u - \beta) H(u, \beta) d\beta, \\ \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} &= \int_u^\infty q(\alpha - v) H(\alpha, v) d\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Из этих равенств и оценки для $H(u, v)$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \frac{1}{2} q(u) \right| &\leq \frac{1}{2} Q_0^+(u) Q_0^+(u - v) \exp(Q_1^+(u - v) - Q_1^+(u)), \\ \left| \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} \right| &\leq \frac{1}{2} Q_0^+(u) Q_0^+(u - v) \exp(Q_1^+(u - v) - Q_1^+(u)) \end{aligned}$$

и, следовательно, при $2u = x + t$, $2v = t - x$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \frac{1}{2} q(u) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} Q_0^+(x) Q_0^+\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left(Q_1^+(x) - Q_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), \\ \left| \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \frac{1}{2} q(u) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} Q_0^+(x) Q_0^+\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left(Q_1^+(x) - Q_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда, с учётом обозначений, приходим к неравенствам (2.1.11). Далее, из доказанного нами представления (2.1.13) и оценки (2.1.10) следует, что функция $e(x, \rho)$ аналитична по ρ в полуплоскости Ω_+ и непрерывна в $\overline{\Omega_+}$.

Кроме того,

$$|e(x, \rho)| = \left| \exp(i\rho x) + \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt \right| \leq \exp(-\operatorname{Im} \rho x) \left(1 + \int_x^\infty |A^+(x, t)| dt \right),$$

откуда, используя (2.1.10), получаем

$$|e(x, \rho)| \leq \exp(-\operatorname{Im} \rho x) \left[1 + \frac{1}{2} \int_x^\infty Q_0^+ \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \left(Q_1^+(x) - Q_1^+ \left(\frac{x+t}{2} \right) \right) dt \right] = \\ = \exp(-\operatorname{Im} \rho x + Q_1^+(x)).$$

Отсюда следует справедливость первого из неравенств (2.1.4). Так как функция $e(x, \rho)$ удовлетворяет уравнению (2.1.12), то, используя уже доказанное неравенство в (2.1.4), находим

$$|e(x, \rho) - \exp(i\rho x)| \leq \int_x^\infty \left| \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q(t) \right| \exp(-\operatorname{Im} \rho(t-x)) dt \cdot \exp(-\operatorname{Im} \rho x + Q_1^+(x)),$$

$$|e'(x, \rho) - i\rho \exp(i\rho x)| \leq \int_x^\infty |\cos \rho(t-x) q(t)| \exp(-\operatorname{Im} \rho(t-x)) dt \cdot \exp(-\operatorname{Im} \rho x + Q_1^+(x)).$$

Для ρ , лежащих в замкнутой верхней полуплоскости, имеем

$$\left| \frac{\sin \rho y}{\rho} \right| \exp(-\operatorname{Im} \rho y) \leq \frac{1}{|\rho|}, \quad \left| \frac{\sin \rho y}{\rho} \right| \exp(-\operatorname{Im} \rho y) \leq y, \quad |\cos \rho y| \exp(-\operatorname{Im} \rho y) \leq 1$$

при всех $y \geq 0$. Поэтому

$$\int_x^\infty \left| \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} \right| \exp(-\operatorname{Im} \rho(t-x)) |q(t)| dt \leq \int_x^{x+1/|\rho|} (t-x) |q(t)| dt + \frac{1}{|\rho|} \int_{x+1/|\rho|}^\infty |q(t)| dt = \\ = -(t-x) Q_0^+(t) \Big|_x^{x+1/|\rho|} + \int_x^{x+1/|\rho|} Q_0^+(t) dt + \frac{1}{|\rho|} Q_0^+ \left(x + \frac{1}{|\rho|} \right) = Q_1^+(x) - Q_1^+ \left(x + \frac{1}{|\rho|} \right), \\ \int_x^\infty |\cos \rho(t-x)| \exp(-\operatorname{Im} \rho(t-x)) |q(t)| dt \leq Q_0^+(x).$$

Отсюда следует справедливость оценок (2.1.4), из которых вытекает (2.1.3). При вещественных $\rho \neq 0$ функции $e(x, \rho)$ и $e(x, -\rho)$ определены и удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (2.1.1). В уравнении (2.1.1) отсутствует слагаемое с первой производной, и, в силу формулы Остроградского — Лиувилля, их вронскиан $W\{e(x, \rho), e(x, -\rho)\}$ не зависит от x . Согласно (2.1.3) имеем $\lim_{x \rightarrow \infty} W\{e(x, \rho), e(x, -\rho)\} = -2i\rho$.

Тем самым справедливость формулы (2.1.7) доказана. Прежде чем перейти к доказательству (2.1.6), докажем одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 2.1.1. Зафиксируем вещественное α . Пусть $f(x) \in L(\alpha, \infty)$,

$$I_f(x, \rho) = \int_x^\infty f(t) \exp(2i\rho(t-x)) dt, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}.$$

Тогда

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sup_{x \geq \alpha} |I_f(x, \rho)| = 0.$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на всяком конечном интервале, и $f'(x) \in L(\alpha, \infty)$. Тогда интегрирование по частям дает

$$I_f(x, \rho) = -\frac{f(x)}{2i\rho} - \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty f'(t) \exp(2i\rho(t-x)) dt,$$

и, следовательно, $\sup_{x \geq \alpha} |I_f(x, \rho)| \leq C_f |\rho|^{-1}$.

2) Пусть теперь $f(x) \in L(\alpha, \infty)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем $f_\varepsilon(x)$ как в первой части доказательства так, чтобы

$$\int_\alpha^\infty |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|I_f(x, \rho)| \leq |I_{f_\varepsilon}(x, \rho)| + |I_{f-f_\varepsilon}(x, \rho)| \leq C_{f_\varepsilon} |\rho|^{-1} + \varepsilon/2$. Следовательно, существует $\rho_0 \geq 0$ такое, что $\sup_{x \geq \alpha} |I_f(x, \rho)| \leq \varepsilon$ при $|\rho| \geq \rho_0$, $\rho \in \overline{\Omega}_+$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем доказываемое.

Согласно первой оценке в (2.1.4) имеем $e(x, \rho) = O(\exp(-\operatorname{Im} \rho x))$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Omega}_+$, равномерно по $x \geq \alpha$. Подставляя это в уравнение (2.1.12), получаем

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) + O\left(\frac{1}{|\rho|} \exp(-\operatorname{Im} \rho x)\right).$$

Подставляя полученное представление снова в (2.1.12), окончательно уточняем:

$$\begin{aligned} e(x, \rho) &= \exp(i\rho x) + \int_x^\infty \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q(t) \exp(i\rho t) dt + O\left(\frac{1}{|\rho|^2} \exp(-\operatorname{Im} \rho x)\right) = \\ &= \exp(i\rho x) \left(1 + \frac{\omega^+(x)}{i\rho} + \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty q(t) \exp(2i\rho(t-x)) dt + O\left(\frac{1}{|\rho|^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Используя утверждение 2.1.0, приходим к первой формуле в (2.1.6) для $\nu = 0$. Асимптотическая формула для $e'(x, \rho)$ получается аналогично с использованием вместо (2.1.12) представления

$$e'(x, \rho) = i\rho \exp(i\rho x) - \int_x^\infty \cos \rho(t-x) q(t) e(t, \rho) dt.$$

Теорема 2.1.1 доказана.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 2.1.2. Рассмотрим в банаховом пространстве \mathbf{B} следующие уравнения:

$$\begin{aligned}(E + A_0)y_0 &= f_0, \\ (E + A)y &= f,\end{aligned}$$

где A, A_0 — линейные ограниченные операторы, действующие из \mathbf{B} в \mathbf{B} . Предположим, что существует линейный ограниченный оператор $R_0 := (E + A_0)^{-1}$. Это означает, в частности, что уравнение $(E + A_0)y_0 = f_0$ имеет единственное решение в \mathbf{B} . Если $\|A - A_0\| \leq (2\|R_0\|)^{-1}$, то существует линейный ограниченный оператор $R := (E + A)^{-1}$, такой, что

$$R = R_0 \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_0 - A)R_0)^k \right),$$

и

$$\|R - R_0\| \leq 2\|R_0\|^2 \|A - A_0\|.$$

Более того, y и y_0 удовлетворяют оценке

$$\|y - y_0\| \leq C_0 (\|A - A_0\| + \|f - f_0\|),$$

где C_0 зависит лишь от $\|R_0\|$ и $\|f_0\|$.

Доказательство. Имеем

$$E + A = (E + A_0) + (A - A_0) = (E + (A - A_0)R_0)(E + A_0).$$

В силу наших предположений $\|(A - A_0)R_0\| \leq 1/2$, следовательно, существует линейный ограниченный оператор

$$R = (E + A)^{-1} = R_0 (E + (A - A_0)R_0)^{-1} = R_0 \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} ((A_0 - A)R_0)^k \right).$$

Отсюда следует, в частности, что $\|R\| \leq 2\|R_0\|$. Снова используя оценку для $\|A - A_0\|$, получаем

$$\|R - R_0\| \leq \|R_0\| \frac{\|(A - A_0)R_0\|}{1 - \|(A - A_0)R_0\|} \leq 2\|R_0\|^2 \|A - A_0\|.$$

Более того,

$$y - y_0 = Rf - R_0f_0 = (R - R_0)f_0 + R(f - f_0).$$

Следовательно,

$$\|y - y_0\| \leq 2\|R_0\|^2 \|f_0\| \|A - A_0\| + 2\|R_0\| \|f - f_0\|,$$

что и требовалось доказать.

В следующей лемме описываются решения Йоста $e_j(x, \rho)$, $g_j(x, \rho)$, соответствующие потенциалам $q_j(x)$, аппроксимирующим $q(x)$.

Лемма 2.1.1. Пусть a — вещественное число. Если функции $q_j(x)$ таковы, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} (1 + |x|) |q_j(x) - q(x)| dx = 0, \quad (2.1.18)$$

то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \Omega_+} \sup_{x \geq a} |(e_j^{(v)}(x, \rho) - e^{(v)}(x, \rho)) \exp(-i\rho x)| = 0, \quad v = 0, 1. \quad (2.1.19)$$

Если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^a (1 + |x|) |q_j(x) - q(x)| dx = 0,$$

то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \Omega_+} \sup_{x \leq a} |(g_j^{(v)}(x, \rho) - g^{(v)}(x, \rho)) \exp(i\rho x)| = 0, \quad v = 0, 1. \quad (2.1.20)$$

Здесь $e_j(x, \rho)$, $g_j(x, \rho)$ — решения Йоста для потенциала $q_j(x)$.

Доказательство. Обозначим

$$z_j(x, \rho) = e_j(x, \rho) \exp(-i\rho x), \quad z(x, \rho) = e(x, \rho) \exp(-i\rho x), \\ u_j(x, \rho) = |z_j(x, \rho) - z(x, \rho)|.$$

Перепишем уравнение

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^{\infty} \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q(t) e(t, \rho) dt$$

в следующей форме:

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) - \frac{1}{2i\rho} \int_x^{\infty} (\exp(i\rho(x-t)) - \exp(i\rho(t-x))) q(t) e(t, \rho) dt.$$

Тогда с учётом наших обозначений, получаем

$$z_j(x, \rho) - z(x, \rho) = \frac{1}{2i\rho} \int_x^{\infty} (1 - \exp(2i\rho(t-x))) (q(t)z(t, \rho) - q_j(t)z_j(t, \rho)) dt.$$

Откуда следует очевидное неравенство

$$u_j(x, \rho) \leq \int_x^{\infty} (t-x) |q(t) - q_j(t)| z(t, \rho) dt + \int_x^{\infty} (t-x) |q_j(t)| u_j(t, \rho) dt.$$

Согласно (2.1.4) имеем

$$|z(x, \rho)| \leq \exp(Q_1^+(x)) \leq \exp(Q_1^+(a)), \quad x \geq a \quad (2.1.21)$$

и, следовательно,

$$u_j(x, \rho) \leq \exp(Q_1^+(a)) \int_a^{\infty} (t-a) |q(t) - q_j(t)| dt + \int_x^{\infty} (t-x) |q_j(t)| u_j(t, \rho) dt.$$

Отсюда в силу леммы 2.2.1 (см. ниже) получаем

$$\begin{aligned}
u_j(x, \rho) &\leq \exp(Q_1^+(a)) \int_a^\infty (t-a) |q(t) - q_j(t)| dt \exp\left(\int_x^\infty (t-x) |q_j(t)| dt\right) \leq \\
&\leq \exp(Q_1^+(a)) \int_a^\infty (t-a) |q(t) - q_j(t)| dt \exp\left(\int_a^\infty (t-a) |q_j(t)| dt\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_j(x, \rho) \leq C_a \int_a^\infty (t-a) |q(t) - q_j(t)| dt. \quad (2.1.22)$$

В частности, из (2.1.18), (2.1.22) следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \bar{\Omega}_+} \sup_{x \geq a} u_j(x, \rho) = 0,$$

и мы приходим к (2.1.19) для $v = 0$. Обозначим

$$v_j(x, \rho) = |(e'_j(x, \rho) - e'(x, \rho)) \exp(-i\rho x)|.$$

Дифференцируя соотношение

$$e(x, \rho) = \exp(i\rho x) - \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty (\exp(i\rho(x-t)) - \exp(i\rho(t-x))) q(t) e(t, \rho) dt,$$

получаем

$$e'(x, \rho) = (i\rho) \exp(i\rho x) \left(1 - \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty (1 + \exp(2i\rho(t-x))) q(t) z(t, \rho) dt \right).$$

Отсюда следует

$$v_j(x, \rho) \leq \int_x^\infty |q(t) z(t, \rho) - q_j(t) z_j(t, \rho)| dt.$$

Следовательно,

$$v_j(x, \rho) \leq \int_a^\infty |q(t) - q_j(t)| z(t, \rho) dt + \int_a^\infty |q_j(t)| u_j(t, \rho) dt. \quad (2.1.23)$$

В силу (2.1.21) — (2.1.23) мы получим

$$v_j(x, \rho) \leq C_a \left(\int_a^\infty |q(t) - q_j(t)| dt + \int_a^\infty (t-a) |q(t) - q_j(t)| dt \int_a^\infty |q_j(\tau)| d\tau \right).$$

Вместе с (2.1.18) это даёт

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \bar{\Omega}_+} \sup_{x \geq a} v_j(x, \rho) = 0,$$

и мы приходим к (2.1.19) для $v = 1$. Соотношения (2.1.20) доказываются аналогично. Лемма 2.1.1 доказана.

2.1.2. Коэффициенты отражения и прохождения и их свойства. Для вещественных $\rho \neq 0$ функции $\{e(x, \rho), e(x, -\rho)\}$ и $\{g(x, \rho), g(x, -\rho)\}$ образуют фундаментальные системы решений уравнений (2.1.1), поэтому имеем для таких ρ

$$\begin{aligned} e(x, \rho) &= a(\rho)g(x, -\rho) + b(\rho)g(x, \rho), \\ g(x, \rho) &= c(\rho)e(x, \rho) + d(\rho)e(x, -\rho). \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

В следующей лемме изучаются свойства коэффициентов $a(\rho)$, $b(\rho)$, $c(\rho)$ и $d(\rho)$.

Лемма 2.1.2. *Для вещественных $\rho \neq 0$ имеют место следующие соотношения:*

$$c(\rho) = -b(-\rho), \quad d(\rho) = a(\rho), \quad (2.1.25)$$

$$\overline{a(\rho)} = a(-\rho), \quad \overline{b(\rho)} = b(-\rho), \quad (2.1.26)$$

$$|a(\rho)|^2 = 1 + |b(\rho)|^2, \quad (2.1.27)$$

$$a(\rho) = -\frac{1}{2i\rho} \langle e(x, \rho), g(x, \rho) \rangle, \quad b(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \langle e(x, \rho), g(x, -\rho) \rangle. \quad (2.1.28)$$

Доказательство. Так как $\overline{e(x, \rho)} = e(x, -\rho)$, $\overline{g(x, \rho)} = g(x, -\rho)$, то (2.1.26) следует из (2.1.24). Используя (2.1.24), мы также можем подсчитать, что

$$\begin{aligned} \langle e(x, \rho), g(x, \rho) \rangle &= \langle a(\rho)g(x, -\rho) + b(\rho)g(x, \rho), g(x, \rho) \rangle = -2i\rho a(\rho), \\ \langle e(x, \rho), g(x, -\rho) \rangle &= \langle a(\rho)g(x, -\rho) + b(\rho)g(x, \rho), g(x, -\rho) \rangle = 2i\rho b(\rho), \\ \langle e(x, \rho), g(x, \rho) \rangle &= \langle e(x, \rho), c(\rho)e(x, \rho) + d(\rho)e(x, -\rho) \rangle = -2i\rho d(\rho), \\ \langle e(x, -\rho), g(x, \rho) \rangle &= \langle e(x, -\rho), c(\rho)e(x, \rho) + d(\rho)e(x, -\rho) \rangle = 2i\rho c(\rho), \end{aligned}$$

то есть соотношения (2.1.25) и (2.1.28) выполняются. Далее,

$$\begin{aligned} -2i\rho &= \langle e(x, \rho), e(x, -\rho) \rangle = \\ &= \langle a(\rho)g(x, -\rho) + b(\rho)g(x, \rho), a(-\rho)g(x, \rho) + b(-\rho)g(x, -\rho) \rangle = \\ &= a(\rho)a(-\rho)\langle g(x, -\rho), g(x, \rho) \rangle + b(\rho)b(-\rho)\langle g(x, \rho), g(x, -\rho) \rangle = \\ &= -2i\rho(|a(\rho)|^2 - |b(\rho)|^2), \end{aligned}$$

откуда получаем формулу (2.1.27). Лемма 2.1.2 доказана.

Заметим, что (2.1.28) даёт аналитическое продолжение функции $a(\rho)$ в область Ω_+ . Таким образом, функция $a(\rho)$ является аналитической в Ω_+ , а функция $\rho a(\rho)$ является непрерывной в $\overline{\Omega}_+$. Функция $\rho b(\rho)$ непрерывная для действительных ρ . Более того, из (2.1.28) и (2.1.6) следует, что

$$a(\rho) = 1 - \frac{1}{2i\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt + o\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad b(\rho) = o\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty \quad (2.1.29)$$

(в области определения), и, следовательно, функция $\rho(a(\rho) - 1)$ является ограниченной в $\overline{\Omega}_+$. Используя (2.1.28) и (2.1.8) мы можем подсчитать более точно

$$\left. \begin{aligned} a(\rho) &= 1 - \frac{1}{2i\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt + \frac{1}{2i\rho} \int_0^{\infty} A(t) \exp(ipt) dt, \\ b(\rho) &= \frac{1}{2i\rho} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \exp(ipt) dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.30)$$

где $A(t) \in \mathbf{L}(0, \infty)$ и $B(t) \in \mathbf{L}(-\infty, \infty)$ — действительные функции. В самом деле,

$$\begin{aligned} 2i\rho a(\rho) &= g(0, \rho) e'(0, \rho) - e(0, -\rho) g'(0, \rho) = \\ &= \left(1 + \int_{-\infty}^0 A^-(0, t) \exp(-ipt) dt \right) \left(i\rho - A^+(0, 0) + \int_0^{\infty} A_1^+(0, t) \exp(ipt) dt \right) + \\ &+ \left(1 + \int_0^{\infty} A^+(0, t) \exp(ipt) dt \right) \left(i\rho - A^-(0, 0) - \int_{-\infty}^0 A_1^-(0, t) \exp(-ipt) dt \right). \end{aligned}$$

Интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned} i\rho \int_{-\infty}^0 A^-(0, t) \exp(-ipt) dt &= -A^-(0, 0) + \int_{-\infty}^0 A_2^-(0, t) \exp(-ipt) dt, \\ i\rho \int_0^{\infty} A^+(0, t) \exp(ipt) dt &= -A^+(0, 0) - \int_0^{\infty} A_2^+(0, t) \exp(ipt) dt. \end{aligned}$$

Далее, осуществляя замену $\xi = s - t$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 A^-(0, t) \exp(-ipt) dt \int_0^{\infty} A_1^+(0, s) \exp(ips) ds &= \int_{-\infty}^0 A^-(0, t) dt \int_{-t}^{\infty} A_1^+(0, \xi + t) \exp(i\rho\xi) d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\xi}^0 A^-(0, t) A_1^+(0, \xi + t) dt \right) \exp(i\rho\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 A_1^-(0, t) \exp(-ipt) dt \int_0^{\infty} A^+(0, s) \exp(ips) ds &= \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\xi}^0 A_1^-(0, t) A^+(0, \xi + t) dt \right) \exp(i\rho\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Так как

$$2(A^+(0,0) + A^-(0,0)) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt,$$

мы получаем соотношение (2.1.30) для функции $a(\rho)$, где

$$A(t) = A_1^+(0,t) - A_1^-(0,-t) + A_2^-(0,-t) - A_2^+(0,t) - A^+(0,0)A^-(0,-t) - \\ - A^-(0,0)A^+(0,t) + \int_{-t}^0 A^-(0,\xi)A_1^+(0,\xi+t)d\xi - \int_{-t}^0 A_1^-(0,\xi)A^+(0,\xi+t)d\xi.$$

Из (2.1.10) и (2.1.11) следует, что $A(t) \in \mathbf{L}(0, \infty)$. Для функции $b(\rho)$ рассуждения аналогичны. Обозначим

$$e_0(x,\rho) = \frac{e(x,\rho)}{a(\rho)}, \quad g_0(x,\rho) = \frac{g(x,\rho)}{a(\rho)}, \quad (2.1.31)$$

$$s^+(\rho) = -\frac{b(-\rho)}{a(\rho)}, \quad s^-(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)}. \quad (2.1.32)$$

Функции $s^+(\rho)$ и $s^-(\rho)$ называются соответственно *правым и левым коэффициентами отражения*. Из формул (2.1.24) (2.1.31) и (2.1.32) следует, что

$$e_0(x,\rho) = g(x,-\rho) + s^-(\rho)g(x,\rho), \quad g_0(x,\rho) = e(x,-\rho) + s^+(\rho)e(x,\rho). \quad (2.1.33)$$

Используя (2.1.31), (2.1.33) и (2.1.3), получаем, что

$$e_0(x,\rho) \sim \exp(i\rho x) + s^-(\rho)\exp(-i\rho x), \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$e_0(x,\rho) \sim t(\rho)\exp(i\rho x), \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$g_0(x,\rho) \sim t(\rho)\exp(-i\rho x), \quad (x \rightarrow -\infty),$$

$$g_0(x,\rho) \sim \exp(-i\rho x) + s^+(\rho)\exp(i\rho x), \quad (x \rightarrow \infty),$$

где $t(\rho) = (a(\rho))^{-1}$ называется *коэффициентом прохождения*.

Укажем основные свойства функций $s^\pm(\rho)$. В силу соотношений (2.1.26) — (2.1.28) и (2.1.32) функции $s^\pm(\rho)$ являются непрерывными для действительных $\rho \neq 0$ и

$$\overline{s^\pm(\rho)} = s^\pm(-\rho).$$

Более того, из формулы (2.1.27) вытекает, что

$$|s^\pm(\rho)|^2 = 1 - \frac{1}{|a(\rho)|^2},$$

и, следовательно,

$$|s^\pm(\rho)|^2 < 1, \quad \text{для вещественных } \rho \neq 0.$$

Далее, согласно (2.1.29) и (2.1.32), имеем

$$s^\pm(\rho) = o\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \text{ при } |\rho| \rightarrow \infty.$$

Обозначим $R^\pm(x)$ преобразование Фурье функций $s^\pm(\rho)$:

$$R^\pm(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^\pm(\rho) \exp(\pm i\rho x) d\rho. \quad (2.1.34)$$

Тогда функции $R^\pm(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ вещественнозначные, и

$$s^\pm(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} R^\pm(x) \exp(\mp i\rho x) dx. \quad (2.1.35)$$

Из (2.1.31), (2.1.33) вытекает

$$\begin{aligned} \rho e(x, \rho) &= \rho \alpha(\rho) ((s^-(\rho) + 1)g(x, \rho) + g(x, -\rho) - g(x, \rho)), \\ \rho g(x, \rho) &= \rho \alpha(\rho) ((s^+(\rho) + 1)e(x, \rho) + e(x, -\rho) - e(x, \rho)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \alpha(\rho) (s^\pm(\rho) + 1) = 0.$$

2.1.3. Дискретный спектр и его свойства

Определение 2.1.1. Те значения параметра λ , при которых уравнение (2.1.1) имеет нетривиальное решение $y(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, называются *собственными значениями* (с.з.) (2.1.1), а соответствующие решения — *собственными функциями* (с.ф.).

Теорема 2.1.2. Числа $\lambda \geq 0$ не являются собственными значениями.

Доказательство. В самом деле, предположим, что $\lambda_0 = \rho_0^2 > 0$ является собственным значением (2.1.1), а $y_0(x)$ — соответствующая ему собственная функция. Тогда имеем $y_0(x) = Ae(x, \rho_0) + Be(x, -\rho_0)$. При $x \rightarrow \infty$ имеем $y_0(x) \sim 0$, а $e(x, \pm\rho_0) \sim \exp(\pm i\rho_0 x)$. Но это возможно только в том случае, если $A = B = 0$. Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. Согласно теореме 2.1.1 функция $e(x) := e(x, 0)$ является решением уравнения (2.1.1) для $\lambda = 0$ и, согласно (2.1.3),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = 1.$$

Выберем число $a > 0$ так, чтобы

$$e(x) \geq \frac{1}{2} \text{ для } x \geq a,$$

и рассмотрим функцию

$$z(x) := e(x) \int_a^x \frac{dt}{e^2(t)}.$$

Легко видеть, что $z''(x) = q(x)z(x)$ и

$$e(x)z'(x) - e'(x)z(x) \equiv 1.$$

Из наших рассуждений следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = +\infty.$$

Предположим, что $\lambda = 0$ является с.з., а $y_0(x)$ — соответствующей ему с.ф. Так как функции $e(x)$ и $z(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1.1) при $\lambda = 0$, то получаем

$$y_0(x) = C_1^0 e(x) + C_2^0 z(x).$$

И, в силу предельных соотношений для $e(x)$ и $z(x)$, это возможно лишь при $C_1^0 = C_2^0 = 0$. Теорема 2.1.2 доказана.

Обозначим $\Lambda_+ := \{\lambda, \lambda = \rho^2, \rho \in \Omega_+ : a(\rho) = 0\}$ — множество нулей функции $a(\rho)$ в верхней полуплоскости Ω_+ . Так как функция $a(\rho)$ — аналитическая в Ω_+ и, в силу (2.1.29),

$$a(\rho) = 1 + O\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \rho \geq 0, \quad (2.1.36)$$

имеем, что Λ_+ является не более чем счётным ограниченным множеством.

Теорема 2.1.3. *Множество с.з. оператора (2.1.1) совпадает с Λ_+ . Собственные значения $\{\lambda_k\}$ действительны и отрицательны, то есть, $\Lambda_+ \subset (-\infty, 0)$. Для каждого с.з. $\lambda_k = \rho_k^2$ существует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция, а именно,*

$$g(x, \rho_k) = d_k e(x, \rho_k), \quad d_k \neq 0. \quad (2.1.37)$$

Собственные функции $e(x, \rho_k)$ и $g(x, \rho_k)$ вещественные. Собственные функции, соответствующие различным с.з., ортогональны в $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим $\lambda_k = \rho_k^2 \in \Lambda_+$. В силу (2.1.28),

$$\langle e(x, \rho_k), g(x, \rho_k) \rangle = 0, \quad (2.1.38)$$

то есть, (2.1.37) выполняется. Согласно теореме 2.1.1, $e(x, \rho_k) \in \mathbf{L}_2(\alpha, \infty)$, $g(x, \rho_k) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \alpha)$, для каждого фиксированного действительного α . Далее, из (2.1.37) получаем

$$e(x, \rho_k), g(x, \rho_k) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \infty).$$

Таким образом, $e(x, \rho_k)$ и $g(x, \rho_k)$ являются с.ф., соответствующими собственному значению $\lambda_k = \rho_k^2$.

Обратно, пусть $\lambda_k = \rho_k^2$, $\rho_k \in \Omega_+$ — собственное значение, а $y_k(x)$ — соответствующая собственная функция. Так как $y_k(x) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$, имеем

$$y_k(x) = c_{k1}e(x, \rho_k), \quad y_k(x) = c_{k2}g(x, \rho_k), \quad c_{k1}, c_{k2} \neq 0,$$

и, следовательно, (2.1.38) имеет место. Используя (2.1.28), мы получаем, что $a(\rho_k) = 0$, т.е. $\lambda_k \in \Lambda_+$.

Пусть λ_n, λ_k ($\lambda_n \neq \lambda_k$) — собственные значения. Тогда $y_n(x) = e(x, \rho_n)$, $y_k(x) = e(x, \rho_k)$ — соответствующие собственные функции. Интегрирование по частям дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell y_n(x) y_k(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) \ell y_k(x) dx,$$

откуда получаем

$$\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x) dx = \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x) dx,$$

и, с учётом $\lambda_n \neq \lambda_k$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x) dx = 0.$$

Далее, пусть $\lambda^0 = u + iv$, $v \neq 0$ — собственное значение, а $y^0(x)$ — соответствующая ему собственная функция. Так как функция $q(x)$ вещественная, то число $\overline{\lambda^0} = u - iv$ также является собственным значением с собственной функцией $\overline{y^0(x)}$. Так как $\lambda^0 \neq \overline{\lambda^0}$, мы получаем

$$\|y^0\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^0(x) \overline{y^0(x)} dx = 0,$$

что невозможно. Таким образом, получаем, что все собственные значения λ_k вещественны и, следовательно, собственные функции $e(x, \rho_k)$, $g(x, \rho_k)$ также вещественны. Вместе с теоремой 2.1.2 это дает $\Lambda_+ \subset (-\infty, 0)$. Теорема 2.1.3 доказана.

Для $\lambda_k = \rho_k^2 \in \Lambda_+$ положим

$$\alpha_k^+ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^2(x, \rho_k) dx \right)^{-1}, \quad \alpha_k^- = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, \rho_k) dx \right)^{-1}.$$

Теорема 2.1.4. *Множество Λ_+ является конечным, то есть, в Ω_+ функция $a(\rho)$ имеет не более конечного числа нулей. Все нули функции $a(\rho)$ в Ω_+ простые, то есть, $a_1(\rho_k) \neq 0$, где $a_1(\rho) := \frac{d}{d\rho} a(\rho)$. Более того,*

$$\alpha_k^+ = \frac{d_k}{ia_1(\rho_k)}, \quad \alpha_k^- = \frac{1}{id_k a_1(\rho_k)}, \quad (2.1.39)$$

где числа d_k определяются равенствами (2.1.37).

Доказательство. 1) Покажем, что

$$\left. \begin{aligned} -2\rho \int_{-A}^x e(t, \rho) g(t, \rho) dt &= \langle e(t, \rho), \dot{g}(t, \rho) \rangle \Big|_{-A}^x, \\ 2\rho \int_x^A e(t, \rho) g(t, \rho) dt &= \langle \dot{e}(t, \rho), g(t, \rho) \rangle \Big|_x^A, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.40)$$

где

$$\dot{e}(t, \rho) := \frac{d}{d\rho} e(t, \rho), \quad \dot{g}(t, \rho) := \frac{d}{d\rho} g(t, \rho).$$

В самом деле, имеем

$$\frac{d}{dx} \langle e(x, \rho), \dot{g}(x, \rho) \rangle = e(x, \rho) \dot{g}''(x, \rho) - e''(x, \rho) \dot{g}(x, \rho).$$

Так как

$$\begin{aligned} -e''(x, \rho) + q(x)e(x, \rho) &= \rho^2 e(x, \rho), \\ -\dot{g}''(x, \rho) + q(x)\dot{g}(x, \rho) &= \rho^2 \dot{g}(x, \rho) + 2\rho g(x, \rho), \end{aligned}$$

то

$$\frac{d}{dx} \langle e(x, \rho), \dot{g}(x, \rho) \rangle = -2\rho e(x, \rho) g(x, \rho).$$

Подобным образом получаем

$$\frac{d}{dx} \langle \dot{e}(x, \rho), g(x, \rho) \rangle = 2\rho e(x, \rho) g(x, \rho),$$

и (2.1.40) доказано.

Из (2.1.40) следует, что

$$\begin{aligned} 2\rho \int_{-A}^A e(t, \rho) g(t, \rho) dt &= -\langle \dot{e}(x, \rho), g(x, \rho) \rangle - \langle e(x, \rho), \dot{g}(x, \rho) \rangle + \\ &+ \langle \dot{e}(t, \rho), g(t, \rho) \rangle \Big|_{t=A} + \langle e(t, \rho), \dot{g}(t, \rho) \rangle \Big|_{t=-A}. \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцируя (2.1.28) по ρ , получаем

$$2i\rho a_1(\rho) + 2ia(\rho) = -\langle \dot{e}(x, \rho), g(x, \rho) \rangle - \langle e(x, \rho), \dot{g}(x, \rho) \rangle.$$

Для $\rho = \rho_k$, вместе с предыдущей формулой, это даёт

$$ia_1(\rho_k) = \int_{-A}^A e(t, \rho_k) g(t, \rho_k) dt + \delta_k(A), \quad (2.1.41)$$

где

$$\delta_k(A) = -\frac{1}{2\rho_k} (\langle \dot{e}(t, \rho_k), g(t, \rho_k) \rangle \Big|_{t=A} + \langle e(t, \rho_k), \dot{g}(t, \rho_k) \rangle \Big|_{t=-A}).$$

Так как $\rho_k = i\tau_k$, $\tau_k > 0$, то, в силу (2.1.4), имеем

$$e(x, \rho_k), e'(x, \rho_k) = O(\exp(-\tau_k x)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Согласно (2.1.8)

$$\dot{e}(x, \rho_k) = ix \exp(-\tau_k x) + \int_x^\infty it A^+(x, t) \exp(-\tau_k t) dt,$$

$$\begin{aligned} \dot{e}'(x, \rho_k) &= i \exp(-\tau_k x) - ix \tau_k \exp(-\tau_k x) - ix A^+(x, x) \exp(-\tau_k x) + \\ &+ \int_x^\infty it A_1^+(x, t) \exp(-\tau_k t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{e}(x, \rho_k), \dot{e}'(x, \rho_k) = o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда, используя (2.1.37), приходим к

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}(x, \rho_k), g(x, \rho_k) \rangle &= d_k \langle \dot{e}(x, \rho_k), e(x, \rho_k) \rangle = o(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty, \\ \langle e(x, \rho_k), \dot{g}(x, \rho_k) \rangle &= \frac{1}{d_k} \langle g(x, \rho_k), \dot{g}(x, \rho_k) \rangle = o(1) \text{ при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \delta_k(A) = 0.$$

Из (2.1.41) следует, что

$$ia_1(\rho_k) = \int_{-\infty}^\infty e(t, \rho_k) g(t, \rho_k) dt.$$

Снова используя (2.1.37), имеем

$$ia_1(\rho_k) = d_k \int_{-\infty}^\infty e^2(t, \rho_k) dt = \frac{1}{d_k} \int_{-\infty}^\infty g^2(t, \rho_k) dt.$$

Следовательно, $a_1(\rho_k) \neq 0$, и (2.1.39) доказано.

2) Предположим, что $\Lambda_+ = \{\lambda_k\}$ — бесконечное множество. Так как Λ_+ ограничено и $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$, то отсюда следует, что $\rho_k = i\tau_k \rightarrow 0$, $\tau_k > 0$. В силу (2.1.4), (2.1.5) существует константа $A > 0$ такая, что

$$\left. \begin{aligned} e(x, i\tau) &\geq \frac{1}{2} \exp(-\tau x) \quad \text{для } x \geq A, \tau \geq 0, \\ g(x, i\tau) &\geq \frac{1}{2} \exp(\tau x) \quad \text{для } x \leq -A, \tau \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.42)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \int_A^\infty e(x, \rho_k) e(x, \rho_n) dx &\geq \frac{\exp(-(\tau_k + \tau_n)A)}{4(\tau_k + \tau_n)} \geq \frac{\exp(-2AT)}{8T}, \\ \int_{-\infty}^A g(x, \rho_k) g(x, \rho_n) dx &\geq \frac{\exp(-(\tau_k + \tau_n)A)}{4(\tau_k + \tau_n)} \geq \frac{\exp(-2AT)}{8T}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.43)$$

где $T = \max_k \tau_k$. Так как с.ф. $e(x, \rho_k)$ и $e(x, \rho_n)$ ортогональны в $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$, мы получаем

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e(x, \rho_k) e(x, \rho_n) dx = \int_A^{\infty} e(x, \rho_k) e(x, \rho_n) dx + \frac{1}{d_k d_n} \int_{-\infty}^{-A} g(x, \rho_k) g(x, \rho_n) dx + \int_{-A}^A e^2(x, \rho_k) dx + \int_{-A}^A e(x, \rho_k) (e(x, \rho_n) - e(x, \rho_k)) dx. \quad (2.1.44)$$

Возьмём $x_0 \leq -A$, такое, что $e(x_0, 0) \neq 0$. Согласно (2.1.37)

$$\frac{1}{d_k d_n} = \frac{e(x_0, \rho_k) e(x_0, \rho_n)}{g(x_0, \rho_k) g(x_0, \rho_n)}.$$

Так как функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ непрерывны при $\text{Im } \rho \geq 0$, то, с помощью (2.1.42), вычисляем

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} g(x_0, \rho_k) g(x_0, \rho_n) = g^2(x_0, 0) > 0, \\ \lim_{k, n \rightarrow \infty} e(x_0, \rho_k) e(x_0, \rho_n) = e^2(x_0, 0) > 0.$$

Поэтому

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_k d_n} > 0.$$

Вместе с (2.1.43) это даёт

$$\int_A^{\infty} e(x, \rho_k) e(x, \rho_n) dx + \frac{1}{d_k d_n} \int_{-\infty}^{-A} g(x, \rho_k) g(x, \rho_n) dx + \int_{-A}^A e^2(x, \rho_k) dx \geq C > 0 \quad (2.1.45)$$

для достаточно больших k и n . С другой стороны, действуя тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2.3.4, легко получаем, что

$$\int_{-A}^A e(x, \rho_k) (e(x, \rho_n) - e(x, \rho_k)) dx \rightarrow 0, \text{ при } k, n \rightarrow \infty. \quad (2.1.46)$$

Соотношения (2.1.44) — (2.1.46) приводят к противоречию. Это означает, что Λ_+ является конечным множеством. Теорема 2.1.4 доказана.

Таким образом, множество собственных значений имеет вид

$$\Lambda_+ = \{\lambda_k\}_{k=1, N}, \quad \lambda_k = \rho_k^2, \quad \rho_k = i\tau_k, \quad 0 < \tau_1 < \dots < \tau_N.$$

Определение 2.1.2. Набор $J^+ = \{s^+(\rho), \lambda_k, \alpha_k^+; \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$ называется *правыми данными рассеяния*, а $J^- = \{s^-(\rho), \lambda_k, \alpha_k^-; \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$ — *левыми данными рассеяния*.

Пример 2.1.1. Пусть $q(x) \equiv 0$. Тогда $e(x, \rho) = \exp(i\rho x)$, $g(x, \rho) = \exp(-i\rho x)$, $a(\rho) = 1$, $b(\rho) = 0$, $s^\pm(\rho) = 0$, $N = 0$, то есть, в этом случае собственные значения отсутствуют.

2.1.4. Связь между левыми и правыми данными рассеяния. В этом пункте мы будем изучать связь между данными рассеяния J^+ и J^- . Рассмотрим функцию

$$\gamma(\rho) = \frac{1}{a(\rho)} \prod_{k=1}^N \frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k}. \quad (2.1.47)$$

Лемма 2.1.3.

(а) Функция $\gamma(\rho)$ аналитична в Ω_+ и непрерывна в $\bar{\Omega}_+ \setminus \{0\}$.

(б) Функция $\gamma(\rho)$ не имеет нулей в $\bar{\Omega}_+ \setminus \{0\}$.

(в) При $|\rho| \rightarrow \infty$ и $\rho \in \bar{\Omega}_+$

$$\gamma(\rho) = 1 + O\left(\frac{1}{|\rho|}\right). \quad (2.1.48)$$

(г) $|\gamma(\rho)| \leq 1$ для $\rho \in \bar{\Omega}_+$.

Доказательство. Утверждения (а) — (в) являются очевидными следствиями вышеприведённых рассуждений. Докажем (г). В силу (2.1.27), $|a(\rho)| \geq 1$, при вещественных $\rho \neq 0$, поэтому

$$|\gamma(\rho)| \leq 1, \text{ при вещественных } \rho \neq 0. \quad (2.1.49)$$

Предположим, что функция $\rho a(\rho)$ аналитична в нуле. Тогда, используя (2.1.47), (2.1.49), делаем вывод, что функция $\gamma(\rho)$ имеет устранимую особенность в нуле. То есть, после непрерывного продолжения в нуль функция $\gamma(\rho)$ становится непрерывной в $\bar{\Omega}_+$. Используя (2.1.48), (2.1.49) и принцип максимума модуля, мы получаем утверждение (г).

В общем случае мы не можем использовать такую аргументацию для доказательства утверждения (г). Поэтому мы введём потенциалы

$$q_r(x) = \begin{cases} q(x), & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r, \end{cases} \quad r \geq 0,$$

и рассмотрим соответствующие решения Йоста $e_r(x, \rho)$ и $g_r(x, \rho)$. Ясно, что $e_r(x, \rho) \equiv \exp(i\rho x)$ для $x \geq r$ и $g_r(x, \rho) \equiv \exp(-i\rho x)$ для $x \leq -r$. При каждом фиксированном x функции $e_r^{(v)}(x, \rho)$ и $g_r^{(v)}(x, \rho)$ ($v=1, 2$) являются целыми по ρ . Положим

$$a_r(\rho) = -\frac{1}{2i\rho} \langle e_r(x, \rho), g_r(x, \rho) \rangle, \quad \gamma_r(\rho) = \frac{1}{a_r(\rho)} \prod_{k=1}^{N_r} \frac{\rho - i\tau_{kr}}{\rho + i\tau_{kr}},$$

где $\rho_{kr} = i\tau_{kr}$, $k=1, N_r$, — нули функции $a_r(\rho)$ в верхней полуплоскости Ω_+ . Функция $\rho a_r(\rho)$ является целой по ρ , и, по первой части доказательства,

$$|\gamma_r(\rho)| \leq 1 \text{ при } \rho \in \overline{\Omega}_+. \quad (2.1.50)$$

В силу леммы 2.1.1

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \overline{\Omega}_+} \sup_{x \geq a} |(e_r^{(\nu)}(x, \rho) - e^{(\nu)}(x, \rho)) \exp(-i\rho x)| &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \overline{\Omega}_+} \sup_{x \leq a} |(g_r^{(\nu)}(x, \rho) - g^{(\nu)}(x, \rho)) \exp(i\rho x)| &= 0 \end{aligned}$$

для $\nu = 0, 1$ и любого фиксированного вещественного a . Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \overline{\Omega}_+} |\rho(a_r(\rho) - a(\rho))| = 0,$$

то есть,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho a_r(\rho) = \rho a(\rho), \text{ равномерно в } \overline{\Omega}_+. \quad (2.1.51)$$

В частности, из (2.1.51), с учетом (2.1.36), следует, что $0 < \tau_{kr} \leq C$ для всех k и r .

Пусть δ_r — это нижняя грань расстояний между нулями $\{\rho_{kr}\}$ функции $a_r(\rho)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } \rho > 0$. Покажем, что

$$\delta^* := \inf_{r > 0} \delta_r > 0. \quad (2.1.52)$$

Предположим противное: существует последовательность чисел $r_k \rightarrow \infty$, такая что $\delta_{r_k} \rightarrow 0$. Обозначим $\rho_k^{(1)} = i\tau_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)} = i\tau_k^{(2)}$ (где $\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)} \geq 0$) — нули функции $a_{r_k}(\rho)$, такие что $\rho_k^{(1)} - \rho_k^{(2)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как следует из (2.1.4), (2.1.5), существует константа $A > 0$, такая что

$$\left. \begin{aligned} e_r(x, i\tau) &\geq \frac{1}{2} \exp(-\tau x) \text{ для } xr \geq A, \tau \geq 0, r \geq 0, \\ g_r(x, i\tau) &\geq \frac{1}{2} \exp(\tau x) \text{ для } x \leq -A, \tau \geq 0, r \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.53)$$

Так как функции $e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)})$ и $e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)})$ ортогональны в $L_2(-\infty, \infty)$, то

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) dx = \int_A^{\infty} e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) dx + \\ &+ \frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} \int_{-\infty}^{-A} g_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) dx + \int_{-A}^A e_{r_k}^2(x, \rho_k^{(1)}) dx + \\ &+ \int_{-A}^A e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) (e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) - e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)})) dx, \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

где числа $d_k^{(j)}$ определяются равенствами

$$g_{r_k}(x, \rho_k^{(j)}) = d_k^{(j)} e_{r_k}(x, \rho_k^{(j)}), \quad d_k^{(j)} \neq 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $x_0 \leq -A$. Тогда, в силу (2.1.53),

$$g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)}) \geq C > 0,$$

$$\frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} = \frac{e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)})}{g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)})}.$$

Используя лемму 2.1.1, получаем

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)}) \geq 0$$

и, следовательно,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} \geq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) dx + \frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} \int_{-\infty}^{-A} g_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) dx + \\ & + \int_{-A}^A e_{r_k}^2(x, \rho_k^{(1)}) dx \geq C > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_{-A}^A e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) (e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) - e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)})) dx \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Учитывая полученные оценки и (2.1.54), приходим к противоречию, то есть, (2.1.52) имеет место.

Обозначим $D_{\delta, R} := \{\rho \in \Omega_+ : \delta < |\rho| < R\}$, где $0 < \delta < \min(\delta^*, \tau_1)$, $R > \tau_N$.

Используя (2.1.51), можно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_r(\rho) = \gamma(\rho), \text{ равномерно в } \overline{D_{\delta, R}}. \quad (2.1.55)$$

Из (2.1.50) и (2.1.55) следует, что $|\gamma(\rho)| \leq 1$ для $\rho \in \overline{D_{\delta, R}}$. В силу выбора δ и R получаем, что $|\gamma(\rho)| \leq 1$ для $\rho \in \overline{\Omega_+}$, то есть, утверждение (2) доказано. Лемма 2.1.3 доказана.

В частности, из леммы 2.1.3 следует, что

$$\frac{1}{a(\rho)} = O(1), \text{ при } |\rho| \rightarrow 0, \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (2.1.56)$$

Отметим также, что поскольку функция $\sigma a(\sigma)$ непрерывна в нуле, то отсюда следует, что для достаточно малых вещественных σ выполняется неравенство

$$1 \leq |a(\sigma)| = \frac{1}{|\gamma(\rho)|} \leq \frac{C}{|\sigma|}.$$

Свойства функции $\gamma(\rho)$, полученные в лемме 2.1.3, позволяют восстановить $\gamma(\rho)$ в Ω_+ по её модулю $|\gamma(\sigma)|$, заданному для вещественных σ .

Лемма 2.1.4. *Справедливо следующее представление:*

$$\gamma(\rho) = \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi - \rho} d\xi\right), \quad \rho \in \Omega_+ \quad (2.1.57)$$

Доказательство. 1) Функция $\ln \gamma(\rho)$ является аналитической в Ω_+ , и $\ln \gamma(\rho) = O(\rho^{-1})$ при $|\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \overline{\Omega}_+$. Рассмотрим замкнутый контур C_R (с обходом против часовой стрелки), являющийся границей области $D_R = \{\rho \in \Omega_+ : |\rho| < R\}$ (рис. 2.1.1). В силу интегральной формулы Коши имеем

$$\ln \gamma(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in D_R.$$

Так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\xi|=R \\ \xi \in \Omega_+}} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho} d\xi = 0,$$

получим

$$\ln \gamma(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in \Omega_+. \quad (2.1.58)$$

2) Выберем вещественное σ и рассмотрим замкнутый контур $C_{R,\delta}^\sigma$ (с обходом против часовой стрелки), состоящий из полуокружностей $C_R^0 = \{\xi : \xi = R \exp(i\varphi), \varphi \in [0, \pi]\}$ и $\Gamma_\delta^\sigma = \{\xi : \xi - \sigma = \delta \exp(i\varphi), \varphi \in [0, \pi]\}$, $\delta > 0$, и интервалов $[-R, \sigma - \delta]$, $[\sigma + \delta, R]$ (см. рис. 2.1.1). В силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R,\delta}^\sigma} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma} d\xi = 0.$$

Так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^0} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma} d\xi = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^\sigma} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma} d\xi = -\frac{1}{2} \ln \gamma(\sigma),$$

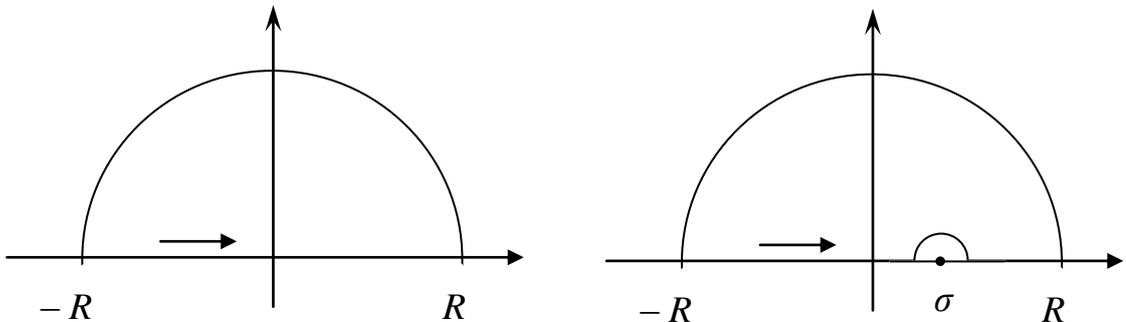


Рис. 2.1.1

для вещественных σ получаем

$$\ln \gamma(\sigma) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma} d\xi. \quad (2.1.59)$$

В (2.1.59) (и везде в дальнейшем, если это необходимо) всякий раз, когда это необходимо, интеграл понимается в смысле главного значения.

3) Пусть $\gamma(\sigma) = |\gamma(\sigma)| \exp(-i\beta(\sigma))$. Разделяя в (2.1.59) действительную и мнимую части, получаем, что

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\xi)|}{\xi - \sigma} d\xi, \quad \ln |\gamma(\sigma)| = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi - \sigma} d\xi.$$

Тогда, используя (2.1.58), вычисляем для $\rho \in \Omega_+$:

$$\begin{aligned} \ln \gamma(\rho) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\xi)|}{\xi - \rho} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi - \rho} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\xi)|}{\xi - \rho} d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - \rho)(s - \xi)} \right) \ln |\gamma(s)| ds. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{(\xi - \rho)(s - \xi)} = \frac{1}{(s - \rho)} \left(\frac{1}{\xi - \rho} - \frac{1}{\xi - s} \right),$$

то для любых $\rho \in \Omega_+$ и вещественных s

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - \rho)(s - \xi)} = \frac{\pi i}{(s - \rho)}.$$

Следовательно,

$$\ln \gamma(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\xi)|}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in \Omega_+,$$

и мы приходим к (2.1.57). Лемма 2.1.4 доказана.

Из (2.1.26), (2.1.27) и (2.1.32) получаем, что для вещественных $\rho \neq 0$

$$\frac{1}{|a(\rho)|^2} = 1 - |s^\pm(\rho)|^2.$$

В силу (2.1.47), для вещественных $\rho \neq 0$, имеем

$$|\gamma(\rho)| = \sqrt{1 - |s^\pm(\rho)|^2}.$$

Используя (2.1.47) и (2.1.57), получаем

$$a(\rho) = \prod_{k=1}^N \frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k} \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |s^\pm(\xi)|^2)}{\xi - \rho} d\xi \right), \quad \rho \in \Omega_+. \quad (2.1.60)$$

Отметим, что, так как функция $\rho a(\rho)$ непрерывна в $\bar{\Omega}_+$, то

$$\frac{\rho^2}{1 - |s^\pm(\rho)|^2} = O(1) \text{ при } |\rho| \rightarrow 0.$$

Соотношения (2.1.60) позволяют установить связь между данными рассеяния J^+ и J^- . А именно, по данным рассеяния J^+ можно однозначно восстановить J^- , и — наоборот, посредством следующего алгоритма.

Алгоритм 2.1.1. Пусть даны J^+ . Тогда

- 1) строим функцию $a(\rho)$ по формуле (2.1.60);
- 2) вычисляем d_k и a_k^- по формулам (2.1.39);
- 3) находим $b(\rho)$ и $s^-(\rho)$ по формулам (2.1.32).

2.2. Основное уравнение

2.2.1. Постановка обратной задачи рассеяния. Обратная задача рассеяния формулируется следующим образом: даны данные рассеяния J^+ (или J^-), построить потенциал q .

Центральную роль при построении решения обратной задачи рассеяния играет так называемое основное уравнение, которое является линейным интегральным уравнением Фредгольма с параметром. В этом пункте будет выведено основное уравнение и доказана его однозначная разрешимость. В п. 2.3 мы получим решение обратной задачи рассеяния вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости.

Теорема 2.2.1. Для каждого фиксированного x функции $A^\pm(x, t)$, определённые равенствами (2.1.8), удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$F^+(x+y) + A^+(x, y) + \int_x^\infty A^+(x, t) F^+(t+y) dt = 0, \quad y > x, \quad (2.2.1)$$

$$F^-(x+y) + A^-(x, y) + \int_{-\infty}^x A^-(x, t) F^-(t+y) dt = 0, \quad y < x, \quad (2.2.2)$$

где

$$F^\pm(x) = R^\pm(x) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^\pm \exp(\mp \tau_k x), \quad (2.2.3)$$

а функции $R^\pm(x)$ определены равенствами (2.1.34). Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) называются основными уравнениями, или уравнениями Гельфанда—Левитана—Марченко.

Доказательство. В силу (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.32)

$$\left(\frac{1}{a(\rho)} - 1 \right) g(x, \rho) = s^+(\rho) e(x, \rho) + e(x, -\rho) - g(x, \rho). \quad (2.2.4)$$

Положим $A^+(x, t) = 0$ для $t < x$ и $A^-(x, t) = 0$ для $t > x$. Тогда, используя (2.1.8) и (2.1.35), получим

$$\begin{aligned} & s^+(\rho) e(x, \rho) + e(x, -\rho) - g(x, \rho) = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} R^+(y) \exp(-i\rho y) dy \right) \left(\exp(i\rho x) + \int_{-\infty}^{\infty} A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt \right) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} (A^+(x, t) - A^-(x, t)) \exp(-i\rho t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) \exp(-i\rho y) dy, \end{aligned}$$

где

$$H(x, y) = A^+(x, y) - A^-(x, y) + R^+(x + y) + \int_x^{\infty} A^+(x, t) R^+(t + y) dt. \quad (2.2.5)$$

Таким образом, при каждом фиксированном x правая часть (2.2.4) есть преобразование Фурье функции $H(x, y)$. Следовательно,

$$H(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - 1 \right) g(x, \rho) \exp(i\rho y) d\rho. \quad (2.2.6)$$

Зафиксируем x и y ($y > x$) и рассмотрим функцию

$$f(\rho) := \left(\frac{1}{a(\rho)} - 1 \right) g(x, \rho) \exp(i\rho y). \quad (2.2.7)$$

Согласно (2.1.6) и (2.1.29),

$$f(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \exp(i\rho(y-x)) \left(\int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt + o(1) \right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega}_+. \quad (2.2.8)$$

Пусть $C_{\delta, R}$ — замкнутый контур (с обходом против часовой стрелки), являющийся границей области $D_{\delta, R} = \{ \rho \in \Omega_+ : \delta < |\rho| < R \}$, где $\delta < \tau_1 < \dots < \tau_N < R$. Таким образом, все нули $\rho_k = i\tau_k$, $k = \overline{1, N}$, функции $a(\rho)$ содержатся в $D_{\delta, R}$. По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\delta,R}} f(\rho) d\rho = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{\rho=\rho_k} f(\rho).$$

С другой стороны, из (2.2.7), (2.2.8), (2.1.5) и (2.1.56) следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\rho|=R \\ \rho \in \Omega_+}} f(\rho) d\rho = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\rho|=\delta \\ \rho \in \Omega_+}} f(\rho) d\rho = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) d\rho = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{\rho=\rho_k} f(\rho).$$

Отсюда, а также из (2.2.6), (2.2.7) следует, что

$$H(x, y) = i \sum_{k=1}^N \frac{g(x, i\tau_k) \exp(-\tau_k y)}{a_1(i\tau_k)}.$$

Используя (2.1.37), (2.1.8) и (2.1.39), получаем

$$\begin{aligned} H(x, y) &= i \sum_{k=1}^N \frac{d_k e(x, i\tau_k) \exp(-\tau_k y)}{a_1(i\tau_k)} = \\ &= - \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \left(\exp(-\tau_k(x+y)) + \int_x^{\infty} A^+(x, t) \exp(-\tau_k(t+y)) dt \right). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Так как $A^-(x, y) = 0$ при $y > x$, то (2.2.5) и (2.2.9) дают (2.2.1). Соотношение (2.2.2) доказывается аналогично. Теорема 2.2.1 доказана.

Лемма 2.2.1. Пусть заданы неотрицательные функции $v(x)$, $u(x)$ ($a \leq x \leq T \leq \infty$) такие, что $v(x) \in L(a, T)$, $u(x) \cdot v(x) \in L(a, T)$ и пусть $c_1 \geq 0$. Если

$$u(x) \leq c_1 + \int_x^T v(t) u(t) dt, \quad (2.2.10)$$

то

$$u(x) \leq c_1 \exp \left(\int_x^T v(t) dt \right). \quad (2.2.11)$$

Доказательство. Обозначим

$$\xi(x) := c_1 + \int_x^T v(t) u(t) dt.$$

Тогда $\xi(T) = c_1$, $-\xi'(x) = v(x)u(x)$, и из (2.2.10) следует, что

$$0 \leq -\xi'(x) \leq v(x)\xi(x).$$

Пусть $c_1 > 0$. Тогда $\xi(x) > 0$ и

$$0 \leq -\frac{\xi'(x)}{\xi(x)} \leq v(x).$$

Интегрируя это неравенство, мы получаем

$$\ln \frac{\xi(x)}{\xi(T)} \leq \int_x^T v(t) dt$$

и, следовательно,

$$\xi(x) \leq c_1 \exp \left(\int_x^T v(t) dt \right).$$

Согласно (2.2.10) $u(x) \leq \xi(x)$, и мы приходим к (2.2.11).

Если же $c_1 = 0$, то $\xi(x) = 0$. В самом деле, предположим противное: $\xi(x) \neq 0$. Тогда существует число $T_0 \leq T$ такое, что $\xi(x) > 0$ при $x < T_0$, и $\xi(x) \equiv 0$ при $x \in [T_0, T]$. Повторяя приведённые выше рассуждения, получим для $x < T_0$ и достаточного малого $\varepsilon > 0$

$$\ln \frac{\xi(x)}{\xi(T_0 - \varepsilon)} \leq \int_x^{T_0 - \varepsilon} v(t) dt \leq \int_x^{T_0} v(t) dt,$$

что невозможно. Таким образом, $\xi(x) \equiv 0$, и (2.2.11) становится очевидным. Лемма 2.2.1 доказана.

Лемма 2.2.2. *Функции $F^\pm(x)$ абсолютно непрерывны, и, при каждом фиксированном $a > -\infty$, справедливы формулы*

$$\int_a^\infty |F^\pm(\pm x)| dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1 + |x|) |F^\pm(\pm x)| dx < \infty. \quad (2.2.12)$$

Доказательство.

1) Согласно (2.2.3) и (2.1.34), имеем $F^+(x) \in \mathbf{L}_2(a, \infty)$, при каждом фиксированном $a > -\infty$. По непрерывности формула (2.2.1) остаётся справедливой и при $y = x$:

$$F^+(2x) + A^+(x, x) + \int_x^\infty A^+(x, t) F^+(t + x) dt = 0. \quad (2.2.13)$$

Перепишем (2.2.13) в виде

$$F^+(2x) + A^+(x, x) + 2 \int_x^\infty A^+(x, 2\xi - x) F^+(2\xi) d\xi = 0. \quad (2.2.14)$$

Из формул (2.2.14) и (2.1.10) следует, что функция $F^+(x)$ непрерывна, и, при $x \geq a$, верна оценка

$$|F^+(2x)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(x) + \exp(Q_1^+(a)) \int_x^\infty Q_0^+(\xi) |F^+(2\xi)| d\xi. \quad (2.2.15)$$

Фиксируем $r \geq a$. Тогда, для каждого $x \geq r$, (2.2.15) даёт

$$|F^+(2x)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(r) + \exp(Q_1^+(a)) \int_x^\infty Q_0^+(\xi) |F^+(2\xi)| d\xi.$$

Применяя лемму 2.2.1, получим

$$|F^+(2x)| \leq \frac{1}{2} Q_0^+(r) \exp(Q_1^+(a) \exp(Q_1^+(a))), \quad x \geq r \geq a,$$

и, следовательно,

$$|F^+(2x)| \leq C_a Q_0^+(x), \quad x \geq a. \quad (2.2.16)$$

Отсюда следует, что, для каждого фиксированного $a > -\infty$,

$$\int_a^\infty |F^+(x)| dx < \infty.$$

2) В силу (2.2.14), функция $F^+(x)$ абсолютно непрерывна, и

$$\begin{aligned} & 2F^+'(2x) + \frac{d}{dx} A^+(x, x) - 2A^+(x, x)F^+(2x) + \\ & + 2 \int_x^\infty (A_1^+(x, 2\xi - x) - A_2^+(x, 2\xi - x)) F^+(2\xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

где

$$A_1^+(x, t) = \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial x}, \quad A_2^+(x, t) = \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t}.$$

Учитывая (2.1.9), получаем

$$F^+'(2x) = \frac{1}{4} q(x) + P(x), \quad (2.2.17)$$

где

$$P(x) = - \int_x^\infty (A_1^+(x, 2\xi - x) - A_2^+(x, 2\xi - x)) F^+(2\xi) d\xi + \frac{1}{2} F^+(2x) \int_x^\infty q(t) dt.$$

Из (2.2.16) и (2.1.11) следует, что

$$|P(x)| \leq C_a (Q_0^+(x))^2, \quad x \geq a. \quad (2.2.18)$$

Так как

$$x Q_0^+(x) \leq \int_x^\infty t |q(t)| dt,$$

то из (2.2.17) и (2.2.18) следует, что для каждого $a > -\infty$

$$\int_a^{\infty} (1+|x|) \left| F^+(x) \right| dx < \infty,$$

и соотношения (2.2.12) доказаны для функции $F^+(x)$. Для $F^-(x)$ рассуждения аналогичны. Лемма 2.2.2 доказана.

2.2.2. Разрешимость основного уравнения обратной задачи. Перейдём теперь к изучению разрешимости основных уравнений (2.2.1) и (2.2.2). Пусть заданы множества $J^{\pm} = \{s^{\pm}(\rho), \lambda_k, a_k^{\pm}, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$, удовлетворяющие следующему условию:

Условие А. Для вещественных $\rho \neq 0$ функции $s^{\pm}(\rho)$ непрерывны, $|s^{\pm}(\rho)| < 1$, $\overline{s^{\pm}(\rho)} = s^{\pm}(-\rho)$ и $s^{\pm}(\rho) = o(\rho^{-1})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$. Вещественные функции $R^{\pm}(x) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$, определённые равенствами (2.1.34), абсолютно непрерывны, и, для каждого фиксированного $a > -\infty$, справедливо

$$\int_a^{\infty} R^{\pm}(\pm x) dx < \infty, \quad \int_a^{\infty} (1+|x|) \left| R^{\pm}(\pm x) \right| dx < \infty. \quad (2.2.19)$$

Кроме того, $\lambda = -\tau_k^2 < 0$, $\alpha_k^{\pm} > 0$, $k = \overline{1, N}$.

Теорема 2.2.2. Пусть даны J^+ (или J^-), удовлетворяющие условию А. Тогда, для каждого фиксированного x , интегральное уравнение (2.2.1) (соответственно (2.2.2)) имеет единственное решение $A^+(x, y) \in \mathbf{L}(x, \infty)$ (соответственно $A^-(x, y) \in \mathbf{L}(-\infty, x)$).

Доказательство. Для определённости рассмотрим уравнение (2.2.1). Для уравнения (2.2.2) все рассуждения проводятся аналогично. Легко проверить, что, для каждого фиксированного x , оператор

$$(J_x f)(y) = \int_x^{\infty} F^+(t+y) f(t) dt, \quad y > x$$

является компактным в $\mathbf{L}(x, \infty)$. Поэтому достаточно доказать, что однородное уравнение

$$f(y) + \int_x^{\infty} F^+(t+y) f(t) dt = 0 \quad (2.2.20)$$

имеет только тривиальное решение. Пусть $f(y) \in \mathbf{L}(x, \infty)$ — вещественная функция, являющаяся решением уравнения (2.2.20). Из (2.2.20) и условия

А следует, что функции $F^+(y)$ и $f(y)$ ограничены на полуоси $y > x$, и, следовательно, $f(y) \in \mathbf{L}_2(x, \infty)$. Используя (2.2.3) и (2.1.34), вычисляем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_x^\infty f^2(y)dy + \int_x^\infty \int_x^\infty F^+(t+y)f(t)f(y)dtdy = \\ &= \int_x^\infty f^2(y)dy + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \left(\int_x^\infty f(y) \exp(-\tau_k y) dy \right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty s^+(\rho) \Phi^2(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\rho) = \int_x^\infty f(y) \exp(i\rho y) dy.$$

В силу равенства Парсеваля, имеем

$$\int_x^\infty f^2(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty |\Phi(\rho)|^2 d\rho,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \left(\int_x^\infty f(y) \exp(-\tau_k y) dy \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\Phi(\rho)|^2 \{1 - |s^+(\rho)| \exp i(2\theta(\rho) + \eta(\rho))\} d\rho = 0, \end{aligned}$$

где $\theta(\rho) = \arg \Phi(\rho)$, $\eta(\rho) = \arg(-s^+(\rho))$. Рассмотрим в этом тождестве вещественную часть

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \left(\int_x^\infty f(y) \exp(-\tau_k y) dy \right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\Phi(\rho)|^2 \{1 - |s^+(\rho)| \cos(2\theta(\rho) + \eta(\rho))\} d\rho = 0$$

Так как $|s^+(\rho)| < 1$, то это возможно только при $\Phi(\rho) \equiv 0$. Тогда $f(y) = 0$, и теорема 2.2.2 доказана.

Замечание 2.2.1. Основные уравнения (2.2.1), (2.2.2) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} F^+(2x+y) + B^+(x,y) + \int_0^{\infty} B^+(x,t)F^+(2x+y+t)dt = 0, \quad y > 0, \\ F^-(2x+y) + B^-(x,y) + \int_{-\infty}^0 B^-(x,t)F^-(2x+y+t)dt = 0, \quad y < 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

где $B^{\pm}(x,y) = A^{\pm}(x,x+y)$.

2.3. Решение обратной задачи рассеяния

2.3.1. Теорема единственности. В этом пункте, используя основные уравнения (2.2.1), (2.2.2), мы дадим решение обратной задачи рассеяния, то есть, задачи восстановления потенциала q по данным рассеяния J^+ (или J^-). Сначала докажем теорему единственности.

Теорема 2.3.1. *Задание данных рассеяния J^+ (или J^-) однозначно определяют потенциал q .*

Доказательство. Наряду с потенциалом q рассмотрим потенциал \tilde{q} и условимся, что, если символ χ обозначает некоторый объект, относящийся к q , то $\tilde{\chi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к \tilde{q} . Пусть $J^+ = \tilde{J}^+$. Тогда из (2.1.34), (2.2.3) следует, что $F^+(x) = \tilde{F}^+(x)$. В силу теорем 2.2.1 и 2.2.2, $A^+(x,y) = \tilde{A}^+(x,y)$. Таким образом, из (2.1.9) мы получаем $q = \tilde{q}$. Для J^- рассуждения аналогичны. Теорема 2.3.1 доказана.

Решение обратной задачи рассеяния может быть построено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2.3.1. Пусть даны данные рассеяния J^+ (или J^-). Тогда

- 1) вычисляем функцию $F^+(x)$ (или $F^-(x)$) по формулам (2.2.3) и (2.1.34);
- 2) находим $A^+(x,y)$ (или $A^-(x,y)$), решая основное уравнение (2.2.1) (или, соответственно, основное уравнение (2.2.2));
- 3) строим потенциал $q(x) = -2\frac{d}{dx}A^+(x,x)$ (или $q(x) = 2\frac{d}{dx}A^-(x,x)$).

Прежде чем перейти к описанию необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи рассеяния, докажем следующие предварительные утверждения.

Лемма 2.3.1. Пусть даны множества $J^\pm = \{s^\pm(\rho), \lambda_k, a_k^\pm, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$, удовлетворяющие условию А, и пусть функции $A^\pm(x, y)$ являются решениями интегральных уравнений (2.2.1), (2.2.2). Построим функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ по формулам (2.1.8) и функции $q^\pm(x)$ — по следующим формулам

$$q^+(x) = -2 \frac{d}{dx} A^+(x, x), \quad q^-(x) = 2 \frac{d}{dx} A^-(x, x). \quad (2.3.1)$$

Тогда, для любого фиксированного $a > -\infty$, выполняется

$$\int_a^\infty (1 + |x|) |q^\pm(\pm x)| dx < \infty, \quad (2.3.2)$$

причём,

$$\begin{aligned} -e''(x, \rho) + q^+(x)e(x, \rho) &= \rho^2 e(x, \rho), \\ -g''(x, \rho) + q^-(x)g(x, \rho) &= \rho^2 g(x, \rho). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Доказательство. 1) Из (2.2.3), (2.2.19) следует, что

$$\int_a^\infty |F^\pm(\pm x)| dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1 + |x|) |F^{\pm'}(\pm x)| dx < \infty. \quad (2.3.4)$$

Перепишем (2.2.1) в виде

$$F^+(y + 2x) + A^+(x, x + y) + \int_0^\infty A^+(x, x + t) F^+(t + y + 2x) dt = 0, \quad y > 0 \quad (2.3.5)$$

и для, каждого фиксированного x , рассмотрим в пространстве $\mathbf{L}(0, \infty)$ оператор

$$(\mathbf{F}_x f)(y) = \int_0^\infty F^+(t + y + 2x) f(t) dt, \quad y \geq 0.$$

Из теоремы 2.2.2 следует, что существует $(E + \mathbf{F}_x)^{-1}$, где E — единичный оператор, и $\|(E + \mathbf{F}_x)^{-1}\| < \infty$. Используя утверждение 2.1.2, нетрудно убедиться, что $A^+(x, y)$, при $y \geq x$, и $\|(E + \mathbf{F}_x)^{-1}\|$ являются непрерывными функциями. Так как

$$\|\mathbf{F}_x\| = \sup_y \int_0^\infty |F^+(t + y + 2x)| dt = \sup_y \int_{y+2x}^\infty |F^+(\xi)| d\xi \leq \int_{2x}^\infty |F^+(\xi)| d\xi,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|\mathbf{F}_x\| = 0.$$

Таким образом,

$$C_a^0 := \sup_{x \geq a} \|(E + \mathbf{F}_x)^{-1}\| < \infty.$$

Обозначим

$$\tau_0(x) = \int_x^\infty |F^{+'}(t)| dt, \quad \tau_1(x) = \int_x^\infty \tau_0(t) dt = \int_x^\infty (t-x) |F^{+'}(t)| dt.$$

Тогда

$$|F^+(x)| \leq \tau_0(x). \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.5) следует, что, при каждом фиксированном x ,

$$A^+(x, x+y) = -(E + \mathbf{F}_x)^{-1} F^+(y+2x),$$

откуда получаем

$$\int_0^\infty |A^+(x, x+y)| dy \leq C_a^0 \int_0^\infty |F^+(y+2x)| dy \leq C_a^0 \tau_1(2x), \quad x \geq a. \quad (2.3.7)$$

Используя (2.3.5) — (2.3.7), вычисляем

$$\begin{aligned} |A^+(x, x+y)| &\leq \tau_0(y+2x) + \int_0^\infty |A^+(x, x+t)| \tau_0(t+y+2x) dt \leq \\ &\leq (1 + C_a^0 \tau_1(2x)) \tau_0(y+2x). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

С помощью утверждения 2.1.1 можно показать, что $A^+(x, y)$ имеет первые производные

$$A_1^+(x, y) := \frac{\partial A^+(x, y)}{\partial x}, \quad A_2^+(x, y) := \frac{\partial A^+(x, y)}{\partial y},$$

и поэтому, дифференцируя (2.2.1), получаем

$$\left. \begin{aligned} F^{+'}(x+y) + A_1^+(x, y) - A^+(x, x) F^+(x+y) + \int_x^\infty A_1^+(x, t) F^+(t+y) dt &= 0, \\ F^{+'}(x+y) + A_2^+(x, y) + \int_x^\infty A^+(x, t) F^{+'}(t+y) dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

Обозначим $A_0^+(x, x+y) := \frac{d}{dx} A^+(x, x+y)$. Дифференцируя (2.3.5) по x , приходим к

$$\begin{aligned} 2F^{+'}(y+2x) + A_0^+(x, x+y) + \int_0^\infty A_0^+(x, x+t) F^+(t+y+2x) dt + \\ + 2 \int_0^\infty A^+(x, x+t) F^{+'}(t+y+2x) dt = 0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} |A_0^+(x, x+y)| dy \leq 2C_a^0 \left(\int_0^{\infty} |F^{+'}(y+2x)| dy + \int_0^{\infty} A^+(x, x+t) \left(\int_0^{\infty} |F^{+'}(t+y+2x)| dy \right) dt \right).$$

В силу (2.3.8), это даёт

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |A_0^+(x, x+y)| dy &\leq 2C_a^0 \left(\tau_0(2x) + (1 + C_a^0 \tau_1(2x)) \int_0^{\infty} \tau_0^2(t+2x) dt \right) \leq \\ &\leq 2C_a^0 \tau_0(2x) (1 + (1 + C_a^0 \tau_1(2x)) \tau_1(2x)). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Из (2.3.10) вытекает

$$\begin{aligned} &\left| A_0^+(x, x+y) + 2F^{+'}(y+2x) \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} |A_0^+(x, x+t) F^+(t+y+2x)| dt + 2 \int_0^{\infty} |A^+(x, x+t) F^{+'}(t+y+2x)| dt. \end{aligned}$$

Используя соотношения (2.3.6), (2.3.8) и (2.3.11), получаем

$$\begin{aligned} &\left| A_0^+(x, x+y) + 2F^{+'}(y+2x) \right| \leq \\ &\leq 2C_a^0 \tau_0(y+2x) \tau_0(2x) \tau_1(2x) (1 + C_a^0 \tau_1(2x)) + 2\tau_0(2x) \tau_0(y+2x) (1 + C_a^0 \tau_1(2x)) + \\ &\quad + 2C_a^0 \tau_0(2x) \tau_0(y+2x). \end{aligned}$$

Отсюда, при $y=0$, получаем

$$\left| 2 \frac{d}{dx} A^+(x, x) + 4F^{+'}(2x) \right| \leq C_a \tau_0^2(2x), \quad x \geq a,$$

где $C_a = 4(1 + C_a^0 \tau_1(2a))^2 + 4C_a^0$. Учитывая (2.3.1), заключаем, что

$$\int_a^{\infty} (1+|x|) |q^+(x)| dx \leq 4 \int_a^{\infty} (1+|x|) |F^{+'}(2x)| dx + C_a \int_a^{\infty} (1+|x|) \tau_0^2(2x) dx.$$

Так как

$$x \tau_0(2x) \leq \int_{2x}^{\infty} |F^{+'}(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |F^{+'}(t)| dt,$$

то приходим к (2.3.2) для q^+ . Для q^- рассуждения аналогичны.

2) Докажем теперь (2.3.3). Для определённости рассуждения проведём для функции $e(x, \rho)$. Сначала предположим, что функция $F^{+'}(x)$ абсолютно непрерывна, и $F^{+'}(x) \in \mathbf{L}(a, \infty)$ для каждого фиксированного $a > -\infty$. Дифференцируя равенство

$$J(x, y) := F^+(x + y) + A^+(x, y) + \int_x^\infty A^+(x, t)F^+(t + y)dt = 0, \quad y > x, \quad (2.3.12)$$

Получим

$$J_{yy}(x, y) = F^{+''}(x + y) + A_{yy}^+(x, y) + \int_x^\infty A^+(x, t)F^{+''}(t + y)dt = 0, \quad (2.3.13)$$

$$J_{xx}(x, y) = F^{+''}(x + y) + A_{xx}^+(x, y) - \frac{d}{dx}A^+(x, x)F^+(x + y) - \\ - A^+(x, x)F^{+'}(x + y) - A_1^+(x, x)F^+(x + y) + \int_x^\infty A_{xx}^+(x, t)F^+(t + y)dt = 0. \quad (2.3.14)$$

Интегрируя по частям (2.3.13), имеем

$$J_{yy}(x, y) = F^{+''}(x + y) + A_{yy}^+(x, y) + \left(A^+(x, t)F^{+'}(t + y) - A_2^+(x, t)F^+(t + y) \right) \Big|_{t=x}^\infty + \\ + \int_x^\infty A_{tt}^+(x, t)F^+(t + y)dt = 0.$$

Из (2.3.8) и (2.3.9) следует, что подстановка в бесконечности равна нулю, и, следовательно,

$$J_{yy}(x, y) = F^{+''}(x + y) + A_{yy}^+(x, y) - A^+(x, x)F^{+'}(x + y) + \\ + A_2^+(x, x)F^+(x + y) + \int_x^\infty A_{tt}^+(x, t)F^+(t + y)dt = 0. \quad (2.3.15)$$

Используя (2.3.1), (2.3.12), (2.3.14), (2.3.15) и равенство

$$J_{xx}(x, y) - J_{yy}(x, y) - q^+(x)J(x, y) = 0,$$

которое следует из $J(x, y) = 0$, получаем

$$f(x, y) + \int_x^\infty f(x, t)F^+(t + y)dt = 0, \quad y \geq x, \quad (2.3.16)$$

где

$$f(x, y) := A_{xx}^+(x, y) - A_{yy}^+(x, y) - q^+(x)A^+(x, y).$$

Легко проверить, что $f(x, y) \in \mathbf{L}(x, \infty)$ для каждого фиксированного $x \geq a$. Согласно теореме 2.2.2 однородное уравнение (2.3.16) имеет только нулевое решение, то есть,

$$A_{xx}^+(x, y) - A_{yy}^+(x, y) - q^+(x)A^+(x, y) = 0, \quad y \geq x. \quad (2.3.17)$$

Дифференцируя (2.1.8) дважды, получаем

$$\begin{aligned}
e''(x, \rho) &= (i\rho)^2 \exp(i\rho x) - (i\rho)A^+(x, x) \exp(i\rho x) - \\
&- \left(\frac{d}{dx} A^+(x, x) + A_1^+(x, x) \right) \exp(i\rho x) + \int_x^\infty A_{xx}^+(x, t) \exp(i\rho t) dt.
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

С другой стороны, дважды интегрируя по частям, вычисляем

$$\begin{aligned}
\rho^2 e(x, \rho) &= -(i\rho)^2 \exp(i\rho x) - (i\rho)^2 \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt = -(i\rho)^2 \exp(i\rho x) + \\
&+ (i\rho)A^+(x, x) \exp(i\rho x) - A_2^+(x, x) \exp(i\rho x) - \int_x^\infty A_{tt}^+(x, t) \exp(i\rho t) dt.
\end{aligned}$$

Вместе с (2.1.8) и (2.3.18) это даёт

$$\begin{aligned}
e''(x, \rho) + \rho^2 e(x, \rho) - q^+(x)e(x, \rho) &= \left(-2 \frac{d}{dx} A^+(x, x) - q^+(x) \right) \exp(i\rho x) + \\
&+ \int_x^\infty (A_{xx}^+(x, t) - A_{tt}^+(x, t) - q^+(x)A^+(x, t)) \exp(i\rho t) dt.
\end{aligned}$$

Учитывая (2.3.1) и (2.3.17), приходим к (2.3.3) для $e(x, \rho)$. Рассмотрим теперь общий случай, когда имеет место (2.3.4). Обозначим $\tilde{e}(x, \rho)$ решение Йоста для потенциала q^+ . Наша цель — доказать, что $e(x, \rho) \equiv \tilde{e}(x, \rho)$. Для этого мы выберем функции $F_j^+(x)$ так, чтобы $F_j^+(x)$, $F_j^{+'}(x)$ были абсолютно непрерывны, $F_j^{+''}(x) \in \mathbf{L}(a, \infty)$ для всякого $a > -\infty$, и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^\infty |F_j^+(x) - F^+(x)| dx = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^\infty (1 + |x|) |F_j^{+'}(x) - F^{+'}(x)| dx = 0. \tag{2.3.19}$$

Обозначим

$$\tau_{0j}(x) = \int_x^\infty |F_j^{+'}(t) - F^{+'}(t)| dt, \quad \tau_{1j}(x) = \int_x^\infty \tau_{0j}(t) dt = \int_x^\infty (t - x) |F_j^{+'}(t) - F^{+'}(t)| dt.$$

Используя (2.3.19) и утверждение 2.1.2, нетрудно показать, что, для достаточно больших j , интегральное уравнение

$$F_j^+(x + y) + A_{(j)}^+(x, y) + \int_x^\infty A_{(j)}^+(x, t) F_j^+(t + y) dt = 0, \quad y > x,$$

имеет единственное решение $A_{(j)}^+(x, y)$, причем

$$\int_x^\infty |A_{(j)}^+(x, y) - A^+(x, y)| dy \leq C_a \tau_{1j}(2x), \quad x \geq a. \tag{2.3.20}$$

Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \geq a} \int_x^{\infty} |A_{(j)}^+(x, y) - A^+(x, y)| dy = 0. \quad (2.3.21)$$

Обозначим

$$e_j(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^{\infty} A_{(j)}^+(x, t) \exp(i\rho t) dt, \quad (2.3.22)$$

$$q_j^+(x) = -2 \frac{d}{dx} A_{(j)}^+(x, x).$$

Выше было доказано, что

$$-e_j''(x, \rho) + q_j^+(x) e_j(x, \rho) = \rho^2 e_j(x, \rho),$$

то есть, функция $e_j(x, \rho)$ является решением Йоста для потенциала q_j^+ . Используя (2.3.19), (2.3.20) и те же рассуждения, что и при доказательстве первой части леммы 2.3.1, получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} (1 + |x|) |q_j^+(x) - q^+(x)| dx = 0.$$

В силу леммы 2.1.1 это даёт

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\rho \in \Omega_+} \max_{x \geq a} |(e_j(x, \rho) - \tilde{e}(x, \rho)) \exp(-i\rho x)| = 0.$$

С другой стороны, используя (2.1.8), (2.3.21) и (2.3.22), заключаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\rho \in \Omega_+} \max_{x \geq a} |(e_j(x, \rho) - e(x, \rho)) \exp(-i\rho x)| = 0.$$

Следовательно, $e(x, \rho) \equiv \tilde{e}(x, \rho)$, и равенство (2.3.3) доказано для функции $e(x, \rho)$. Для $g(x, \rho)$ все рассуждения аналогичны. Лемма 2.3.1 доказана.

2.3.2. Необходимые и достаточные условия. Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния.

Теорема 2.3.2. *Для того чтобы множество*

$$J^+ = \{s^+(\rho), \lambda_k, \alpha_k^+, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$$

было правыми данными рассеяния для некоторого вещественного потенциала q , удовлетворяющего условию (2.1.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\lambda_k = -\tau_k^2$, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_N$; $\alpha_k^+ > 0$, $k = \overline{1, N}$;

2) *при вещественных $\rho \neq 0$ функция $s^+(\rho)$ непрерывна, $\overline{s^+(\rho)} = s^+(-\rho)$, $|s^+(\rho)| < 1$, и*

$$s^+(\rho) = o(|\rho|^{-1}) \text{ при } |\rho| \rightarrow \infty, \quad (2.3.23)$$

$$\frac{\rho^2}{1 - |s^+(\rho)|^2} = O(1) \text{ при } |\rho| \rightarrow 0; \quad (2.3.24)$$

3) функция $\rho(a(\rho) - 1)$, где $a(\rho)$ определено формулами

$$a(\rho) := \prod_{k=1}^N \frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k} \exp(B(\rho)),$$

$$B(\rho) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(1 - |s^+(\xi)|^2\right)}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in \Omega_+, \quad (2.3.25)$$

непрерывна и ограничена в $\overline{\Omega}_+$, и

$$\frac{1}{a(\rho)} = O(1) \text{ при } |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega}_+, \quad (2.3.26)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho)(s^+(\rho) + 1) = 0 \text{ при вещественных } \rho; \quad (2.3.27)$$

4) функции $R^\pm(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, определенные равенствами

$$R^\pm(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^\pm(\rho) \exp(\pm i\rho x) d\rho, \quad s^-(\rho) := -s^+(-\rho) \frac{a(-\rho)}{a(\rho)}, \quad (2.3.28)$$

вещественны и абсолютно непрерывны, и, при каждом фиксированном $a > -\infty$, справедливо (2.2.19).

Доказательство. Необходимость была доказана выше. Докажем достаточность. Пусть множество J^+ удовлетворяет предположениям теоремы 2.3.2. Согласно (2.3.25)

$$B(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in \Omega_+, \quad \text{где } \theta(\xi) := \ln \frac{1}{1 - |s^+(\xi)|^2}. \quad (2.3.29)$$

Для вещественных $\xi \neq 0$ функция $\theta(\xi)$ непрерывна и

$$\theta(\xi) = \theta(-\xi) \geq 0, \quad (2.3.30)$$

$$\theta(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \text{ при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$\theta(\xi) = O\left(\ln \frac{1}{\xi}\right) \text{ при } \xi \rightarrow 0.$$

Функция $B(\rho)$ аналитична в Ω_+ , непрерывна в $\overline{\Omega}_+ \setminus \{0\}$ и, для вещественных $\rho \neq 0$,

$$B(\rho) = \frac{1}{2} \theta(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi - \rho} d\xi, \quad (2.3.31)$$

где интеграл в (2.3.31) понимается в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\rho - \varepsilon} + \int_{\rho + \varepsilon}^{\infty} \right).$$

Из (2.3.25), (2.3.30), (2.3.31) и условия 3) теоремы получаем

$$\overline{a(\rho)} = a(-\rho) \text{ при вещественных } \rho \neq 0. \quad (2.3.32)$$

Кроме того, при вещественных $\rho \neq 0$, из (2.3.25) и (2.3.31) следует, что

$$|a(\rho)|^2 = |\exp(B(\rho))|^2 = \exp(2 \operatorname{Re} B(\rho)) = \exp(\theta(\rho)),$$

откуда вытекает

$$B(\rho) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left(1 - |s^+(\xi)|^2 \right)}{\xi - \rho} d\xi, \quad \rho \in \Omega_+, \quad (2.3.25)$$

$$1 - |s^+(\rho)|^2 = \frac{1}{|a(\rho)|^2} \text{ при вещественных } \rho \neq 0. \quad (2.3.33)$$

Далее, функция $s^-(\rho)$, определённая в равенстве (2.3.28), непрерывна при вещественных $\rho \neq 0$, и, в силу (2.3.32),

$$\overline{s^-(\rho)} = s^-(\rho), \quad |s^-(\rho)| = |s^+(\rho)|.$$

Поэтому из соотношений (2.3.23) (2.3.24) и (2.3.27) получаем, что

$$s^-(\rho) = o(\rho^{-1}) \text{ при } |\rho| \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\rho^2}{1 - |s^+(\rho)|^2} = O(1) \text{ при } |\rho| \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho) (s^-(\rho) + 1) = 0 \text{ при вещественных } \rho.$$

Покажем, что

$$a_1^2(\rho_k) < 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.3.34)$$

где $a_1(\rho) = \frac{d}{d\rho} a(\rho)$, $\rho_k = i\tau_k$. В самом деле, из (2.3.25) следует, что

$$a_1(\rho_k) = \frac{d}{d\rho} \left(\prod_{j=1}^N \frac{\rho - i\tau_j}{\rho + i\tau_j} \right) \Big|_{\rho=\rho_k} \exp(B(\rho_k)).$$

Используя (2.3.30), вычисляем

$$B(\rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi - i\tau_k} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2} d\xi + \frac{\tau_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2} d\xi = \frac{\tau_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2} d\xi.$$

Так как

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left(\prod_{j=1}^N \frac{\rho - i\tau_j}{\rho + i\tau_j} \right) \right|_{\rho=\rho_k} = \frac{1}{2i\tau_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_k + \tau_j},$$

то числа $a_1(\rho_k)$ являются чисто мнимыми, и (2.3.34) доказано. Обозначим

$$\alpha_k^- = -\frac{1}{a_1^2(\rho_k)\alpha_k^+}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.3.35)$$

Согласно (2.3.34), (2.3.35)

$$\alpha_k^- > 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, имеем множества $J^\pm = \{s^\pm(\rho), \lambda_k, \alpha_k^\pm, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$, которые удовлетворяют условию А. Поэтому мы можем применить теорему 2.2.2 и лемму 2.3.1. Пусть $A^\pm(x, y)$ — решения уравнений (2.2.1) и (2.2.2) соответственно. Построим функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ по формулам (2.1.8) и функции $q^\pm(x)$ — по формулам (2.3.1). Тогда верны (2.3.2) — (2.3.4).

Лемма 2.3.2. *Справедливы следующие соотношения*

$$\left. \begin{aligned} s^+(\rho)e(x, \rho) + e(x, -\rho) &= \frac{g(x, \rho)}{a(\rho)}, \\ s^-(\rho)g(x, \rho) + g(x, -\rho) &= \frac{e(x, \rho)}{a(\rho)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.36)$$

Доказательство. 1) Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi^+(x, y) &= R^+(x+y) + \int_x^\infty A^+(x, t)R^+(t+y)dt, \\ \Phi^-(x, y) &= R^-(x+y) + \int_{-\infty}^x A^-(x, t)R^-(t+y)dt. \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного x имеем $\Phi^\pm(x, y) \in \mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$, и

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \Phi^+(x, y) \exp(-i\rho y) dy &= s^+(\rho)e(x, \rho), \\ \int_{-\infty}^\infty \Phi^-(x, y) \exp(i\rho y) dy &= s^-(\rho)g(x, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.37)$$

В самом деле, используя (2.1.8) (2.3.28), вычисляем

$$s^+(\rho)e(x, \rho) = \left(\exp(i\rho x) + \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(i\rho t) dt \right) \int_{-\infty}^\infty R^+(\xi) \exp(-i\rho \xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} R^+(x+y) \exp(-i\rho y) dy + \int_x^{\infty} A^+(x,t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} R^+(t+y) \exp(-i\rho y) dy \right) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(R^+(x+y) + \int_x^{\infty} A^+(x,t) R^+(t+y) dt \right) \exp(-i\rho y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy.
\end{aligned}$$

Второе соотношение из (2.3.37) доказывается аналогично.

С другой стороны, из (2.2.1), (2.2.2) следует, что

$$\begin{aligned}
\Phi^+(x,y) &= -A^+(x,y) - \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k y) e(x, i\tau_k), \quad y > x, \\
\Phi^-(x,y) &= -A^-(x,y) - \sum_{k=1}^N \alpha_k^- \exp(\tau_k y) g(x, i\tau_k), \quad y < x.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy = \int_{-\infty}^x \Phi^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy - \\
&- \int_x^{\infty} \left(A^+(x,y) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k y) e(x, i\tau_k) \right) \exp(-i\rho y) dy.
\end{aligned}$$

Согласно (2.1.8) имеем

$$\int_x^{\infty} A^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy = e(x, -\rho) - \exp(-i\rho x),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy = \int_{-\infty}^x \Phi^+(x,y) \exp(-i\rho y) dy + \\
&+ \exp(-i\rho x) - e(x, -\rho) - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^+}{\tau_k + i\rho} \exp(-i\rho x) \exp(-\tau_k x) e(x, i\tau_k)
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(x,y) \exp(i\rho y) dy = \int_x^{\infty} \Phi^-(x,y) \exp(i\rho y) dy + \\
&+ \exp(i\rho x) - g(x, -\rho) - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^-}{\tau_k + i\rho} \exp(i\rho x) \exp(\tau_k x) g(x, i\tau_k)
\end{aligned}$$

Сравнивая с (2.3.37), заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} s^+(\rho)e(x,\rho) + e(x,-\rho) &= \frac{h^-(x,\rho)}{a(\rho)}, \\ s^-(\rho)g(x,\rho) + g(x,-\rho) &= \frac{h^+(x,\rho)}{a(\rho)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.38)$$

Где

$$\left. \begin{aligned} h^-(x,\rho) &:= \exp(-i\rho x)a(\rho) \left(1 + \int_{-\infty}^x \Phi^+(x,y) \exp(i\rho(x-y)) dy - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^+}{\tau_k + i\rho} \exp(-\tau_k x) e(x, i\tau_k) \right), \\ h^+(x,\rho) &:= \exp(i\rho x)a(\rho) \left(1 + \int_x^{\infty} \Phi^-(x,y) \exp(i\rho(y-x)) dy - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^-}{\tau_k + i\rho} \exp(\tau_k x) g(x, i\tau_k) \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.39)$$

2) Теперь изучим свойства функций $h^\pm(x,\rho)$. В силу (2.3.38), имеем

$$\left. \begin{aligned} h^-(x,\rho) &= a(\rho)(s^+(\rho)e(x,\rho) + e(x,-\rho)), \\ h^+(x,\rho) &= a(\rho)(s^-(\rho)g(x,\rho) + g(x,-\rho)). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.40)$$

В частности, отсюда следует, что функции $h^\pm(x,\rho)$ непрерывны при вещественных $\rho \neq 0$, и, в силу (2.3.32), $\overline{h^\pm(x,\rho)} = h^\pm(x,-\rho)$. Так как

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho)(s^\pm(\rho) + 1) = 0,$$

то из (2.3.40) вытекает

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho h^\pm(x,\rho) = 0. \quad (2.3.41)$$

Поэтому функции $\rho h^\pm(x,\rho)$ непрерывны при вещественных ρ . В силу (2.3.39) функции $\rho h^\pm(x,\rho)$ аналитичны в Ω_+ , непрерывны в $\overline{\Omega}_+$, и (2.3.41) справедливо для $\rho \in \overline{\Omega}_+$. Из (2.3.40) и (2.1.7) получаем

$$\langle e(x,\rho), h^-(x,\rho) \rangle = \langle h^+(x,\rho), g(x,\rho) \rangle = -2i\rho a(\rho). \quad (2.3.42)$$

Так как $|s^\pm(\rho)| < 1$, то из (2.3.38) следует

$$\sup_{\rho \neq 0} \left| \frac{1}{a(\rho)} h^\pm(x,\rho) \right| < \infty \quad (2.3.43)$$

при вещественных $\rho \neq 0$. Используя (2.3.39), вычисляем

$$h^+(x, i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^- g(x, i\tau_k), \quad h^-(x, i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+ e(x, i\tau_k), \quad (2.3.44)$$

$$\lim_{\substack{|\rho| \rightarrow \infty \\ \text{Im} \rho \geq 0}} h^\pm(x, \rho) \exp(\mp i \rho x) = 1, \quad (2.3.45)$$

где $a_1(\rho) = \frac{d}{d\rho} a(\rho)$.

3) Из (2.3.38) следует, что

$$\begin{aligned} s^+(\rho) e(x, \rho) + e(x, -\rho) &= \frac{h^-(x, \rho)}{a(\rho)}, \\ e(x, \rho) + s^+(-\rho) e(x, -\rho) &= \frac{h^-(x, -\rho)}{a(-\rho)}. \end{aligned}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, получаем

$$e(x, \rho)(1 - s^+(\rho)s^+(-\rho)) = \frac{h^-(x, -\rho)}{a(-\rho)} - s^+(-\rho) \frac{h^-(x, \rho)}{a(\rho)}.$$

В силу (2.3.32), (2.3.33) имеем

$$1 - s^+(\rho)s^+(-\rho) = 1 - |s^+(\rho)|^2 = \frac{1}{|a(\rho)|^2} = \frac{1}{a(\rho)a(-\rho)}.$$

Поэтому

$$\frac{e(x, \rho)}{a(\rho)} = s^-(\rho) h^-(x, \rho) + h^-(x, -\rho). \quad (2.3.46)$$

Используя (2.3.46) и второе соотношение из (2.3.38), получаем

$$h^-(x, \rho) g(x, -\rho) - h^-(x, -\rho) g(x, \rho) = G(\rho), \quad (2.3.47)$$

где

$$G(\rho) := \frac{1}{a(\rho)} (h^+(x, \rho) h^-(x, \rho) - e(x, \rho) g(x, \rho)). \quad (2.3.48)$$

Согласно (2.3.44) и (2.3.35), имеем

$$h^+(x, i\tau_k) h^-(x, i\tau_k) - e(x, i\tau_k) g(x, i\tau_k) = 0, \quad k = \overline{1, N},$$

откуда следует аналитичность функции $G(\rho)$ в области Ω_+ и ее непрерывность в $\overline{\Omega}_+ \setminus \{0\}$. В силу (2.3.45),

$$\lim_{\substack{|\rho| \rightarrow \infty \\ \text{Im} \rho \geq 0}} h^+(x, \rho) h^-(x, \rho) = 1.$$

Так как при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Omega}_+$, имеет место

$$a(\rho) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\rho|}\right),$$

то из (2.3.48) вытекает

$$\lim_{\substack{|\rho| \rightarrow \infty \\ \text{Im} \rho \geq 0}} G(\rho) = 0.$$

В силу (2.3.47)

$$G(-\rho) = -G(\rho) \text{ при вещественных } \rho \neq 0.$$

Продолжим функцию $G(\rho)$ в нижнюю полуплоскость по формуле

$$G(\rho) = -G(-\rho), \text{ Im } \rho < 0. \quad (2.3.49)$$

Тогда функция $G(\rho)$ будет аналитической в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, и

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} G(\rho) = 0. \quad (2.3.50)$$

Далее, из (2.3.48), (2.3.26), (2.3.41) и (2.3.43) следует

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 G(\rho) = 0,$$

то есть, функция $\rho G(\rho)$ является целой по ρ . С другой стороны, используя (2.3.48), (2.3.41) и (2.3.43), получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho G(\rho) = 0 \text{ при вещественных } \rho,$$

и, следовательно, функция $G(\rho)$ является целой по ρ . Вместе с (2.3.50) и теоремой Лиувилля это даёт $G(\rho) \equiv 0$, то есть

$$h^+(x, \rho)h^-(x, \rho) = e(x, \rho)g(x, \rho), \rho \in \overline{\Omega}_+, \quad (2.3.51)$$

$$h^-(x, \rho)g(x, -\rho) = h^-(x, -\rho)g(x, \rho) \text{ при вещественных } \rho \neq 0. \quad (2.3.52)$$

4) Рассмотрим теперь функцию

$$p(x, \rho) := \frac{h^+(x, \rho)}{e(x, \rho)}.$$

Обозначим $\mathcal{E} = \{x: e(x, 0)e(x, i\tau_1) \dots e(x, i\tau_N) = 0\}$. Так как $e(x, \rho)$ является решением дифференциального уравнения (2.3.3), и для $\rho \in \overline{\Omega}_+$

$$|e(x, \rho) \exp(-i\rho x) - 1| \leq \int_x^\infty |A^+(x, t)| dt \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (2.3.53)$$

то \mathcal{E} — конечное множество. Зафиксируем $x \notin \mathcal{E}$. Пусть $\rho^* \in \overline{\Omega}_+$ является нулём функции $e(x, \rho)$, то есть, $e(x, \rho^*) = 0$. Так как $x \notin \mathcal{E}$, то $\rho^* \neq 0$, $\rho^* \neq i\tau_k$, $k = \overline{1, N}$; поэтому $\rho^* a(\rho^*) \neq 0$. В силу (2.3.42) это даёт $h^-(x, \rho^*) \neq 0$. Согласно (2.3.51) имеем $h^+(x, \rho^*) = 0$. Так как все нули функции $e(x, \rho)$ простые (этот факт доказывается аналогично теореме 2.3.3), заключаем, что функция $p(x, \rho)$ аналитична в Ω_+ и непрерывна в $\overline{\Omega}_+ \setminus \{0\}$. Из (2.3.45) и (2.3.53) следует, что

$$p(x, \rho) \rightarrow 1 \text{ при } |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \overline{\Omega}_+.$$

В силу (2.3.51), (2.3.52) имеем

$$p(x, \rho) = p(x, -\rho) \text{ при вещественных } \rho \neq 0.$$

Продолжим функцию $p(x, \rho)$ в нижнюю полуплоскость по формуле

$$p(x, \rho) = p(x, -\rho), \text{ Im } \rho < 0.$$

Тогда функция $p(x, \rho)$ будет аналитической в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} p(x, \rho) = 1. \quad (2.3.54)$$

Так как $e(x, \rho) \neq 0$, то из (2.3.41) вытекает

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho p(x, \rho) = 0,$$

и, следовательно, функция $p(x, \rho)$ является целой по ρ . Вместе с (2.3.54) это даёт $p(x, \rho) \equiv 1$, то есть

$$h^+(x, \rho) \equiv e(x, \rho). \quad (2.3.55)$$

Тогда, с учетом (2.3.51), получаем

$$h^-(x, \rho) \equiv g(x, \rho). \quad (2.3.56)$$

Отсюда, используя (2.3.38), приходим к (2.3.36). Лемма 2.3.2 доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы 2.3.2. Из (2.3.36) и (2.3.3) следует, что

$$q^-(x) = q^+(x) =: q(x). \quad (2.3.57)$$

Тогда (2.3.2) влечет (2.1.2), и функции $e(x, \rho)$, $g(x, \rho)$ являются решениями Йоста для потенциала q , определённого равенствами (2.3.57). Обозначим через $\tilde{J}^\pm = \{\tilde{s}^\pm(\rho), \tilde{\lambda}_k, \tilde{\alpha}_k^\pm, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, \tilde{N}}\}$ данные рассеяния для этого потенциала q и положим

$$\tilde{a}(\rho) := -\frac{1}{2i\rho} \langle e(x, \rho), g(x, \rho) \rangle. \quad (2.3.58)$$

Используя (2.3.42), (2.3.55) и (2.3.56), вычисляем

$$\langle e(x, \rho), g(x, \rho) \rangle = -2i\rho a(\rho).$$

Вместе с (2.3.58) это даёт $\tilde{a}(\rho) \equiv a(\rho)$, и, следовательно, $\tilde{N} = N$, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k$, $k = \overline{1, N}$. Далее, из (2.1.27) следует, что

$$\tilde{s}^+(\rho)e(x, \rho) + e(x, -\rho) = \frac{g(x, \rho)}{a(\rho)},$$

$$\tilde{s}^-(\rho)g(x, \rho) + g(x, -\rho) = \frac{e(x, \rho)}{a(\rho)}.$$

Сравнивая с (2.3.26), получаем $\tilde{s}^\pm(\rho) = s^\pm(\rho)$, $\rho \in \mathbf{R}$. В силу (2.1.32),

$$\tilde{\alpha}_k^+ = \frac{d_k}{ia_1(\rho_k)}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \frac{1}{id_k a_1(\rho_k)}. \quad (2.3.59)$$

С другой стороны, из (2.3.55), (2.3.56) и (2.3.44) следует, что

$$e(x, i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^- g(x, i\tau_k),$$

$$g(x, i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+ e(x, i\tau_k),$$

то есть,

$$d_k = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+ = \frac{1}{ia_1(i\tau_k)\alpha_k^-}.$$

Сравнивая с (2.3.59), заключаем, что $\tilde{\alpha}_k^\pm = \alpha_k^\pm$. Теорема 2.3.1. доказана.

Замечание 2.3.1. Существует связь между обратной задачей рассеяния и задачей Римана для аналитических функций. В самом деле, перепишем (2.1.33) в следующем виде:

$$Q^-(x, \rho) = Q^+(x, \rho)Q(\rho), \quad (2.3.60)$$

где

$$Q^-(x, \rho) = \begin{bmatrix} g(x, -\rho) & e(x, -\rho) \\ g'(x, -\rho) & e'(x, -\rho) \end{bmatrix}, \quad Q^+(x, \rho) = \begin{bmatrix} e(x, \rho) & g(x, \rho) \\ e'(x, \rho) & g'(x, \rho) \end{bmatrix},$$

$$Q(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a(\rho)} & \frac{b(-\rho)}{a(\rho)} \\ -\frac{b(\rho)}{a(\rho)} & \frac{1}{a(\rho)} \end{bmatrix}.$$

Для каждого фиксированного x матричная функция $Q^\pm(x, \rho)$ аналитична и ограничена при $\pm \text{Im} \rho > 0$. В силу (2.1.32) и (2.1.60) матричная функция $Q(\rho)$ может быть однозначно восстановлена по данным рассеяния J^+ (или J^-). Таким образом, обратная задача рассеяния сводится к задаче Римана (2.3.60). Отметим, что теорию решения задачи Римана можно найти, например, в книге [4]. Применяя преобразование Фурье к (2.3.60), как показано выше, приходим к уравнениям Гельфанда—Левитана—Марченко (2.2.1), (2.2.2) или (2.2.21). Отметим также, что использование задачи Римана в теории решения обратных задач представляет только методический интерес и не является независимым методом, так как метод Римана можно рассматривать как частный случай метода спектральных отображений [13].

2.4. Безотражательные потенциалы. Возмущения дискретного спектра

2.4.1. Безотражательный потенциал. Потенциал q , удовлетворяющий условию (2.1.2), называется *безотражательным*, если $b(\rho) \equiv 0$. В силу (2.1.32) и (2.1.60), в этом случае имеем

$$s^\pm(\rho) \equiv 0, \quad a(\rho) = \prod_{k=1}^N \frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k}. \quad (2.4.1)$$

Теорема 2.3.2 позволяет доказать существование безотражательных потенциалов и описать их все. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть заданы произвольные числа $\lambda_k = -\tau_k^2 < 0$, $\alpha_k^+ > 0, k = \overline{1, N}$. Положим $s^+(\rho) \equiv 0, \rho \in \mathbf{R}$, и рассмотрим данные $J^+ = \{s^+(\rho), \lambda_k, \alpha_k^+, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$. Тогда существует единственный безотражательный потенциал q , удовлетворяющий условию (2.1.2), для которого J^+ являются правыми данными рассеяния.

Теорема 2.4.1 является очевидным следствием теоремы 2.3.2, так как для такого множества J^+ все условия теоремы 2.3.2 выполнены, и верно (2.4.1).

Для безотражательного потенциала уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко (2.3.1) принимает вид

$$A^+(x, y) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k(x+y)) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k y) \int_x^\infty A^+(x, t) \exp(-\tau_k t) dt = 0. \quad (2.4.2)$$

Ищем решение (2.4.2) в виде

$$A^+(x, y) = \sum_{k=1}^N P_k(x) \exp(-\tau_k y).$$

Подставляя его в (2.4.2), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно $P_k(x)$:

$$P_k(x) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^+ \frac{\exp(-(\tau_k + \tau_j)x)}{\tau_k + \tau_j} P_j(x) = -\alpha_k^+ \exp(-\tau_k x), \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.4.3)$$

Решая (2.4.3) по формулам Крамера, получим $P_k(x) = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)}$, где

$$\Delta(x) = \det \left[\delta_{kl} + \alpha_k^+ \frac{\exp(-(\tau_k + \tau_l)x)}{\tau_k + \tau_l} \right]_{k, l = \overline{1, N}}, \quad (2.4.4)$$

а $\Delta_k(x)$ — определитель, полученный из $\Delta(x)$ путём замены k -го столбца столбцом свободных членов. Тогда

$$q(x) = -2 \frac{d}{dx} A^+(x, x) = -2 \sum_{k=1}^N \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)} \exp(-\tau_k x),$$

откуда вытекает

$$q(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta(x). \quad (2.4.5)$$

Таким образом, соотношения (2.4.4) и (2.4.5) позволяют подсчитать безотражательные потенциалы, используя данные числа $\{\lambda_k, \alpha_k^+, \}_{k=\overline{1, N}}$.

Пример 2.4.1. Пусть $N=1$, $\tau=\tau_1$, $\alpha=\alpha_1^+$ и

$$\Delta(x) = 1 + \frac{\alpha}{2\tau} \exp(-2\tau x).$$

Тогда (2.4.5) даёт

$$q(x) = -\frac{4\tau\alpha}{\left(\exp(\tau x) + \frac{\alpha}{2\tau} \exp(-\tau x)\right)^2}.$$

Обозначим

$$\beta = -\frac{1}{2\tau} \ln \frac{2\tau}{\alpha}.$$

Тогда

$$q(x) = -\frac{2\tau^2}{\operatorname{ch}^2(\tau(x-\beta))}.$$

2.4.2. Возмущение дискретного спектра. Если $q \equiv 0$, то $s^\pm(x, \rho) \equiv 0$, $N=0$, $a(\rho) \equiv 1$. Таким образом, теорема 2.4.1 показывает, что все безотражательные потенциалы могут быть построены из нулевого потенциала и заданных чисел $\{\lambda_k, \alpha_k^+, \}_{k=1, \overline{N}}$. Ниже мы кратко рассмотрим более общий случай возмущения дискретного спектра для произвольного потенциала q . Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.2. Пусть $J^+ = \{s^+(\rho), \lambda_k, \alpha_k^+, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, N}\}$ — правые данные рассеяния для некоторого потенциала q , удовлетворяющего условию (2.1.2). Возьмём произвольные числа $\tilde{\lambda}_k = -\tilde{\tau}_k^2 < 0$, $\tilde{\alpha}_k^+ > 0$, $k = \overline{1, \tilde{N}}$, и рассмотрим множество $\tilde{J}^+ = \{s^+(\rho), \tilde{\lambda}_k, \tilde{\alpha}_k^+, \rho \in \mathbf{R}, k = \overline{1, \tilde{N}}\}$ с той же функцией $s^+(\rho)$, что и в J^+ . Тогда существует вещественный потенциал \tilde{q} , удовлетворяющий условию (2.1.2,) для которого \tilde{J}^+ являются правыми данными рассеяния.

Доказательство. Проверим выполнения условий теоремы 2.3.2 для \tilde{J}^+ . Согласно (2.3.25) и (2.3.28) построим функции $\tilde{a}(\rho)$ и $\tilde{s}^-(\rho)$ по формулам

$$\tilde{a}(\rho) := \prod_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\rho - i\tilde{\tau}_k}{\rho + i\tilde{\tau}_k} \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |s^+(\xi)|^2)}{\xi - \rho} d\xi\right), \quad \rho \in \Omega_+,$$

$$\tilde{s}^-(\rho) := -s^+(-\rho) \frac{\tilde{a}(-\rho)}{\tilde{a}(\rho)}. \quad (2.4.6)$$

Вместе с (2.1.60) это даёт

$$\tilde{a}(\rho) = a(\rho) \prod_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\rho - i\tilde{\tau}_k}{\rho + i\tilde{\tau}_k} \prod_{k=1}^N \frac{\rho + i\tau_k}{\rho - i\tau_k}. \quad (2.4.7)$$

В силу (2.1.32) имеем

$$s^-(\rho) = -s^+(-\rho) \frac{a(-\rho)}{a(\rho)}. \quad (2.4.8)$$

Используя (2.4.6)-(2.4.8), получаем

$$\tilde{s}^-(\rho) = s^-(\rho). \quad (2.4.9)$$

Так как спектральные данные J^+ удовлетворяют условиям теоремы 2.3.2, то из (2.4.7) и (2.4.9) следует, что \tilde{J}^+ также удовлетворяют условиям теоремы 2.3.2. Тогда, в силу последней, существует вещественный потенциал \tilde{q} , удовлетворяющий условию (2.1.2), для которого \tilde{J}^+ являются правыми спектральными данными. Теорема 2.4.2 доказана.

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

В этой главе мы рассмотрим приложение обратной задачи Штурма—Лиувилля для интегрирования нелинейного эволюционного уравнения математической физики. В 1967 г. К. Гарднер, Дж. Грин, М. Крускал и Р. Миура обнаружили глубокую связь между хорошо известным (с конца XIX века) нелинейным уравнением Кортевега–де Фриза (КДФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}$$

и спектральной теорией операторов Штурма — Лиувилля. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения КДФ посредством сведения последнего к обратной спектральной задаче. Эти исследования породили новое направление в математической физике. Здесь мы дадим решение задачи Коши для уравнения КДФ на всей оси с помощью метода обратной задачи, построенного нами в предыдущей главе.

3.1. Решение уравнения КДФ на всей оси с помощью метода обратной задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения КДФ на всей оси:

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.1.1)$$

$$q|_{t=0} = q_0(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q_0(x)|dx < \infty. \quad (3.1.2)$$

Хорошо известно (см., например, [13]), что задача (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x,t)|dx < \infty.$$

Построим решение задачи (3.1.1), (3.1.2), используя результаты главы 2.

Пусть $q(x,t)$ есть решение задачи (3.1.1), (3.1.2). Рассмотрим уравнение Штурма—Лиувилля

$$Ly := -y'' + q(x,t)y = \lambda y \quad (3.1.3)$$

с параметром t . Тогда решения Йоста и данные рассеяния также зависят от t . Покажем, что уравнение (3.1.1) эквивалентно уравнению

$$\dot{L} = [A, L], \quad (3.1.4)$$

где $Ay = -4y''' + 6qy' + 3q'y$ — линейный дифференциальный оператор, а $[A, L] = AL - LA$. Здесь и далее точкой обозначена производная по t . В самом деле, так как $Ly = -y'' + qy$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{q}y, \quad ALy = -4(-y'' + qy)''' + 6q(-y'' + qy)' + 3q'(-y'' + qy), \\ LAy &= -(-4y''' + 6qy' + 3q'y)'' + q(-4y''' + 6qy' + 3q'y), \end{aligned}$$

и, следовательно, $(AL - LA)y = (6qq' - q''')y$.

Уравнение (3.1.4) называется *уравнением Лакса* или *представлением Лакса*, а совокупность операторов A, L — *парой Лакса*.

Лемма 3.1.1. Пусть функция $q(x, t)$ является решением уравнения (3.1.1), а функция $y = y(x, \lambda)$ — решением (3.1.3). Тогда $(L - \lambda)(\dot{y} - Ay) = 0$, то есть, функция $\dot{y} - Ay$ также является решением (3.1.3).

Доказательство. В самом деле, дифференцируя (3.1.3) по t , мы получаем, что $\dot{L}y + (L - \lambda)\dot{y} = 0$, или в силу (3.1.4), $(L - \lambda)\dot{y} = LAy - ALy = (L - \lambda)Ay$. Лемма 3.1.1 доказана.

Пусть $e(x, t, \rho)$ и $g(x, t, \rho)$ являются решениями Йоста уравнения (3.1.3), введенными в предыдущей главе. Обозначим $e_{\pm} = e(x, t, \pm\rho)$, $g_{\pm} = g(x, t, \pm\rho)$.

Лемма 3.1.2. Справедливо соотношение

$$\dot{e}_+ = Ae_+ - 4i\rho^3 e_+. \quad (3.1.5)$$

Доказательство. В силу леммы 3.1.1, функция $\dot{e}_+ - Ae_+$ является решением (3.1.3). Так как функции e_+, e_- образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.3), имеем

$$\dot{e}_+ - Ae_+ = \beta_1 e_+ + \beta_2 e_-,$$

где коэффициенты $\beta_k = \beta_k(t, \rho)$, $k = 1, 2$, не зависят от x . При $x \rightarrow \infty$ имеем $e_{\pm} \sim \exp(\pm i\rho x)$, $\dot{e}_+ \sim 0$, $Ae_+ \sim 4i\rho^3 \exp(i\rho x)$. Следовательно, $\beta_1 = -4i\rho^3$, $\beta_2 = 0$. Лемма 3.1.2 доказана.

Лемма 3.1.3. Справедливы следующие соотношения:

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = -8i\rho^3 b, \quad \dot{s}^+ = -8i\rho^3 s^+, \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\lambda}_j = 0, \quad \dot{\alpha}_j^+ = 8\tau_j^3 \alpha_j^+. \quad (3.1.7)$$

Доказательство. Согласно (2.1.24) имеем

$$e_+ = ag_+ + bg_-. \quad (3.1.8)$$

Дифференцируя (3.1.8) по t , получаем $\dot{e}_+ = (\dot{a}g_+ + \dot{b}g_-) + (a\dot{g}_+ + b\dot{g}_-)$. Используя (3.1.5) и (3.1.8), вычисляем

$$a(Ag_+ - 4i\rho^3 g_+) + b(Ag_- - 4i\rho^3 g_-) = (\dot{a}g_+ + \dot{b}g_-) + (a\dot{g}_+ + b\dot{g}_-).$$

Так как $g_{\pm} \sim \exp(\pm i\rho x)$, $\dot{g}_{\pm} \sim 0$, $Ag_{\pm} \sim \pm 4i\rho^3 \exp(\pm i\rho x)$ при $x \rightarrow \infty$, то $-8i\rho^3 \exp(-i\rho x) \sim \dot{a}\exp(i\rho x) + \dot{b}\exp(-i\rho x)$, то есть, $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = -8i\rho^3 b$. Следовательно, $\dot{s}^+ = -8i\rho^3 s^+$, и (3.1.6) доказано.

Корни из собственных значений $\lambda_j = \rho_j^2 = -\tau_j^2$, $\tau_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, являются нулями функции $a = a(\rho, t)$. Так как $\dot{a} = 0$, то $\dot{\lambda}_j = 0$. Обозначим $e_j = e(x, t, i\tau_j)$, $g_j = g(x, t, i\tau_j)$, $j = \overline{1, N}$. По теореме 2.1.3 имеем $g_j = d_j e_j$, где $d_j = d_j(t)$ не зависит от x . Дифференцируя соотношение $g_j = d_j e_j$ по t и используя (3.1.5), получаем

$$\dot{g}_j = \dot{d}_j e_j + d_j \dot{e}_j = \dot{d}_j e_j + d_j A e_j - 4\tau_j^3 d_j e_j$$

или

$$\dot{g}_j = \frac{\dot{d}_j}{d_j} g_j + A g_j - 4\tau_j^3 g_j.$$

При $x \rightarrow -\infty$ имеем $g_j \sim \exp(\tau_j x)$, $\dot{g}_j \sim 0$, $A g_j \sim -4\tau_j^3 \exp(\tau_j x)$ и, следовательно, $\dot{d}_j = 8\tau_j^3 d_j$. В силу (2.1.39), получаем $\dot{\alpha}_j^+ = 8\tau_j^3 \alpha_j^+$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1.1. Пусть $q(x, t)$ — решение задачи Коши (3.1.1), (3.1.2), и пусть $J^+ = \{s^+(t, \rho), \lambda_j(t), \alpha_j^+(t), j = \overline{1, N}\}$ — правые данные рассеяния для $q(x, t)$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} s^+(t, \rho) &= s^+(0, \rho) \exp(-8i\rho^3 t), \\ \lambda_j(t) &= \lambda_j(0), \quad \alpha_j^+(t) = \alpha_j^+(0) \exp(8\tau_j^3 t), \quad j = \overline{1, N} \quad (\lambda_j = -\tau_j^2). \end{aligned} \right\} (3.1.19)$$

Формулы (3.1.9) дают эволюцию во времени данных рассеяния. Таким образом, мы получаем следующий алгоритм для решения задачи Коши (3.1.1), (3.1.2).

Алгоритм 3.1.1. Пусть задана функция $q(x, 0) = q_0(x)$. Тогда

- 1) строим данные рассеяния $\{s^+(0, \rho), \lambda_j(0), \alpha_j^+(0), j = \overline{1, N}\}$;
- 2) вычисляем $\{s^+(t, \rho), \lambda_j(t), \alpha_j^+(t), j = \overline{1, N}\}$ по формулам (3.1.9);
- 3) находим функцию $q(x, t)$, решая обратную задачу рассеяния (см. гл. 2).

Отметим ещё раз ключевые моменты в решении задачи Коши (3.1.1), (3.1.2) с помощью метода обратной задачи.

- 1) Наличие представления Лакса (3.1.4).
- 2) Эволюция данных рассеяния по времени.
- 3) Решение обратной задачи.

3.2. Уравнение КдФ как гамильтонова система

Среди решений уравнения КдФ (3.1.1) есть весьма частные решения вида $q(x,t) = f(x-ct)$ — солитоны. Подставляя $q(x,t) = f(x-ct)$ в (3.1), получаем

$$f''' - 6ff' - cf' = 0, \quad (3.2.1)$$

или

$$(f'' - 3f^2 - cf)' = 0.$$

Ясно, что функция

$$f(x) = -\frac{c}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{c}x/2)}$$

удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, функция

$$f(x) = -\frac{c}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{c}(x-ct)/2)} \quad (3.2.2)$$

является солитоном.

Уравнение (3.2.1) может быть записано в следующем виде

$$f'' = 3f^2 + cf + d,$$

где d — параметр. Это уравнение Ньютона с кубическим потенциалом. На фазовой плоскости (φ, φ') имеется седло. Сепаратриса, идущая из седла в седло, в котором $\varphi = 0$, определяет стремящееся к 0, при $x \rightarrow \pm\infty$, решение φ ; оно и есть солитон.

При столкновении солитонов наблюдается довольно сложное нелинейное взаимодействие. Однако численный эксперимент показывает, что размеры и скорости солитонов не меняются в результате столкновения. Это обстоятельство навело на мысль о существовании законов сохранения, и, действительно, Крускалу, Забуски, Лаксу, Гарднеру, Грину и Миуре удалось найти целую серию первых интегралов для уравнения Кортвега — де Фриза. Эти интегралы имеют вид

$$I_q = \int P_s(q, \dots, q^{(s)}) dx,$$

где P_s — многочлен. Например, легко проверить, что первыми интегралами уравнения (3.1.1) являются

$$I_{-1} = \int q dx, \quad I_0 = \int q^2 dx, \quad I_1 = \int \left(\frac{q'^2}{2} + q^3 \right) dx, \quad I_2 = \int \left(\frac{q''^2}{2} - \frac{5}{2} q^2 q'' + \frac{5}{2} q^4 \right) dx,$$

и т.д.

Появление бесконечной серии первых интегралов легко объясняется следствием из схемы Лакса, а именно, справедлива следующая

Теорема 3.2.1. *Операторы L , построенные по решению уравнения (3.1.1), при всех t унитарно эквивалентны; в частности, каждое из с.з. задачи Штурма — Лиувилля $Lf = \lambda f$ с нулевыми условиями на бесконечности является первым интегралом уравнения Кортевега — де Фриза.*

В.Е. Захаров и Л.Д. Фаддеев заметили, что уравнение КдФ является вполне интегрируемой гамильтоновой системой и указали соответствующие переменные: действие-угол. При этом гамильтонианом уравнения КдФ является интеграл I_1 . Иными словами, уравнение КдФ записывается в виде уравнения Гамильтона в функциональном пространстве функций от x , $\dot{q} = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_1}{\delta q}$. Каждый интеграл I_s задаёт таким же образом "высшее урав-

нение КдФ" $\dot{q} = Q_s(q)$, где $Q_s = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_s}{\delta q}$ — полином от $q, q', \dots, q^{(2s+1)}$. Яв-

ный вид полиномов P_s и Q_s , а также явный вид переменных действие-угол (а следовательно, решение уравнения КдФ), описывается в терминах прямой и обратной задач теории рассеяния на потенциале q . Явный вид полиномов Q_s можно также получить из теоремы Гарднера, обобщающей схему Лакса.

Рассмотрим в пространстве функций аргумента x дифференциальный оператор вида $A = \sum p_i \partial^{m-l}$, где $p_0 = 1$, а остальные коэффициенты p_i многочлены от q и q_x . Оказывается, для каждого s существует дифференциальный оператор A_s порядка $(2s+1)$ такой, что его коммутатор с оператором Штурма — Лиувилля L есть оператор умножения на функцию $[L, A_s] = Q_s$. Оператор A_s определяется выписанными условиями однозначно, с точностью до добавления линейной комбинации A_r с $r < s$. Тем самым и многочлены Q_s от q от q_x определяются с точностью до прибавления линейной комбинации предыдущих Q_r .

Отметим, что солитоны соответствуют безотражательным потенциалам (см. гл.2). Рассмотрим задачу Коши (3.1.1), (3.1.2) в случае, когда $q_0(x)$ является безотражательным потенциалом, то есть, $s^+(0, \rho) = 0$. Тогда, в силу (3.1.10), $s^+(t, \rho) = 0$ для всех t . То есть, решение $q(x, t)$ задачи Коши (3.1.1), (3.1.2) представляет собой безотражательный потенциал для всех t . Используя (2.4.5) и (3.1.10), получаем

$$q(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta(x, t),$$

$$\Delta(x, t) = \det \left[\delta_{kl} + \alpha_k^+(0) \exp(8\tau_k^3 t) \frac{\exp(-(\tau_k + \tau_l)x)}{\tau_k + \tau_l} \right]_{k, l=1, \overline{N}}.$$

В частности, если $N = 1$, то $\alpha_1^+(0) = 2\tau_1$, и, в силу примера 2.4.1, получаем

$$q(x) = -\frac{2\tau_1^2}{\operatorname{ch}^2(\tau_1(x - 4\tau_1^2 t))}.$$

Выбирая $c = -4\tau_1^2$, мы получаем (3.2.2).

3.3. Унитарная эквивалентность однопараметрического семейства операторов Штурма — Лиувилля и уравнение КДФ

Пусть \mathbf{H} — гильбертово пространство и $L(t)$, $t \in \mathbf{R}$ — дифференцируемое однопараметрическое семейство самосопряжённых операторов с общей всюду плотной в \mathbf{H} областью определения.

Приведём условие унитарной эквивалентности семейства $L(t)$, то есть, условие существования такого однопараметрического дифференцируемого семейства унитарных операторов $U(t)$, что

$$U(0) = E, \tag{3.3.1}$$

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = E, \text{ то есть, } U^{-1} = U^*$$

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0).$$

Здесь E — единичный оператор, U^* — сопряженный к U . Справедлива следующая

Лемма 3.3.1. *Дифференцируемое семейство унитарных операторов $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t), \tag{3.3.2}$$

причём $B(t)$ — кососимметрический оператор, то есть,

$$B^*(t) = -B(t). \tag{3.3.3}$$

Наоборот, если выполняется (3.3.1), (3.3.2) и (3.3.3) и задача Коши

$$\dot{h}(t) = B(t)h(t),$$

$$h(t_0) = h_0$$

разрешима для любого $t_0 \in \mathbf{R}$ и всюду плотного множества элементов $h_0 \in \mathbf{H}$, то операторы $U(t)$, определённые уравнением (3.3.2) и начальным условием (3.3.1), унитарны.

Следующая теорема представляет собой условие унитарной эквивалентности однопараметрического дифференцируемого семейства операторов $L(t)$ в гильбертовом пространстве \mathbf{H} .

Теорема 3.3.1. Для того чтобы семейство дифференцируемых операторов $L(t)$ было унитарно эквивалентно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее функциональное уравнение:

$$\dot{L} = [B, L] = BL - LB, \quad (3.3.4)$$

где $B(t)$ — кососимметрический оператор.

Пусть теперь $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$. Рассмотрим в качестве $L(t)$ оператор Штурма — Лиувилля

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t), \quad x \in \mathbf{R},$$

где функция $u(x, t)$ при каждом фиксированном t быстро убывает. В этом случае $\dot{L}(t)$ есть оператор умножения на u_t , и возникает вопрос о существовании кососимметрического оператора B , коммутатор которого с L есть оператор умножения на функцию.

Следующая теорема показывает, что такие операторы существуют.

Теорема 3.3.2. Для каждого целого $q \geq 0$ существует кососимметрический оператор B порядка $2q + 1$, коммутатор которого с оператором L есть оператор умножения на функцию.

Схема доказательства. При $q = 0$ имеем кососимметрический оператор дифференцирования: $B_0 = \frac{d}{dx}$. Как легко видеть, $[B_0, L] = u'$. Тогда уравнение (3.3.4) имеет вид $u_t = u_x$, то есть $u(x, t) = u(x + t)$. Это тривиальный случай. Первый нетривиальный случай возникает при $q = 1$. В этом случае $B = B_1 = 4D^3 - 6uD - 3u'$, где $D = \frac{d}{dx}$. Несложно подсчитать, что $[B, L] = u''' - 6uu'$, тогда уравнение (3.3.4) принимает вид уравнения КдФ $\dot{u} = u''' - 6uu'$.

В общем случае ищем B_q в виде

$$B_q = D^{2q+1} + \sum_{j=1}^q (b_j D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j).$$

Этот оператор кососимметрический при любом выборе коэффициентов b_j , а оператор $[B_q, L]$ есть симметрический дифференциальный оператор порядка не больше $2q$, $(q + 1)$ коэффициентов которого выражаются через u и b_j . Можно показать, что из условия "оператор $[B_q, L]$ есть оператор умножения на функцию" коэффициенты b_j рекуррентно определяются и суть полиномы относительно функции u и её производных по x .

Обозначим $X_q(u) = [B_q, L]$. Уравнение

$$\dot{u} = X_q(u), \quad q > 1$$

называется *высшим аналогом* уравнения КдФ.

3.4. Перечень разрешимых уравнений

В этом разделе мы приведём некоторые нелинейные эволюционные уравнения, существенные в теоретическом или прикладном значении, и разрешимые методами, которые являются нетривиальным распространением рассмотренного нами метода. Мы укажем также и некоторые уравнения, неразрешимые методом обратной задачи рассеяния. Заметим, что ранее мы уже указали на уравнения *КдФ*, *Кадомова — Петвиашвили*, *нелинейное уравнение Шредингера* и *уравнение sin-Гордона*.

Регуляризованное уравнение длинных волн (РДВ) или уравнение Перегрин, Бенжамена, Бона и Махони (ПББМ) имеет вид:

$$u_t + u_x - u_{txx} - bu_x u = 0. \quad (3.4.1)$$

Это уравнение является своеобразным конкурентом с уравнением КдФ при описании волн в прямоугольном канале в пределе длины волны, большой по сравнению с глубиной канала. Уравнение РДВ отличается от уравнения КдФ в двух отношениях. Во-первых, в нём имеется член u_x , отсутствующий в уравнении КдФ. Однако это различие второстепенное, так как введение такого члена в уравнение КдФ соответствовало бы тривиальной замене переменных, эквивалентной измерению пространственных координат в системе отсчёта, движущейся с единичной скоростью. Во-вторых, в уравнении РДВ присутствует член $-u_{txx}$ вместо члена u_{xxx} в уравнении КдФ. И это обстоятельство с аналитической точки зрения является более существенным. Оно означает, что уравнение (3.4.1) вообще не является эволюционным уравнением в самом прямом и строгом смысле этого слова. Но в то же время в той степени, в которой можно пренебречь нелинейными и дисперсионными эффектами в уравнении (3.4.1), справедливо приближённое равенство $-u_t \approx u_x$, а это означает, что выполняется соотношение

$$-u_{txx} \approx u_{xxx}.$$

Последнее приближённое равенство устраняет различия между уравнениями КдФ и РДВ, с производной u_x , соответствующим образом добавленное в уравнение КдФ. В этом причина физической эквивалентности уравнений КдФ и РДВ в том смысле, что они оба применимы для описания одних и тех же физических явлений.

На данный момент неизвестно, разрешимо ли уравнение РДФ методом спектрального преобразования. Есть основания думать, что оно

неразрешимо, то есть, что любые поиски спектрального преобразования, годного для решения уравнения РДВ, обречены на неудачу.

Переходное уравнение КдФ.

$$u_t + u_{xxx} - 6f(t)u_x u = 0. \quad (3.4.2)$$

Происхождение названия этого уравнения связано с тем, что функция $f(t)$ является монотонно возрастающей функцией, причем $f(\pm\infty) = \pm 1$. Таким образом, уравнение (3.4.2) описывает переход от моделируемого уравнением КдФ режима распространения волны с положительным коэффициентом при нелинейном члене к режиму, для которого эволюционное уравнение всё ещё остаётся уравнением КдФ, но нелинейный член имеет противоположный знак. Для этого уравнения известно три интеграла движения. Переходное уравнение КдФ для произвольной функции $f(t)$ неразрешимо методом спектрального преобразования. Исключительный случай при $f(t) = t^{-1/2}$, когда уравнение (3.4.2) может быть преобразовано в цилиндрическое уравнение КдФ (см. ниже), не относится к описанному выше типу переходного уравнения КдФ. Когда $f(t)$ достаточно гладкая функция, в пределах одной длины волны, уравнение (3.4.2) описывает распространение волн на поверхности, разделяющей два слоя жидкости малой глубины. При этом функция $f(t)$ описывает гладкое изменение глубины данного слоя. В частности, нуль функции $f(t)$ соответствует точке, к которой глубина обоих слоёв одинакова, и распространение волны через эту точку ветвления может быть приближённо описано уравнением

$$u_t + u_{xxx} - 6(1 - \varepsilon t)u_x u = 0,$$

которое исследовалось методом возмущений и численными методами в окрестности точки $t = \varepsilon^{-1}$.

Цилиндрическое уравнение КдФ

$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u + (2t)^{-1}u = 0. \quad (3.4.3)$$

Отметим явную зависимость от времени и сингулярность при $t = 0$. Задача Коши для этого уравнения с начальным условием, заданным при $t = t_0 \neq 0$, в классе интересных для физики функций $u(x, t)$, асимптотически стремящихся к нулю $u(\pm\infty, t) = 0$, может быть решена методом спектрального преобразования для новой спектральной задачи всё ещё связанной с линейным одномерным уравнением Шредингера. Уравнение (3.4.3) было введено в физике плазмы и, прежде чем была показана его разрешимость, исследовалось численно. Получается это уравнение при схематизации, аналогичной той, которая приводит к стандартному уравнению КдФ, но в цилиндрической, а не в прямоугольной геометрии.

Сферическое уравнение КдФ.

$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u + t^{-1}u = 0. \quad (3.4.4)$$

Это уравнение неразрешимо (по крайней мере, в настоящее время) никакими методами спектрального преобразования. Оно возникает в тех ситуациях, что и стандартное и цилиндрическое уравнения КдФ, и поэтому было исследовано подобно им, но с модификациями, которые соответствуют его названию. Отметим, что изменением масштаба переменных нельзя изменить численный множитель при последнем члене в уравнениях (3.4.3) и (3.4.4), не меняя при этом первого члена.

Модифицированное уравнение КдФ

$$u_t + u_{xxx} \pm 6u_x u^2 = 0. \quad (3.4.5)$$

Это уравнение отличается от уравнения КдФ только тем, что его нелинейность кубическая, а не квадратическая. Оно имеет прикладной характер, так, например, оно использовалось для описания акустических волн в ангармонических решётках. Задача Коши для этого уравнения разрешима посредством соответствующего спектрального преобразования для спектральной задачи, аналогичной той, которая обсуждалась ранее. Уравнение (3.4.5) связано с уравнением КдФ преобразованием Миуры. Это преобразование сыграло важную роль на ранних этапах становления метода спектрального преобразования. Обычно полагают, что обобщённое уравнение КдФ

$$u_t + u_{xxx} \pm 6u_x u^m = 0$$

разрешимо методом спектрального преобразования только при $m=1$ (обычное уравнение КдФ) и $m=2$ (модифицированное уравнение КдФ) и, конечно, оно разрешимо методом преобразования Фурье при $m=0$ (линейный случай).

Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxx} + 3(u^2)_{xx} = 0. \quad (3.4.6)$$

Введённое Буссинеском в 1871г. для описания распространения длинных волн на мелкой воде в случае прямоугольной геометрии, оно является более общим, чем уравнение КдФ, так как в нём учитывается движение в обоих направлениях. Действительно, уравнение КдФ (с соответствующим образом добавленным членом u_x) получается из уравнения (3.4.6) в приближении $u_t \approx -u_x$, соответствующим тому, что мы рассматриваем движение волны, перемещающейся только в одном направлении. Уравнение (3.4.6) имеет много других приложений: длинные волны в одномерной нелинейной решётке, колебания нелинейной пружины, ионно-звуковые волны в плазме. Уравнение Буссинеска разрешимо методом спектрального преобразования и имеет многосолитонное решение.

Уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Это самое простое из интересных для физики нелинейных эволюционных уравнений. Его можно считать одномерной редукцией уравнений Навье — Стокса. Его разрешимость была обнаружена в 1950г. до того как было введено спектральное преобразование. Именно, преобразование Хопфа — Коула

$$u = (\ln v)_x$$

превращает уравнение Бюргерса в линейное уравнение диффузии

$$v_t = v_{xx}.$$

Двойное уравнение синус-Гордона

$$u_{xx} \pm (\sin u + \eta \sin(u/2)) = 0,$$

где η — постоянная. Данное уравнение находит применение в нелинейной оптике и в физике низких температур. Есть веские основания считать, что это уравнение неразрешимо методом спектрального преобразования.

Отметим, что данный перечень отнюдь не полон. Во-первых, число новых найденных разрешимых уравнений быстро растёт. Во-вторых, мы ограничили свой перечень дифференциальными уравнениями в частных производных (ниже в п.4.2 будут рассмотрены интегродифференциальные уравнения), не упоминая даже об уравнениях в конечных разностях, а метод спектрального преобразования может быть распространён и на дискретный случай (дискретными могут быть либо пространственная координата, либо временная, либо они обе). В-третьих, что касается разрешимых уравнений с более чем одной пространственной переменной, то мы ограничились простым упоминанием только уравнения Кадомцева — Петвиашвили.

ГЛАВА 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ МЕТОДОМ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ФУРЬЕ И МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В данной главе будет представлен новый взгляд на эволюционные уравнения и будет показано, что между методом преобразования Фурье решения линейных эволюционных уравнений и методом обратной задачи решения нелинейных эволюционных уравнений существует определённая связь.

4.1. Класс разрешимых линейных эволюционных уравнений

Рассмотрим вначале линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_t(x,t) = -i\omega(-i\frac{\partial}{\partial x})u(x,t), \quad (4.1.1)$$

где функция $\omega(z)$ есть, скажем, полином степени k . Тогда (4.1.1) имеет вид

$$u_t(x,t) = -i((-i)^k a_0 \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) + (-i)^{k-1} a_1 \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u(x,t) + \dots + a_k u(x,t)).$$

Изучение многих явлений природы может быть сведено к исследованию решения $u(x,t)$ уравнения (4.1.1) с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4.1.2)$$

где функция $u_0(x)$ регулярна (при всех вещественных значениях x) и асимптотически стремится к нулю, например:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (|x|^{1+\varepsilon} u_0(x)) = 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.1.3)$$

Заметим, что если чётная часть функции $\omega(z)$ вещественна, а нечётная — мнима (т.е. если $(\omega(z^*))^* = -\omega(-z)$), то уравнение (4.1.1) действительно. Тогда функция $u(x,t)$ также действительна при $t > 0$, если действительна функция $u_0(x)$. Кроме того, если действительная функция $\omega(z)$ (то есть, $(\omega(z^*))^* = \omega(z)$), то уравнение (4.1.1) — чисто дисперсионное (то есть, не диссипативное); тогда, например, легко видеть (см. ниже формулы (4.1.4) и

(4.1.7)), что интеграл от функции $|u(x,t)|^2$ по всем действительным значениям x не зависит от времени.

Центральную роль в решении уравнения (4.1.1) играют формулы прямого и обратного преобразования Фурье для функции $u(x,t)$ (по переменной x)

$$u(x,t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \hat{u}(k,t) dk, \quad (4.1.4)$$

$$\hat{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) u(k,t) dx. \quad (4.1.5)$$

вследствие того, что при изменении функции $u(x,t)$ согласно уравнению в частных производных (4.1.1) изменение её фурье-образа $\hat{u}(x,t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\hat{u}_t(k,t) = -i\omega(k)\hat{u}(k,t), \quad (4.1.6)$$

которое может быть сразу же проинтегрировано:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0) \exp(-i\omega(k)t). \quad (4.1.7)$$

Таким образом, уравнение (4.1.1) при условиях (4.1.2) решается в три шага. Сначала в момент времени $t=0$ находится фурье-образ

$$\hat{u}(x,0) = \hat{u}_0(k) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) u_0(x) dx \quad (4.1.8)$$

(см. формулы (4.1.5) и (4.1.2)), затем по формуле (4.1.7) находится фурье-образ $\hat{u}(k,t)$ и, наконец, в момент времени t функция $u(x,t)$ восстанавливается на основании фурье-образа $\hat{u}(k,t)$ по формуле преобразования Фурье (4.1.4).

Процесс решения уравнения (4.1.1) можно представить схематической диаграммой (рис. 4.1.1), где штриховой линией показана трудная задача, в общем случае непосредственно связанная с приложениями, а тремя сплошными линиями — три более легких шага, последовательное выполнение которых приводит к решению.

Задача (4.1.1), (4.1.2) служит математической моделью многих явлений природы. Рассматриваемый метод позволяет получить явный вид решения этой задачи (хотя аналитически вычислить интегралы в (4.1.4) и (4.1.5) можно только в редких случаях) и, что более важно, позволяет понять поведение функции $u(x,t)$. Эволюция во времени, очевидно, полностью определяется "дисперсионной функцией" $\omega(k)$ (см. введение); обычный анализ поведения решения $u(x,t)$ по прошествии длительного времени (решения, даваемого формулами (4.1.7) и (4.1.4)) показывает, что реше-

ние $u(x,t)$, определяемое начальными данными $u_0(x)$, локализованными

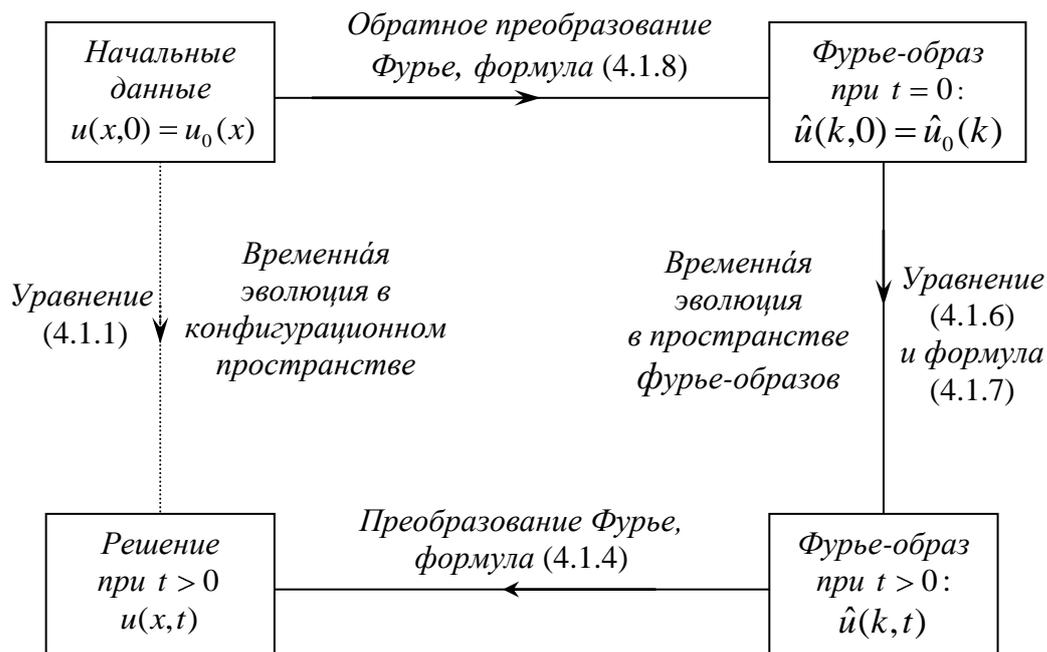


Рис 4.1.1.

вблизи точки x_0 и обладающими, кроме того, фурье-образом $\hat{u}_0(k)$, локализованным вблизи значения k_0 , ведет себя в общем случае как «волновой пакет», движущийся с *групповой скоростью*

$$v_g = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (4.1.9)$$

и асимптотически диспергирующий (максимум его огибающей локализован около $x = x_0 + v_g t$ и при $t \rightarrow \infty$ уменьшается пропорционально $t^{-1/2}$). Заметим, что это поведение, хотя и очень понятное, никоим образом не очевидно из структуры дифференциального уравнения в частных производных (4.1.1) в противоположность чрезвычайно простой временной эволюции фурье-образа $\hat{u}(k,t)$, даваемой формулой (4.1.7). Таким образом, мы видим, что *динамика в k-пространстве намного проще, чем в x-пространстве*. Логично предположить, что аналогичная ситуация будет иметь место и для тех *нелинейных* эволюционных уравнений, которые разрешимы методом, основанным на спектральном преобразовании, методом, сходным с методом преобразования Фурье, но имеющим также и некоторые существенно новые особенности.

Отметим здесь и некоторые другие свойства решений уравнения (4.1.1), у которых имеются аналоги в нелинейных случаях.

Во-первых, заметим, что, если функция $u^{(1)}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.1.1), а функция $u^{(2)}(x, t)$ связана с функцией $u^{(1)}(x, t)$ соотношением

$$g\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{(2)}(x, t) + h\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{(1)}(x, t) = 0, \quad (4.1.10)$$

то функция $u^{(2)}(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению (4.1.1). Действительно, соотношение в фурье-пространстве, соответствующее уравнению (4.1.1), имеет следующий вид:

$$g(k)\hat{u}^{(2)}(k, t) + h(k)\hat{u}^{(1)}(k, t) = 0, \quad (4.1.11a)$$

или, что эквивалентно

$$\hat{u}^{(2)}(k, t) = -[h(k)/g(k)]\hat{u}^{(1)}(k, t); \quad (4.1.11b)$$

это, очевидно, означает, что если функция $u^{(1)}(k, t)$ удовлетворяет уравнению (4.1.6), то ему удовлетворяет и функция $u^{(2)}(k, t)$. Хотя уравнение (4.1.10) при заданной функции $u^{(1)}(x, t)$ имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения для $u^{(2)}(x, t)$ только в том случае, когда функции $g(z)$ и $h(z)$ являются полиномами или рациональными функциями, в остальном функции $g(z)$ и $h(z)$ здесь достаточно произвольны, если не считать того, что они должны удовлетворять условиям, гарантирующим регулярность функции $u^{(2)}(x, t)$ и ее асимптотическое стремление к нулю согласно условию (4.1.3), если тем же условиям удовлетворяет и функция $u^{(1)}(x, t)$ (например, функция $g(z)$ не должна иметь нулей на действительной оси).

Во-вторых, мы заметим, что если функции $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ являются решениями уравнения (4.1.1), то этому уравнению удовлетворяет и любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами

$$u(x, t) = c_1u^{(1)}(x, t) + c_2u^{(2)}(x, t). \quad (4.1.12)$$

Это, конечно, *принцип суперпозиции*, соответствующий линейной структуре уравнения (4.1.1).

В-третьих, отметим, что решение уравнения (4.1.1) с условием (4.1.2) может быть формально записано с помощью *резольвентной формулы*

$$u(x, t) = \exp\left[-it\omega\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u_0(x), \quad (4.1.13)$$

соответствующей непосредственному интегрированию уравнения (4.1.1) (от 0 до t с использованием условия (4.1.2)). В частном случае $\omega(z) = -z$, когда уравнение (4.1.1) имеет вид

$$u_t(x, t) = u_x(x, t) \quad (4.1.14)$$

и имеет общее решение

$$u(x, t) = f(x + t), \quad (4.1.15)$$

формула (4.1.13) соответствует хорошо известному *операторному тождеству*

$$f(x + a) = \exp\left(a \frac{d}{dx}\right) f(x), \quad (4.1.16)$$

где вместо t мы написали a , чтобы подчеркнуть, эта формула не специфична для задачи об эволюции во времени; действительно, в соотношении (4.1.16) выражается свойство «оператора трансляции» $\exp(ad/dx)$, и оно справедливо для любой функции $f(x)$ (строго говоря, для любой функции $f(z)$, голоморфной в круге $|z - x| \leq |a|$).

Хотя мы для простоты не ввели в уравнение (4.1.1) явной зависимости от времени, подчеркнем, что рассмотренный в данном параграфе метод решения может быть использован (с тривиальными изменениями) и в случае, когда это уравнение в частных производных явно зависит от времени, то есть

$$u_t(x, t) = -i\omega\left(-i \frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x, t). \quad (4.1.17)$$

Тогда, конечно, вместо соотношения (4.1.6) имеем

$$\hat{u}_t(k, t) = -i\omega(k, t)\hat{u}(k, t) \quad (4.1.18)$$

и соотношение (4.1.7) заменяется соотношением

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) \exp\left[-i \int_0^t dt' \omega(k, t')\right]. \quad (4.1.19)$$

Если дифференциальное уравнение в частных производных (4.1.1) содержит явную зависимость от x , то применение метода преобразования Фурье становится менее простым. Он остается эффективным (в смысле сведения решения к квадратурам и к решению *обыкновенного* дифференциального уравнения, в общем случае нелинейного, см. ниже) в случае, когда зависимость от x — линейная, так что уравнение (4.1.1) имеет вид

$$u_t(x, t) = -i\left[\omega\left(-i \frac{\partial}{\partial x}, t\right) + x\omega'\left(-i \frac{\partial}{\partial x}, t\right)\right] u(x, t). \quad (4.1.20)$$

Теперь это уравнение характеризуется двумя функциями $\omega(z, t)$ и $\omega'(z, t)$ (ради общности мы ввели также зависимость от t). Соответствующее ему в фурье-пространстве уравнение имеет вид

$$\hat{u}_t(x, t) = [-i\omega(k, t) + \omega'_k(k, t)]\hat{u}(k, t) + \omega'(k, t)\hat{u}_k(k, t) \quad (4.1.21)$$

и может быть решено методом характеристик. Решение его записывается в виде

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0[k_0(t, k)] \exp \left\{ \int_0^t dt' [-i\omega(x, t) + \omega'_k(x, t')] \right\}, \quad (4.1.22)$$

где

$$x \equiv x[t', k_0(t, k)], \quad (4.1.23)$$

причем функция $x(t, k_0)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x_t(t, k_0) = -\omega'[x(t, k_0), t] \quad (4.1.24)$$

и граничным условием

$$x(0, k_0) = k_0, \quad (4.1.25)$$

а функция $k_0(t, k)$ определяется функцией x посредством неявной формулы

$$x(t, k_0) = k. \quad (4.1.26)$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (4.1.20) при условии (4.1.2) дается формулами (4.1.4) и (4.1.22); при этом функция $\hat{u}_0(k)$ дается формулой (4.1.8). Мы здесь предполагаем, конечно, что все интегралы сходятся и возможно интегрирование по частям, необходимое для получения формулы (4.1.21) из уравнения (4.1.20). То, что это не всегда так, ясно из рассмотрения формулы (4.1.22), так как эта формула вместе с соотношениями (4.1.23) — (4.1.26) не означает, что функция $\hat{u}(k, t)$ при $t > 0$ асимптотически по k стремится к нулю, даже если это имеет место для функции $\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k)$.

4.2. Класс разрешимых нелинейных эволюционных уравнений

Класс *нелинейных* эволюционных уравнений, разрешимых методом спектрального преобразования, можно записать в компактном виде следующим образом:

$$u_t(x, t) = \alpha(L)u_x(x, t), \quad (4.2.1)$$

где $\alpha(z)$ — например, полином, а L — интегро-дифференциальный оператор, определенный следующей формулой, задающей его действие на порождающую функцию $f(x)$:

$$Lf(x) = f_{xx}(x) - 4u(x, t)f(x) + 2u_x(x, t) \int_x^{+\infty} dyf(y). \quad (4.2.2)$$

Здесь и всюду далее мы рассматриваем только такие функции, интегралы от которых (интересующие нас) сходятся. Конечно, функция f может зависеть и от других переменных, например от t .

Заметим, что оператор L зависит от функции u ; это приводит к тому, что правая часть уравнения (4.2.1) нелинейна по u . Так как L — интегро-дифференциальный оператор, то, в общем случае, уравнение (4.2.1) может оказаться интегро-дифференциальным. Но в данном случае это не так: пока $\alpha(z)$ — полиномиальная функция переменной z , уравнение (4.2.1) является нелинейным эволюционным уравнением в *частных производных*. Это есть следствие важного и нетривиального свойства оператора L , которое в общем виде можно сформулировать следующим образом:

$$L^n u_x(x, t) = g_x^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.3)$$

где $g^{(n)}$ — полином степени $n+1$ от функции u и ее производных по x вплоть до порядка $2n$. Например,

$$Lu_x = u_{xxx} - 6uu_x = (u_{xx} - 3u^2)_x, \quad (4.2.3a)$$

$$\begin{aligned} L^2 u_x &= u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 200u_x u_{xx} + 30u^2 u_x = \\ &= (u_{xxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3)_x, \end{aligned} \quad (4.2.3b)$$

Таким образом, простейшим нелинейным эволюционным уравнением, содержащимся в классе (4.2.1), является уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0, \quad (4.2.4)$$

соответствующее функции $\alpha(z) = -z$.

Как и в случае, о котором шла речь в 4.1, мы рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.2.1) с заданным начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.2.5)$$

где $u_0(x)$ — функция, регулярная при всех действительных значениях x , асимптотически стремящаяся к нулю.

Метод решения уравнения (4.2.1) основан на спектральном преобразовании (по x) функции $u(x, t)$, играющей роль, аналогичную роли преобразования Фурье при решении уравнения (4.1.1).

Теперь под *спектральным преобразованием* функции $u(x)$ мы будем понимать набор данных рассеяния $J^+ = \{s^+(k), \rho_n, \alpha_n^+; k \in \mathbf{R}, n = \overline{1, N}\}$ или $J^- = \{s^-(k), \rho_n, \alpha_n^-; k \in \mathbf{R}, n = \overline{1, N}\}$ (см. определение 2.1.2 данного пособия).

Такое определение имеет смысл благодаря наличию взаимно однозначного соответствия между функцией $u(x)$ (в подходящем функциональном классе, как указано выше) и спектральными данными рассеяния.

Укажем, что в пределе, когда функция $u(x, t)$ и все ее производные малы и мы вправе пренебречь всеми их степенями, *нелинейное* эволюционное уравнение (4.2.1) переходит в *линейное* уравнение

$$u_t(x, t) = \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_x(x, t) \quad (4.2.6)$$

или эквивалентное ему (формула (4.1.1)) уравнение

$$u_t(x, t) = -i\omega \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad (4.2.6a)$$

где

$$\omega(z) = -z\alpha(-z^2). \quad (4.2.6b)$$

Заметим, что в случае действительной функции $\alpha(z)$ функция $\omega(z)$ автоматически оказывается действительной и нечетной, а поэтому мы, вследствие соотношения (4.2.6a), получаем не только действительное (как, конечно, и должно быть), но и чисто дисперсионное (т.е. недиссипативное) уравнение. Теперь мы укажем на два частных случая, когда можно явно найти решение уравнения (4.2.1).

Первый случай уже был рассмотрен нами ранее, это случай спектральных данных, когда нет вклада непрерывного спектра, а есть N дискретных собственных значений (см. пункт 2.4. настоящего пособия).

Второй случай — это случай когда нет дискретных собственных значений и, кроме того, функция $s^+(k)$ очень мала (по модулю), так что очень мала и функция $u(x)$. Рассмотрим в этой связи основное уравнение (уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко) (см. уравнение (2.2.1))

$$F^+(x+y) + A^+(x, y) + \int_x^\infty A^+(x, t) F^+(t+y) dt = 0, \quad y > x,$$

где

$$F^+(x) = R^+(x) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k x), \quad \rho_k = i\tau_k, \quad R^+(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty s^+(k) \exp(ikx) dk.$$

Если не считать вклада дискретного спектра, то функция $F^+(x)$ есть в точности обратное преобразование Фурье функции $s^+(k)$. В рассматриваемом случае $F^+(x) = R^+(x)$ — дискретный спектр отсутствует.

Предположим далее, что вследствие малости функции $s^+(k)$, а, стало быть, и $F^+(x)$, пренебрежение последним членом в левой части основного уравнения (2.2.1) оправдано; это дает

$$A^+(x, y) \approx -F^+(x + y) \quad (4.2.7)$$

и, следовательно,

$$u(x) \approx (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikx) iks^+ \left(\frac{1}{2}k \right). \quad (4.2.8)$$

Поэтому видно, что в данном приближении существует простое соотношение между коэффициентом отражения $s^+(k)$ и функцией $\hat{u}(k)$, фурье-образом функции $u(x)$, а именно

$$\hat{u}(k) \approx iks^+ \left(\frac{1}{2}k \right). \quad (4.2.9)$$

Действительно, эта формула, а точнее, совершенно эквивалентная ей формула

$$s^+(k) \approx (2ik)^{-1} \hat{u}(2k) \quad (4.2.10)$$

соответствует хорошо знакомой формуле «приближения Борна» в квантово-механической задаче рассеяния. Как явствует из формулы (4.2.10), это приближение теряет силу в окрестности значения $k \approx 0$;

Подведём теперь краткий итог данной главы.

Класс нелинейных эволюционных уравнений, разрешимых, как было описано выше, методом спектрального преобразования, имеет вид уравнения (4.2.1)

$$u_t(x, t) = \alpha(L)u_x(x, t),$$

причем интегро-дифференциальный оператор L определяется формулой (4.2.2)

$$Lf(x) = f_{xx}(x) - 4u(x, t)f(x) + 2u_x(x, t) \int_x^{+\infty} dyf(y).$$

В приближении, в котором мы пренебрегаем всеми нелинейными эффектами, уравнение (4.2.1) переходит в линейное дифференциальное уравнение в частных производных (4.1.1)

$$u_t(x, t) = -i\omega \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t),$$

где

$$\omega(z) = -z\alpha(-z^2).$$

Решение уравнения (4.1.1) основано на том, что изменение во времени фурье-образа $\hat{u}(k, t)$ функции $u(x, t)$ описывается простой формулой (4.1.7)

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) \exp[-i\omega(k)t].$$

Но, когда эволюция функции $u(x, t)$ описывается уравнением (4.2.1), соответствующий коэффициент отражения $s^+(k, t)$ меняется согласно формуле (см.(3.1.10))

$$s^+(k, t) = s^+(k, 0) \exp[2ik\alpha(-4k^2)t].$$

С учетом выражения (4.2.6б) последнюю формулу можно переписать в виде

$$s^+\left(\frac{1}{2}k, t\right) = s^+\left(\frac{1}{2}k, 0\right) \exp[-i\omega(k)t],$$

откуда видно, что, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.2.1), то коэффициент отражения $s^+(1/2k, t)$ изменяется точно так, как меняется фурье-образ $\hat{u}(k, t)$, когда функция $u(x, t)$ удовлетворяет линеаризованному варианту (4.1.1) уравнения (4.2.1). В приближении, в котором мы пренебрегаем всеми нелинейными эффектами, коэффициент отражения $s^+(1/2k, t)$ просто пропорционален фурье-образу $\hat{u}(k)$:

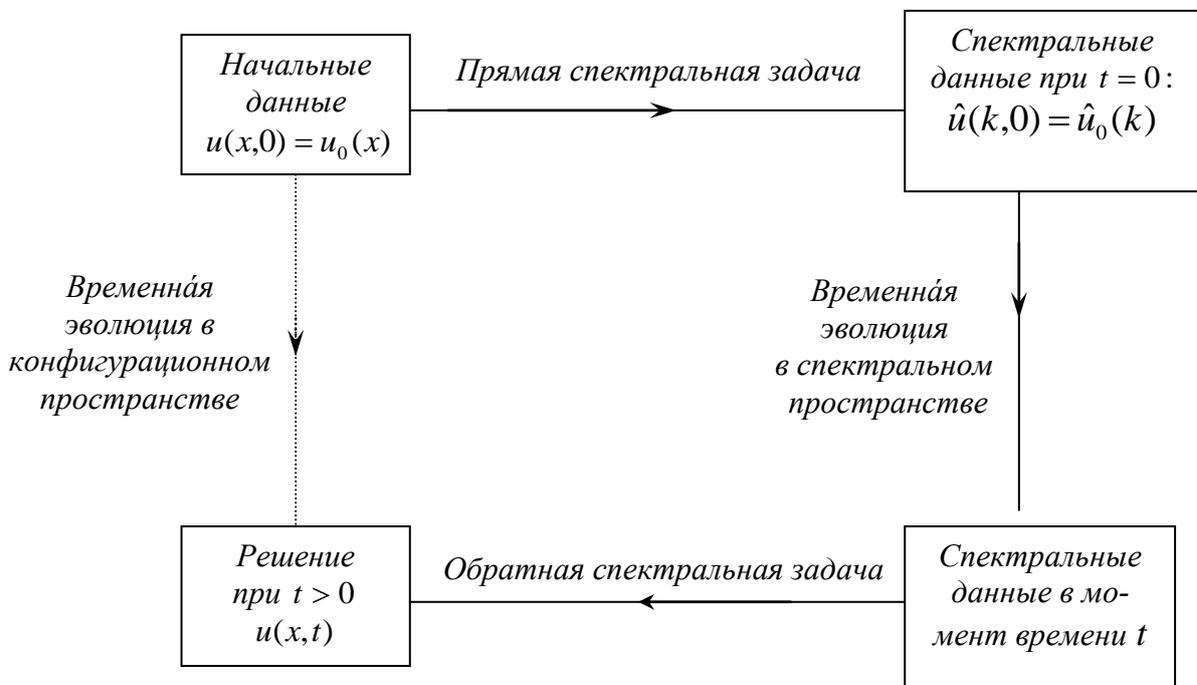


Рис. 4.2.1.

$$s^+\left(\frac{1}{2}k, t\right) = (ik)^{-1}\hat{u}(k, t),$$

что и требовалось доказать. Правда, нужно сделать две оговорки. Во-первых, мы здесь игнорировали вклад дискретных собственных значений; о допустимости этого в пределе малых значений функции u уже говорилось. Во-вторых, из соотношения (4.2.6б) ясно, что приведенное выше доказательство теряет силу в окрестности малых значений $k = 0$.

Всё вышесказанное можно наглядно представить в виде диаграммы (рис. 4.2.1), вполне аналогичной диаграмме для случая линейных эволюционных уравнений.

Таким образом, метод решения некоторых классов нелинейных эволюционных уравнений посредством спектрального преобразования является естественным продолжением метода решения линейных эволюционных уравнений посредством преобразования Фурье. Мы показали, что в пределе при “грубой” линеаризации, соответствующей пренебрежению всеми нелинейными членами, так что нелинейное эволюционное уравнение становится линейным, метод спектрального преобразования переходит в метод преобразования Фурье.

ГЛАВА 5. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

У класса нелинейных эволюционных уравнений (4.2.1) есть ряд дополнительных свойств, происхождение которых связано с основным свойством этого класса нелинейных эволюционных уравнений, то есть, с тем, что, хотя временная эволюция и нелинейна в конфигурационном пространстве (x -пространстве), она связана (спектральным преобразованием) с простой линейной эволюцией в спектральном пространстве. Здесь мы дадим краткий обзор некоторых таких свойств.

5.1. Преобразования Бэклунда

Рассмотрим какое-нибудь эволюционное уравнение, например

$$u_t(x, t) = F[u, u_x, u_{xx}, \dots]. \quad (5.1.1)$$

Пусть функция $u^{(0)}(x, t)$ является общим решением уравнения (5.1.1) и пусть функция $u^{(1)}(x, t)$ связана с функцией $u^{(0)}(x, t)$ явным соотношением (содержащим дифференциальный оператор $\partial/\partial x$, а также интегральный оператор $\int_x^\infty dy$), которое мы пока запишем в виде

$$G[u^{(0)}, u^{(1)}] = 0. \quad (5.1.2)$$

Тогда, если функция $u^{(1)}(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению (5.1.1), соотношение (5.1.2) называется *преобразованием Бэклунда*.

Следовательно, мы определяем здесь *преобразование Бэклунда* как любую формулу, связывающую две функции, скажем $u^{(0)}(x, t)$ и $u^{(1)}(x, t)$, таким образом, что, когда одна из них удовлетворяет эволюционному уравнению (в общем случае нелинейному), тогда этому же уравнению удовлетворяет и другая функция. В дифференциальной геометрии такие преобразования были введены давно, и в ней они получили свое название. Здесь мы схематически покажем, как, в связи с методом спектрального

преобразования для решения нелинейных эволюционных уравнений (4.2.1), естественным образом появляется класс преобразований Бэклунда для решений этих уравнений.

Начнем с повторения и запишем здесь еще раз класс нелинейных эволюционных уравнений (4.2.1) в виде

$$u_t = \alpha(L)u_x; \quad u \equiv u(x, t), \quad (5.1.3)$$

где $\alpha(z)$ — полиномиальная функция, а L — интегро-дифференциальный оператор, определяемый соотношением

$$Lf(x) = f_{xx} - 4uf + 2u_x \int_x^\infty dyf(y). \quad (5.1.4)$$

Напомним, что, когда изменение функции $u(x, t)$ описывается уравнением (5.1.1), тогда соответствующий ей в спектральной задаче (задаче рассеяния) коэффициент отражения $s^+(k, t)$ изменяется во времени согласно формуле

$$s^+(k, t) = s^+(k, 0)\exp[2ik\alpha(-4k^2)t], \quad (5.1.5)$$

Для простоты мы ограничимся рассмотрением коэффициента отражения в предположении, что между функциями u и s^+ существует взаимно однозначное соответствие (в действительности это бывает только тогда, когда у спектральных данных функции u нет дискретных собственных значений).

Приведем одно свойство спектральной задачи Шредингера. Пусть $u^{(0)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$ — две функции (обе регулярные при действительных значениях x и “достаточно быстро” стремящиеся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$), связанные друг с другом нелинейным интегро-дифференциальным соотношением

$$g(\Lambda)[u^{(0)}(x) - u^{(1)}(x)] + h(\Lambda) \cdot \Gamma \cdot 1 = 0. \quad (5.1.6)$$

Здесь $g(z)$ и $h(z)$ — произвольные целые функции (скажем, полиномиальные), а Λ и Γ — интегродифференциальные операторы, определяемые следующими соотношениями, которые задают их действие на порождающую функцию $f(x)$ (стремящуюся к нулю при $x \rightarrow \infty$):

$$\Gamma f(x) = [u_x^{(0)}(x) + u_x^{(1)}(x)]f(x) + [u^{(0)}(x) - u^{(1)}(x)] \int_x^\infty dy[u^{(0)}(y) - u^{(1)}(y)]f(y), \quad (5.1.7)$$

$$\Lambda f(x) = f_{xx}(x) - 2[u^{(0)}(x) + u^{(1)}(x)]f(x) + \Gamma \cdot \int_x^\infty dyf(y). \quad (5.1.8)$$

Заметим, что операторы Γ и Λ зависят (симметричным образом) от функций $u^{(0)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$; это приводит к нелинейности уравнения (5.1.6) относительно функций $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$. При $u^{(0)}(x) = u^{(1)}(x) = u(x)$ оператор Λ переходит в оператор Γ .

Тогда коэффициенты отражения $s^{(0)}(k)$ и $s^{(1)}(k)$ (мы опустим здесь индекс «+» у коэффициента отражения), соответствующие функциям $u^{(0)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$, связаны друг с другом простым линейным соотношением

$$g(-4k^2)[s^{(0)}(k) - s^{(1)}(k)] + 2ikh(-4k^2)[s^{(0)}(k) + s^{(1)}(k)] = 0 \quad (5.1.9)$$

из которого следует, что

$$s^{(1)}(k) = s^{(0)}(k) \frac{[g(-4k^2) + 2ikh(-4k^2)]}{[g(-4k^2) - 2ikh(-4k^2)]}. \quad (5.1.10)$$

Подчеркнем, что этот результат является свойством спектральной задачи, он не имеет ничего общего с эволюцией во времени. Но, если функции $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$ меняются во времени (т.е. если они зависят, кроме x , еще от одной переменной t), то все вышеприведенные формулы остаются справедливыми, и при этом, конечно, функции $s^{(0)}$ и $s^{(1)}$ также зависят от t . Две произвольные функции g и h в формулах (5.1.6), (5.1.9) и (5.1.10) тоже могли бы зависеть от времени, но последующее рассмотрение основано на предположении, что они от времени не зависят.

Предположим далее, что изменение во времени функции $u^{(0)}(x, t)$ описывается уравнением (5.1.3). Тогда соответствующий коэффициент отражения $s^{(0)}(k, t)$ меняется во времени в соответствии с формулой (5.1.5). Но тогда функция $s^{(1)}(k, t)$, будучи связана с функцией $s^{(0)}(k, t)$ формулой (5.1.10) (с не зависящими от времени функциями g и h), также меняется по формулам (5.1.5); следовательно, изменение функции $u^{(1)}(x, t)$ также описывается уравнением (5.1.3). Вывод: если функция $u^{(0)}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (5.1.3), а функция $u^{(1)}(x, t)$ связана с функцией $u^{(0)}(x, t)$ соотношением (5.1.6), то функция $u^{(1)}(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению (5.1.3).

Таким образом, мы показали, что соотношение (5.1.6) является преобразованием Бэклунда для класса эволюционных уравнений (5.1.3). Благодаря произвольности полиномов g и h формула (5.1.6) дает широкий класс преобразований Бэклунда. Простейшее из них соответствует случаю постоянных g и h ; если для удобства обозначений положить $g/h = -2p$, то оно примет вид

$$u_x^{(0)}(x, t) + u_x^{(1)}(x, t) = [u^{(0)}(x, t) - u^{(1)}(x, t)] \left\{ 2p - \int_x^\infty dy [u^{(0)}(y, t) - u^{(1)}(y, t)] \right\}. \quad (5.1.11)$$

Эквивалентная, но более удобная формула получается для интегралов $w^{(m)}(x, t)$ от функции $u^{(m)}(x, t)$:

$$w^{(m)}(x, t) = \int_x^\infty dy u^{(m)}(y, t), \quad m = 0, 1, \quad (5.1.12a)$$

$$w_x^{(m)}(x, t) = -u^{(m)}(x, t), \quad m = 0, 1, \quad (5.1.12б)$$

так что

$$w_x^{(0)}(x, t) + w_x^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2} [w^{(0)}(x, t) - w^{(1)}(x, t)] \{ 4p - [w^{(0)}(x, t) - w^{(1)}(x, t)] \}, \quad (5.1.13)$$

При выводе формулы (5.1.13) из формулы (5.1.11) было выполнено интегрирование; поскольку функция $w^{(m)}(x, t)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$

$$w^{(m)}(\infty, t) = 0, \quad m = 0, 1, \quad (5.1.14)$$

что, очевидно, следует из определения (5.1.12a), и функция $w_x^{(m)}(x, t)$ тоже асимптотически стремится к нулю, что следует из формулы (5.1.12б), постоянная интегрирования равна нулю. Заметим, что если считать функцию $u^{(0)}$ известной, то соотношение (5.1.13) будет уравнением Риккати для функции $u^{(1)}$, и наоборот.

Соотношение (5.1.10), соответствующее простейшему преобразованию Бэклунда (5.1.11) или (5.1.13), имеет простой вид

$$s^{(1)}(k, t) = -s^{(0)}(k, t) [(k + ip)/(k - ip)]. \quad (5.1.15)$$

Элементарным приложением преобразования Бэклунда (5.1.11) или (5.1.13) является применение его для нахождения некоторых частных решений уравнения (5.1.3). Простейший пример мы получим, положив в уравнении (5.1.13)

$$w^{(0)}(x, t) = 0, \quad (5.1.16a)$$

так как эта формула и эквивалентная ей, и из нее вытекающая формула

$$u^{(0)}(x, t) = 0, \quad (5.1.16б)$$

очевидно, дают решение уравнения (5.1.3) — правда, весьма тривиальное решение.

Решение уравнения (5.1.13), при условии (5.1.16a) и (5.1.14), оказывается элементарной задачей и дает

$$w(x, t) = -2p[1 - th\{p[x - \xi(t)]\}], \quad (5.1.17a)$$

То есть,

$$u(x, t) = -2p^2 / ch^2 \{p[x - \xi(t)]\}. \quad (5.1.17б)$$

В двух последних формулах мы для удобства опустили верхний индекс 1 — это просто решение уравнения (5.1.3). Заметим, что такой результат получается при положительных значениях p (хотя формула (5.1.17б) в конечном счете не зависит от знака p); при отрицательных же значениях p нет решения уравнения (5.1.13) (с условием (5.1.16а)), согласующегося с условием (5.1.14). Величина $\xi(t)$ в выражениях (5.1.17а) и (5.1.17б) есть постоянная интегрирования. В данном случае это означает, что она не зависит от x (уравнение (5.1.13) является дифференциальным уравнением относительно этой переменной), но это не мешает ей зависеть (как явно указано) от переменной t .

Очевидно, что выражение (5.1.17б) есть односолитонное решение. Действительно, можно найти зависимость функции $\xi(t)$ от времени, подставив выражение (5.1.17б) в уравнение (5.1.3) с учетом формулы

$$Lu_x(x, t) = 4p^2 u_x(x, t), \quad (5.1.18)$$

в справедливости которой нетрудно убедиться, исходя из формул (5.1.4) и (5.1.17б). Получаем

$$\xi(t) = -\alpha(4p^2) \quad (5.1.19)$$

Однако вывод односолитонного решения из преобразования Бэклунда можно считать довольно спорным, так как очевидно, что принятое здесь упрощение, а именно пренебрежение дискретной частью спектральных данных, недопустимо в применении к солитонному решению. Действительно, в то время как при выводе формул (5.1.6), (5.1.11) и (5.1.13) для преобразования Бэклунда решающую роль играли формулы (5.1.9), (5.1.10) и (5.1.15) для коэффициента отражения, в рассмотренном здесь частном случае (который привел к односолитонному решению (5.1.17б)) последние формулы представляют собой просто варианты тождества “нуль равен нулю”.

Другим важным свойством введенных выше преобразований Бэклунда является их *коммутативность*. В простейшем варианте, рассматриваемом в данном пункте параграфа, это свойство достаточно очевидно. Действительно, рассмотрим два множества двух полиномов $g^{(m)}(z)$ и $h^{(m)}(z)$, $m = 1, 2$, и два порожденных ими преобразования Бэклунда, скажем ПБ1 и ПБ2. В качестве исходного пункта возьмем некоторую заданную функцию $u^{(0)}(x)$ и связанные с ней две функции, скажем $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$, полученные из нее посредством этих двух преобразований Бэклунда. Затем соотнесём с функцией $u^{(1)}(x)$ новую функцию, например, $u^{(12)}(x)$, полу-

ченную применением преобразованием Бэклунда ПБ2, а с функцией $u^{(2)}(x)$ — функцию $u^{(21)}(x)$, полученную преобразованием Бэклунда ПБ1. Свойство коммутативности выражается равенством

$$u^{(12)}(x) = u^{(21)}(x). \quad (5.1.20)$$

Это очень нетривиальное свойство, если рассматривать его, как мы только что сделали в конфигурационном пространстве. Справедливость же его следует из соответствующей формулы в спектральном пространстве

$$s^{(12)}(k) = s^{(21)}(k), \quad (5.1.21)$$

справедливость которой, наоборот, тривиальна, так как из формулы (5.1.10) следует, что

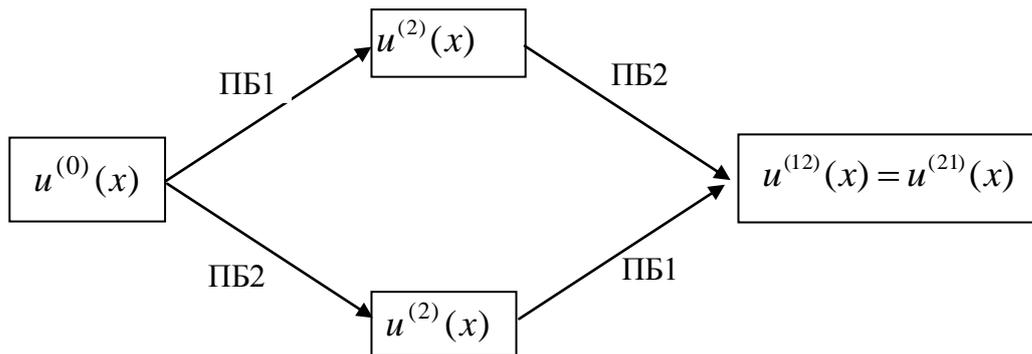
$$s^{(12)}(k) = s^{(0)}(k)B_1(k)B_2(k), \quad (5.1.22a)$$

$$s^{(21)}(k) = s^{(0)}(k)B_2(k)B_1(k), \quad (5.1.22б)$$

где

$$B_m(k) = \frac{[g_m(-4k^2) + 2ikh_m(-4k^2)]}{[g_m(-4k^2) - 2ikh_m(-4k^2)]}, \quad m = 1, 2. \quad (5.1.23)$$

Таким образом, коммутативность преобразований Бэклунда в спектральном пространстве — это просто коммутативность обычного умножения. Здесь мы видим ещё одно преимущество (с точки зрения простоты) выполнения операций в спектральном пространстве, а не в конфигурационном. Отмеченное свойство коммутативности удобно подытожить следующей диаграммой:



Заметим, что в пределе, когда обе функции $u^{(0)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$ столь малы, что можно пренебречь всеми нелинейными членами в уравнении (5.1.6), это преобразование Бэклунда принимает вид

$$g\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[u^{(0)}(x) - u^{(1)}(x)] + h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[u_x^{(0)}(x) - u_x^{(1)}(x)] = 0, \quad (5.1.24)$$

то есть, с точностью до обозначений оно становится тождественным уравнению (4.1.10). Это ещё раз показывает, что все формулы теории спектрального преобразования имеют свои аналоги в теории преобразования Фурье и переходят в них в тех случаях, когда допустимо пренебрежение нелинейными эффектами.

5.2 Нелинейный принцип суперпозиции

Ещё одно замечательное свойство эволюционных уравнений (4.2.1) является прямым следствием указанного в предыдущем пункте свойства коммутативности, применённого к простейшему преобразованию Бэклунда (5.1.11), или скорее, (5.1.1).

Здесь мы будем иметь дело с интегралами $w(x,t)$ от решений уравнения (4.2.1), а не с самими функциями $u(x,t)$, (см. формулы (5.1.12)), и для простоты будем называть решениями уравнения (4.2.1) непосредственно эти функции w , которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с их производными, (см. формулы (5.1.12)).

Пусть функция $w^{(0)}(x,t)$ является некоторым решением уравнения (4.2.1), функции $w^{(1)}(x,t)$ и $w^{(2)}(x,t)$ — решениями уравнения (4.2.1), связанные с функцией $w^{(0)}(x,t)$ преобразованием Бэклунда (5.1.13) с параметром p , заменённым на p_1 и p_2 , и пусть $w^{(12)}(x,t) = w^{(21)}(x,t)$ (формула (5.1.20)) — решения уравнения (4.2.1), полученные из функции $u^{(0)}(x,t)$, двумя преобразованиями Бэклунда (5.1.13) с параметром p , заменённым один раз на p_1 , а другой — на p_2 :

$$w_x^{(0)} + w_x^{(1)} = -\frac{1}{2}(w^{(0)} - w^{(1)})(-4p_1 + w^{(0)} - w^{(1)}), \quad (5.2.1)$$

$$w_x^{(0)} + w_x^{(2)} = -\frac{1}{2}(w^{(0)} - w^{(2)})(-4p_2 + w^{(0)} - w^{(2)}), \quad (5.2.2)$$

$$w_x^{(1)} + w_x^{(12)} = -\frac{1}{2}(w^{(1)} - w^{(12)})(-4p_1 + w^{(1)} - w^{(12)}), \quad (5.2.3)$$

$$w_x^{(2)} + w_x^{(21)} = -\frac{1}{2}(w^{(2)} - w^{(21)})(-4p_1 + w^{(2)} - w^{(21)}). \quad (5.2.4)$$

Теперь вычтем выражение (5.2.2) из выражения (5.2.1) и выражение (5.2.4) из выражения (5.2.3) (пользуясь формулой (5.1.20)), а затем вычтем одно из другого полученные уравнения. Тогда все дифференциальные слагаемые в левых частях уравнения взаимно уничтожатся и в результате получим алгебраическое уравнение, которое можно решить относительно функции $w^{(12)} = w^{(21)}$:

$$w^{(12)} = w^{(21)} = w^{(0)} - (p_1 + p_2)(w^{(1)} - w^{(2)}) / (p_1 - p_2 + \frac{1}{2}(w^{(1)} - w^{(2)})). \quad (5.2.5)$$

Подчеркнём, что эта формула даёт в явной форме новое решение уравнения (4.2.1), выраженное через три других решения того же уравнения: через произвольное решение $w^{(0)}$ и два решения $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, связанные с решением $w^{(0)}$ преобразованием Беклунда (5.2.1) и (5.2.2).

В качестве примера применения нелинейного принципа суперпозиции (5.2.5) рассмотрим снова случай, когда

$$u^{(0)}(x, t) = w^{(0)}(x, t) = 0, \quad (5.2.6)$$

который, очевидно, даёт тривиальное решение уравнения (4.2.1). Тогда, (см. формулы (5.1.17))

$$u^m(x, t) = -2p_m^2 / ch^2(p_m[x - \xi_0^{(m)} + \alpha(4p_m^2)t]), \quad m = 1, 2, \quad (5.2.7a)$$

$$w^{(m)}(x, t) = -2p_m[1 - th(p_m(x - \xi_0^{(m)} + \alpha(4p_m^2)t))], \quad m = 1, 2, \quad (5.2.7b)$$

где функция $\xi_0^{(m)}$ должна быть либо действительной,

$$\text{Im} \xi_0^{(m)} = 0, \quad (5.2.8a)$$

либо представимой в виде

$$\xi_0^{(m)} = \zeta_0^{(m)} + i\pi/(2p_m),$$

с действительной функцией $\zeta_0^{(m)}$

$$\text{Im} \xi_0^{(m)} = \frac{\pi}{2p_m}, \quad (5.2.8b)$$

чтобы были действительными функции $u^{(m)}$ и $w^{(m)}$, $m = 1, 2$.

Подстановка выражений (5.2.6) и (5.2.7b) в соотношение (5.2.5) даёт двухсолитонное решение при условии, что $0 < p_1 < p_2$, и функция $\xi_0^{(1)}$ удовлетворяет условию (5.2.8a), а функция $\xi_0^{(2)}$ — условию (5.2.8b). В противном случае решение, полученное из формулы (5.2.5), будет комплексным или сингулярным.

Определив таким образом двухсолитонное решение, можно применить нелинейным принцип суперпозиции для получения трёхсолитонного решения, подставляя вместо функции $w^{(0)}$ односолитонное выражение (с параметром, скажем, p_1), а вместо функции $w^{(1)}$ или $w^{(2)}$ — двухсолитонное выражение (с параметрами p_1 и p_2 или p_1 и p_3). Затем такой процесс может быть продолжен (солитонная лестница). Таким образом, чисто алгебраической процедурой можно, в принципе, построить все солитонные решения и дать очень простые правила, детализирующие ограничения, налагаемые на параметры солитонов p_m и свойства действительности функций $\xi_0^{(m)}$ (условия (5.2.8a) или (5.2.8b)), которые гарантировали бы, что полученное таким образом решение является действительным и несингулярным и, следовательно, совпадает с решением (2.4.5).

5.3. Частные решения уравнения КдФ

Здесь будут рассмотрены некоторые частные решения уравнения КдФ

$$u_t = buu_x - u_{xxx}, \quad (5.3.1.1)$$

не принадлежащие к рассматриваемому до сих пор классу

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x, t)| dx < \infty.$$

Подробнее о других классах решений можно узнать в работе [6].

5.3.1. Рациональные решения

Рациональные решения уравнения КдФ (5.3.1.1) в общем случае комплексны или сингулярны (или обладают обоими указанными свойствами). Простейшее решение такого типа имеет вид

$$u(x, t) = 2(x - \xi)^{-2}, \quad (5.3.1.2)$$

где ξ - произвольная постоянная, которая может быть комплексной (если величина ξ не комплексна, то решение (5.3.1.2) сингулярно при действительных значениях x). Легко убедиться путём прямых вычислений, что выражение (5.3.1.2) удовлетворяет уравнению КдФ (5.3.1.1).

Будем искать решение уравнения КдФ в виде

$$u(x, t) = 2 \sum_{j=1}^N (x - \xi_j(t))^{-2}, \quad (5.3.1.3)$$

Действительно, анализируя поведение функции $u(x, t)$ в окрестности её полюсов, легко видеть, что любое более общее выражение, представляющее функцию $u(x, t)$ в виде рациональной функции переменной x и удовлетворяющее уравнению (5.3.1.1), должно сводиться к выражению (5.3.1.3).

Сравнивая коэффициенты при полюсах различных порядков, легко также видеть, что для того, чтобы выражение (5.3.1.3) удовлетворяло уравнению (5.3.1.1), необходимо и достаточно выполнение двух следующих условий:

$$\sum_{k=1}^N (\xi_j(t) - \xi_k(t))^{-3} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.1.4)$$

$$\xi'_{jt} = -12 \sum_{k=1}^N (\xi_j(t) - \xi_k(t))^{-2}, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.1.5)$$

(здесь и далее везде штрих у знака суммы означает, что сингулярный член отброшен). Кроме того, продифференцировав условие (5.3.1.4) и подставив в него выражение (5.3.1.5), алгебраическими преобразованиями нетрудно показать, что два условия (5.3.1.4) и (5.3.1.5) совместимы; таким образом, если условие (5.3.1.4) выполняется в некоторый момент времени (например, в начальный момент времени при $t = 0$), то оно выполняется всегда, то есть, до тех пор, пока изменение во времени величины $\xi_j(t)$ описывается уравнением (5.3.1.5).

Отметим, что тем самым установлена связь между дифференциальным уравнением в частных производных (5.3.1.1) и динамической системой с N степенями свободы ξ_j , эволюция которой во времени описывается уравнением (5.3.1.5) при наличии связей (5.3.1.4). Это обстоятельство представляет интерес только в том случае, если условие (5.3.1.4) допускает некоторое решение, то есть, если не пусто алгебраическое многообразие, определяемое условием

$$\sum_{k=1}^N (\xi_j - \xi_k)^{-3} = 0, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.1.4a)$$

Однако, как показывают несложные выкладки (см. [6]), при всех действительных величинах ξ_j условие (5.3.1.4a) не допускает при конечных N решения; при этом не исключается возможность существования комплексных решений системы (5.3.1.4a). В последнем случае такие решения существуют, если

$$N = \frac{1}{2} m(m+1), m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.1.6)$$

Например, решение вида (5.3.1.2) получается при $m=1$ ($N=1$); следующее решение при $m=2$ имеет три полюса ($N=3$) и записывается в виде

$$u(x,t) = \frac{6x(x^3 - 24t)}{(x^3 + 12t)^2}, \quad (5.3.1.7)$$

где полюса определяются выражением

$$\xi_j(t) = -\exp\left(\frac{2\pi i j}{3}\right)(12t)^{1/3}, \quad j=1,2,3. \quad (5.3.1.8)$$

Структура выражения (5.3.1.3) такова, что функцию $u(x,t)$ можно записать следующим образом

$$u(x,t) = -2 \frac{\partial^2 (\ln P_N(x,t))}{\partial x^2}, \quad (5.3.1.9)$$

где $P_N(x,t)$ - полином степени N от x , нулями которого являются функции $\xi_j(t)$:

$$P_N(x,t) = \prod_{j=1}^N (x - \xi_j(t)). \quad (5.3.1.10)$$

Эти полиномы (определённые только для значений N , даваемых соотношением (5.3.1.6)) изучались достаточно детально; важным результатом явилось установление того, что решение $u(x,t)$, даваемое выражением (5.3.1.3) (или, что то же, выражениями (5.3.1.9) и (5.3.1.10)) с условиями (5.3.1.4) и (5.3.1.5), является рациональной функцией не только координаты x , но и времени t .

Очевидно, что формула (5.3.1.9) аналогична многосолитонной формуле (2.4.5); она действительно может быть получена из неё путём нетривиального предельного перехода.

В то же время уравнение (5.3.1.4) имеет простое решение, когда число полюсов N бесконечно велико; например, величина

$$\xi_j = \xi'_0 + aj, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.3.1.11)$$

удовлетворяет уравнению (5.3.1.4а) в силу симметрии (при этом $\xi(t)$ и a произвольные, возможно, даже комплексные числа). В самом деле, вследствие соотношений (5.3.1.5) и (5.3.1.3) это выражение просто воспроизво-

дит односолитонное решение, что становится очевидным из следующего представления

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(z - i\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} = -(chz)^{-2}.$$

Таким образом, наличие рациональных решений – необычное, но объяснимое свойство нелинейного уравнения в частных производных.

Укажем ещё, что вместо даваемого соотношениями (5.3.1.11) бесконечного числа полюсов, равноотстоящих друг от друга на прямой можно было бы рассмотреть удвоенное бесконечное число полюсов, расположенных на бесконечной прямоугольной решётке; тогда решение (5.3.1.3) было бы двоякопериодической функцией Вейерштрасса. Таким образом, мы восстановили частное *периодическое* решение уравнения КдФ.

5.3.2. Решения уравнения КдФ с одним действительным двойным полюсом

Как нетрудно убедиться, уравнение КдФ

$$u_t = 3uu_x - u_{xxx}, \quad u \equiv u(x,t) \quad (5.3.2.1)$$

имеет не зависящее от времени решение вида

$$\bar{u} = 2(x - \bar{x})^{-2}, \quad (5.3.2.2)$$

где \bar{x} - произвольная константа. Чтобы оно было действительным при действительных x , константа \bar{x} также должна быть действительной. Но решение \bar{u} имеет двойной полюс в точке $x = \bar{x}$, и, следовательно, оно не может

принадлежать к классу потенциалов $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u(x,t)|dx < \infty$. Это решение

есть один из простейших примеров рациональных решений.

В общем случае можно показать, что функция

$$\bar{u}^{(n)} = n(n+1)(x - \bar{x})^{-2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.2.3)$$

является решением эволюционного уравнения

$$u_t(x, t) = \sum_{m=n}^M \alpha_m(t) L^m u_x(x, t), \quad M \geq n, \quad (5.3.2.4)$$

где $\alpha_m(t)$ - произвольная функция времени, а L - интегро-дифференциальный оператор вида (4.2.2)

$$Lf(x) = f_{xx}(x) - 4u(x, t)f(x) + 2u_x(x, t) \int_x^{+\infty} dyf(y).$$

Таким образом, функция (5.3.2.2) на самом деле будет решением для целого класса эволюционных уравнений вида

$$u_t(x, t) = \alpha(L, t)u_x(x, t), \quad (5.3.2.5)$$

С единственным ограничением, что $\alpha(z, t)$ - полином по переменной z , обращающийся в нуль в начале координат

$$\alpha(z, t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m(t)z^m, \quad M \geq 1, \quad (5.3.2.6)$$

поскольку выражение (5.3.2.2) отвечает выражению (5.3.2.3) при $n=1$.

Отметим, что если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (5.3.2.1) и имеет как функция переменной x особенность в виде полюса, то в окрестности особенности она имеет следующее лорановское разложение

$$u(x, t) = 2(x - \xi)^{-2} + v_0 + \sum_{m=2}^{\infty} v_m(x - \xi)^m, \quad (5.3.2.7)$$

где величины ξ и v_m , $m = 0, 2, 3, 4, \dots$ зависят в общем случае от времени. Отсутствие в выражении (5.3.2.7) простого полюса и слагаемого с $m=1$ отражает совместимость этого выражения с его эволюцией во времени, предписываемой уравнением (5.3.2.1). Эти соображения позволяют искать решение уравнения (5.3.2.1) в виде

$$u(x, t) = 2(x - \xi(t))^{-2} + v(x, t), \quad (5.3.2.8)$$

где $v(x, t)$ - регулярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |v(x, t)| dx < \infty$$

и, как следует из представления (5.3.2.7), - условию

$$v_x(\xi(t), t) = 0. \quad (5.3.2.9)$$

Подстановка выражения (5.3.2.8) в уравнение (5.3.2.1) приводит к паре связанных эволюционных уравнений для функции $v(x, t)$ и полюса $\xi(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = -6v(\xi(t), t), \quad (5.3.2.10)$$

$$v_t(x, t) + v_{xxx}(x, t) - 6v_x(x, t)v(x, t) - 12((x - \xi(t))^{-2}(v(x, t) - v(\xi(t), t)))_x = 0. \quad (5.3.2.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что эти два уравнения согласуются с условием (5.3.2.9), и функция $v(x, t)$ регулярна. Точкой обозначена производная по времени.

Опуская соответствующие выкладки, отметим, что существует основанный на технике спектрального преобразования метод решения эволюционных уравнений (5.3.2.10), (5.3.2.11) или, что эквивалентно, решения уравнения КдФ (5.3.2.1) в классе функций (5.3.2.8) с условием (5.3.2.9). Разумеется, начальные условия задачи Коши, включающие расположение полюса $\xi(0) \equiv \xi_0$ и функцию $v(x, 0) \equiv v_0(x)$, должны быть совместны с условием (5.3.2.9) (тогда при эволюции во времени, предписываемой уравнениями (5.3.2.10) и (5.3.2.11), это условие будет выполняться автоматически). Более того, решение уравнений с помощью спектрального преобразования даёт все характерные для нелинейных эволюционных уравнений (и, в частности, для уравнения КдФ), дополнительные результаты: преобразования Бэклунда, явные решения и проч. Приведём лишь явное выражение для решения уравнения КдФ (5.3.2.1) типа « N солитонов + 1 полюс»:

$$u(x, t) = -2[\ln(x \det[I + J(x, t)])]_{xx}, \quad (5.3.2.12)$$

где I – единичная матрица порядка N , а $J(x, t)$ – матрица порядка N с матричными элементами вида

$$J_{mn}(x, t) = c_m(t)c_n(t)[(p_m + p_n)^{-1} + (p_m p_n x)^{-1}] \exp[-(p_m + p_n)x]. \quad (5.3.2.13)$$

Здесь p_m – это N не зависящих от времени положительных чисел, а величины $c_m(t)$ изменяются во времени согласно формуле

$$c_m(t) = c_m(0) \exp(4p_m^3 t), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3.2.14)$$

Отметим, что формула (5.3.2.12) даёт $2N$ -параметрическое семейство решений, так как N величин p_m и N величин $c_m(0)$ могут быть выбраны произвольно (с единственным требованием, чтобы они были положительными – что соответствует, для простоты выкладок, выбору параметра $\bar{x} = 0$).

В случае $N=1$ (1 солитон + 1 полюс) решение (5.3.2.12) записывается в явном виде следующим образом:

$$u(x, t) = -2p^2 [ch^{-2}\{p(x - \xi(t))\} - (1 + px)^{-2} th^2\{p(x - \xi(t))\}] \times [1 - (1 + px)^{-1} th\{p(x - \xi(t))\}]^{-2}, \quad (5.3.2.15)$$

где

$$p = p_1, \quad (5.3.2.16)$$

$$\xi(t) = (2p)^{-1} \ln \left[\frac{c_1^2(t)}{2p} \right]. \quad (5.3.2.17)$$

Первая из этих величин не зависит от времени, а вторая, как следует из формул (5.3.2.14), (5.3.2.16) и (5.3.2.17), изменяется во времени линейно:

$$\xi(t) = \xi(0) + 4p^2 t. \quad (5.3.2.18)$$

Решение (5.3.2.12) описывает столкновение полюса с солитоном. Процесс столкновения может быть описан следующим образом. Солитон движется с асимптотически (при $t \rightarrow \pm\infty$) постоянной скоростью $v = 4p^2$ и имеет обычную форму sch^2 . Поэтому при $t \rightarrow \pm\infty$ решение разлагается в сумму обычного горба sch^2 и двойного полюса, который деформирует солитон, добавляя свой хвост x^{-2} . Разумеется, в точности солитон локализуется только в асимптотическом пределе при $t \rightarrow \pm\infty$. Двойной полюс локализо-

ван в окрестности точки $\xi(t)$, которая при изменении времени t от $t = -\infty$ до $t = \infty$ движется в пределах ограниченного интеграла

$$\xi(-\infty) \langle \xi(t) \rangle \xi(+\infty), \quad (5.3.2.19a)$$

$$\xi(-\infty) = 0, \quad \xi(+\infty) = -\frac{2}{p}, \quad (5.3.2.19б)$$

с зависящей от времени отрицательной скоростью

$$\dot{\xi}(t) = -4p^2 sh^{-2}\{p[\zeta(t) - \xi(t)]\}. \quad (5.3.2.20)$$

Эти результаты легко получить из уравнения, определяющего нуль знаменателя в выражении (5.3.2.15):

$$p\zeta(t) = th\{p[\zeta(t) - \xi(t)]\} - 1. \quad (5.3.2.21)$$

Отметим, что солитон проходит через полюс. Столкновение оказывается наиболее «сильным» в момент времени

$$\bar{t} = -\frac{\left[\xi(0) - \frac{1}{p}\right]}{4p^2}, \quad (5.3.2.22)$$

когда полюс проходит через среднюю точку интервала (5.3.2.19)

$$\zeta(\bar{t}) = \xi(\bar{t}) = -\frac{1}{p} \quad (5.3.2.23)$$

с бесконечно большой скоростью, как следует из разложения

$$\zeta(t) \approx [12(t - \bar{t})]^{1/3}, \quad (5.3.2.24)$$

при $t \rightarrow \bar{t}$. Отметим также, что в этот частный момент времени $t = \bar{t}$ решение

$u(x, t)$ имеет двойной полюс в точке $x = -\frac{1}{p}$ с «неправильным» коэффициентом

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \left[\left(x + \frac{1}{p}\right)^2 u(x, \bar{t}) \right] = 6. \quad (5.3.2.25)$$

В этом случае при фиксированном значении времени обычный анализ решения уравнения (5.3.2.1) невозможен ввиду бесконечной скорости движения самого полюса. Более того, решение (5.3.2.15) в точке $x = -\frac{1}{p}$ при

$t = \bar{t}$ плохо определено, так как $u(x, t)$ может принимать любое значение в зависимости от направления подхода в плоскости (x, t) к точке $x = -1/p, t = \bar{t}$.

Дополнение 1. Об истории понятия «солитон»

В 1834 шотландский ученый и инженер-кораблестроитель Джон Скот Рассел (1808-1882) наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей. Рассел писал: «...когда внезапно баржа остановилась, вся масса воды в канале пришла в движение, вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатила с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала».

Рассел назвал увиденную волну «great solitary wave», что можно перевести как «большая, уединенная волна». Как обычно случается в научном мире, идеи, высказанные Расселом о распространении уединенной волны, были встречены с недоверием. Поначалу мало кто из ученых той поры допускал распространение волны неизменной формы, расположенной выше уровня жидкости. Но еще при жизни Рассела появились работы, подтверждающие чисто математически, что уединенная волна в мелководных каналах имеет право на существование. Однако, полное теоретическое объяснение открытия Рассела относится к 1895 г., когда уравнение таких волн вывели голландские ученые Дитерик Йоханнес Кортевег

(1848 — 1941) и его ученик Густав де Фриз. Хотя Кортевег не придавал большого значения их результату.

В 1952 американские ученые физик Энрико Ферми и математики Станислав Улам и Джон Паста в попытке объяснить конечную теплопроводность твердых тел исследовали в качестве модели ангармоническую цепочку из 32 грузиков, соединенных пружинками. Предполагалось, что в цепочке при возбуждении синусоидальных колебаний энергия начального возмущения со временем перераспределится по всем гармоникам (модам системы) — установится термодинамическое равновесие, или как говорят физики, произойдет термализация системы. Для исследования была задействована вычислительная машина, созданная Джоном фон Нейманом. Результаты машинных расчетов показывали, что система не термализовалась: энергия возбуждения первой (низшей моды) после распределения между ближайшими верхними модами вновь собиралась (с точностью до нескольких процентов) в низшей моде, а затем процесс повторялся. Объяснили результаты расчетов Ферми-Паста-Улама также американцы — физики Мартин Крускал и Норман Забуски. Они заметили, что если число грузиков в цепочке Ферми-Паста-Улама заданной длины неограниченно растёт, то она переходит в непрерывную нелинейную струну, колебания которой при малых отклонениях описываются уравнением Кортевега-де Фриза. Значит отсутствие термализации энергии в цепочке, связано с устойчивостью образовавшейся в ней «уединённой волны», которая не меняет формы при распространении. В результате проведенных численных экспериментов Крускал и Забуски установили, что уединённые волны не разрушаются при столкновениях, а как бы проходят одна сквозь другую, меняясь местами. В 1965 г. Крускал и Забуски послали в журнал «Физическое обозрение» статью о взаимодействии таких волн в бесстолкновительной плазме. В заглавии было слово солитрон (от *англ.* *solitary* — «уединённый»). Но из редакции пришел ответ, что такое название носит фирма, выпускающая моющие средства. Чтобы не последовало обвинения в использовании чужого товарного знака букву «р» из названия убрали. Так возник термин «солитон».

Дополнение 2. Нелинейная ударная волна

Всякое решение уравнения Хопфа

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0$$

имеет вид (см. [12])

$$u(x,t) = F(x - tu) ,$$

так что решение задачи Коши для этого уравнения с начальным условием

$$u(x,0) = f(x) ,$$

где f – гладкая финитная функция, может быть представлено в форме

$$u(x,t) = f(x - tu)$$

Приведём качественную картину распространения такой своеобразной волны. Значение $u(x_0, t_0)$ – это скорость движения волны в точке (x_0, t_0) . В начальный момент $t = 0$ эта скорость максимальна в точке P – на гребне волны. В последующие моменты времени точки на профиле волны, лежащие левее вершины P , будут отставать от P , а точка P будет «догонять» точки профиля, лежащие правее. Поэтому задний фронт волны станет более пологим, а передний станет более крутым. Наконец, в некоторый момент времени $t = t^*$ на переднем фронте появится точка с вертикальной касательной, а в последующие моменты времени функция $u(x,t)$ станет неоднозначной. Неоднозначная функция $u(x,t)$ не имеет физического смысла в такого рода задачах (например, в задачах газовой динамики). Физические соображения приводят к необходимости рассмотрения *разрывного* (при $t > t^*$) решения уравнения Хопфа. Разрывное решение называется *ударной волной*. Самопроизвольное возникновение разрывов (ударных волн) при гладких начальных данных – типично нелинейный эффект.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 304 с.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 432 с.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
5. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи под ред. С.П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
6. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 472 с.
7. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. – М.: Наука, 1984.
8. *Лэм Дж. мл.* Введение в теорию солитонов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
9. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев: Наукова Думка. 1972.
10. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка. 1977.
11. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. – 528 с.
12. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит, 1980. – 352 с.
13. *Фейнман Р, Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. – Вып II. – 168 с.
14. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	6
ГЛАВА 1. Одномерное стационарное уравнение Шрёдингера.....	15
1.1. Потенциальные барьеры.	16
1.2. Коэффициенты прохождения и отражения	17
1.3. Связанные состояния	
1.4. Об одномерном стационарном уравнении Шрёдингера	18
ГЛАВА 2. Обратная задача рассеяния на оси.....	21
2.1. Данные рассеяния	21
2.2. Основное уравнение	48
2.3. Решение обратной задачи рассеяния	54
2.4. Безотражательные потенциалы. Модификация для дискретного спектра.	70
ГЛАВА 3. Нелинейное уравнение Кортевега — де Фриза.....	74
3.1. Решение уравнения КдФ на всей оси с помощью метода обратной задачи	74
3.2. Уравнение КдФ как гамильтонова система	77
3.3. Унитарная эквивалентность однопараметрического семейства операторов Штурма — Лиувилля и уравнение КдФ	79
3.4. Перечень разрешимых уравнений	81
ГЛАВА 4. Связь между методом решения эволюционных уравнений метом Фурье и методом обратной задачи.....	85
4.1. Класс разрешимых линейных эволюционных уравнений.	85
4.2. Класс разрешимых нелинейных эволюционных уравнений.	90
ГЛАВА 5. Некоторые дополнительные свойства решений нелинейных эволюционных уравнений	96
5.1. Преобразования Бэклунда	96
5.2. Нелинейный принцип суперпозиции	102
5.3. Частные решения уравнения КдФ	103
5.3.1. Рациональные решения	103
5.3.2. Решения уравнения КдФ с одним действительным двойным полюсом	107
Дополнение 1. Об истории понятия «солитон»	112
Дополнение 2. Нелинейная ударная волна.....	113
<i>Список рекомендуемой литературы.....</i>	<i>115</i>