И. Ю. Выгодчикова

ПРОЦЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

И.Ю. Выгодчикова

ПРОЦЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Учебное пособие
для студентов экономико-математических специальностей

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2008

УДК [336 : 330.44] (072.8)
ББК 65.261 : 65.23я73
В92

Выгодчикова И.Ю.

В92 Процентный анализ финансовых потоков: Учеб. пособие для студентов экон.-мат. спец. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – 48 с.: ил.

ISBN 978-5-292-03802-3

В пособии изложена методика анализа финансовых потоков платежей с использованием процентных схем расчётов, приводятся основные формулы наращения и дисконтирования денежных сумм по простым и сложным процентам, в том числе с учётом инфляции, вводится понятие потока финансовых платежей, даются формулы для расчёта величин потоков при постоянных и линейно меняющихся платежах. Рассмотрены некоторые схемы кредитных расчётов и планирование погашения задолженности, основные показатели оценки инвестиционных процессов.

Материал пособия демонстрируется примерами, содержит задачи для самостоятельного решения, задания для контрольной работы.

Для студентов экономико-математических специальностей, а также изучающих математические методы финансовых расчётов самостоятельно.

Рекомендуют к печати:

Кафедра математической экономики
механико-математического факультета
Саратовского государственного университета
Кандидат экономических наук *Е.В. Огурцова*
Кандидат физико-математических наук *О.В. Мещерякова*

УДК [336 : 330.44] (072.8)
ББК 65.261 : 65.23я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-292-03802-3

ВВЕДЕНИЕ

Деньги являются основным финансовым инструментом экономического взаимодействия агентов. Вступая в контрактные отношения, экономические агенты соизмеряют свои доходы и расходы именно в денежной форме. Несмотря на различные формы существования, деньги представляют собой единственный товар, являющийся эквивалентом любой сделки. Они имеют ряд важных характеристик. Во-первых, стоимость денег непосредственно зависит от того, в какой момент времени она измеряется. Деньги могут терять свою ценность, поэтому их владелец должен уметь сопоставлять те суммы, которые он имел вчера, с теми, которые он имеет сегодня и предполагает получить завтра, учитывая как возможность извлечения дополнительной прибыли, так и угрозу снижения стоимости капитала. Во-вторых, деньги – неотъемлемая часть любой финансовой сделки, поэтому важно чётко обосновывать согласие на участие в той или иной сделке и в нужный момент сделать правильный выбор.

Обычно экономические процессы имеют несколько этапов, и на каждом из них происходит движение финансовых средств, образуя *финансовый поток платежей*. Таких процессов – великое множество, например, получение заработной платы, стипендии, осуществление регулярных платежей за услуги ЖКХ, инвестиционные процессы. Даже расходы на покупку товаров повседневного спроса необходимо планировать, а удачно выполнив эту задачу, скажем, в марте месяце, потребитель имеет склонность повторить такой сценарий и в следующем месяце. В перспективе закупки тех или иных товаров входят в систему и такие расходы можно считать потоковыми.

Время играет ведущую роль в финансовых отношениях, поэтому очень важна процентная ставка, под которую инвестор готов предоставить свои денежные средства для их рационального прибыльного использования в производстве, сфере услуг, на рынке ценных бумаг и в кредитно-финансовой сфере. Процентная ставка, которую предлагают банки, должна не только покрывать инфляционное обесценение денег, но и позволять получать дополнительный доход от их использования.

В связи с гиперинфляционными процессами в 1990-х годах российские граждане весьма осторожно подходили к вложению своих средств и не доверяли банкам и инвестиционным фондам, которые предлагали явно завышенные процентные ставки. Однако финансовые пирамиды постепенно отошли в прошлое, поскольку «работать» могут лишь деньги, вложенные в реальное производство. А вот насколько удачными окажутся вложения, зависит от компетентности финансовых менеджеров, которые должны тщательно проанализировать все финансовые стороны процесса и составить грамотный бизнес-план, заинтересующий инвесторов. Ни один инвестор не вложит деньги в неизвестность, причём начинать финансирование бизнеса обычно стремятся с небольших сумм, и в случае успеха затем расширять производство.

Планируя свои вложения, инвестор оценивает их эффективность, рассчитывая основные показатели, причём он может заранее задать процентную ставку, которая бы его устроила, ориентируясь на свой прошлый опыт и отраслевые особенности бизнеса. Эта ставка не должна быть ниже текущего или ожидаемого уровня учётной ставки ЦБРФ, то есть ставки, под которую ЦБ кредитует коммерческие банки.

В пособии приведена техника процентных расчётов и рассмотрен механизм оценки различных финансовых потоков. Цель изложения материала – научить читателя чётко определять параметры финансовых сделок, дифференцировать денежные поступления и расходы по временному принципу и грамотно сопоставлять их.

Глава 1. ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЁТЫ

1.1. СТОИМОСТЬ ДЕНЕГ С УЧЁТОМ ВРЕМЕНИ. ДИСКОНТИРОВАНИЕ. ЭФФЕКТИВНАЯ СТАВКА

Основными параметрами финансовой сделки являются: $S(0)$ – начальная сумма денег, предоставляемая в долг на время T; $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T и срок сделки T, обычно измеряемый в годах. Удельная прибыль от вложения денег характеризуется относительным ростом начальной суммы (ставкой процентов): $r_T = \dfrac{S(T)-S(0)}{S(0)}$, а удельные текущие затраты по возврату конечной суммы задолженности характеризуются относительной скидкой (дисконтом): $d_T = \dfrac{S(T)-S(0)}{S(T)}$.

Указанные величины связаны соотношением: $1+r_T = \dfrac{1}{1-d_T}$.

Если проценты по вкладам начисляются раз в год, то в контракте фигурирует годовая процентная ставка r, или годовой дисконт d, и тогда

$$1+r = \frac{1}{1-d}. \qquad (1.1)$$

С течением времени начальная сумма вклада $S(0)$ возрастает под влиянием годовой процентной ставки r. *Наращение* – это вычисление будущей стоимости $S(T)$ текущей денежной суммы $S(0)$. Для расчётов используются следующие схемы:

а) *схема простых процентов* –

$$S(T) = S(0)(1+T\cdot r); \qquad (1.2)$$

б) *схема сложных процентов* –

$$S(T) = S(0)(1+r)^T \qquad (1.3)$$

при начислении сложных процентов ежегодно;

$$S(T) = S(0)(1+\frac{r}{m})^{T\cdot m} \qquad (1.4)$$

при начислении сложных процентов m раз в году.

При простых процентах конечная сумма $S(T)$ является линейной функцией времени, а при сложных процентах – показательной. Скорость роста степенной функции по сравнению со скоростью роста линейной функции зависит от значения аргумента. При $T > 1$ начальная сумма увеличивается быстрее по схеме (1.3), чем по схеме (1.2), а при $T < 1$, наоборот.

В банковской практике часто применяется ежемесячное, ежеквартальное и полугодовое начисление процентов по вкладам. Чтобы оценить накопленную сумму, нужно применять формулу (1.4) с величиной m, равной 12, 4 и 2 соответственно, причём показательный рост суммы оправдан уже при $T \cdot m > 1$.

Если срок сделки больше одного года, но не является целой величиной, то целесообразно комбинировать схемы простых и сложных процентов. При ежегодном начислении сложных процентов формула комбинированной схемы следующая:

$$S(T) = S(0)(1+r)^{[T]}(1+r\{T\}), \quad \{T\} = T - [T], \tag{1.5}$$

где через $[T]$ обозначена целая часть числа лет. Если сложные проценты начисляются m раз в году, эта формула принимает вид

$$S(T) = S(0)(1+\frac{r}{m})^{[T]\cdot m+[\{T\}\cdot m]}(1+\frac{r}{m}\{T\}_m), \quad \{T\}_m = \{T\}\cdot m-[\{T\}\cdot m]. \tag{1.6}$$

Несмотря на громоздкость, формула (1.6) проста в применении, как будет видно из примера 1.3.

Заметим, что в зависимости от обстоятельств, ставки могут измеряться в долях или в процентах, хотя в расчётах всегда используются доли.

Пример 1.1. Подсчитать:

а) годовую процентную ставку, которую должен установить кредитор, чтобы за выданную сумму 10 млн руб. получить через год 12 млн руб.

б) годовой дисконт по приобретённому за 10 млн руб. векселю с обязательством уплаты через год 12 млн руб. его предъявителю.

Решение. Параметры сделок а), б) одинаковы: $S(0) = 10$ млн руб., $S(1) = 12$ млн руб., $n = 1$. При $T = 1$ формулы (1.2) и (1.3) эквивалентны. Выражая неизвестные величины, получаем:

$$\text{а) } r = \frac{12-10}{10} = 0{,}2 \ [20\%]; \qquad \text{б) } d = \frac{12-10}{12} \approx 0{,}167 \ [16{,}7\%].$$

Пример 1.2. Пусть сумма 800 д.е. наращивается по годовой ставке 8 % простых и сложных процентов. Приведем план наращения за первые три года (таблица).

Простые проценты	800	864	928	992	...
Сложные проценты	800	864	933	1008	...
Промежутки начисления, в годах	0	1	2	3	...

Пример 1.3. Банк предоставил ссуду в размере \$5000 на 39 месяцев под 20% годовых на условиях начисления сложных процентов m раз в году. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов: а) схема сложных процентов; б) комбинированная схема, если $m=1$, $m=2$, $m=6$.

Решение. 1. Пусть $m=1$. Выразим 39 мес. в годах, считая, что в году 360 дней, в месяце 30 дней: $T=\dfrac{39\cdot 30}{360}=\dfrac{13}{4}=3{,}25$, и воспользуемся формулами (1.3), (1.5):

а) $S(3{,}25)=\$5000(1+0{,}2)^{3{,}25}=\$9042{,}93$;

б) $S(3{,}25)=\$5000(1+0{,}2)^{3}(1+0{,}2\cdot 0{,}25)=\$9072$.

2. При $m=2$ воспользуемся формулами (1.4), (1.6) $([\{T\}\cdot m]=[0{,}5]=0)$:

а) $S(3{,}25)=\$5000\left(1+\dfrac{0{,}2}{2}\right)^{3{,}25\cdot 2}=\$9290$;

б) $S(3{,}25)=\$5000\left(1+\dfrac{0{,}2}{2}\right)^{6}(1+0{,}2\cdot 0{,}25)=\$9300{,}7$.

3. При $m=6$ воспользуемся формулами (1.4), (1.6):

а) $S(3{,}25)=\$5000\left(1+\dfrac{0{,}2}{6}\right)^{3{,}25\cdot 6}=\$9476{,}73$;

б) $S(3{,}25)=\$5000\left(1+\dfrac{0{,}2}{6}\right)^{18+1}(1+\dfrac{0{,}2}{6}0{,}5)=\$9477{,}95$.

Дисконтирование – вычисление текущей стоимости $S(0)$ будущего денежного поступления $S(T)$.

Банковское дисконтирование применяется для учета банком краткосрочных векселей. Клиент может обратиться в банк с просьбой погасить вексель досрочно. Банк может согласиться выплатить ему сумму, однако её размер будет меньше, чем указано в векселе:

$$S=N(1-\frac{t}{T}d), \tag{1.7}$$

где S – сумма выплаты по векселю, N – номинал векселя, t – число дней до срока платежа, отнесенное к длительности года T, d – годовая ставка дисконтирования, определяемая банком. Дисконт по данной операции составит

$$D = \frac{N-S}{N} = \frac{t}{T}d\,, \tag{1.8}$$

и именно такой доход получит банк от этой сделки. Обычно размер годовой ставки дисконтирования значительно выше средней банковской ставки по кредитованию ввиду того, что число $\frac{t}{T}$ значительно меньше единицы, и при меньшей ставке такая операция для банка потеряет смысл.

Математическое дисконтирование

при простых процентах

$$S(0) = S(T)\frac{1}{1+T\cdot r}, \tag{1.9}$$

при сложных процентах с начислением m раз в году

$$S(0) = S(T)\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^{T\cdot m}}, \tag{1.10}$$

в частности, при $m = 1$

$$S(0) = S(T)\frac{1}{(1+r)^{T}}. \tag{1.11}$$

Пример 1.4. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 5 млн руб. со сроком погашения 28.09.2007 г. Вексель предъявлен 13.09.2007 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

Решение. Считая, что в году 360 дней, находим $\frac{t}{\mathrm{T}} = \frac{28-13}{360} = \frac{1}{24}$ и применяем формулу (1.7) при $N = 5$ млн руб., $d = 0{,}75$:

$$S(13.09.2007) = 5\left(1 - \frac{1}{24}0{,}75\right) \text{ млн р.} \approx 4{,}844 \text{ млн.р.}$$

Пример 1.5. С суммы 5 млн руб. удерживаются сложные проценты по годовой ставке 25%. Промежуток удержания – 2 года. Найти оставшуюся сумму.

Решение. Пользуясь формулой (1.11), найдем оставшуюся сумму после удержания с суммы $S(2)$ = 5 млн руб. процентов $r = 0{,}25$ при $T = 2$:

$$S(0) = 5\frac{1}{(1+0{,}25)^2} \text{ млн р.} = 3{,}2 \text{ млн р.}$$

Процентная ставка, которая объявлена в договоре и используется в расчётах, называется *номинальной*.

Эффективной называется годовая ставка по сложным процентам, которая позволяет за указанную в договоре сумму $S(0)$ через T лет получить сумму $S(T)$, независимо от указанной схемы начисления и номинальной процентной ставки. Значение эффективной ставки

$$r_{ef}=\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}}-1 \qquad (1.12)$$

позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам. Чем выше эффективная ставка, тем (при прочих равных условиях) выгоднее сделка для кредитора.

Если начисление ведётся по схеме сложных процентов m раз в году, то

$$r_{ef}=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1, \qquad (1.13)$$

в частности, при $m=1$ $r_{ef}=r$.

Пример 1.6. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку, если

а) процентная ставка составляет 28 % годовых, сложные проценты начисляются ежеквартально;

б) процентная ставка составляет 30 % годовых, сложные проценты начисляются раз в полгода?

Решение. В случае а) $r=0{,}28$, $m=4$. По формуле (1.13) $r_{ef}^{(а)}=\left(1+\frac{0{,}28}{4}\right)^{4}-1=0{,}31$ [31%]. В случае б) $r=0{,}3$, $m=2$. Находим $r_{ef}^{(б)}=\left(1+\frac{0{,}3}{2}\right)^{2}-1=0{,}322$ [32,2%]. Сравнивая эффективные ставки для случаев а) и б), делаем вывод о том, что банку более выгоден вариант б).

Пример 1.7. В одном банке за использование денег клиента по пластиковой карте ежегодно начисляют сложные $2\,\%$, а в другом банке – ежемесячно сложные $0{,}16\,\%$. В каком банке держать кредит?

Решение. Выгоднее первый вариант, поскольку эффективная ставка в этом случае выше: $0{,}02>(1+0{,}0016)^{12}-1=0{,}019$.

Задачи

1. Банк предоставил ссуду в размере 10 млн руб. на 30 месяцев под 30 % годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов.

Ответ: а) при простых процентах надо вернуть банку 17,5 млн руб.; б) при сложных процентах надо вернуть банку 19,27 млн руб.; в) при использовании комбинированной схемы надо вернуть банку 19,44 млн руб.

2. Вы имеете 10 млн руб. и хотели бы удвоить эту сумму через 5 лет. Каково минимально допустимое значение годовой процентной ставки?

Ответ: 15 %.

3. Фирме нужно накопить $2 млн, чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 8% при полугодовом начислении сложных процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

Ответ: $ 912 тыс.

4. Рассчитайте текущую стоимость каждого из приведенных ниже денежных поступлений, если процентная ставка равна 12% годовых и в расчётах используется схема сложных процентов:

а) 5 млн руб., получаемые через 3 года;

б) 10 млн руб., получаемые через 10 лет.

Ответ: а) 3,6 млн руб.; б) 3,2 млн руб.

5. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку:

а) 25% годовых, начисление сложных процентов ежемесячное;

б) 27% годовых, начисление сложных процентов раз в год?

Ответ: а.

6. Докажите, что $r_{ef} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 > r$, т.е. эффективная ставка больше номинальной, если $m > 1$.

7. Какой из трёх вариантов выбрать для краткосрочного вложения (6 мес.) некоторой суммы, на средний срок (2 года 6 мес.) и на длительный период (10 лет), если:

1) за вклад начисляется 30 % годовых по простым процентам;

2) за вклад начисляется 30 % годовых ежегодно по сложным процентам;

3) за вклад начисляется 2,2 % ежемесячно по сложным процентам?

Ответ: для краткосрочного вложения выбирается первый вариант, а в остальных случаях – второй.

1.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

Эквивалентными называются ставки, при которых условия сделки $S(0)$ и $S(T)$ для заданного периода T одни и те же.

Пусть r_s и r_c – годовые ставки простых (simple) и сложных (complex) процентов. Приравнивая мультиплицирующие множители (*мультиплицирующий множитель* – величина, на которую умножается начальная сумма $S(0)$ для получения конечной суммы $S(T)$ в формулах (1.2) – (1.4)): $(1 + T \cdot r_s) = (1 + r_c)^T$, находим

$$r_s = \frac{(1+r_c)^T - 1}{T}; \quad r_c = (1+T\cdot r_s)^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad (1.14)$$

Пример 1.8. Г-н X вложил в банк 100 тыс. руб. на 2 года под 25% годовых с условием начисления простых процентов на всю сумму вклада в конце второго года. В целях унификации схем расчётов банк решил начислять сложные проценты ежегодно. Какую минимальную ставку банк должен предложить, чтобы не потерять клиента?

Решение. Чтобы клиент получил предусмотренную договором сумму в конце второго года, банк должен предложить ставку по сложным процентам, эквивалентную ставке по простым процентам, зафиксированной в сделке. Из формул (1.12) непосредственно получаем

$$r_c = (1 + 2 \cdot 0{,}25)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}225 \quad [22{,}5\%].$$

Эквивалентные сложная, процентная ставка r_c и учётная ставка по сложным процентам d_c связаны уже знакомыми соотношениями:

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c}; \qquad d_c = \frac{r_c}{1 + r_c}.$$

Эквивалентными называются платежи, которые, будучи «приведёнными» к одному моменту времени, оказываются равными.

Операция «приведение к моменту T» денежной суммы, относящейся к моменту T_0, означает, что сумма наращивается по схеме простых или сложных процентов при $T_0 < \mathrm{T}$ и дисконтируется при $T_0 > \mathrm{T}$, причём период операции составляет $|T - T_0|$.

Процентная ставка, вычисленная по формуле

$$r_0 = \left[\frac{S_2(T_2)}{S_1(T_1)}\right]^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1, \tag{1.15}$$

где $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ – денежные суммы, получаемые через время T_1 и T_2 соответственно, называется *критической (барьерной)*.

Если в расчётах использовать схему сложных процентов и барьерную ставку, то указанные суммы $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ будут эквивалентными. С такой точки зрения барьерная ставка является обобщением понятия эффективной ставки. Действительно, сравним два долгосрочных обязательства: выплатить сумму $S_1(T_1)$ через время T_1 и сумму $S_2(T_2)$ через время T_2, причём $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$. Поскольку обязательства долгосрочные, наращение происходит по схеме сложных процентов. Эти обязательства будут эквивалентными, если, к примеру, сумма $S_1(T_1)$, наращенная за $T_2 - T_1$ лет, будет равна сумме $S_2(T_2)$:

$$S_1(T_1) \cdot (1 + r_0)^{T_2 - T_1} = S_2(T_2),$$

откуда вытекает (1.15). Заметим, что формула (1.15) имеет смысл только если $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$, или $S_1(T_1) \geq S_2(T_2)$, $T_1 \geq T_2$.

Если процентная ставка ниже критической, предпочтительнее получить сумму, которая относится к более позднему моменту времени, а если процентная ставка выше критической ставки, то предпочтительнее более ранняя сумма.

Пример 1.9. Какую сумму предпочтительнее получить при сложной ставке 9% годовых: \$1000 сегодня или \$2000 через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Решение. Подсчитаем наращённую величину с суммы \$1000 по ставке 9%: $S(8) = \$1000 \cdot (1{,}09)^8 = \$1992{,}6 < \$2000$. Следовательно, надо предпочесть сумму \$2000 через 8 лет.

Найдём барьерную ставку по формуле (1.15)

$$r_0 = \left[\frac{2000}{1000}\right]^{\frac{1}{8}} - 1 = 0{,}091\,(9{,}1\%).$$

При $r = r_0$ выбор безразличен. При $r > r_0$ будет предпочтительнее сумма \$1000 сегодня.

Задачи

8. Банк принимает к учёту долгосрочные векселя надежных эмитентов с годовым дисконтом 15%. Какова доходность учётных операций в виде сложной процентной ставки?

Ответ: 17,6%.

9. Могут ли эквивалентные ставки r_c и d_c иметь равное значение?

Ответ: только если $r_c = d_c = 0$.

10. На счёте в банке 1,2 млн руб. Банк платит 12,5% годовых по схеме сложных процентов. Предлагается войти всем капиталом в совместное предприятие, при этом прогнозируется удвоение капитала через 5 лет. Принимается ли предложение?

Ответ: да.

11. Каков Ваш выбор: а) получение \$5000 через 1 год или б) \$12000 – через 6 лет, если коэффициент дисконтирования равен 0%; 12%; 20%. При каком значении процентной ставки выбор безразличен (схема – сложные проценты)?

1.3. ВЛИЯНИЕ ИНФЛЯЦИИ

Инфляция – снижение реальной покупательной способности денег.

Пусть $S(T)$ – наращённая сумма денег, измеряемая по номиналу, $C(T)$ – наращенная сумма денег с учётом их обесценения, h_t – годовой темп инфляции в году t, J_p – индекс цен за период T. Указанные величины связаны соотношением

$$C(T)=\frac{S(T)}{J_p}, \qquad (1.16)$$

где

$$J_p=\prod_{t=1}^{T}(1+h_t). \qquad (1.17)$$

Пример 1.10. Через 3 года г-н X планирует получить страховку 100 тыс. руб. (страхование на дожитие). Согласно прогнозам, темпы инфляции за эти годы составят 15%, 20% и 18% соответственно. Оцените сумму к получению с учётом её обесценения.

Решение. В нашем случае $T=3$, $S(T)=100$ тыс. руб., $h_1=0{,}15$, $h_2=0{,}2$, $h_3=0{,}18$. Применяя формулы (1.16), (1.17), считаем

$$C(3)=\frac{100}{1{,}15\cdot 1{,}2\cdot 1{,}18}\text{ тыс. р.}=61{,}4\text{ тыс. р.}$$

В условиях инфляции объявленная годовая процентная ставка должна учитывать компенсацию потерь, связанных с обесценением денег. Такая ставка носит название *брутто-ставка*.

Пусть темп инфляции в течение T лет постоянен: $h_t=h$, $t\in[1:T]$, r_b – брутто-ставка, r – реальная процентная ставка. При сложных процентах имеем $C(T)=S(0)(1+r)^T$, $S(T)=S(0)(1+r_b)^T$. Ввиду (1.16), (1.17), получаем равенство $S(0)(1+r_b)^T=S(0)(1+r)^T(1+h)^T$, откуда находим

$$r_b=r+h+r\cdot h. \qquad (1.18)$$

Заметим, что брутто-ставка не просто является суммой реальной ставки и темпа инфляции, а ещё и их произведения.

Из формулы (1.18) находим

$$r=\frac{1+r_b}{1+h}-1. \qquad (1.19)$$

Пример 1.17. Решено вложить 1 млн руб. в банк на 2 года под 30% годовых. Согласно прогнозу Минфина, годовой темп инфляции сохранится на уровне 15%. Какова наращённая сумма с учётом ее обесценения? Определите реальную годовую процентную ставку (схема – сложные проценты).

Решение. В нашем случае $r_b=0{,}3$, $h=0{,}15$, $S(0)=1$ млн руб. По формуле (1.19) находим реальную процентную ставку $r=\frac{1{,}3}{1{,}15}-1=0{,}13$ [13%]. Тогда $C(2)=S(0)(1+r)^2=1{,}278$ млн руб.

Задачи

12. Банк принимает вклады под 28% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов. Годовой темп инфляции 18%. Определите реальную процентную ставку.

Ответ: 8,5%.

13. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная годовая ставка по сложным процентам оказалась 6%?

1.4. КОНСОЛИДАЦИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

Операция «приведения» денежных сумм к определённому моменту времени используется для сопоставления различных платежей, при изменении сроков их погашения, их объединении и т. п.

Пусть платежи $S_1, S_2, ..., S_m$ со сроками уплаты этих сумм соответственно $T_1, T_2, ..., T_m$ заменяются одним в сумме S и сроком T. Пусть r – годовая процентная ставка по сложным процентам, постоянная в течение всего срока сделки. Рассмотрим две задачи: во-первых, пусть дан срок T и требуется найти сумму S; во-вторых, задана сумма консолидированного платежа и требуется определить, к какому сроку такая сумма накопится. Первая задача решается очень просто: «приводя» денежные потоки $S_i, i \in 1:m$, к моменту T, можно найти их сумму, это и будет S:

$$S = \sum_{\substack{i=1,\\ T \geq T_i}}^{m} S_i (1+r)^{T-T_i} + \sum_{\substack{i=1,\\ T < T_i}}^{m} \frac{S_i}{(1+r)^{T_i - T}}.$$

Откуда

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i (1+r)^{T-T_i}. \qquad (1.20)$$

<u>Пример 1.15.</u> В качестве оплаты за каждую из трех партий товара предприятие A получило от предприятия B вексель с процентной ставкой 25% годовых, содержащий обязательство погасить сумму 1, 2 и 3 млн руб. соответственно через 3, 5 и 6 лет. Эти векселя заменяются одним с тем же дисконтом и сроком 4,5 года. На какую сумму должен быть выписан новый вексель, если в расчетах используется схема сложных процентов?

Решение. Найдем наращённую стоимость каждого из трёх векселей через 4,5 года с момента выписки:

$S_1(4{,}5) = 1 \cdot (1+0{,}25)^{1{,}5} = 1{,}398$ (млн р.) для 1-го векселя,

$S_2(4{,}5) = 2 \cdot (1+0{,}25)^{-0{,}5} = 1{,}7889$ (млн р.) для 2-го векселя,

$S_3(4{,}5) = 3 \cdot (1+0{,}25)^{-1{,}5} = 2{,}1467$ (млн р.) для 3-го векселя.

Эти платежи относятся к одному моменту времени, значит, можно найти их сумму: $S(4{,}5) = S_1(4{,}5) + S_2(4{,}5) + S_3(4{,}5) = 5{,}3336$ млн р. Итак, в новом векселе должно быть отражено обязательство выплатить 5,3336 млн руб. через 4,5 года.

Если неизвестна ставка по консолидированному платежу, то её можно отыскать из уравнения (1.20). В такой задаче решение, если и существует, может быть не единственным, поскольку (1.20) – алгебраическое уравнением степени m относительно неизвестного r.

Задачи

19. Платежи в 7 и 2 млн руб. со сроками уплаты этих сумм через 1 и 4 года объединяются в один со сроком 3,5 года с использованием сложной годовой процентной ставки 20%. Найти величину консолидированного платежа.

20. Два года назад было занято 15 млн руб. под 7 % годовых, затем через год было занято 10 млн руб. под 12 % годовых. На настоящий момент взыскание задолженности пролонгируется по тем же ставкам ещё на 3 года, причём выдано ещё 5 млн руб. под 10 % годовых. Сколько денег подлежит возврату по окончании договора (через 3 года с сегодняшнего момента)?

Ответ: 45,49 млн руб.

Глава 2. ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

2.1. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

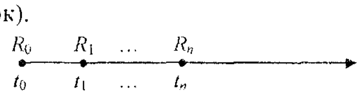
С разовыми платежами человек имеет дело, если совершает покупки, оплачивает услуги или получает бонусы. В большинстве экономических процессов участники фигурируют в целой серии однородных платежей, к примеру, получение заработной платы, стипендий, пенсий, оплата коммунальных услуг, инвестирование средств в производство с последующим получением прибыли, налоговые, арендные платежи и прочие регулярные поступления и расходы денег.

Поток платежей – последовательность *величин* самих *платежей* (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Задать поток платежей можно таблично:

t_k	t_0	t_1	…	t_n	…
R_k	R_0	R_1	…	R_n	…

или графически (рисунок).



Здесь R_k – величины платежей, а t_k – моменты совершения этих платежей.

Поток платежей можно представить как векторную последовательность $\{(R_k, t_k)\}$ платежей R_k и моментов времени t_k, к которым платежи относятся. В качестве начального момента времени часто удобно брать $t_0 = 0$.

Рассмотрим сначала конечный поток платежей. Пусть r_k, $k \in 1:n$, – годовая ставка по сложным процентам для периода $[t_{k-1}; t_k]$ данного потока платежей.

Величиной потока в момент времени t_k называется сумма платежей потока, дисконтированных или наращённых к этому моменту времени. Если поток конечный и R_n – последний платеж, то величина потока подсчитывается по формуле

$$S(t_k) = \sum_{i=0}^{k-1} R_i \prod_{j=i}^{k-1} (1 + r_{j+1})^{t_{j+1} - t_j} + R_k + \sum_{i=k+1}^{n} R_i \prod_{j=k+1}^{i} (1 + r_j)^{t_{j-1} - t_j}. \qquad (2.1)$$

Если все ставки r_k, $k \in 1:n$, одинаковы, то их общее значение r называется *ставкой приведения*. В таком случае формула (2.1) упрощается:

$$S(t_k) = \sum_{i=0}^{n} R_i (1 + r)^{t_k - t_i}. \qquad (2.2)$$

Величина $S(t_0)$ называется *современной (начальной) величиной потока*, $S(t_n)$ – *конечной (наращённой) величиной потока*.

Часто будем использовать поток, для которого $t_k = k$, $k \in 0:n$.

Пример 2.1. Подсчитать современную и конечную величины потока при $r = 10$ % для потока, заданного следующей таблицей.

t_k	0	1	2	3
R_k	–	– 2000	1000	2000

Решение. Воспользуемся формулой (2.2), тогда

$S(0) = -2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-1} + 1000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-2} + 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-3} = 511$,

$S(3) = S(0) \cdot (1 + r)^3 = 680$.

Пример 2.2. По схеме кредитования, рассчитанной на 5 лет, размер предоставляемой в долг суммы составлял 10, 20, 30, 40 и 50 тыс. руб. соответственно, причём процентная ставка за эти 5 лет изменялась следующим образом: 15%, 12%, 10%, 8%, 10 %. Сколько денег нужно вернуть через 5 лет?

Решение. Воспользуемся формулой (2.1):

$$S(5) = 10 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 20 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 30 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 +$$
$$+ 40 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 + 50 \cdot 1{,}1 = 16{,}83 + 29{,}27 + 39{,}2 + 47{,}52 + 55 = 187{,}82 \text{ (тыс. р.)}.$$

Задачи

21. При сложной годовой ставке 5% найдите современную и наращенную величину следующего потока.

t_k	0	1	2	3	4
R_k	–	–2	1	1	1

22. На 5 лет взят кредит. В первый год процентная ставка по нему составляла 10 % годовых. На какую максимальную ставку по сложным процентам согласится заёмщик на следующие 4 года, если он может вернуть не более полутора начальных сумм в конце срока?

Ответ: 8 %.

2.2. РЕНТА. АННУИТЕТ

Поток положительных платежей с постоянными промежутками времени между ними называется *рентой*. Рента с одинаковыми платежами в каждый период времени носит название *аннуитет*. Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то аннуитет носит название *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*.

Рассмотрим аннуитет, считая, что процентная ставка r постоянна во времени. Отдельно рассматривать такие потоки платежей имеет смысл ввиду возможности применения удобных компактных формул для расчёта величин аннуитетных потоков в каждый момент времени. В данном параграфе кроме традиционного простого аннуитета будет рассмотрен также дробный аннуитет и линейная рента.

Линейной рентой назовём ренту, платежи которой растут по линейному закону.

2.2.1. *Простой аннуитет*

Пусть денежные поступления в размере R происходят ежегодно в течение n лет, причем $t_0 = 0$; $t_1 = 1$, …, $t_n = n$. Найдем современную и наращённую величины для аннуитета постнумерандо:

$$\bar{S}(0) = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^n}; \quad \bar{S}(n) = \bar{S}(0)(1+r)^n. \qquad (2.3)$$

Пользуясь формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии с первым компонентом $\frac{R}{1+r}$ и знаменателем $\frac{1}{1+r}$, после элементарных преобразований получим

$$\bar{S}(0) = \frac{R\cdot((1+r)^n - 1)}{r\cdot(1+r)^n}; \quad \bar{S}(n) = \frac{R\cdot((1+r)^n - 1)}{r}. \qquad (2.4)$$

Аналогичные формулы для аннуитета пренумерандо можно получить из (2.4), учитывая, что

$$\underline{S}(0)=\bar{S}(0)(1+r);\quad \underline{S}(n)=\ddot{S}(n)(1+r). \qquad (2.5)$$

Тогда

$$\underline{S}(0)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r(1+r)^{n-1}};\quad \underline{S}(n)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r}(1+r). \qquad (2.6)$$

Заметим, ввиду (2.5), что принципиальной разницы между аннуитетом постнумерандо и пренумерандо не существует. Применение этих терминов целесообразно лишь для упорядочения экономических отношений. Так, аннуитет пренумерандо обычно относится к процессам, связанным с вложением или расходованием денег по целевому назначению, к авансовым и арендным платежам, а аннуитет постнумерандо – к получению доходов, оплате коммунальных услуг, услуг связи, налогов, процентов и т.п.

Пример 2.3. Решено в течение 6 лет ежегодно вносить в банк \$4000 по схеме пренумерандо с начислением сложных процентов 7% годовых. Чему равна сумма в конце периода?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами (2.6):

$$\underline{S}(6)=\$4000\cdot\frac{1{,}07^6-1}{0{,}07}\cdot 1{,}07=\$30616.$$

Пример 2.4. Г-н X инвестировал \$700 000 в пенсионный контракт. Страховая компания предложила условия, согласно которым определённая сумма будет выплачиваться ежегодно (в конце года) в течение 20 лет, исходя из годовой ставки по сложным процентам 15%. Какую сумму будет получать ежегодно господин X.

Р е ш е н и е. В нашем случае $\bar{S}(0)=\$700\,000$, $r=0{,}15$, $n=20$. Из формулы (2.4) выразим ежегодную сумму выплаты R г-ну X:

$$R=\$700\,000\frac{0{,}15\cdot 1{,}15^{20}}{1{,}15^{20}-1}=\$111\,833.$$

2.2.2. *Дробный аннуитет*

Рассмотрим поток платежей постнумерандо, которые равными суммами выплачиваются p раз в году, через равные интервалы. Если суммарный годовой платёж равен R, то единичный платеж равен $R_p=\dfrac{R}{p}$. Гораздо чаще известен именно дробный платёж R_p, поэтому специально вычислять его не нужно. Предположим, что сложные проценты начисляются m раз в году, также через равные интервалы, годовая ставка (по сложным процентам) r. Подсчитаем наращённую сумму такого потока через n лет

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n\cdot p}(R_p)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(n-\frac{i}{p})\cdot m}=R_p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}\sum_{i=1}^{n\cdot p}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{i\cdot m}{p}}}.$$

Используя формулу суммы первых $n \cdot p$ членов геометрической прогрессии с первым компонентом $\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$, знаменателем $\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$, после элементарных преобразований получим

$$\bar{S}(n) = R_p \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{2.7}$$

Современную величину потока получаем из (2.7):

$$\bar{S}(0) = \frac{S(n)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}} = R_p \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)}. \tag{2.8}$$

Пример 2.5. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру в конце каждого года \$500. Деньги поступают на специальный счёт и на них каждые полгода начисляются сложные проценты, исходя из годовой ставки 4 %. Сколько денег накопится на счёте через 5 лет?

Решение. Данные для расчёта таковы: $p = 1$, $m = 2$, $r = 0{,}04$, $R = \$500$. Пользуясь формулой (2.7), получим

$$\bar{S}(5) = \$\frac{500}{1} \cdot \frac{1{,}02^{10} - 1}{1{,}02^{2} - 1} = \$2710{,}3.$$

Пример 2.6. Ежемесячно в течение двух лет студенту перечисляется на пластиковую карту стипендия 600 руб. Деньги не снимаются. Затем один год студент стипендию не получает. Следующие два года перечисляется ежемесячно по 800 руб. Сколько денег накопится на карте через 5 лет, если годовая ставка по сложным процентам составляет 2%.

Решение. Расчёт требуемой суммы ведётся по формуле (2.7), $p = 12$, $m = 1$:

$$600 \cdot \frac{1{,}02^{2} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} \cdot 1{,}02^{3} + 800 \cdot \frac{1{,}02^{2} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} = 35178 \text{ (р.)}.$$

Можно сравнить полученную сумму с той, которая накопилась бы, если бы студент снимал стипендию и складывал в «сундук» – 33 600 руб.

Пример 2.7. По договору о кредитной линии с банком, предприниматель ежемесячно (в первых числах месяца) получает по 10 тыс. руб. в течение полутора лет. В конце срока возвращается сумма долга и начисляются сложные проценты 1,1 % ежемесячно. Какая сумма подлежит возврату?

Решение. Условно считая месяц «годом», применяем формулу (2.6):

$$\underline{S}(18\text{ мес.}) = \frac{10\cdot((1{,}011)^{18}-1)}{0{,}011}\cdot 1{,}011 \approx 200 \text{ (тыс. р.)}.$$

Задачи

23. В фонд защиты животных ежегодно вносится 100 тыс. руб. в течение 8 лет (в конце года). Средняя годовая ставка по сложным процентам за этот период составляет 8%. Найти современную и наращенную величину потока.

Ответ: 574,7 тыс. руб.; 1 063,7 тыс. руб.

24. Семья хочет через 6 лет купить дачу за \$12 000. В начале каждого года на счёт в банке вносится одинаковая сумма. Годовая ставка по сложным процентам в этом банке 8 %. Найти сумму ежегодного вклада.

25. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода сложные проценты из расчёта 7 % годовых. Сколько денег будет на счёте через 4 года?

2.2.3. *Вечная рента*

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна. Наращённая величина такой ренты бесконечна, а современная величина, например, для аннуитета постнумерандо, составляет

$$S^{\infty}(0) = \frac{R}{r}. \qquad (2.9)$$

Последняя формула получена из (2.4) путём предельного перехода при $n \to \infty$.

Пример 2.8. Бизнесмен арендовал виллу за \$10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке сложных процентов 5%?

Решение. Выкупная цена виллы есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна

$$S^{\infty}(0) = R/r = \$10000/0{,}05 = \$200000.$$

Задачи

26. Что более увеличит современную величину «вечной» ренты: увеличение размера платежа R на 1% или уменьшение ставки r на 1%?

27. Увеличится ли современная величина «вечной» ренты, если платежи сделать в 2 раза чаще, но годовую процентную ставку в 2 раза уменьшить?

2.2.4. *Линейная рента*

Рассмотрим ренту, платежи по которой поступают в конце каждого временного промежутка (постнумерандо), причём изменение величин платежей происходит во времени по закону $R+\beta\cdot t,\ t\in[0:n-1]$. Если ставка приведения постоянна на уровне r, то современная величина такой ренты рассчитывается по формуле

$$S(0)=\frac{R}{1+r}+\frac{R+\beta}{(1+r)^2}+\frac{R+2\beta}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R+(n-1)\beta}{(1+r)^n}=$$

$$=\frac{R}{1+r}+\frac{R}{(1+r)^2}+\frac{R}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R}{(1+r)^n}+$$

$$+\frac{\beta}{(1+r)^n}\left((1+r)^{n-2}+2(1+r)^{n-3}+\ldots+(n-1)\right)=$$

$$=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r\,(1+r)^n}+\frac{\beta}{(1+r)^n}\left(\left\{(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1\right\}+\left\{(1+r)+1\right\}+1\right). \qquad (2.10)$$

Пользуясь формулой суммы конечного числа членов геометрической прогрессией, имеем

$$(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1=\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r},$$

$$(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1=\frac{(1+r)^{n-2}-1}{r},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$(1+r)+1=\frac{(1+r)^2-1}{r},$$

$$1=\frac{(1+r)-1}{r}.$$

Подставим полученные выражения в (2.10)

$$S(0)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r\,(1+r)^n}+$$

$$+\frac{\beta}{r(1+r)^n}\left(\left\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)^2+(1+r)\right\}-(n-1)\right)=$$

$$=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r\,(1+r)^n}+\frac{\beta}{r(1+r)^n}\left(\frac{(1+r)\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r}-(n-1)\right).$$

Окончательно получаем

$$S(0)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r\,(1+r)^n}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^2\,(1+r)^n}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r\,(1+r)^n}. \qquad (2.11)$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^2}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r}. \qquad (2.12)$$

Если линейная рента имеет форму пренумерандо, то получаем

$$S(0)=\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r\,(1+r)^{n-1}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^2\,(1+r)^{n-1}}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r(1+r)^{n-1}}. \qquad (2.13)$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n)=\left(\frac{R\,((1+r)^n-1)}{r}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^2}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r}\right)(1+r). \quad (2.14)$$

Пример 2.9. По договору с банком 5 лет осуществляется взнос 15 тыс. руб. и начисляется 10 % годовых по схеме простых процентов. Ежегодно на сумму вклада и накопленные с неё проценты начисляют ещё 5 % годовых по схеме сложных процентов. Вычислить итоговую сумму, а также суммы, которые накопились бы на счёте при начислении простых 10 % и сложных 5 %.

Решение. По формуле (1.2) изменение величин платежей происходит во времени по закону $15+15\cdot 0{,}1\cdot t$, $t\in[1:5]$. Пользуясь формулой (2.14), рассчитываем требуемую сумму (в тыс. руб.):

$$S(5)=\left(\frac{15\,((1{,}05)^5-1)}{0{,}05}+\frac{1{,}5\left((1{,}05)^4-1\right)}{0{,}05^2}+\frac{1{,}5\,\left((1{,}05)^4-5\right)}{0{,}05}\right)(1{,}05)=103{,}58.$$

При начислении простых 10 процентов, было бы получено

$$S(5)=15\cdot 1{,}1+15\cdot 1{,}2+15\cdot 1{,}3+15\cdot 1{,}4+15\cdot 1{,}5=97{,}5 \text{ (тыс. р.)}.$$

При начислении сложных 5 % имеем аннуитет пренумерандо и расчёт требуемой суммы ведётся по формуле (2.6):

$$\underline{S}(5)=\frac{15\cdot(1{,}05^5-1)}{0{,}05}\cdot 1{,}05=87{,}02.$$

Задачи

28. Куплена ценная бумага за 47 тыс. руб. Через год по ней стали поступать дивиденды, тенденцию изменения которых можно приближённо представить в виде линейного закона $R(t) = 11 - t$, $t \in 1:10$. Сразу после получения 1 тыс. руб. в виде дивидендов (через 10 лет) ценная бумага продана за 2 тыс. руб. Можно ли считать такую сделку удачной?

Ответ: да.

29. Работник получает 150 тыс. руб. в год и поступает в вуз. Если он поступит учиться на заочное отделение, то следующие 5 лет заработная плата будет увеличиваться по закону $R(t) = 150 + 18 \cdot t$, $t \in 1:5$. Если он поступит на дневное отделение, то 5 лет работать не будет, предприятие сохранит за ним место, выплатив сразу 85 % заработной платы за 5 лет. После получения диплома заработная плата составит 300 тыс. руб. в год в любом случае. Какую форму обучения выбрать, если ставка приведения 8 %?

Ответ: дневную.

Глава 3. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЁТЫ

Все три термина: «заём», «кредит», «ссуда» означают предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности, платности, срочности. Тот, кто выдаёт деньги или товары в кредит, называется *кредитором*, кто берёт – *заёмщиком (дебитором)*. Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть кредит в размере D выдан на n лет под g сложных годовых процентов. Указанное переобозначение процентной ставки несёт смысловое значение лишь для банков, которые привлекают вклады, предлагая процентную ставку g и кредитуют население по ставке r, причём обычно $r > g$. Ясно, что такое понимание кредитно-депозитных операций банка очень узко, но позволяет сформировать представление о так называемой банковской марже, которая в таком случае составит $r - g$ процентов.

3.1. ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА ОДНИМ ПЛАТЕЖОМ В КОНЦЕ СРОКА

К концу n-го года наращённая сумма с величины D станет $D(1+g)^n$. Если предполагается погасить кредит одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Пример 3.1. Занято \$2000 на 8 лет под 10% годовых по сложным процентам. Если отдать этот заём одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение. В нашем случае $D = \$2000$, $g = 0{,}1$, $n = 8$; тогда искомая сумма к погашению составит $\$2000 \cdot 1{,}1^8 = \$4288$.

3.2. ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА ЧАСТЯМИ

Схемы погашения долга частями, с одной стороны, позволяют заёмщику легче планировать свои расходы по обслуживанию долга, а с другой стороны, позволяют кредитору отслеживать регулярность возврата заёмщиком причитающихся сумм и при добросовестном исполнении заёмщиком платежей снизить риск невозврата кредита. Размер самого кредита называется *основным долгом*, а наращиваемый добавок – *процентными деньгами*. Указанные платежи дробятся. Обозначим через d_t расходы на погашение основного долга в конце года t, D_t – остаток основного долга на начало года t, Y_t – общие расходы по обслуживанию долга в конце года t. Тогда

$$Y_t = D_t g + d_t, \tag{3.1}$$

где $D_t g$ – процентные деньги;

$$D = d_1 + d_2 + ... + d_n. \tag{3.2}$$

Для погашения основного долга частями используются, например, следующие схемы.

Схема А. *Долг погашается последовательными равными суммами в конце каждого года, с ежегодной выплатой процентов на остаток долга.* В этом случае

$$d_t = d = \text{const}, \quad d = D \setminus n, \tag{3.3}$$

$$D_t = D - (t-1)d, \tag{3.4}$$

$$Y_t = (D - (t-1)d)g + d. \tag{3.5}$$

Планом погашения задолженности называется совокупность данных по обслуживанию основной суммы долга, о процентных выплатах и остатках задолженности за каждый период (год) до момента его полного погашения. Наиболее удобный способ составления плана – таблица.

Пример 3.2. Выпущена облигация (долговая ценная бумага) номиналом 100 руб. с условием погашения последовательными равными суммами в течение 4 лет. Ежегодно выплачиваются также 20 % годовых на остаток долга. Составить план погашения.

Решение. В нашем случае $n = 4$, $D = 100$ руб., процентная ставка $g = 0{,}2$. Вычисляем размер ежегодной выплаты по основному долгу, пользуясь формулой (3.3): $d = \dfrac{100}{4} = 25$ р. План погашения составим в виде таблицы. Сразу ставим $D_1 = 100$ руб. и заполняем колонку (2). Строка $t+1$ колонки (1) получается вычитанием из строки t колонки (1) соответствующей строки колонки (2): $D_{t+1} = D_t - d$. Колонка (3) получается из колонки (1) умножением на 0,2. Колонка (4) – сумма колонок (2) и (3).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Годовые расходы по обслуживанию долга на конец года t
t	D_t	$d_t = d$	$D_t g$	$Y_t = d + D_t g$
1	100	25	20	45
2	75	25	15	40
3	50	25	10	35
4	25	25	5	30
	(1)	(2)	(3)	(4)

Примечание. Данная схема погашения долга имеет существенный недостаток: расходы по обслуживанию долга вначале выше, что часто является нежелательным для дебитора.

Схема В. *Погашение кредита равными срочными уплатами вместе с начисленными сложными процентами на непогашенный остаток.* В этом случае общие годовые расходы должника по обслуживанию долга (срочные уплаты) постоянны в течение всего срока погашения:

$$Y_t = Y = \text{const}. \tag{3.6}$$

Текущая величина всех выплат должна быть равна размеру кредита D:

$$D = \frac{Y}{1+g} + \frac{Y}{(1+g)^2} + \ldots + \frac{Y}{(1+g)^{n-1}} + \frac{Y}{(1+g)^n}. \tag{3.7}$$

Заметим, что возврат платежей происходит по схеме аннуитета постнумерандо, причём D – современная величина этого потока. Тогда

$$D = \frac{Y((1+g)^n - 1)}{g(1+g)^n},$$

откуда имеем

$$Y = \frac{Dg(1+g)^n}{(1+g)^n - 1}. \tag{3.8}$$

Платежи по основному долгу связаны следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} d_1 = Y - Dg, \\ d_2 = Y - (D - d_1)g = d_1(1+g), \\ \ldots \\ d_t = d_{t-1}(1+g) = d_1(1+g)^{t-1}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Обозначим общую сумму процентных денег через

$$DD := D_1 \cdot g + D_2 \cdot g + \ldots + D_n \cdot g.$$

Воспользуемся соотношением (3.1):

$$DD = (Y - d_1) + (Y - d_2) + \ldots + (Y - d_n) = n \cdot Y - (d_1 + d_2 + \ldots + d_n).$$

Ввиду (3.2) имеем

$$DD = n \cdot Y - D. \qquad (3.10)$$

Пример 2.3. Вы заняли на 5 лет $\$12\,000$ под 12 % годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Составьте план погашения. Определите, какая часть основной суммы займа будет погашена за первые 2 года?

Решение. Данные для расчёта: $n = 5$; $D = \$12\,000$; $g = 12\%$. Находим сумму ежегодного платежа по обслуживанию займа по формуле (3.8):

$$Y = \$\frac{12000 \cdot 0{,}12 \cdot 1{,}12^5}{1{,}12^5 - 1} = \$\,3328{,}9.$$

Остаток задолженности на начало первого года $D_1 = D$. Считаем $d_1 = Y - D_1 g = \$\,1888{,}9$ и заполняем первую строку таблицы. Далее, вычисляем $D_2 = D_1 - d_1 = 10111{,}1$ и находим $D_2 g = \$1213{,}3$, а затем $d_2 = Y - D_2 g = \$\,2115{,}6$ и заполняем строку $t = 2$. Процесс продолжаем до тех пор, пока долг не будет погашен (5 лет).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Общие расходы по обслуживанию долга в конце года t
t	D_t	$d_t = Y - D_t g$	$D_t g$	$Y_t = Y$
1	12000,0	1888,9	1440,0	3328,9
2	10111,1	2115,6	1213,3	3328,9
3	7995,5	2369,5	959,5	3328,9
4	5626,0	2653,8	675,1	3328,9
5	2972,2	2972,2	356,7	3328,9

За первые 2 года будет выплачено по основному займу $d_1 + d_2 = \$\,4004{,}5$, что составляет от основной суммы долга

$$\frac{d_1 + d_2}{D} = 0{,}334 \quad [33{,}4\%].$$

Заметим, что платежи по погашению основного долга из года в год увеличиваются, а процентные выплаты сокращаются, хотя в сумме их величина постоянна.

Пример 2.4. Вы заняли на 5 лет \$10 000 под 8 % годовых. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года, с учётом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток. Определите общую сумму процентов к выплате.

Решение. Данные для расчёта: $D = \$10\,000$; $n = 5$; $g = 8\%$. По формуле (3.8) находим ежегодный платёж по займу:

$$Y = \$\frac{10000 \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}08^5}{1{,}08^5 - 1} \approx \$\,2504.$$

По формуле (3.10) вычисляем общую сумму процентных денег:

$$DD = 5Y - D = \$2520.$$

Задачи

30. Заём в сумме 300 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 6 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 25 % годовых. Составить план погашения.

31. Вы заняли на 4 года \$10 000 под 14 % годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток. Составьте план погашения. Определите общую сумму процентов к выплате.

3.3. СОЗДАНИЕ ПОГАСИТЕЛЬНОГО ФОНДА

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для его обеспечения. Обычная мера при значительной сумме долга заключается в создании погасительного фонда. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа в качестве гарантии его погашения. Погасительный фонд создаётся из последовательных взносов должника (например, на специальный счёт в банке), на которые начисляются проценты. Сумма взносов равна сумме долга. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными. Ограничимся рассмотрением первого случая.

Предположим, что для погашения взятой суммы D на n лет под g годовых сложных процентов дебитор открывает в банке счёт, ежегодно внося на него сумму w под r сложных процентов годовых. Если сделка не относится к разряду спекулятивных, то $r < g$.

Пользуясь формулой (2.4), рассчитываем накопленную через n лет сумму (её должно хватить для возврата задолженности с процентами):

$$D(1+g)^n = \frac{w\left((1+r)^n - 1\right)}{r}, \tag{3.11}$$

откуда можно выразить минимальную сумму, которую нужно вносить ежегодно в погасительный фонд, чтобы к концу срока иметь возможность рассчитаться за кредит:

$$w = \frac{Dr(1+g)^n}{(1+r)^n - 1}. \tag{3.12}$$

Если $r = g$, то создание погасительного фонда реализует схему B возврата задолженности частями.

Задачи

Для следующих задач условием является получение займа 15 тыс. долл. на 5 лет под 10 сложных процентов в год.

32. Каков размер ежегодного платежа по кредиту, если его возвращать равными суммами с учётом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток? *Ответ:* 3 957,2 долл.

33. Каков минимальный размер годового вклада на счёт, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам? *Ответ:* 4 118,89 долл.

34. Каков минимальный размер ежемесячного вклада на счёт, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам, и начислять сложные проценты ежемесячно?

Ответ: 328,78 тыс. долл.

Глава 4. ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. ПОНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Инвестиционный процесс – это финансовый поток, включающий платежи двух видов: платежи, связанные с вложением капитала (инвестированием), считаются отрицательными, и платежи, связанные с последующим получением дохода, считаются положительными. Поскольку капиталом считаются деньги, находящиеся в обороте и способные к «самовозрастанию», инвестиции часто называют капитальными вложениями.

Началом процесса инвестиций $t = 0$ будем считать момент первого вложения капитала. Пусть K – начальные капиталовложения (относящиеся к моменту $t = 0$). Считаем, что длительность инвестиционного проекта n периодов (лет); $t = n$ – год последнего поступления чистого дохода от инвестиций. Между первым вложением средств и первым поступлением доходов должно пройти некоторое время (считаем, не менее года).

Под *чистым доходом* будем понимать разность между доходом от проекта и размером инвестиций за год t. Пусть чистые доходы за 1, 2,..., n годы составляют соответственно $R_1, R_2, ..., R_n$.

Ясно, что чистые доходы могут быть отрицательными, в случае если за год t требуются дополнительные вложения капитала, которые не покрываются доходами за этот год, нулевыми, если в году t вложено средств столько же, сколько получено доходов, или положительными, если доходы выше капиталовложений, но $R_n > 0$.

Для «приведения» денежных потоков к начальному моменту используется ставка r, которая называется *ставкой приведения*. При выборе r обычно ориентируется на текущий или ожидаемый уровень ссудного процента.

Один и тот же инвестиционный проект может рассматриваться на различных этапах его существования, поэтому ставка приведения может меняться. В таких случаях читателю предлагается рассчитать эффективность капиталовложений самостоятельно, используя представленный материал.

4.2. ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

1. *Чистый приведённый доход* (Net Present Value, или NPV).

Чистым приведённым доходом называется современная величина разности между доходами от инвестиций и вложениями капитала. Фактически это современная величина инвестиционной прибыли.

Расчёт указанного показателя производится по формуле

$$\mathrm{NPV} = -K + \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \tag{4.1}$$

Если $R_t = R = \mathrm{const}$, $t \in 1:n$, то

$$\mathrm{NPV} = -K + R\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \tag{4.2}$$

Если $\mathrm{NPV} < 0$, то инвестиционный проект следует отклонить, если $\mathrm{NPV} \geq 0$, то проект принимается к рассмотрению.

2. *Индекс доходности* (Profitability Index, или PI).

Индексом доходности называется отношение современной стоимости чистых доходов от инвестиций к современной стоимости осуществляемых капиталовложений.

PI в отличие от предыдущего показателя является относительным и измеряется в долях или в процентах (аналог рентабельности).

Индекс доходности связан с чистым приведённым доходом соотношением:

$$\mathrm{PI} = \frac{\mathrm{NPV} + K}{K} = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \tag{4.3}$$

Если $R_t = R = \mathrm{const}$, $t = 1:n$, то

$$\mathrm{PI} = \frac{R\left((1+r)^n - 1\right)}{Kr(1+r)^n}. \tag{4.4}$$

Если $\mathrm{PI} < 1$, то проект следует отклонить, если $\mathrm{PI} \geq 1$, то проект принимается к рассмотрению.

3. *Внутренняя норма доходности* (Internal Rate of Return, или IRR).

Внутренней нормой доходности инвестиционного процесса называется процентная ставка, при которой чистый приведённый доход по проекту равен нулю. Показатель IRR находится из алгебраического уравнения:

$$K = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+\mathrm{IRR})^t}. \tag{4.5}$$

Противоречивость этого показателя заключается в том, что алгебраическое уравнение степени n может иметь n действительных положительных корней. В таком случае выбор нужной величины может быть затруднителен. Но если величины $K, R_1, ..., R_n$ положительны, то уравнение (4.5) имеет только один положительный корень $x = 1 + \mathrm{IRR}$. Если к тому же выполняется неравенство

$$K < R_1 + ... + R_n, \tag{4.6}$$

то $\mathrm{IRR} > 0$ ($x > 1$). Действительно, при $\mathrm{IRR} = 0$ имеем $K = R_1 + ... + R_n$, при дальнейшем увеличении IRR правая часть (4.5) строго убывает. Ввиду (4.6), получается только один корень.

Однако часто проект не приносит положительных чистых доходов в течение всего срока, случаются и убытки, поэтому расчёт этого показателя не очень удобен. С другой стороны, внутренняя норма доходности имеет и весьма существенное преимущество: для её расчёта не нужно знать ставку приведения, а лишь – величины финансовых потоков по проекту.

В частности, если $R_i = R = \mathrm{const}$, для всех $i \in 1:n$, то уравнение (4.5) принимает вид

$$\frac{R}{K} = \frac{\mathrm{IRR}(1+\mathrm{IRR})^n}{(1+\mathrm{IRR})^n - 1}. \tag{4.7}$$

Проект может быть принят к рассмотрению, только если $\mathrm{IRR} \ge r_H$, где r_H – минимально привлекательная для инвестора ставка процента.

В случае если $n = 2$, $R_1 \ge 0$, $R_2 \ge 0$, уравнение (4.5) имеет 2 корня, различных по знаку, и выбор нужного решения очевиден. Для решения уравнения (4.5) удобно обозначить через $x = 1 + \mathrm{IRR}$:

$$K = \frac{R_1}{x} + \frac{R_2}{x^2},$$

отбросить общий знаменатель и решить квадратное уравнение:

$$Kx^2 - R_1 x - R_2 = 0, \tag{4.8}$$

а затем вычислить $\mathrm{IRR} = x - 1$ и взять положительное значение IRR.

4. *Дисконтный срок окупаемости* (Payback Period, или PP) – минимальный срок, при котором приведённые чистые доходы становятся не ниже капитальных вложений. В зависимости от поставленной цели, дисконтный срок окупаемости можно вычислять с различной точностью.

Пример 4.1. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения составит 20% в год.

t	0	1	2	3
$-K$	-100			
R_t		50	100	100

Решение. В случае $n=1$ по формуле (4.1) находим $\mathrm{NPV}=\frac{50}{1{,}2}-100=-58$. При $n=2$, $\mathrm{NPV}=-58+\frac{100}{1{,}2^2}=+11$. Следовательно, через 2 года проект окупится.

Пример 4.2. Проект, требующий инвестиций в размере \$160 000, предполагает получение годового дохода в размере \$30 000 на протяжении 15 лет. Оценить целесообразность такой инвестиции, если ставка приведения равна 15%.

Решение. Данные для расчёта: $K=\$160\,000$, $R=\$\,30\,000$, $n=15$, $r=0{,}15$. Чтобы оценить целесообразность инвестиций, достаточно подсчитать один из показателей: NPV или PI. Мы подсчитаем оба.

$$\mathrm{NPV}=\$\left(-160000+30000\frac{1{,}15^{15}-1}{0{,}15\cdot 1{,}15^{15}}\right)=\$\,15\,421.$$

$$\mathrm{PI}=\frac{\mathrm{NPV}+160\,000}{160\,000}=1{,}096\quad[109{,}6\%].$$

Вывод: поскольку $\mathrm{NPV}>0$ $[\mathrm{PI}>1]$, инвестиции целесообразны.

Пример 4.3. Для каждого из проектов (A,B,C) рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения равна 20 %. Сделайте вывод о целесообразности капиталовложения.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	– 370	–	–	–	–	1000			
B	– 100	50	80						
C	– 50	–	–	–	60	–	–	–	100

Решение.

Проект A. Имеем $K=370$, $R_5=1000$, $n=5$, $r=0{,}2$. Применяем формулы (4.1), (4.3). Находим

$$\mathrm{NPV}=-370+\frac{1000}{1{,}2^5}=32;\quad \mathrm{PI}=\frac{32+370}{370}=1{,}09.$$

Поскольку $\mathrm{NPV}>0$ $(\mathrm{PI}>1)$, инвестиции в случае A целесообразны. Для нахождения внутренней нормы доходности составляем уравнение (4.5):

$$370=\frac{1000}{(1+\mathrm{IRR})^5},$$

откуда находим внутреннюю норму доходности $\mathrm{IRR}=0{,}22$ [22%]. Ввиду того, что проект оказался эффективным, $\mathrm{IRR}>r$.

Проект B. Имеем $K=100$, $R_1=50$, $R_2=80$, $n=2$.

$$\mathrm{NPV}=-100+\frac{50}{1{,}2}+\frac{80}{1{,}2^2}=-2{,}8<0;\ \mathrm{PI}=0{,}972<1.$$

Капиталовложения нецелесообразны. Убедимся, что $\mathrm{IRR} < 0{,}2$. Квадратное уравнение (4.7): $100x^2 - 50x - 80 = 0$ имеет лишь один положительный корень $x = 1{,}179$, откуда находим $\mathrm{IRR} = 0{,}179\,[17{,}9\%]$.

Проект C. Имеем $K = 50$, $R_4 = 60$, $R_8 = 100$, $n = 8$.

$$\mathrm{NPV} = -50 + \frac{60}{1{,}2^4} + \frac{100}{1{,}2^8} = 2 > 0;\ \mathrm{PI} = 1{,}04 > 1.$$

Проект принимается к рассмотрению. Для нахождения IRR преобразуем уравнение (4.5):

$$50 = \frac{60}{(1+\mathrm{IRR})^4} + \frac{100}{(1+\mathrm{IRR})^8}$$

к квадратному уравнению

$$50x^2 - 60x - 100 = 0,$$

обозначив через $x = (1+\mathrm{IRR})^4$. У последнего уравнения только один положительный корень $x = 2{,}14$, следовательно, $\mathrm{IRR} = 0{,}209$ [20,9%].

Если инвестиционный процесс бесконечен, $R_t = R$, $t = 1, 2, \ldots$, то для подсчёта NPV используются формулы

$$\mathrm{NPV} = -K + \frac{R}{r},\quad \mathrm{PI} = \frac{R}{K\cdot r},\quad \mathrm{IRR} = \frac{R}{K}. \tag{4.9}$$

Пример 4.4. На строительство магазина нужно затратить сразу \$10 000, а затем он неограниченно долго будет давать доход \$ 2000 в год. Ставка приведения 8 %. Определить характеристики данного проекта.

Решение. В нашем случае $K = \$10\,000$, $R = \$\,2000$, $r = 0{,}08$. Из формул (4.8) находим

$$\mathrm{NPV} = \$\left(-10000 + \frac{2000}{0{,}08}\right) = \$\,15\,000;\ \mathrm{PI} = 2{,}5\ [250\%],$$

$$\mathrm{IRR} = \frac{2000}{10000} = 0{,}2\,[20\%].$$

Можно сделать вывод, что инвестиции целесообразны, поскольку $\mathrm{NPV} > 0$, $\mathrm{PI} > 1$.

При сравнении различных возможностей инвестирования будем ориентироваться на индекс доходности PI (или NPV), поскольку внутренняя норма доходности часто определяется неоднозначно и не может служить надёжным критерием.

Чем выше индекс доходности (или чистый приведённый доход), тем при прочих равных условиях проект привлекательнее для инвестирования.

Пример 4.5. Какой из альтернативных проектов капиталовложений A или B предпочтительнее, если ставка приведения 8 % годовых.

t	0	1	2	3	4
A	−300	110	140	120	
B	−300	100	100	100	100

Решение. Используя формулы (4.3) и (4.4), считаем в обоих случаях индекс доходности:

$$\mathrm{PI}_A = \frac{1}{300}\left(\frac{110}{1{,}08} + \frac{140}{1{,}08^2} + \frac{120}{1{,}08^3}\right) = 1{,}057,$$

$$\mathrm{PI}_B = \frac{100}{300} \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08 \cdot 1{,}08^4} = 1{,}10.$$

Поскольку $\mathrm{PI}_A < \mathrm{PI}_B$, то выбираем проект B.

Задачи

35. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения 15%.

t	0	1	2	3	4
$-K$	-200				
R_t		150	80	50	25

Ответ: 3 года.

36. Проект, рассчитанный на 15 лет, требует инвестиций в размере $\$150000$. В первые 5 лет никаких поступлений не ожидается. Однако в последующие 10 лет чистый доход составит $\$50000$ в год. Следует ли принять этот проект, если ставка приведения составляет 15%?

Ответ: $\mathrm{PI} = 0{,}83$. Проект отвергается.

37. Величина требуемых инвестиций по проекту равна $\$18000$. Предполагаемые доходы: в первый год – $\$1500$, в последующие 8 лет – ежегодно по $\$3600$. Оценить целесообразность принятия проекта, если ставка приведения 10%.

Ответ: $\mathrm{PI} = 1{,}05 > 1$. Целесообразно.

38. Для каждого из следующих проектов инвестиций рассчитайте NPV, PI, IRR, если ставка приведения 25%. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

t	0	1	2	3	4	5
A	-100	–	30	–	200	
B	-350	–	–	–	–	1000
C	-300	250	150			

Ответ: A – целесообразно, B, C – нецелесообразно.

39. Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделайте выбор при годовой ставке приведения: а) 8%; б) 15%.

t	0	1	2	3
A	-100	90	45	9
B	-100	10	50	100

Ответ: а) выбор B; б) выбор A.

40. Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделайте выбор, если ставка приведения 10% годовых.

t	0	1	2	3
A	– 100	50	70	
B	– 100	30	40	60

Ответ: B.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В банк вносится 10 тыс. руб., а затем ежемесячно взнос возрастает на 1 тыс. руб. По истечении двух лет вклад изымается вместе с начисленными сложными процентами 10 % годовых (начисление процентов ежемесячное). Все эти деньги вкладываются в ценные бумаги, по которым бесконечно долго будет выплачиваться по 10 тыс. руб. в конце каждого года. Оценить целесообразность инвестирования. Рассчитать чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности.

2. Инвестор Р. имеет € 10 тыс. и рассматривает три альтернативные возможности инвестирования денег при ставке приведения 10 %:

1) вложить деньги в освоение целинных земель, с которых через 1 год можно будет получать по € 3 тыс. в конце каждого из последующих 5 лет;

2) купить вексель за € 10 тыс. номиналом € 13,5 тыс. сроком погашения через 3 года;

3) купить привилегированные акции стабильного предприятия, ежегодно приносящие дивиденды € 1 тыс. неограниченно долго.

Ответ: первый вариант.

3. По 3-месячному вкладу банк предлагает клиенту платить 8 % годовых, используя схему простых процентов. Затем с банком заключается дополнительное соглашение, согласно которому вклад пролонгируется до востребования, причём расчёты будут производиться по схеме сложных процентов. Определите размер ставки по сложным процентам, которая позволит клиенту получить предусмотренную первоначальным договором сумму в случае, если он изъявит желание снять деньги через 3 месяца.

4. Оценить целесообразность инвестирования 15 000 евро в строительство жилого помещения, которое планируется сдавать в аренду 36 лет, при условии, что годовая рента составляет 1 550 евро и первый платёж поступит через 1 год, а ставка приведения 10 % годовых. Измениться ли результат, если считать, что рента будет длиться бесконечно долго?

Ответ: нецелесообразно, изменится.

5. Частный предприниматель A согласен отгрузить предприятию B стройматериалы на сумму 500 тыс. руб. с условием, что предприятие B каждый год (в конце года) в течение 5 лет будет возвращать по

150 тыс. руб. (сложные проценты включены в эту сумму). Какую минимальную сложную процентную ставку по срочным вкладам должен объявить банк, чтобы частный предприниматель *А*, выручив 500 тыс. руб. от продажи стройматериалов третьему лицу, вложил их в банк на срок 5 лет (стройматериалы пользуются спросом и реализовать их на указанную сумму вполне реально)?

6. Г-н X взял в банке льготный кредит на возведение здания под частную клинику 10 млн руб. и заключил с банком договор, согласно которому в течение следующих 10 лет он будет получать ежегодно по 5 млн руб. (в конце года) под 10 % годовых по сложным процентам. Сразу после получения четвёртого займа 5 млн руб. (через 4 года) служба экономической безопасности при проверке состояния дел заёмщика обнаружила, что на полученные от банка деньги был оснащён таксопарк, с которого г-н X получает весьма солидные доходы, ежегодно расширяя деятельность. За нецелевое использование средств банк решил расторгнуть договор, взыскав с заёмщика всю сумму кредита и проценты на сегодняшний момент, а также все проценты, которые заёмщик должен был уплатить за остальные 6 лет по договору. Определить причитающуюся к возврату сумму, а также сумму, которую должен был заплатить заёмщик, если бы расторжение контракта произошло без наложения штрафных санкций.

Ответ: 46,15 млн руб., 37,85 млн руб.

7. Ежемесячно (с 1 октября) на пластиковую карту WDBбанка г-ну X поступает 12 тыс. руб. Через 6 месяцев он снимает 25 тыс. руб., а ещё через 2 месяца снимает 50 тыс. руб. Через 2 года с начала отсчёта г-н X фиксирует остаток на карте. Сколько денег накопится на карте к этому времени, если банк начисляет сложные проценты ежемесячно (для определённости, считать, что проценты начисляются в последний день текущего месяца, в феврале 28 дней) на следующих условиях:

1% годовых, если длительность депозита более 5 календарных дней,

8% годовых, если длительность депозита более 93 календарных дней,

10% годовых, если длительность депозита более 183 календарных дней.

8. На строительство жилого дома нужно затратить сразу € 50 млн. Квартиры планируется сдавать в долгосрочную аренду. Чистый ежегодный доход от сдачи в аренду квартир оценивается в размере € 6 млн. Срок службы дома 64 года. Оценить целесообразность капиталовложений, если ставка приведения 10 %. Существенно ли изменятся показатели эффективности капиталовложений, если считать, что дом будет служить бесконечно долго?

Ответ: целесообразно.

9. Инфляция прогрессировала за 10 лет следующими темпами: 8, 9, 10, 10, 9, 8, 8, 9, 8, 8 % соответственно. Какую минимальную ставку должен назначить банк, чтобы вкладчик, вложив деньги в начале срока, сохранил их через 10 лет.

10. Арендодатель сдаёт коттедж на 10 лет с условием оплаты в начале каждого квартала. Первый платёж составляет 50 тыс. руб. Ежеквартально арендные платежи увеличиваются на 2 тыс. руб. Оценить сегодняшнюю стоимость будущих доходов арендодателя, если ставка приведения за это время в среднем составляла 9 % годовых по сложным процентам.

Указание: рассчитайте процентную ставку, эквивалентную исходной, для ежеквартального начисления сложных процентов и воспользуйтесь формулами (2.13), 10 лет эквивалентно 40 кварталам.

11. На обучение новой профессии нужно затратить 5 лет (в течение этого времени человек будет заниматься только учёбой). При прежней квалификации работник получал в месяц 5 тыс. руб. После получения диплома заработная плата возрастёт до 12 тыс. руб. в месяц. Оценить финансовую целесообразность такого образования, если человек будет работать по окончании обучения не менее 30 лет, если ставка приведения 10 % годовых.

12. В одном банке за использование денег клиента по пластиковой карте ежегодно начисляют сложные 2 %, а в другом банке – ежемесячно сложные 0,18 %. В каком банке держать кредит?

Ответ: выгоднее по второму варианту.

13. На оформление и оснащение автостоянки затрачивается сразу 150 тыс. руб., а затем через 1, 2, ..., 7 лет чистые доходы от стоянки составят соответственно 70, 60, ..., 10 тыс. руб. Найти дисконтный срок окупаемости такого проекта, если ставка приведения составляет 18 % годовых.

Указание: поскольку чистый приведённый доход становится положительным через 4 года ($NPV(4) = 3{,}47$ тыс. руб.), то за такой срок проект окупится.

14. Ежемесячно оплата за коммунальные услуги составляет 1 100 руб. и в течение года не меняется. В следующем году ежемесячно платежи возрастали на 150 руб. В следующем году размер тарифа не менялся. Оценить текущую стоимость всех коммунальных платежей, если процентная ставка в первом году составляла в среднем 15 % годовых, во втором и третьем годах – 12 % годовых.

15. Инвестиционный проект рассчитан на три этапа.

Первый этап продолжается в течение 5 лет, и в начале каждого года нужно инвестировать 10, 20,..., 50 млн руб. соответственно, и первый чистый доход будет получен в конце 5-го года в размере 150 млн руб. Для первого этапа ставку приведения считать в среднем 15 %.

Второй этап продолжается 4 года, в начале первого года нужно вложить 150 млн руб. для приобретения нового оборудования, а затем в конце

3-го и 4-го годов будут получены чистые доходы по 190 млн руб. Для второго этапа ставка приведения составляет 10 %.

На третьем этапе вначале первого года нужно инвестировать 209 млн руб., и затем в течение 3-х лет (в конце года) будут поступать чистые доходы по 125 млн руб., ставка приведения 9 %. Оценить целесообразность всего проекта и относительную эффективность каждого этапа.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1

1. На вклад в банке в размере Ф1 млн руб. сроком на Ф2 банк начисляет Ф3 % годовых. Какая сумма накопится на счёте к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, млн руб.	2	3	1	5	10
Ф2, лет	5	6	4	2	3
Ф3, %	8	9	15	25	30

2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: а) Ф1 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; б) Ф2 % годовых при начислении сложных процентов ежеквартально.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, %	15	20	35	30	12
Ф2, %	12	18	30	28	11

3. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке Ф1% годовых: Ф2 тыс. руб., получаемые через Ф3 года или Ф4 тыс. руб., получаемые через Ф5 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, %	20	15	8	10	30
Ф2, тыс. руб.	100	250	180	500	300
Ф3, лет	1	2	3	2	2
Ф4, тыс. руб.	160	200	200	600	400
Ф5, лет	3	1	4	3	4

4. Долг в сумме Ф1 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение Ф2 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке Ф3 % годовых. Составить план погашения.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, тыс. руб.	2	3	1	5	10
Ф2, лет	5	6	4	2	3
Ф3, %	8	9	15	25	30

5. Для следующего инвестиционного проекта:

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
K, ден. ед.	*100*	*200*	*400*	*300*	*500*
*R*1, ден. ед.	100	150	300	200	400
*R*2, ден. ед.	100	100	300	350	300

рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

ЗАДАНИЕ 2

1. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы Ф1. Вексель предьявлен Ф2. Банк согласился учесть вексель с дисконтом Ф3% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, дата	25.06.07	12.07.07	30.08.07	20.08.07	29.09.07
Ф2, дата	11.06.07	01.07.07	20.08.07	30.07.07	05.09.07
Ф3, %	70	80	70	80	70

2. В течение Ф1 лет ежегодно по схеме пренумерандо делается взнос в банк Ф2 тыс. долл. с начислением сложных процентов Ф3 % годовых. Чему равна сумма к получению в конце периода?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, лет	3	4	5	8	4
Ф2, тыс. долл.	200	300	500	100	150
Ф3, %	8	9	10	10	11

3. Каков Ваш выбор: а) получение Ф1 тыс. евро через 2 года или б) получение Ф2 тыс. евро через 4 года, если годовой коэффициент дисконтирования (используется схема сложных процентов) равен Ф3 %. При каком значении коэффициента дисконтирования выбор безразличен?

Данные \ Вариант	а	б	в	г	д
Ф1, тыс. евро	30	20	10	5	50
Ф2, тыс. евро	40	30	30	8	70
Ф3, %	10	11	12	10	9

4. Вы заняли 500 тыс. долл. на 4 года под Ф % годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток долга. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения долга.

Данные \ Вариант	а	б	в	г	д
Ф, %	12	15	18	20	10

5. Проект, требующий инвестиций в размере 100 тыс. долл., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. долл. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна Ф% годовых.

Данные \ Вариант	а	б	в	г	д
Ф, %	10	15	8	12	11

ЗАДАНИЕ 3

1. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 2 млн руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 15 % годовых, а период наращения Ф дней.

Данные \ Вариант	а	б	в	г	д
Ф, дней	20	180	500	100	200

2. Господин X желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 7000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 16 лет, и установила процентную ставку Ф% годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф, %	6	8	10	12	14

3. Платежи в 2 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм соответственно через Ф1, Ф2 и Ф3 лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года 6 месяцев с использованием сложной ставки 20 % годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, лет	2,5	1,5	2,5	2,5	1,5
Ф2, лет	3	3	3	4,5	4,5
Ф3, лет	4,5	4,5	5,5	5,5	5,5

4. Решено вложить в банк Ф1 млн руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке Ф2 % в год. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне Ф3 %. Какова наращённая сумма с учётом её обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, млн руб.	4	5	6	3	8
Ф2, %	23	28	14	18	16
Ф3, %	10	12	8	11	9

5. Долг в сумме 800 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение Ф1 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке Ф2 % годовых. Составьте план погашения.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, лет	5	6	4	7	8
Ф2, %	10	20	15	12	8

ЗАДАНИЕ 4

1. Сумма 2 млн руб. вложена в банк под Ф1% годовых. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через Ф2 лет владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, %	10	20	30	35	25
Ф2, лет, мес.	3 года 8 мес.	2 года 3 мес.	2 года 5 мес.	3 года 1 мес.	4 года 2 мес.

2. Стоит ли покупать за $ 2 000 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ Ф1 в течение 4 лет, если годовой дисконт по сложным процентам составляет Ф2% годовых?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, долл.	600	650	800	700	750
Ф2, %	8	10	12	14	13

3. Г-н X вносит на счёт 10 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в течение Ф1 лет ежеквартально (пренумерандо). Сколько накопится к концу срока (через Ф1+1 лет), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта Ф2% годовых?

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф1, лет	3	4	3	4	3
Ф2, %	10	8	12	10	8

4. Вы заняли на 4 года $ 6 000 под Ф% годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
Ф, %	10	20	25	15	12

5. Для следующего инвестиционного проекта:

Вариант / Данные	а	б	в	г	д
K, ден. ед.	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*
$R1$, ден. ед.	200	100	–	–	110
$R2$, ден. ед.	10	200	300	200	600
$R3$, ден. ед.			–	–	
$R4$, ден. ед.			400	500	

рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

Краткий словарь используемых терминов

Активная операция – операция по размещению средств, в частности, вложение денег в ценные бумаги (в процессе изложения термин «актив» означает «ценная бумага», хотя в бухгалтерском учёте этот термин значительно шире).

Акционерное общество – это коммерческая организация, уставный капитал которой разделён на определённое число акций, удостоверяющих обязательственные права участников общества (акционеров) по отношению к обществу.

Акция – именная ценная бумага, закрепляющая право её владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества (АО) в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом (если это обыкновенная акция) и на часть имущества, остающегося после ликвидации АО. Этот вид ценных бумаг наиболее распространён.

Брутто-ставка – процентная ставка, включающая инфляционные ожидания, выше реальной ставки.

Вексель – документ, содержащий безусловное обязательство векселедателя выплатить векселедержателю определённую сумму денег к определённому моменту (обычно вексель выдаётся в качестве оплаты за поставленный товар).

Величиной потока в момент времени t_k называется сумма платежей потока, дисконтированных или наращенных к этому моменту времени.

Внутренней нормой доходности инвестиционного процесса называется процентная ставка, при которой чистый приведённый доход по проекту равен нулю.

Деньги – это товар особого рода, являющийся всеобщим эквивалентом.

Депозитный сертификат – это свидетельство банка о приёме денежных средств вкладчика, представляющее собой двустороннее обязательство вкладчика (не изымать деньги некоторое время) и банка (уплатить через этот срок достаточно высокий процент по вкладу).

Диверсификация – распределение, рассредоточение вложений капитала.

Дисконтный срок окупаемости – это минимальный срок, при котором чистый приведённый доход неотрицателен.

Доходность по ценным бумагам – это доход на единицу вложенных средств за единицу времени.

Инвестиционный проект – это план или программа мероприятий, связанных с осуществлением капиталовложений с целью их последующего возмещения и получения прибыли.

Инвестиционный процесс – это поток платежей, в котором инвестиции (капиталовложения) отрицательны, а доходы положительны.

Индексом доходности называется отношение современной стоимости чистых доходов от инвестиций к современной стоимости осуществляемых капиталовложений.

Индоссамент – это передаточная надпись на оборотной стороне векселя, фиксирующая переход права требования по векселю от одного лица к другому.

Конъюнктура – текущее соотношение спроса и предложения на рынке.

Котировка ценных бумаг – это определение курса их покупки и продажи на определённый момент времени, то есть определение наивысшей цены, предлагаемой за ценную бумагу покупателем, и наименьшей цены, по которой продавец готов её уступить.

Курс ценной бумаги – рыночная цена этой ценной бумаги.

Ликвидность – способность предприятия в полной мере и в установленный срок выполнить свои обязательства.

Лицами, принимающими решение, называются руководители, инвесторы, кредиторы и прочие юридические и физические лица, способные влиять на финансовое состояние предприятия и заинтересованные в этом.

Мультиплицирующим множителем называют величину, на которую умножается начальная сумма $S(0)$ для получения конечной суммы $S(T)$ в формулах (1.2) – (1.4). Обратная величина называется *дисконтирующим множителем*.

Облигация – одностороннее обязательство эмитента вернуть через определённый срок номинальную стоимость плюс проценты, это форма займа, не предполагающая движения товара, к которой приходится прибегать государству, органам местной власти и предприятиям при наличии временных финансовых трудностей.

Поток платежей – это последовательность *величин* самих *платежей* (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Поток положительных платежей с постоянными промежутками времени между ними называется *рентой*. Рента с одинаковыми платежами в каждый период времени носит название *аннуитет*. Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то аннуитет носит название *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*.

Приведение денежной суммы, относящейся к моменту T_0, к новому моменту T означает, что эта сумма наращивается по схеме простых или сложных процентов при $T_0 < \mathrm{T}$ и дисконтируется при $T_0 > \mathrm{T}$, причём период операции составляет $|T - T_0|$.

Срочной уплатой по обслуживанию долга в году t называется годовая сумма, которую заёмщик возвращает кредитору в этом году, включающая часть погашения основной суммы долга и процентов.

Учёт векселей представляет собой оплату банком собственного векселя до наступления срока платежа, то есть векселедержатель передаёт (продаёт) вексель банку по индоссаменту до наступления срока платежа и получает за это вексельную сумму за вычетом (за досрочное получение) определённого процента от этой суммы, так называемого бисконта. Каждый банк, учитывая векселя, устанавливает размер дисконта избирательно в зависимости от векселедержателя, предъявившего вексель к учёту.

Цена – денежное выражение стоимости.

Ценные бумаги – это особым образом оформленные документы или записи в системе ведения реестра ценных бумаг (при бездокументарной форме), свидетельствующие о правах их владельца на определённое имущество или денежную сумму.

Чистым приведённым доходом называется современная величина разности между доходами от инвестиций и вложениями капитала.

Эквивалентными называются платежи, которые, будучи «приведёнными» к одному моменту времени, оказываются равными.

Экономическим агентом назовём участника экономических отношений, обладающего некоторым набором экономических ресурсов, имеющего сформированную систему предпочтений и вступающего в товарно-денежные отношения с определённой целью. Основными экономическими агентами являются потребители, покупающие товары для наиболее полного удовлетворения своих потребностей, фирмы-товаропроизводители, приобретающие производственные ресурсы в таком количестве, чтобы произвести и продать продукцию с максимальной прибылью, а также инвесторы, кредиторы и контрольные органы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Рынок ценных бумаг / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. М.: Финансы и статистика, 2006.

Дудов С.И., Сидоров С.П. Курс математической экономики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002.

Первозванский А.А., Первозванская Т.М. Финансовый рынок: расчёт и риск. М.: Инфра-М, 1994.

Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: Юнити, 2000.

Ковалёв В.В. Сборник задач по финансовому анализу. М.: Финансы и статистика, 2001.

Финансовое управление фирмой / Под ред. В.И. Терехина М.: Экономика, 1998.

Балабанов И.Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту. М.: Финансы и статистика, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Выгодчикова Ирина Юрьевна

ПРОЦЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Учебное пособие
для студентов экономико-математических специальностей

Ответственный за выпуск О. Л. Багаева
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор Е. Б. Крылова
Оригинал-макет подготовлен О. Л. Багаевой

Подписано в печать 29.05.2008. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,79(3). Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 150 экз. Заказ 50.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.