

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Декан механико-математического
факультета
А.М. Захаров
"11" сентября 2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры




Направление подготовки магистратуры
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки магистратуры
Математические основы компьютерных наук

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
очная

Саратов,
2024

Статус	ФИО	Подпись	Дата
Преподаватель-разработчик	Кокин Е.А.		11.09.24
Председатель НМК	Тышкевич С.В.		11.09.24
Заведующий кафедрой	Поплавский В.Б.		11.09.24
Специалист Учебного управления			

1. Цели освоения дисциплины

В рамках дисциплины «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» на основе интеграции математического знания осуществляется введение в геометрические основания теоретической физики. Основным объектом изучения в указанном курсе являются геометрические структуры, определяемые на гладких многообразиях. Основы теории гладких многообразий излагаются в курсе «Гладкие многообразия и управляемые системы», основное содержание которого составляет «локальная» теория дифференцируемых многообразий, связанная с изучением тех свойств, которые присущи каждому гладкому многообразию. В дисциплине «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» предметом изучения являются геометрические структуры, определяемые на дифференцируемых (гладких) многообразиях и представляющие собой геометрические аналоги физических объектов. Под геометрической структурой (G-структурой) понимается редукция полной линейной группы к ее подгруппе. По мнению Ш. Кобаяси не все геометрические структуры сотворены равными: некоторые геометрические структуры являются творениями природы, в то время как другие – продуктом человеческого разума. К первому типу относится риманова структура, которой будет посвящена значительная часть курса. Все изучаемые нами структуры (риманова, симплектическая, контактная и др.) снабжаются совместимыми с ними линейными связностями. Линейная связность на дифференцируемом многообразии представляет собой дополнительную структуру (дополнительная структура – это такая структура, которая не возникает на многообразии непосредственно в силу присущих многообразию свойств, а определяется исследователем исходя из исследовательских задач, при этом задание дополнительной структуры представляет собой самостоятельную проблему, не разрешимую в ряде случаев), которую геометрически можно описать как параллельный перенос касательных векторов. Если в линейном пространстве имеется естественное понятие касательных векторов, то для произвольного гладкого многообразия вопрос о том, параллельны ли векторы, касательные к многообразию, но имеющие разные начальные точки, не имеет смысла. В общем случае параллельный перенос зависит от пути, вдоль которого он осуществляется. Исследуя в начале двадцатого века движение точки по поверхности в отсутствии внешних сил, Леви-Чивита построил параллельный перенос касательного вектора. Существуют разные подходы к определению линейной связности. Построение теории связностей в рамках главного расслоения основано на использовании аппарата групп Ли. Другое важное определение ковариантного дифференцирования – дифференцирование по Кошулю – предлагается освоить студентам в процессе выполнения самостоятельной работы.

Основная цель дисциплины «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» состоит в ознакомлении студентов с основными

понятиями и фактами теории многообразий, наделенными геометрическими структурами.

Задачи дисциплины «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры»:

- сформировать у студентов представление о геометрических методах, основанных на использовании аппарата расслоенных пространств;
- сформировать у студентов умение применять методы дифференциальной геометрии многообразий в смежных областях: дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, классическая механика и др.;
- сформировать у студентов готовность применять геометрические методы для построения математических моделей в теоретической физике.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины (модули)» (Б1.О.11) учебного плана ООП магистратуры по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профилю «Математические основы компьютерных наук». На ее изучение отводится 216 часов (48 ч. аудиторной работы, 114 ч. СР, 54 ч. контроль). Согласно учебному плану направления и профиля подготовки данный курс во втором семестре заканчивается экзаменом.

Дисциплина «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» существенно опирается на материал таких курсов как линейная алгебра и геометрия, топология, теория дифференциальных уравнений, гладкие многообразия и управляемые системы. В свою очередь, данная дисциплина может служить введением в такие области знаний, как риманова геометрия, симплектическая геометрия, теория относительности, классическая механика, вариационное исчисление, группы и алгебры Ли и др. Дисциплина «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» необходима для освоения таких дисциплин, как «Ассоциативные алгебры» и «Группы, порожденные отражениями», также используется в научно-исследовательской работе магистранта, при написании курсовых и магистерских работ.

3. Результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции	Результаты обучения
ОПК-2 Способен создавать и исследовать новые	1.1_М.ОПК-2. Создает и исследует новые математические модели в естественных науках.	Знать: - общие идеи изучения пространственных моделей дифференциально-геометрическими методами;

<p>математически е модели в естественных науках, совершенствов ать и разрабатывать концепции, теории и методы</p>		<p>- геометрические методы, применяемые в построении математических моделей в естественных науках. Уметь: - использовать геометрические методы в классической механике и других разделах теоретической физики; - применять геометрическое и вычислительное моделирование в решении задач смежных и прикладных областей. Владеть: - методами геометрического моделирования при решении профессиональных задач.</p>
	<p>2.1_М.ОПК-2. Используя методы математического моделирования, находит эффективные решения научных и прикладных задач.</p>	<p>Знать: - методы дифференциальной геометрии и ее применение в решении научных и прикладных задач. Уметь: - применять методы дифференциальной геометрии в решении научных и прикладных задач. Владеть: - навыками применения методов дифференциальной геометрии в решении научных и прикладных задач.</p>
	<p>3.1_М.ОПК-2. Совершенствует и разрабатывает методы математического моделирования, оценивает пригодность модели, ее соответствие практике.</p>	<p>Знать: - методы геометрического и вычислительного моделирования, Уметь: - совершенствовать и разрабатывать методы геометрического и вычислительного моделирования; - оценивать пригодность математической модели, ее соответствие практике. Владеть: - навыками разработки модели методами геометрии.</p>
<p>ПК-1 Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирова</p>	<p>1.1_М.ПК-1. Понимает основные концепции, принципы, теории и факты в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.</p>	<p>Знать: - основные понятия дифференциальной геометрии многообразий, римановой и симплектической геометрии; - основные задачи, решаемые на многообразиях с дополнительными структурами. Уметь: - работать с основными геометрическими структурами. Владеть: - понятийным аппаратом теории дифференцируемых многообразий;</p>

ния и информационн ых технологий.		- навыками решения задач из различных областей математики, которые требуют знаний из теории дифференциальной геометрии многообразий.
	2.1_М.ПК-1. Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности.	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основные задачи геометрического и вычислительного моделирования в теоретической физике; <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - формулировать и решать задачи в собственной научно-исследовательской деятельности, используя теорию современной дифференциальной геометрии. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками использования современного геометрического аппарата в научно-исследовательской деятельности - навыками решения задач и проблем из различных областей математики, которые требуют знаний из теории выпуклого анализа.
	3.1_М.ПК-1. Проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук.	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - применение геометрического и вычислительного моделирования в области математики и компьютерных наук; - новые научные результаты в области современной дифференциальной геометрии и ее приложений. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук, используя аппарат современной дифференциальной геометрии и ее приложений. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками научно-исследовательской работы в области современной дифференциальной геометрии и ее приложений.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины «Прикладные аспекты топологии, геометрии и алгебры» составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
				лекции	Пр.занятия		КСР	СР	Контроль	
					Общая трудоемкость	Из них - практическая подготовка				
1	Тема 1. Гладкие многообразия.	2	1,3 / 1,2	3	4			20		Опрос, проверка домашнего задания
2	Тема 2. Связности в главном расслоенном пространстве.	2	3,5 ,7/ 3-6	4	8			20		Опрос, проверка домашнего задания
3	Тема 3. Геометрия G-структур.	2	7,9 / 7-9	3	6			24		Опрос, проверка домашнего задания
4	Тема 4. Риманова структура.	2	11, 13/ 10- 12	3	6			24		Опрос, проверка домашнего задания
5	Тема 5. Симплектические и контактные многообразия.	2	13, 15/ 13- 15	3	6			24		Опрос, проверка домашнего задания
6	Контрольная работа	2	16		2			2		Контрольная работа по темам 1-5.
	Промежуточная аттестация	2							54	Экзамен, Контрольная работа
	ИТОГО (216 ч.)	2		16	32	0	0	114	54	

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Гладкие многообразия

Частичные диффеоморфизмы арифметического пространства. N-мерные карты и n-мерные атласы. Дифференцируемая структура. Топология, индуцированная дифференцируемой структурой. Примеры дифференцируемых многообразий. Морфизмы гладких многообразий. Касательные векторы и касательные пространства. Касательные линейные отображения. Подмногообразия. Касательное и кокасательное расслоения.

Скобка Ли векторных полей. Производная Ли векторных полей. Дифференциальные формы. Внешний дифференциал. Теорема Фробениуса.

Тема 2. Связности в главном расслоенном пространстве.

Понятие главного расслоения. Фундаментальные векторные поля на главном расслоении. Редукция структурной группы расслоения к её подгруппе. Необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения.

Пространство касательных реперов к дифференцируемому многообразию. Пространство $R(x)$ как дифференцируемое многообразие. Действие полной линейной группы на $R(x)$. Тензориальные функции и тензориальные формы на $R(x)$. Каноническая тензориальная форма на $R(x)$. Теорема о разложении тензориальной формы по каноническим формам. Фундаментальные векторные поля на $R(x)$. Определение связности в главном расслоении. Форма связности. Горизонтальный лифт векторного поля. Существование и продолжение связностей. Параллелизм.

Ковариантное дифференцирование. Выражение ковариантной производной координатах. Ковариантная производная тензорного поля вдоль вектора и ее свойства. Связь с определением по Кошулю. Преобразование коэффициентов связности. Абсолютная производная тензорного поля вдоль пути. Геодезические пути и линии. Абсолютная производная от тензорной формы и ее связь с ковариантной.

Внешний ковариантный дифференциал. Структурное уравнение. Тождества Бьянки. Кривизна и кручение аффинной связности. Формы кривизны и кручения связности. Структурные уравнения для формы кривизны и кручения. Тензоры кривизны и кручения. Их выражение через коэффициенты связности. Тождество Риччи. Его выражение в координатах. Необходимое и достаточное условие локально аффинного пространства.

Тема 3. Геометрия G-структур.

Определение G-структуры. Примеры G-структур: риманова структура, симплектическая структура, структура почти произведения, почти комплексная структура, почти контактная метрическая структура. Автоморфизмы G-структур. Локально эквивалентные G-структуры. Локально плоские G-структуры. Структурные функции первого порядка. Структурные функции локально плоских G-структур. Продолжения G-структур. Связности на G-структурах.

Тема 4. Риманова структура.

Определение и основные свойства псевдоевклидова и евклидова линейного пространства. Теорема о касательном пространстве в точках аффинного пространства. Определение риманова многообразия, примеры римановых многообразий. Измерение длин дуг, углов между кривыми и объема областей риманова многообразия. Риманова связность. Алгебраические и дифференциальные свойства тензора кривизны риманова многообразия. Определение секционной кривизны. Теорема о связи тензора кривизны и секционной кривизны. Римановы пространства постоянной

кривизны. Теорема Шура. Локально псевдоевклидовы и локально евклидовы многообразия.

Тема 5. Симплектические и контактные многообразия.

Симплектическое пространство. Теорема Дарбу. Билинейные формы. Невырожденность билинейных форм. Признак невырожденности. Теорема (малая) Дарбу. Следствия из нее. Симплектическое линейное пространство. Симплектические базисы. Канонический изоморфизм. Симплектическое многообразие. Примеры: 1) стандартное Симплектические многообразие. 2) Кокасательное расслоенное пространство. Теорема Дарбу. Канонический изоморфизм. Почти контактные метрические пространства. Внутренняя и продолженная связности. Основные примеры почти контактных метрических пространств: многообразия Сасаки, пространства Кенмоцу, почти контактные кэлеровы пространства.

ТЕМЫ И ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Гладкие многообразия

Практическое занятие №1

Основные примеры гладких многообразий: n -мерная сфера, n -мерное проективное пространство, многообразие Грассмана. Специальные векторные поля на касательном и кокасательном расслоениях. Примеры иммерсий и субмерсий.

Практическое занятие №2

Однопараметрические группы преобразований. Дифференциальная система на многообразии. Вполне интегрируемые дифференциальные системы. Теорема Фробениуса. Примеры дифференциальных систем, возникающих на гладких многообразиях: горизонтальное распределение на касательном расслоении многообразия со связностью, распределение почти контактной структуры.

Тема 2. Связности в главном расслоенном пространстве.

Практическое занятие №3

Понятие главного расслоения. Фундаментальные векторные поля на главном расслоении. Редукция структурной группы расслоения к её подгруппе. Необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения. Пространство касательных реперов к дифференцируемому многообразию. Его структура расслоения. Голономные и неголономные локальные сечения. Условие голономности. Пространство $R(x)$ как дифференцируемое многообразие. Действие полной линейной группы на $R(x)$. Главное расслоение касательных реперов. Тензориальные функции и тензориальные формы на $R(x)$. Каноническая тензориальная форма на $R(x)$. Теорема о разложении тензориальной формы по каноническим формам. Фундаментальные векторные поля на $R(x)$.

Практическое занятие №4

Определение связности в главном расслоении. Форма связности. Горизонтальный лифт векторного поля. Существование и продолжение связностей. Параллелизм. Определение аффинной связности на

дифференцируемом многообразии как дифференциальной системы на $R(x)$. Простейшие геометрические свойства аффинной связности. Параллельное перенесение в пространстве аффинной связности A_n . Локально плоская аффинная связность. Необходимое и достаточное условие такой связности.

Практическое занятие №5

Базис векторных полей на $R(A_n)$. Их свойства. Форма связности. Ее характеристические свойства. Локальные формы связности. Коэффициенты связности. Ковариантное дифференцирование. Выражение ковариантной производной координатах. Ковариантная производная тензорного поля вдоль вектора и ее свойства. Связь с определением этой производной с определением по Кошулю. Преобразование коэффициентов связности.

Практическое занятие №6.

Абсолютная производная тензорного поля вдоль пути. Геодезические пути и линии. Абсолютная производная от тензорной формы и ее связь с ковариантной.

Внешний ковариантный дифференциал. Структурное уравнение. Тождества Бьянки. Кривизна и кручение аффинной связности.

Формы кривизны и кручения связности. Структурные уравнения для формы кривизны и кручения. Тензоры кривизны и кручения. Их выражение через коэффициенты связности. Тождество Риччи. Его выражение в координатах. Необходимое и достаточное условие локально аффинного пространства.

Тема3. Геометрия G-структур

Практическое занятие №7.

Редуцируемость связности в главном расслоении к группе голономии. Теорема Амброза-Сингера. Ассоциированные расслоения.

Практическое занятие №8.

Структура абсолютного параллелизма. Дифференциальная система как G-структура. $Sp(n)$ -структура. Почти комплексная структура. Структура почти произведения. Почти контактная метрическая структура.

Практическое занятие №9.

Аutomорфизмы G-структуры. Условия эквивалентности для разных G-структур: обращение в нуль тензора Нейенхейса как условие интегрируемости почти комплексной структуры и структуры почти произведения, обращение в нуль внешнего дифференциала как условие интегрируемости симплектической структуры и т.д.

Тема4. Риманова структура.

Практическое занятие №10.

Псевдоевклидовы пространства Поверхности в трехмерном пространстве как двумерные римановы многообразия. Связность на поверхности и геодезические на ней.

Практическое занятие №11.

Полная кривизна поверхности и теорема Гаусса. Трёхмерные римановы многообразия. Тензор Риччи на них. тождества Бьянки. Тождество Риччи.

Группа Ли преобразований и ее векторное поле.. Производная Ли тензорного поля. Примеры. Свойства производной Ли. Трёхмерная сфера и ее риманова структура.

Практическое занятие №12.

Плоскость Лобачевского и пространство Лобачевского как пространства постоянной кривизны. Смешанные системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. Исследование общего уравнения Киллинга. Случай его полной интегрируемости. Геодезические на римановом многообразии как экстремали вариационной задачи.

Тема 5. Симплектические и контактные многообразия.

Практическое занятие №13.

Кососимметрические билинейные формы. Симплектическое векторное пространство. Специальные подпространства симплектических пространств. Симплектические многообразия. Эквивалентность симплектических структур. Теорема Дарбу.

Практическое занятие №14.

Каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении T^*X . Симплектоморфизмы T^*X . Лагранжевы подмногообразия T^*X .

Практическое занятие №15.

Гамильтоновы векторные поля. Гамильтоновы уравнения. Вполне интегрируемые системы. Теорема Нетер. Отображение моментов.

Практическое занятие №16.

Контрольная работа.

Образцы задач для решения на практических занятиях

1. Проверить, что топология, индуцированная на касательном расслоении – хаусдорфова.

2. Найти условия, при которых горизонтальное распределение на касательном расслоении многообразия со связностью интегрируемо.

3. На R^2 задана связность ∇ , все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma_{12}^2 \equiv 1$. Найти $\nabla_i \omega_{jk}$, где $\omega = dx^1 \wedge dx^2$.

4. Пусть R_{ijk}^l – координаты тензора кривизны римановой связности. Найти $g^{ij} R_{ijk}^l$.

5. На R^2 задана линейная связность $\nabla : \nabla_{\partial_1} \partial_1 = \partial_1, \nabla_{\partial_2} \partial_1 = 0, \nabla_{\partial_1} \partial_2 = 0, \nabla_{\partial_2} \partial_2 = 0$. Найти геодезическую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = (0,0)$ и $\dot{\gamma}(0) = \partial_1$.

6. Найти геодезические линии трехмерной сферы с метрикой, индуцированной из E_4 .

7. Найти производную Ли тензорного поля $\eta = dx^1 \otimes dx^2$ вдоль векторного поля $V = \partial_1 + x^1 \partial_2$. Будет ли это тензорное поле инвариантно относительно потока V ?

8. На R^2 задана связность ∇ , все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma_{11}^1 \equiv 1$, $\Gamma_{12}^2 = x^2$ а) Может ли связность ∇ быть римановой? б) Найти компоненту R_{121}^1 тензора кривизны связности ∇ .

9. Пусть $\gamma(t) = (t, t), t \in [0, 1]$ – геодезическая некоторой линейной связности ∇ на плоскости R^2 . Найти вектор, полученный в результате параллельного переноса вектора $\vec{v} = (1, 1) \in T_{\gamma(0)} R^2$ вдоль γ .

5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

В учебном процессе при реализации компетентного подхода используются активные и интерактивные формы проведения занятий:

1) при проведении лекционных занятий: информационные лекции, проблемные лекции, лекции беседы, лекции дискуссии, лекции с заранее запланированными ошибками.

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором студенты не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала. Преподаватель заранее намечает список вопросов, стимулирующих ассоциативное мышление и установления связей с ранее освоенным материалом.

2) при проведении практических занятий: традиционные занятия, занятия исследования, проблемные ситуации, ситуации с ошибкой.

Практические занятия проводятся на основе реализации метода обучения действием: определяются проблемные области, формируются группы. При проведении практических занятий ставятся следующие цели: применение знаний отдельных дисциплин и креативных методов для решения проблем; отработка у обучающихся навыков взаимодействия в составе коллектива; закрепление основ теоретических знаний.

Проведение некоторых практических занятий основывается на интерактивном методе обучения, при котором обучающиеся взаимодействуют не только с преподавателем, но и друг с другом. При этом доминирует активность обучающихся в процессе обучения. Место преподавателя в интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия.

3) при организации самостоятельной работы студентов: поиск и обработка информации, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий; исследование проблемной ситуации;

постановка и решение задач из предметной области; отработка навыков применения стандартных методов к решению задач предметной области.

Успешное освоение материала курса предполагает большую самостоятельную работу студентов и руководство этой работой со стороны преподавателей. Применяются следующие формы контроля: устный опрос, проверка решения практических задач, контрольная работа.

При проведении лекционных и практических занятий предусматривается использование информационных технологий: пакеты офисных программ (LibreOffice и др.) для создания презентаций, которые могут быть использованы при введении нового материала, а также для быстрого обзора предыдущего теоретического материала к текущему занятию; стандартные пакеты программ для визуализации и решения задач; языки программирования для решения практических заданий.

Для организации самостоятельной работы, а также подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации используется система создания и управления курсами Moodle <http://course.sgu.ru> (Специальный курс 5 (Геометрическое и вычислительное моделирование в теоретической физике)).

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов не могут составлять более 50% аудиторных занятий.

Особенности проведения занятий для граждан с ОВЗ и инвалидностью

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидностью используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

- для слабовидящих:

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- для глухих и слабослышащих:

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов проводится в форме изучения и анализа лекционного материала, изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе, подбора дополнительных источников для извлечения информации, связанной с проблемами, изучаемыми в рамках данной дисциплины и решения задач с дальнейшим их разбором или обсуждением на аудиторных занятиях, подготовки к промежуточной аттестации.

Самостоятельная аудиторная работа студентов проводится в форме самостоятельного решения задач на практических занятиях с дальнейшим их разбором и обсуждением; проведения контрольной работы; поиска решений проблемных ситуаций, предложенных на лекциях и практических занятиях; поиска и устранения ошибок, заложенных в представлении материала преподавателем и допущенных другими студентами.

В процессе изучения материала данной дисциплины и самостоятельной работы студенты получают навыки работы с геометрическими структурами на многообразии, учатся применять теорию связности при решении задач классической механики.

План самостоятельной работы

Разобрать, как вводятся понятия n -мерной карты и n -мерного атласа на множестве в учебнике Новикова С.П., Тайманова И.А. Современные геометрические структуры. М.: Изд-во МЦНМО, 2005. Разобрать примеры: \mathbb{R}^n , n -мерная сфера. Исследовать понятие дифференцируемого многообразия класса C^r . Выполнить следующие упражнения:

1. Доказать, что на сфере нет атласа, состоящего из одной карты;
2. Построить гладкое взаимно однозначное отображение двух гладких многообразий, которое не является диффеоморфизмом;
3. Доказать, что множество всех прямых на плоскости образует гладкое многообразие, которое гомеоморфно листу Мёбиуса.

Разобрать, как вводится понятие морфизма дифференцируемых многообразий в книге Новикова С.П., Тайманова И.А. Современные геометрические структуры. М.: Изд-во МЦНМО, 2005.

Выполнить следующие упражнения:

1. Построить вложения:
 - а) n -мерного тора в арифметическое пространство
 - б) произведения сфер в арифметическое пространство;
2. Доказать, что пара пересекающихся прямых на плоскости не является многообразием;
3. Доказать, что любое гладкое многообразие имеет атлас, у которого каждая карта гомеоморфна евклидову пространству;
4. Построить на двумерном торе атлас из четырех карт.

Выполнить следующие упражнения:

1. Разобрать понятия главного расслоения, фундаментального векторного поля на главном расслоении. Вывести необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения.
2. Исследовать пространство $R(x)$ как дифференцируемое многообразие. Изучить действие полной линейной группы на $R(x)$.
3. Разобрать определение связности в главном расслоении. Изучить свойства формы связности. Доказать теорему о горизонтальном лифте векторного поля. Проверить геометрические свойства аффинной связности. Самостоятельно вывести необходимое и достаточное условие локально-плоской связности.
4. Разобрать определение базиса векторных полей на $R(A_n)$. Изучить их свойства. Исследовать характеристические свойства формы кривизны. Разобрать понятие коэффициентов связности.
5. Разобрать определение ковариантного дифференцирования. Найти выражение ковариантной производной в координатах. Получить формулу преобразования коэффициентов связности. Найти выражение для абсолютной производной от тензорной формы.
6. Разобрать определение внешнего ковариантного дифференциала. Вывести структурное уравнение. Получить тождества Бьянки. Найти выражение тождества Риччи в координатах. Вывести необходимое и достаточное условие локально аффинного пространства.

Выполнить следующие задания:

1. Вспомнить понятие евклидова векторного пространства, и изучить понятие псевдоевклидова векторного пространства и его основные свойства.
2. На примерах изучить понятие риманова и собственно риманова пространства. Познакомиться с основными задачами, которые решаются с помощью римановой метрики.

3. Вспомнить понятие аффинной связности и изучить доказательство теоремы о римановой связности.

4. Вспомнить понятие геодезического пути и выяснить его геометрический смысл для риманова пространства в связи с соответствующей вариационной задачей.

5. Вспомнить формулы Бьянки для пространства аффинной связности и применить их для риманова пространства. Вывести основные свойства тензора кривизны риманова пространства

6. Усвоить понятие секционной кривизны и выяснить ее связь с тензором кривизны.

7. Изучить понятие пространства постоянной кривизны и доказательство теоремы Шура.

8. Изучить понятие производной Ли тензорного поля и вывод ее основных свойств.

9. Усвоить понятие изометрии риманова пространства и группы изометрий.

10. Изучить вывод уравнений Киллинга и исследовать их в случае полной интегрируемости.

Изучить модели пространств постоянной кривизны.

Литература: Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры. М.: Изд-во МЦНМО, 2005.

Примерный вариант контрольной работы

Вариант №1

1. На R^2 задана связность ∇ , все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma_{11}^1 \equiv 1$, $\Gamma_{12}^2 = x^2$ а) Может ли связность ∇ быть римановой? б) Найти компоненту R_{121}^1 тензора кривизны связности ∇ .

2. Найти производную Ли тензорного поля $\eta = dx^1 \otimes dx^2$ вдоль векторного поля $V = \partial_1 + x^1 \partial_2$. Будет ли это тензорное поле инвариантно относительно потока V ?

3. Определить риманову связность и доказать теорему о ней.

4. Определить секционную кривизну и доказать, что задание секционной кривизны однозначно определяет тензор кривизны риманова пространства.

Вариант №2

1. Найти геодезические линии трехмерной сферы с метрикой, индуцированной из E_4 .

2. Показать, что геодезические линии метрики $dt^2 = v(du^2 + dv^2)$ – это параболы на плоскости (u, v) .

3. Определить геодезические пути и доказать теорему о максимальном геодезическом пути. Привести примеры полных и неполных римановых пространств.

4. Вывести уравнение Киллинга. Найти римановы многообразия, имеющие наибольшую группу движений.

Вопросы для текущего контроля успеваемости

1. Дифференцируемая структура в расслоенном пространстве касательных реперов. Действие полной линейной группы в этом многообразии.
2. Необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения.
3. Фундаментальные векторные поля на пространстве реперов. Тензорные функции и тензорные формы на этом многообразии.
4. Аффинная связность как специальная дифференциальная система на пространстве касательных реперов.
5. Существование и продолжение связностей.
6. Параллельное перенесение в пространстве аффинной связности.
7. Базисные векторные поля в пространстве реперов пространства аффинной связности.
8. Коэффициенты связности. Форма связности.
9. Ковариантное дифференцирование как действие базисных векторных полей.
10. Локальное выражение ковариантной производной тензорного поля.
11. Ковариантная производная как абсолютная внешняя производная.
12. Абсолютная производная от тензорного поля, заданного вдоль пути. Геодезические пути и линии.
13. Плоская и локально плоская аффинные связности.
14. Форма кривизны и тензор кривизны связности.
15. Структурные уравнения для формы кривизны.
16. Форма и тензор кручения связности.
17. Структурные уравнения для формы кручения.
18. Тождество Риччи.
19. Тождества Бьянки.
20. Основная теорема об аффинной связности.
21. Понятие главного расслоения. Примеры. Связность в главном расслоении.
22. Форма кривизны связности.
23. Связность в присоединенном расслоении.
24. Определение и основные свойства псевдоевклидова и евклидова линейного пространства.
25. Теорема о касательном пространстве в точках аффинного пространства.
26. Определение риманова многообразия, примеры римановых многообразий. Измерение длин дуг, углов между кривыми и объема областей риманова многообразия.
27. Риманова связность.
28. Алгебраические и дифференциальные свойства тензора кривизны риманова многообразия.

29. Определение секционной кривизны. Теорема о связи тензора кривизны и секционной кривизны.
30. Группа голономии и ее свойства.
31. Определение производной Ли тензорного поля. Свойства производной Ли.
32. Алгебра Ли векторных полей, сохраняющих тензорное поле. Группа изометрий (движений) риманова многообразия и уравнение Киллинга.
33. Римановы многообразия, имеющие наибольшую группу движений.
34. Локально псевдоевклидовы и локально евклидовы многообразия.
35. n -мерная сфера, как пространство постоянной положительной кривизны.
36. Сфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(1, n)$ как пространство постоянной отрицательной кривизны.
37. Определение геодезического пути. Уравнение геодезического пути.
38. Локальные свойства геодезических. Теорема о максимальном геодезическом пути.
39. Экспоненциальное отображение и геодезические координаты.

Вопросы для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

1. Главное расслоение.
2. Редукция структурной группы расслоения к её подгруппе.
3. Дифференцируемая структура в расслоенном пространстве касательных реперов.
4. Необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения.
5. Фундаментальные векторные поля на главном расслоении.
6. Фундаментальные векторные поля на пространстве реперов.
7. Тензорные функции и тензорные формы на многообразии.
8. Определение связности в главном расслоении.
9. Аффинная связность как специальная дифференциальная система на пространстве касательных реперов.
10. Существование и продолжение связностей.
11. Параллельное перенесение в пространстве аффинной связности.
12. Базисные векторные поля в пространстве реперов пространства аффинной связности.
13. Коэффициенты связности. Форма связности.
14. Ковариантное дифференцирование как действие базисных векторных полей.
15. Локальное выражение ковариантной производной тензорного поля.
16. Ковариантная производная как абсолютная внешняя производная.
17. Абсолютная производная от тензорного поля, заданного вдоль пути. Геодезические пути и линии.
18. Плоская и локально плоская аффинные связности.
19. Форма кривизны и тензор кривизны связности.
20. Структурные уравнения для формы кривизны.

21. Форма и тензор кручения связности.
22. Структурные уравнения для формы кручения.
23. Тождество Риччи.
24. Тождества Бьянки.
25. Основная теорема об аффинной связности.
26. Понятие главного расслоения. Примеры. Связность в главном расслоении.
27. Форма кривизны связности.
28. Связность в присоединенном расслоении.
29. Определение и основные свойства псевдоевклидова и евклидова линейного пространства. Теорема о касательном пространстве в точках аффинного пространства.
30. Определение секционной кривизны. Теорема о связи тензора кривизны и секционной кривизны.
31. Определение алгебры Ли векторных полей, сохраняющих тензорное поле. Группа изометрий (движений) риманова многообразия. Уравнение Киллинга.
32. Сфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(1, n)$ как пространство постоянной отрицательной кривизны.

7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

Таблица 1.1 Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
2	10	0	15	15	0	20	40	100

Программа оценивания учебной деятельности студента

2 семестр

Лекции

Посещаемость, активность, умение выделить главную мысль и др.

(от 0 до 10 баллов)

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 3 баллов;
- от 51% до 75% – 6 баллов;
- от 76% до 100% – 10 баллов.

Лабораторные занятия

Не предусмотрены

Практические занятия

Самостоятельность при выполнении работы, активность работы в аудитории, правильность выполнения заданий, уровень подготовки к занятиям и т.д. (от 0 до 15 баллов)

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 5 баллов;
- от 51% до 75% – 10 баллов;
- от 76% до 100% – 15 баллов.

Самостоятельная работа

Качество и количество выполненных домашних работ, правильность выполнения и т.д. (от 0 до 15 баллов)

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 5 баллов;
- от 51% до 75% – 10 баллов;
- от 76% до 100% – 15 баллов.

Автоматизированное тестирование

Не предусмотрено.

Другие виды учебной деятельности

Контрольная работа (от 0 до 20 баллов)

Промежуточная аттестация – от 0 до 40 баллов

Формой промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины в 2 семестре является экзамен, который проводится в виде ответа на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов. Задаются еще два–три дополнительных вопроса из перечня вопросов к промежуточной аттестации. На прохождение аттестации студенту отводится 30 минут.

*При проведении промежуточной аттестации
ответ на «отлично» оценивается от 31 до 40 баллов;
ответ на «хорошо» оценивается от 21 до 30 баллов;
ответ на «удовлетворительно» оценивается от 11 до 20 баллов;
ответ на «неудовлетворительно» оценивается от 0 до 10 баллов.*

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 2 семестр по дисциплине «Специальный курс 5 (Прикладные аспекты топологии. геометрии и алгебры)» составляет **100** баллов.

Таблица 2.2 Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Специальный курс 5 (Прикладные аспекты топологии. геометрии и алгебры)» в оценку (экзамен):

более 85 баллов	«отлично»
от 76 до 85 баллов	«хорошо»
от 60 до 75 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение учебной практики

а) литература:

1. Костюк А.В. Информационные технологии. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник / А. В. Костюк, С. А. Бобонец, А. В. Флегонтов, А. К. Черных. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 604 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/114686>. - ISBN 978-5-8114-4065-8. Книга из коллекции Лань - Информатика.

2. Смирнов В.А. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия : учебное пособие / Смирнов В. А. - Москва : Прометей, 2018. - 172 с. - URL:<http://www.iprbookshop.ru/94414.html>. - ISBN 978-5-907003-42-2. Книга находится в Премиум-версии ЭБС IPRbooks.

3. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. А. Охорзин. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022 - 352 с. - URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=294. - ISBN 978-5-8114-0814-6. Книга из коллекции Лань - Математика. Книга находится в ЭБС "Лань".

4. Федотова Е.Л. Информационные технологии в науке и образовании [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е. Л. Федотова. - 1. - Москва : Издательский Дом "ФОРУМ", 2019. - 335 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=1018730>. - ISBN 9785819908846. Книга находится в ЭБС "ИНФРА-М".



9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные и практические занятия проводятся в аудиториях на 15-20 посадочных мест. В отведенных для занятий аудиториях имеются учебные доски для требуемых визуализаций излагаемой информации.

В ходе лекционных и практических занятий используются учебно-демонстрационные мультимедийные презентации, которые обеспечиваются следующим техническим оснащением:

1. Компьютеры (в комплекте с колонками).
2. Мультимедийный проектор
3. Экран.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС по направлению подготовки 02.04.01 Математика и компьютерные науки и профилю подготовки «Математические основы компьютерных наук».

Автор

доцент кафедры геометрии Кокин Е.А.

Программа актуализирована и утверждена на заседании кафедры геометрии от 11 сентября 2024 года, протокол № 3.