

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ  
Декан механико-математического  
факультета  
Захаров А.М.  
2024 г.



**Алгебраическая геометрия**

Направление подготовки магистратуры

02.04.01 – Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки магистратуры  
**Математические основы компьютерных наук**

Квалификация (степень) выпускника  
**магистр**

Форма обучения  
**очная**

Саратов,  
2024

Статус	ФИО	Подпись	Дата
Преподаватель-разработчик	Водолазов А.М.		2.09.2024
Председатель НМК	Тышкевич С.В.		2.09.2024
Заведующий кафедрой	Водолазов А.М.		2.09.2024
Специалист Учебного управления			

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Алгебраическая геометрия» - познакомить студентов с важнейшим разделом современной математики, который находит приложение, как в разных разделах математики, физики, так и в компьютерных науках, в частности при изучении криптографии на эллиптических кривых и вычислительных аспектах компьютерной алгебры.

Алгебраическая геометрия является одним из наиболее техничных разделов современной математики, вобравшим в себя практически все её новейшие достижения - от топологических методов до классической арифметики и геометрической теории интегрируемых систем. Способность соединить эти направления в единую геометрическую картину обусловила поразительный успех алгебро-геометрических методов в самых разнообразных областях - от математической физики до логики и теории алгоритмов. Целью настоящего курса является изучение основных геометрических конструкций и вычислительных методов современной алгебраической геометрии.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП

Место дисциплины в структуре ООП Дисциплина «Алгебраическая геометрия» относится к дисциплинам по выбору (Б1.В.ДВ.03.01) вариативной части блока 1 «Дисциплины». Дисциплина читается в третьем семестре и, поэтому, является одним из курсов, заканчивающих обучение студентов в магистратуре. С другой стороны, этот курс один из наиболее трудных, ввиду его абстрактности и сложности доказательства основных результатов. Успешное освоение данной дисциплины обеспечивает студента методологией для исследования весьма широкого круга теоретических и прикладных задач.

## 3. Результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции	Результаты обучения
<b>УК-1</b> Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	<b>1.1_М.УК-1.</b> Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними.	<b>Знать:</b> - основные задачи и методы алгебраической геометрии; - <b>Уметь:</b> - анализировать математические проблемы используя методы алгебраической геометрии <b>Владеть:</b> - методами решения задач используя методы алгебраической геометрии навыками анализа математических проблем; - навыками самостоятельного изучения математической литературы по данной

		тематике.
	<b>1.2_М.УК-1.</b> Осуществляет поиск алгоритмов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации. Определяет в рамках выбранного алгоритма вопросы (задачи), подлежащие дальнейшей детальной разработке. Предлагает способы их решения.	<b>Знать:</b> - алгоритмы решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации. <b>Уметь:</b> - выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах, делать обоснованные выводы из учебной литературы; <b>Владеть:</b> – навыками критического анализа информации по алгебраической геометрии
	<b>2.1_М.УК-1.</b> Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности	<b>Знать:</b> – основы планирования целей деятельности. <b>Уметь:</b> – планировать цели деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности. <b>Владеть:</b> – навыками постановки и решения задач в рамках поставленной цели; – навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи
<b>ПК-1</b> Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.	<b>1.1_М.ПК-1.</b> Понимает основные концепции, принципы, теории и факты, в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	<b>Знать:</b> – основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с алгебраической геометрией <b>Уметь:</b> – находить основные концепции, принципы, теории и факты, алгебраической геометрией. <b>Владеть:</b> – основные концепциями, принципами, теорией и фактами, связанными с алгебраической геометрией
	<b>• 2.1_М.ПК-1.</b> Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно- исследовательской деятельности.	<b>Знать:</b> – основные методы решения стандартных задач, связанных с моделями и методами алгебраической геометрией <b>Уметь:</b>

		<p>– применять модели и методы алгебраической геометрии при формулировании и решении стандартных задач в собственной научно-исследовательской деятельности.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>– навыками формулирования и решения стандартных задач, связанных с моделями и методами алгебраической геометрии в собственной научно-исследовательской деятельности</p>
	<p><b>3.1_М.ПК-1.</b> Проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <p>– основные методы проведения научно-работы в области математики и компьютерных наук, основанные на методах алгебраической геометрии.</p> <p><b>Уметь:</b></p> <p>– проводить научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук, основанные на на методах алгебраической геометрии.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>– навыками проведения научно-исследовательских работ в области математики и компьютерных наук, основанные на методах алгебраической геометрии.</p>

#### 4. Структура и содержание дисциплины.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц 180 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лек.	Пр.	СРС	КСР	
1	Аффинные и проективные многообразия.	1	1-5	5	10	15		Консультация
2	Локальные свойства.	1	6-10	5	10	15		Консультация
3	Спектры колец и пучки.	1	11-14	4	8	20		Консультация
4	Вычисления в алгебраической геометрии.	1	15-18	4	8	40		Консультация
								<b>экзамен 36</b>
	<b>Итого за 3 семестр</b>			<b>18</b>	<b>36</b>	<b>90</b>		<b>180 ч</b>

## Содержание дисциплины

### Раздел1. Аффинные и проективные многообразия.

Аффинное пространство. Алгебраические множества. Топология Зарисского. Аффинные многообразия. Связь с простыми идеалами. Лемма о двух многочленах. Простые идеалы в  $k[x, y]$ . Кольцо регулярных функций. Поле рациональных функций. Регулярность функции в точке. Локальное кольцо точки. Теорема Гильберта о базисе. Теорема Гильберта о нулях. Квазипроjektивные многообразия. Рациональные функции, локальное кольцо точки, регулярные отображения, отображение Веронезе и проектирование. Замкнутость образа проективного многообразия. Конечные отображения. Эквивалентные определения размерности квазипроjektивного многообразия. Размерность. Размерность вложенных многообразий

### Раздел2. Локальные свойства.

Касательное пространство Зарисского. Особые и неособые точки. Кратность пересечения прямой и гиперповерхности. Множество особых точек – алгебраическое собственное подмножество. Проективные алгебраические множества. Неприводимость. Градуированные кольца. Однородные идеалы. Однородное координатное кольцо. Примеры. Аффинное покрытие. Локальное кольцо точки. Локализация кольца и локальные кольца. Разложение элементов локального кольца в степенные ряды. Замкнутость множества особых точек алгебраического

многообразия. Свойства простых точек. Регулярные кольца. Гладкие подмногообразия. Строение бирациональных морфизмов. Раздутие многообразия в точке. Поведение многообразий при раздутии. Исключительные подмногообразия. Структура изоморфизма и бирационального изоморфизма.

### **Раздел 3. Спектры колец и пучки.**

Спектр кольца. Точки спектра. Примеры. Свойства точек спектра, поле вычетов в точке. Локальное кольцо точки спектра. Простые (регулярные) точки спектра. Спектральная топология. Неприводимость. Размерность топологического пространства. Определение предпучка. Примеры. Структурный предпучок на аффинной схеме. Определение пучка. Примеры. Пучок, ассоциированный с предпучком. Слои пучка.

### **Раздел 4. Вычисления в алгебраической геометрии.**

Базис Грёбнера идеала. Лексикографический порядок. Многогранник Ньютона многочлена. Задача вхождения. Определение базиса Грёбнера. Алгоритм Бухбергера. Минимальный редуцированный базис Грёбнера. Вычисление базисов Грёбнера. Применения базисов Грёбнера. Критерий несовместности. Критерий эквивалентности систем. Критерий конечности. Свободные неизвестные. Геометрическая структура.

### **Примерный план практических занятий.**

1. Аффинные многообразия. Кольцо регулярных функций.
  2. Поле рациональных функций. Регулярность функции в точке. Локальное кольцо точки..
  3. Квазипроjektивные многообразия. Рациональные функции, локальное кольцо точки, регулярные отображения
  4. Локальное кольцо точки. Локализация кольца и локальные кольца.
  5. Регулярные кольца. Гладкие подмногообразия. Строение бирациональных морфизмов
  6. Спектр кольца. Спектральная топология.
  7. Структурный предпучок на аффинной схеме. Определение пучка
  8. Определение базиса Грёбнера. Вычисление базисов Грёбнера
  9. Применения базисов Грёбнера.
- 5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины**

Практические занятия и консультации проходят в виде бесед, научного диалога и опроса, включающие самостоятельную подготовку магистров по смежным вопросам дисциплины, используя дополнительную литературу. Предусмотрены вызывные консультации, написание рефератов по пропущенным темам. Подготовлен электронный вариант лекционного курса, который предлагается студентам, в том числе и студентам с ограниченными возможностями здоровья.

Для студентов, с ограниченными возможностями зрения предлагается прослушать лекционный курс в отведенное для этого время и активно

участвовать в научных диалогах по тематике данной дисциплины.

Для магистров с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний: -для слабовидящих: обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- для глухих и слабослышащих: обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости магистру предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию магистра могут проводиться в письменной форме. Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все магистры обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

Самостоятельная работа студентов предполагает индивидуальную работу с учебно-методической литературой: учебниками, методическими пособиями, а также со специальной литературой, монографиями, статьями. Консультации лектора помогают усвоению материала. Контроль за успеваемостью осуществляется в форме бесед учебного и творческого характера, опроса, индивидуальных заданий, контрольной работы.

### **План самостоятельной работы.**

1. Простые идеалы в  $k[x, y]$ .
2. Замкнутость образа проективного многообразия.
3. Конечные отображения.
4. Размерность вложенных многообразий
5. Кратность пересечения прямой и гиперповерхности.
6. Однородные идеалы.
7. Однородное координатное кольцо
8. Регулярные кольца.
9. Раздутие многообразия в точке. Поведение многообразий при раздутии.
- 10.Спектральная топология.
- 11.Неприводимость.
- 12.Размерность топологического пространства.
- 13.Пучок, ассоциированный с предпучком. Слои пучка.

14. Идеал системы
15. Радикал идеала
16. Геометрическая структура
17. Универсальный базис Грёбнера

## ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1.

1. Докажите, что произвольный конечный набор точек в  $A^n$  являются аффинным многообразием.
2. Найдите  $J(X)$ , где  $X = \{x=y=z\} \subseteq A^3$
3. Постройте минимальный редуцированный базис Гребнера для лексикографического упорядочения.  $x > y > z$  идеала  $(x^2-1, (x-1)y, (x+1)z)$ .

### Вариант 2.

1. Докажите, что произвольный конечный набор подпространств в  $A^n$  являются аффинным многообразием.
2. Найдите  $J(X)$ , где  $X = \{x^4=y^2\} \subseteq A^2$
3. Постройте минимальный редуцированный базис Гребнера для лексикографического упорядочения.  $x > y > z$  идеала  $(x^2-1, (x-1)y, (x-1)z)$ .

### Вопросы для текущего контроля

1. Аффинное пространство. Алгебраические множества.
2. Аффинные многообразия. Связь с простыми идеалами.
3. Кольцо регулярных функций. Поле рациональных функций.
4. Конечные отображения.
5. Квазипроjektивные многообразия.
6. Особые и неособые точки
7. Проективные алгебраические множества
8. Локальное кольцо точки.
9. Регулярные кольца. Гладкие подмногообразия.
10. Исключительные подмногообразия.
11. Точки спектра. Примеры.
12. Локальное кольцо точки спектра.
13. Простые (регулярные) точки спектра.
14. Структурный предпучок на аффинной схеме.
15. Определение пучка. Примеры. Пучок, ассоциированный с предпучком.
16. Лексикографический порядок.
17. Многогранник Ньютона многочлена .
18. Определение базиса Грёбнера.
19. Минимальный редуцированный базис Грёбнера.
20. Критерий несовместности



## 21. Критерий эквивалентности систем. Критерий конечности.

### Вопросы для промежуточной аттестации

1. Топология Зарисского.
2. Кольцо регулярных функций.
3. Теорема Гильберта о базисе.
4. Теорема Гильберта о нулях.
5. Квазипроjektивные многообразия.
6. Замкнутость образа проективного многообразия.
7. Размерность. Размерность вложенных многообразий
8. Касательное пространство Зарисского.
9. Градуированные кольца.
10. Строение бирациональных морфизмов.
11. Структура изоморфизма и бирационального изоморфизма.
12. Спектр кольца.
13. Спектральная топология.
14. Размерность топологического пространства.
15. Структурный предпучок на аффинной схеме.
16. Пучок, ассоциированный с предпучком.
17. Базис Грёбнера идеала.
18. Многогранник Ньютона многочлена.
19. Алгоритм Бухбергера.
20. Минимальный редуцированный базис Грёбнера.
21. Применения базисов Грёбнера

## 7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

**Таблица 1.** Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
3	5	0	15	20	0	20	40	100

### Программа оценивания учебной деятельности студента

#### 3 семестр

**Лекции**

Посещаемость, оценка конспектов от 0 до 5 баллов.

**Лабораторные занятия**

Не предусмотрены.

**Практические занятия**

Посещаемость, уровень подготовки к занятиям – от 0 до 5 баллов,  
активность работы в аудитории – от 0 до 5 баллов,  
выполнение домашних заданий – от 0 до 5 баллов.

**Самостоятельная работа**

Рефераты по отдельным темам – от 0 до 10 баллов,  
Конспектирование отдельных тем – от 0 до 10 баллов.

**Автоматизированное тестирование**

Не предусмотрено.

**Другие виды учебной деятельности**

1. Контрольная работа №1 – от 0 до 20 баллов.

**Промежуточная аттестация**

при проведении промежуточной аттестации  
ответ на «отлично» оценивается от 36 до 40 баллов;  
ответ на «хорошо» оценивается от 31 до 35 баллов;  
ответ на «удовлетворительно» оценивается от 25 до 30 баллов;  
ответ на «неудовлетворительно» оценивается от 0 до 24 баллов.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 3 семестр по дисциплине «Алгебраическая геометрия» составляет 100 баллов.

**Таблица 2.** Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Алгебраическая геометрия»

85 – 100 баллов	«отлично»
70 – 84 баллов	«хорошо»
60 – 69 баллов	«удовлетворительно»
0 – 59 баллов	«не удовлетворительно»

**8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Учебная аудитория с обязательным наличием специализированной доски, мела (маркера), проектора, с возможностью размещения всех обучающихся по данной дисциплине.

**а) литература**

1. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии.– М.: МЦНМО, 2007.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.2024. <https://e.lanbook.com/book/118617> Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".



**б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

*Лицензионное программное обеспечение:*

1. Операционная система Windows 7, или более поздняя версия
2. Microsoft Office PowerPoint

*Интернет-ресурсы:*

1. Саратовской государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. – Режим доступа: [www.sgu.ru/](http://www.sgu.ru/)
2. Зональная научная библиотека им. В.А. Артисевич Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. – Режим доступа: <http://library.sgu.ru/>
3. Каталог образовательных Интернет-ресурсов. – Режим доступа: <http://window.edu.ru/>

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебная аудитория с обязательным наличием специализированной доски, мела (маркера), проектора, с возможностью размещения всех обучающихся по данной дисциплине.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению *02.04.01* – «Математика и компьютерные науки» и профилю подготовки «Математические основы компьютерных наук».

Автор: к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел Водлазов А.М.

Программа одобрена на заседании кафедры компьютерной алгебры и теории чисел от 2 сентября 2024 года, протокол № 2.

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**Рекомендуемая литература:**

1. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.—Пер. с англ.—М.:Едиториал УРСС, 2000
2. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс.— М.: МЦНМО, 2006
3. Мамфорд Д. Красная книга о многообразиях и схемах.— М.: МЦНМО, 2007..
4. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. В двух томах.—Пер. с англ.—М.:Едиториал УРСС, 2000.
5. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений./ <http://www.mcnmo.ru/free-books/dubna/arjantsev.pdf>

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**Рекомендуемая литература:**

6. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.—Пер. с англ.—М.:Едиториал УРСС, 2000
7. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс.— М.: МЦНМО, 2006
8. Мамфорд Д. Красная книга о многообразиях и схемах.— М.: МЦНМО, 2007..
9. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. В двух томах.—Пер. с англ.—М.:Едиториал УРСС, 2000.
10. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений./ <http://www.mcnmo.ru/free-books/dubna/arjantsev.pdf>