МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Декан механико-математического факультета
_______________ Захаров А.М.
____
"18" марта 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

Направление подготовки магистратуры
44.03.01 – «Педагогическое образование»

Профиль подготовки магистратуры
Математическое образование

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения
заочная

Саратов,
2022

Статус	ФИО	Подпись	Дата
Преподаватель-разработчик	Гордиенко В.Г. Амозова К.Ф.		18.03.2022
Председатель НМК	Тышкевич С.В.		18.03.2022
Заведующий кафедрой	Разумовская Е.В.		18.03.2022
Специалист Учебного управления			

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является овладение студентами методов дифференциального и интегрального исчисления в объёме, необходимом для изучения всех последующих курсов, использующих аппарат непрерывной математики.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Предмет математический анализ входит в блок ООП Б1 дисциплины, вариативная часть Б1.В и относится к обязательным дисциплинам под номером Б1.В.ОД.7.

Дисциплина «Математический анализ» является общим курсом. Изучение курса требует знания математики в объеме средней общеобразовательной школы. В свою очередь, знание математического анализа необходимо для всех курсов математического, естественнонаучного и профессионального циклов.

3. Результаты обучения по дисциплине «Математический анализ»

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции	Результаты обучения
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	**1.1_Б.УК-1.** Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет декомпозицию задачи.	**Знать:** постановку основных задач математического анализа; - методы и приемы формализации задач **Уметь:** – анализировать задачи, выделяя их базовые составляющие; – осуществлять декомпозицию задачи. **Владеть:** – навыками анализа задачи с выделением ее базовых составляющих.
	2.1_Б.УК-1. Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи.	**Знать:** - основные источники информации по математическому анализу . **Уметь:** – находить и критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи. **Владеть:** навыками работы с информацией из различных источников.
	3.1_Б.УК-1. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивая их	**Знать:** – типовые задачи математического анализа.

	достоинства и недостатки.	**Уметь:** – оценить достоинства и недостатки различных вариантов решения задач при применении математического анализа в математике и компьютерных науках. **Владеть:** – навыками выбора оптимального решения для поставленной задачи.
	4.1_Б.УК-1. Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.	**Знать:** – основные факты математического анализа и направления его применения в математике и компьютерных науках. **Уметь:** логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь; **Владеть:** – навыками формирования собственных суждений и оценок в области применения математического анализа; – навыками грамотного, логичного и аргументированного изложения своей позиции по вопросам применения математического анализа
	5.1_Б.УК-1. Определяет и оценивает практические последствия возможных решений задачи.	**Знать:** – применение математического анализа в математике и компьютерных науках. **Уметь:** – определить практические последствия решения задач в области применения математического анализа. **Владеть:** – навыками определения и оценивания практических последствий возможных решений задач математического анализа.
ПК-1	**1.1_Б.ПК-1.** Воспроизводит	**Знать:**

Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования, по программам дополнительного образования детей	основные теоретические положения и решает типовые задачи по дисциплинам высшей математики, являющимся теоретическими основами школьного курса математики (теория чисел, алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика)	- основы математического анализа; **Уметь:** - применять методы математического анализа для решения математических и прикладных задач информатики; **Владеть:** – навыками применения математического анализа в математике и компьютерных науках.
	2.1_Б.ПК-1. Объясняет учебный математический материал (в рамках программ основного общего и среднего общего образования) и решает и объясняет решение задач элементарной математики	**Знать:** - постановку и методы решения базовых задач математического анализа. **Уметь:** - использовать аппарат элементарной математики при решении задач математического анализа; - применять основные формулы математического анализа при решении практических задач. **Владеть:** - навыками профессионального мышления, необходимыми для использования методов математического анализа в собственной научно-исследовательской деятельности.
	3.1_Б.ПК-1. Проводит контекстный анализ учебных математических текстов	**Знать:** – основные источники информации по математическому анализу; – способы извлечения необходимой информации из электронных и бумажных носителей по математическому анализу. **Уметь:** – находить и критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи. **Владеть:** – навыками критического анализа информации,

		необходимой для решения поставленной задачи по математическому анализу.
	4.1_Б.ПК-1. Проводит контекстный анализ учебных, учебно-методических материалов, анализ педагогических ситуаций, решает педагогические задачи	
	5.1_Б.ПК-1. Проводит и анализирует учебные занятия по программам основного общего и среднего общего образования, по программам дополнительного образования детей	

4. Структура и содержание дисциплины «Математический анализ»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 27 зачетных единиц 972 часа.

№ п/п	*Раздел дисциплины*	*Семестр*	*Неделя семестра*	*Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)*					*Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)*
				лекции	*практ*	*КСР*	*СРС*	*контроль*	
1	Элементы логики и теории множеств. Теория действительных чисел. Бесконечные, счетные и несчетные множества	0		1	2		20		Беседа, вопросы
2	Числовая последователь-ность и ее предел. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке. Функции, непрерывные на отрезке	0		1	2		46		Беседа, вопросы
Промежуточная аттестация за 0 семестр – 72 часов				**2**	**4**		**66**		
3	Производная и дифференциал. Производные и диффере-нциалы высших порядков	I		1	1		40		Беседа, вопросы
4	Формула Тейлора.	I		1	1		10		Беседа, вопросы
5	Монотонные функции в точке и на отрезке. Выпуклость функции, точки перегиба.	I		1	1		20		Беседа, вопросы
6	Правило Лопиталя.	I		1	1		21		Контрольная работа
Промежуточная аттестация за 1 семестр – 108 часов				**4**	**4**		**91**	**9**	**Экзамен**
7	Первообразная и её вычисление.	II		1	1		50		Беседа, вопросы
8	Определённый интеграл	II		1	1		20		Беседа, вопросы

	Римана. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определённого интеграла								
9	Несобственный интеграл Римана. Признаки сходимости несобственного интеграла Римана	II		1	1		30		Беседа, вопросы
10	Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды	II		1	1		27		Контрольная работа
Промежуточная аттестация за 2 семестр – 144часа				**4**	**4**		**127**	**9**	**Экзамен**
11	Пространство R^m как линейное нормированное пространство. Множества в R^m, компактные множества	III		2	2		25		Беседа, вопросы
12	Функции в R^m, предел функции. Непрерывные функции в R^m, непрерывные функции на компактных множествах	III		1	1	1	25		Беседа, вопросы
13	Частные производные 1-го порядка, дифференцируе-мые функции, дифференциал функции. Частные производные и дифференциал высших порядков.	III		2	2		35		Беседа, вопросы
14	Формула Тейлора, экстремум функции в R^m . Неявные функции. Условный экстремум	III		1	1		38		Контрольная работа
Промежуточная аттестация за 3 семестр – 144 часа				**6**	**6**		**123**	**9**	**Экзамен**
15	Интеграл Римана по области. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменной в кратном интеграле	IV		2	2		38		Беседа, вопросы
16	Кривая в R^m и её длина. Определение криволи-нейных интегралов. Основные свойства криволинейных интегралов. Формула Грина. Независимость интеграла от пути интегрирования	IV		2	2		25		Беседа, вопросы
17	Поверхности в R^3. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов. Основные свойства поверхностных интегралов.			2	2		60		Контрольная работа

	Ротор и дивергенция векторного поля. Основные интегральные формулы анализа								
Промежуточная аттестация за 4 семестр – 144 часа				**6**	**6**		**123**	**9**	**Экзамен**
18	Приложения кратных интегралов	V		2	2		53		Беседа, вопросы
19	Интегралы, зависящие от параметра. Эйлеровы интегралы	V		2	2		55		Беседа, вопросы
20	Тригонометрическая система, ее полнота, ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке.	V		2	2		51		Контрольная работа
Промежуточная аттестация за 5 семестр – 180 часов				**6**	**6**		**159**	**9**	**Экзамен**
21	Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные определения	VI		1	1		25		Беседа, вопросы
22	Дифференциальные урав-нения первого порядка. Методы интегрирования	VI		1	1		25		Беседа, вопросы
23	Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши	VI		1	1		25		Беседа, вопросы
24	Дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского	VI		1	1		25		Беседа, вопросы
25	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	VI		2	2		25		Беседа, вопросы
26	Различные методы поиска частного решения неоднородного дифферен-циального уравнения	VI		2	2		30		Контрольная работа
Промежуточная аттестация за 6 семестр – 180 часа				**8**	**8**		**155**	**9**	**Экзамен**
Общая трудоемкость дисциплины				**972 часа**					

Содержание учебной дисциплины
0 семестр

Элементы логики и теории множеств. Аксиоматическая теория действительных чисел. Понятие мощности множества. Бесконечные счетные и несчетные множества: основные определения и свойства. Счётность множества рациональных чисел. Мощность множества действительных чисел. Числовая последовательность: основные определения и свойства. Предел числовой последовательности: основные определения и свойства. Теорема Вейерштрасса. Раскрытие неопределённостей. Предел функции в точке (ε-δ определение). Определения предела функции по Гейне, по Коши, окрестностное определение; эквивалентность определений. Свойства пределов. Непрерывность функции в точке (ε-δ определение). Точки разрыва, классификация точек разрыва. Свойства непрерывности. Функции, непрерывные на отрезке.

1 семестр

Производная и дифференциал: основные определения и свойства. Определение и геометрический смысл производной. Алгебра производных. Таблица производных. Особые случаи. Теоремы Ферма и Роля. Формулы Коши и Лагранжа. Дифференциал. Правила дифференцирования. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора в общем случае. Формулы Тейлора элементарных функций. Свойства остаточного члена. Монотонные функции в точке и на отрезке. Выпуклость функции, точки перегиба. Правило Лопиталя.

2 семестр

Первообразная: определение и свойства. Неопределённый интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений, иррациональных выражений. Подстановки Эйлера. Определённый интеграл Римана. Интегральные суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определённого интеграла. Теоремы о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом. Несобственный интеграл Римана. Признаки сходимости несобственного интеграла Римана. Числовые ряды: определения и свойства. Знакоположительные ряды. Признаки Даламбера, Коши, признаки сравнения. Знакочередующиеся ряды; признак Лейбница. Ряды с произвольными членами. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Функциональные последовательности и функциональные ряды: основные понятия. Равномерная сходимость. Степенные ряды. Радиус сходимости, интервал сходимости, область сходимости степенного ряда. Разложение функции в степенной ряд.

3 семестр

Пространство R^m как линейное нормированное пространство. Множества в R^m, компактные множества. Функции в R^m, предел функции. Непрерывные функции в R^m, непрерывные функции на компактных множествах. Частные производные 1-го порядка, дифференцируемые функции, и их свойства: связь непрерывных и дифференцируемых функций; связь дифференцируемой функции с существованием частных производных первого порядка. Дифференциал функции: определение и свойства. Приближённые вычисления с использованием дифференциала. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Формула Тейлора, экстремум функции в R^m. Неявные функции. Дифференцируемость неявных функций. Условный экстремум.

4 семестр

Интеграл Римана по области. Кратный интеграл: определение и свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменной в кратном интеграле. Кривая в R^m и её длина. Определение криволинейных интегралов. Основные свойства криволинейных интегралов. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Поверхности в R^3. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов. Основные свойства поверхностных интегралов. Ротор и дивергенция векторного поля. Основные интегральные формулы анализа. Потенциальные поля. Приложения теории поля к задачам механики.

5 семестр

Приложения кратных интегралов. Интегралы, зависящие от параметра. Эйлеровы интегралы. Ортонормированные системы. Тригонометрическая система, ее полнота, ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке.

6 семестр

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной. Геометрическая интерпретация. Интегральные кривые. Метод изоклин. Простейшие уравнения, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные и приводящиеся к ним, обобщённые однородные, линейные. Уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и методы его нахождения. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров. Уравнения Клеро и Лагранжа. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные определения. Простейшие типы уравнений, допускающих интегрирование в квадратурах. Уравнения, допускающие понижение порядка. Гладкость решения уравнения n-го порядка. Интегрирование уравнений с помощью рядов. Линейные уравнения n-го порядка. Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Свойства определителя Вронского. Существование фундаментальной системы решений для линейного однородного уравнения n-го порядка. Вид общего решения линейного однородного и неоднородного уравнения n-го порядка. Построение линейного однородного уравнения n-го порядка по заданной фундаментальной системе решений. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения при наличии известных частных решений. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом вариации постоянных. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о сдвиге. Характеристическое уравнение. Фундаментальная система решений в случае простых и кратных корней. Вид фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка с действительными постоянными коэффициентами. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами для правой части специального вида. Уравнение Эйлера. Приведение линейного однородного уравнения 2-го порядка к уравнению Риккати и к некоторым специальным видам. Две теоремы об ограниченности решений линейного однородного уравнения 2-го порядка.

5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины «Математический анализ»

Подготовлен электронный вариант лекционного курса, который предлагается студентам.

Реализация компетентного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерные симуляции, разбор конкретных ситуаций, работа над проектами) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Эффективность применения интерактивных форм обучения обеспечивается реализацией следующих условий:

• создание диалогического пространства в организации учебного процесса;

• использование принципов социально – психологического обучения в учебной и внеучебной деятельности;

• мониторинг личностных особенностей и профессиональной направленности студентов;

• формирование психологической готовности преподавателей к использованию интерактивных форм обучения, направленных на развитие внутренней активности студентов;

Использование интерактивных форм и методов обучения направлено на достижение ряда важнейших образовательных целей:

• стимулирование мотивации и интереса в области анализа сложных систем и обработки данных и в общеобразовательном, общекультурном и профессиональном плане;

• повышение уровня активности и самостоятельности обучаемых;

• развитие навыков анализа, критичности мышления, взаимодействия, коммуникации;

• саморазвитие и развитие обучаемых благодаря активизации мыслительной деятельности и диалогическому взаимодействию с преподавателем и другими участниками образовательного процесса.

В рамках учебного курса предусмотрены встречи с представителями научных организаций и представителями различных научных школ.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов не могут составлять более 30% аудиторных занятий

Особенности проведения занятий для граждан с ОВЗ и инвалидностью

При обучении лиц с ограниченными возможностями используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

-*для слабовидящих:*

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- *для глухих и слабослышащих:*

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- *для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих* все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Самостоятельная работа студентов предполагает индивидуальную работу с учебно-методической литературой: учебниками, задачниками, конспектами лекций, методическими пособиями. Консультации лектора помогают усвоению материала. Контроль за успеваемостью осуществляется в форме бесед учебного и творческого характера, опроса, индивидуальных заданий, контрольных работ, коллоквиумов.

Часть самостоятельных занятий посвящена выполнению домашних заданий и подготовке к семинарам, докладам, обсуждениям, дискуссиям. Проверка домашних заданий проводится на практических занятиях.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

0 семестр. Предел числовой последовательности. Предел функции. Производные и дифференциалы.

I семестр. Производные и дифференциалы.

II семестр. Интегрирование. Числовые, функциональные и степенные ряды.

III семестр. Дифференцирование функции многих переменных, экстремальные задачи.

IV семестр. Кратные интегралы. Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы.

V семестр. Приложения кратных интегралов. Эйлеровы интегралы. Ряд Фурье.

VI семестр. Решение дифференциальных уравнений.

ПЛАН САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

0 семестр. Действительные числа, числовые множества. Понятия верхней и нижней границы, точной верхней и нижней грани. Теорема Вейерштрасса о существовании точной верхней и нижней грани непустого ограниченного множества. Свойство непрерывности множества действительных чисел. Принцип Кантора вложенных отрезков. Лемма Гейне – Бореля. Понятие предела числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Бесконечно малые, их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного последовательностей. Предельный переход в неравенстве. Теорема о двух милиционерах. Верхний и нижний предел. Критерий сходимости. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Понятие предела функции в точке. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне. Предел суммы, разности, произведения и частного функций. Предел сложной функции. Непрерывность функции в точке. Эквивалентность определений непрерывности по Коши и по Гейне. Связь с определением предела. Сохранение знака функции в окрестности точки непрерывности. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении функции, непрерывной на отрезке. Теорема Коши о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

I семестр. Дифференцируемость функции в точке. Производная. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций. Производная сложной функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференциальное условие бесконечной малости. Многочлен Тейлор. Лемма о производной многочлена Тейлора. Формула Тейлора. Оценка уклонения функции от ее многочлена Тейлора. Достаточное условие локального экстремума. Правила Лопиталя. Дифференциальное условие возрастания. Дифференциальное условие выпуклости.

II семестр. Первообразная и неопределенный интеграл, их свойства. Общий вид первообразной. Формулы замены переменного и интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Интегральные суммы Римана, интеграл Римана. Верхний и нижний суммы Дарбу, их свойства. Верхний и нижний интеграл Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману. Следствие. Интегрируемость по Риману функции, непрерывной на отрезке. Свойства интеграла Римана. Интеграл с переменным верхним пределом, его производная. Теорема о существовании первообразной для функции, непрерывной на отрезке. Формула Ньютона – Лейбница. Формулы замены переменного и интегрирования по частям в определенном интеграле Римана.

Числовые ряды: определения и свойства. Знакоположительные ряды. Признаки Даламбера, Коши, признаки сравнения. Знакочередующиеся ряды; признак Лейбница. Ряды с произвольными членами. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Равномерная сходимость.

Функциональные последовательности и функциональные ряды: основные понятия. Степенные ряды.

III семестр. Предел векторной последовательности, связь с пределами координатных последовательностей. Предел и непрерывность функции многих переменных. Теорема о двойном и повторном пределе. Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные. Полная производная. Геометрические свойства вектора-градиента. Теорема Лагранжа. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема Шварца о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Представление дифференциала n-го порядка. Многочлен Тейлора. Лемма о частных производных многочлена Тейлора. Формула Тейлора. Оценка уклонения функции от ее многочлена Тейлора. Необходимое и достаточное условия локального экстремума. Дифференцируемые отображения евклидовых пространств. Производная как линейный оператор. Теорема Лагранжа. Теорема о неявной функции. Теорема об обратной функции. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

IV семестр. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина. Формула Стокса. Формула Гаусса – Остроградского.

V семестр. Приложения кратных интегралов. Интегралы, зависящие от параметра. Эйлеровы интегралы. Тригонометрическая система, ее полнота, ряд Фурье.

VI семестр. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений высшего порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Линейные системы.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Вариант 1

1. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+1}$,

2. Исследовать на разрыв функцию $f(x)=\dfrac{x^2-0{,}25}{2x-1}$,

3. Найти производную функции $f(x)=\arcsin^2(\cos\sqrt{3x^3+1})$

4. Найти производную 2-го порядка функции $f(x)=\dfrac{2x^3+28}{2x^2-1}$

5. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

   1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-10}{5x^2-4x+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{0{,}1x^2}$,

6. Найти промежутки возрастания, убывания и экстремумы $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$,

7. Найти промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x-1}$,

8. Найти асимптоты $f(x)=\dfrac{x^2-0{,}25}{2x-1}$.

Вариант 2

1. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{3+x^2}\right)^{4x^2}$,

2. Исследовать на разрыв функцию $f(x)=\dfrac{x^2-0{,}49}{3x-2{,}1}$,

3. Найти производную функции $f(x)=\arccos^2(\cos\sqrt{3x^3+1})$,

4. Найти производную 2-го порядка функции $f(x)=\dfrac{8x^5+2}{x^3-3}$.

5. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-9x+1}{2x^3-3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,4x}$,

6. Найти промежутки возрастания, убывания и экстремумы $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

7. Найти промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x-2}$.

8. Найти асимптоты $f(x)=\dfrac{x^2-0{,}49}{3x-2{,}1}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Найти интегралы:

1) $\int\dfrac{x^4-x^2+5x}{x^3}dx$; 2) $\int\dfrac{2x+5}{x^3-x^2+2x-2}dx$; 3) $\int x\arcsin x dx$; 4) $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2px,\ x^2=2py$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+4}dx$;

4. Исследовать на сходимость ряд: $2-\dfrac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}+\ldots$

5. 2. Определить область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(x+1)^n}$,

6. Указать радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда: $1+2x^2+4x^4+8x^6+\ldots$.

7. Разложить функцию $y=\dfrac{x-3}{(x+1)^1}$ в степенной ряд по степеням x.

Вариант 2

1. Найти интегралы:

1) $\int \dfrac{(x^3+2)^2}{\sqrt{x}}dx;$ 2) $\int \dfrac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx;$ 3) $\int x\ln x dx;$ 4) $\int \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}dx;$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x-2y-1=0,\ y^2=2px$.

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}dx;$

4. 1. Исследовать на сходимость ряд: $-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

5. 2. Определить область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$

6. Указать радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда: $(x-4)-\dfrac{(x-4)^3}{3}+\dfrac{(x-4)^5}{5}-\ldots$

7. Разложить функцию $y=\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$ в степенной ряд по степеням x.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Найти частные производные функции: 1) $z=\cos(2x^2+y^2)$, 2) $z=\mathrm{tg}(\arcsin(2x+y)+5)$

2. Найти все частные производные 2-го порядка функции: 1) $z=x^y+y^2$, 2) $z=\dfrac{\sin x}{3^y}$.

3. Найти экстремум функции: $z=x^2-3xy-y^2-2x+6y+1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3+8y^3-6xy+1$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x=0,\quad x=2,\quad y=1,\quad y=-1$.

Вариант 2

1. Найти частные производные функции: 1) $z = xe^{y} + ye^{x}$, 2) $z = \sin x(\operatorname{tg} y) + e^{x}\cos(y + x)$.

2. Найти все частные производные 2-го порядка функции: 1) $z = x^2 + y^x$, 2) $z = \frac{\sin y}{2^x}$.

3. Найти экстремум функции: $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = arctg(x^2 - xy + y)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x = -2, \quad x = 2, \quad y = 3, \quad y = -3.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 = ax.$

2. Тройным интегрированием вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0, \quad y = 1, \quad y = 2x, \quad y = 6 - x.$

3. Вычислить криволинейные интегралы:

   1) $\int\limits_{L} xdy + ydx$ по контуру треугольника, ограниченного осями координат и прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

   2) $\int\limits_{L} \frac{xdx}{y} + \frac{dy}{y - a}$ по отрезку циклоиды: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ от точки $t = \frac{\pi}{6}$ до точки $t = \frac{\pi}{3}$.

4. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{F} = x^2 y \cdot \vec{i} + y^2 z \cdot \vec{j} + z^2 x \cdot \vec{k}.$

5. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{S} x^2 dS,$ где S – боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}, 0 \le z \le h.$

6. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\sigma} y^2 dxdz,$ где σ – внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \ge 0.$

7. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x - 2z) \cdot \vec{i} + (3z - 4x) \cdot \vec{j} + (5x + y) \cdot \vec{k}$ через треугольник ABC с вершинами *A(1;0;0),B(0;1;0),C(0;0;1),* предполагая, что нормальный вектор составляет острые углы с координатными осями.

8. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_{ÎÀ} yzdx + 3xzdy + 2xydz,$ где OA – кривая, $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t^2,$ $0 \le t \le 2\pi$, *O(0;0;0), A(2π(2π;0*^{2} *).*

<u>Вариант 2</u>

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Тройным интегрированием вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 - z = 1$ и плоскостью $z = 0$.

3. Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_L xdy - ydx$ по кривой $y = x^3$ от точки (0;0) до точки (2;8);

2) $\int\limits_L \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ по астроиде $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ от точки $(a;0)$ до точки $(0;a)$.

4. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} - yz \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$.

5. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S x^2 dS,$ где S – нижняя часть полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \le 0.$

6. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_\sigma z^4 dxdy,$ где σ – внутренняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge 0.$

7. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x - 2z) \cdot \vec{i} + (3z - 4x) \cdot \vec{j} + (5x + y) \cdot \vec{k}$ через треугольник, полученный при пересечении плоскости $6x + 2y + 3z - 6 = 0$ с плоскостями координат (нормаль составляет острые углы с осями координат).

8. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $Ï = \iint\limits_\Phi x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$ где Ф – внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$. Пользуясь разложением, вычислить сумму ряда: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$

2. Разложить в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \pi)$ функцию $f(x) = \cos ax$, где a – целое число.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $y = |\cos x|$. Пользуясь этим разложением, вычислить суммы рядов: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2 - 1}$ è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию $y = f(x)$, заданную на $(-2;2)$ выражением $f(x) = \begin{cases} 0 & при -2 < x \le 0, \\ \frac{1}{2}x & при\ 0 < x < 2, \end{cases}$ имеющую период $2l = 4$.

5. Разложить в ряд по косинусам функцию $y = x$ на $[0; \pi]$.

Вариант 2

1. Разложить в ряд Фурье функцию $y = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$. Пользуясь разложением, вычислить сумму ряда: $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам на интервале $(0, \pi)$ функцию $f(x) = \sin ax$, где a – целое число.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$ в промежутке $[-\pi; \pi]$. С помощью полученного ряда показать, что $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & для -1 \le x < 0, \\ x & для\ 0 < x \le 1. \end{cases}$

5. Разложить в ряд по синусам функцию $y = x$ на $[0; \pi)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6

Тест к разделу «Дифференциальные уравнения»

I. Решить уравнения.

1. $xydx + (x+1)dy = 0$.

a) $y = C(x+1)e^{-x}; x = -1$ b) $y = C(x-1)e^{-x}; x = 1$ c) $y = C(x+1)e^{-x}; x = -2$

2. $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1.$

a) $e^{s}=1+Ce^{t}$ b) $e^{-s}=1+Ce^{t}$ c) $e^{-s}=1-Ce^{t}$

3. $y'=\cos(y-x).$

a) $ctg\dfrac{y+x}{2}=x+C;\ y+x=2\pi k,\ k=0,\pm1,...$

b) $ctg\dfrac{y}{2}=x+C;\ y=2\pi k,\ k=0,\pm1,...$

c) $ctg\dfrac{y-x}{2}=x+C;\ y-x=2\pi k,\ k=0,\pm1,...$

II. Решить данные уравнения и найти решения, удовлетворяющие начальным условиям.

1. $(x+2y)y'=1;\quad y(0)=-1.$

a) $x-2y+2=Ce^{y};\ x-2y+2=0$

b) $x+2y+2=Ce^{y};\ x+2y+2=0$

c) $x+2y-2=Ce^{y};\ x+2y-2=0$

2. $y'ctgx+y=2;\quad y(x)\to-1$ при $x\to0$

a) $y=2-C\cos x;\ y=2-3\cos x$

b) $y=2+C\cos x;\ y=2-3\cos x$

c) $y=2+C\cos x;\ y=2+3\cos x$

3. $x^2y'-cos2y=1;\quad y(x)=\dfrac{9\pi}{4}$ при $x\to+\infty$

a) $y=arctg\left(1-\dfrac{2}{x}\right)+2\pi$ b) $y=arctg\left(1+\dfrac{2}{x}\right)+2\pi$ c) $y=arcctg\left(1-\dfrac{2}{x}\right)+2\pi$

III. Решить однородные уравнения.

1. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}.$

a) $y=x\ln\ln Cx$ b) $y=-x\ln Cx$ c) $y=-x\ln\ln Cx$

2. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

a) $y+2 = Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}$ b) $y-2 = Ce^{-2arctg\frac{y-2}{x-3}}$ c) $y+2 = Ce^{2arctg\frac{y+2}{x+3}}$

3. $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$

a) $\arcsin\dfrac{y^3}{\left|x^2\right|} = \ln Cx^2;\ \left|x^2\right| = y^3$

b) $\arcsin\dfrac{y^2}{\left|x^3\right|} = \ln Cx^3;\ \left|x^3\right| = y^2$

c) $\arccos\dfrac{y^2}{\left|x^3\right|} = \ln Cx^3;\ \left|x^3\right| = y^2$

IV. Решить линейное уравнение первого порядка.

1. $y' + ytgx = \sec x.$

a) $y = \cos x + C\sin x$ b) $y = \sin x + C\cos x$ c) $y = \sin x - C\cos x$

2. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

a) $y = x^4\ln^2 Cx;\ y = 0$ b) $y = x^4\ln^2 Cx;\ y = 1$ c) $y = x^3\ln^2 Cx;\ y = 0$

3. $y' + 2y = y^2e^x.$

a) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1;\ y = 1$ b) $y(e^x + Ce^{2x}) = 0;\ y = 0$ c) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1;\ y = 0$

V. С помощью замены переменных или дифференцирования привести уравнения к линейным и решить их.

1. $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1.$

a) $y = 2e^{-x} - 1$ b) $y = 2e^x - 1$ c) $y = 2e^x + 1$

2. $x(e^y - y') = 2.$

a) $e^{-y} = Cx^2 + x$ b) $e^{-y} = Cx^2$ c) $e^{y} = Cx^2 + x$

VI. Найдите путем подбора частное решение уравнение $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$., приведите уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решите его.

a) $y = e^{-x} - \dfrac{1}{x+C};\ y = e^{-x}$ b) $y = e^{x} + \dfrac{1}{x+C};\ y = e^{x}$ c) $y = e^{x} - \dfrac{1}{x+C};\ y = e^{x}$

VII. Решить уравнения, если они являются уравнениями в полных дифференциалах.

1. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0.$

a) $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$ b) $x - \dfrac{x^3}{y^2} - \dfrac{5}{y} = C$ c) $x - \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$

2. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0.$

a) $x + y^2 \cos^2 x = C$ b) $x - y^2 \cos^2 x = C$ c) $x - y^2 \sin^2 x = C$

VIII. Найти все решения данного уравнения, выделить особые решения (если они есть).

$yy'^3 + x = 1.$

a) $y(x-C)^2 = 1;\ y = 0$ b) $y(x+C)^2 = 1;\ y = 1$ c) $y(x+C)^2 = 1;\ y = 0$

IX. Решить уравнение методом введения параметра.

$x = y'\sqrt{y'^2 + 1}.$

a) $x = p\sqrt{p^2+1},\ 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2+1} + C$

b) $x = p\sqrt{p^2+1},\ y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2+1} + C$

c) $x = p\sqrt{p^2+1},\ 3y = (2p^2 + 1)\sqrt{p^2+1} + C$

X. Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

1. $xy' - y = \ln y'.$

a) $y = Cx - \ln C;\ y = \ln x - 1$

b) $y = Cx + \ln C;\ y = \ln x - 1$

c) $y = Cx - \ln C;\ y = \ln x + 1$

2. $y + xy' = 4\sqrt{y'}.$

a) $x\sqrt{p} = \ln p + C,\ y = \sqrt{p}(4 + \ln p + C);\ y = 0$

b) $x\sqrt{p} = \ln p + C,\ y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C);\ y = 0$

c) $x\sqrt{p} = \ln p + C,\ y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C);\ y = 1$

Вопросы к экзамену в 1 семестре

1. Существование верхней и нижней грани ограниченного множества.
2. Различные определения сходящейся последовательности, ограниченность сходящейся последовательности.
3. Монотонные последовательности, критерий сходимости монотонной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
4. Неравенство Бернулли, число е, вычисление пределов, связанных с числом е.
5. Предел функции в точке, различные определения предела в точке, свойства предела, связанные с арифметическими операциями.
6. Предельный переход в неравенствах.
7. Непрерывные функции в точке и их свойства, непрерывность элементарных функций.
8. Точки разрыва и их классификация.
9. Функции непрерывные на отрезке и их свойства. Равномерно непрерывные функции на множестве.
10. Обратная функция и ее непрерывность. Замечательные пределы.
11. Дифференцируемые функции. Производная и дифференциал. Свойства производной, связанные с арифметическими операциями.
12. Теоремы Роля, Лагранжа и Коши.
13. Производные и дифференциалы высших порядков, формулы Лейбница.
14. Формула Тейлора, различные формы остаточного члена (форма Коши, Лагранжа, Пеано).
15. Монотонность функции в точке и на отрезке, необходимые и достаточные условия.
16. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия.
17. Асимптоты и их нахождение.
18. Выпуклые и вогнутые функции, необходимые и достаточные условия выпуклости.
19. Правило Лопиталя, их применение к вычислению пределов.
20. Исследование функции и построение графика.

Вопросы к экзамену во 2 семестре

1. Определенный интеграл.
2. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
3. Определенный интеграл Римана.
4. Необходимое условие его существования.
5. Интегральные суммы Дарбу и их свойства.
6. Критерий существования определенного интеграла.
7. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.
8. Основные свойства определенного интеграла.
9. Теорема о среднем значении.
10. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
11. Существование первообразной функции.
12. Связь определенного интеграла с неопределенным, формула Ньютона-Лейбница.

13. Вычисление определенного интеграла заменой переменной и методом интегрирования по частям.
14. Определение несобственного интеграла Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.
15. Числовые ряды, сходимость, необходимое условие, критерий Коши.
16. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Признаки сравнения, Коши, Даламбера, интегральный.
17. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признаки условной сходимости: Дирихле, Лейбница.
18. Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов. Теорема Римана.
19. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов
20. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
21. Степенной ряд, радиус сходимости, интервал сходимости.
22. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда в интервале сходимости
23. Степенной ряд как ряд Тейлора.
24. Разложение элементарных функций в степенные ряды.
25. Приближенное вычисление суммы числового и степенного ряда.

Вопросы к экзамену в 3 семестре

1. m-мерное арифметическое пространство R^m, расстояние, норма и скалярное произведение в R^m, топология в R^m.
2. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в R^m, их свойства, критерий Коши.
3. Теорема Больцано-Вейерштрасса в R^m.
4. Компактные множества в R^m.
5. Функции в R^m, предел и непрерывность функции в точке, повторный предел функции в точке.
6. Свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве в R^m.
7. Отображения из R^m в R^n, непрерывность сложного отображения.
8. Дифференцируемость скалярной функции многих переменных, частные производные. Дифференциал функции.
9. Производная по направлению, градиент и его геометрический смысл.
10. Касательная плоскость к графику функции, уравнение касательной плоскости.
11. Непрерывность дифференцируемой функции.
12. Производная сложной функции.
13. Частные производные высших порядков, смешанные частные производные. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.
14. Дифференциал высшего порядка, его выражение через частные производные.
15. Формула Тейлора для функций многих переменных, различные формы остаточного члена в формуле Тейлора.
16. Локальный экстремум функции многих переменных, необходимое условие.
17. Дифференциал второго порядка как квадратичная форма. Достаточное условие экстремума функции многих переменных в терминах второго дифференциала.
18. Якобиан отображения из R^m в R^m, Якобиан композиции отображений.
19. Теоремы существования и дифференцируемости неявной функции.
20. Условный экстремум, стационарные точки, необходимое условие.
21. Метод множителей Лагранжа, необходимое условие условного экстремума, достаточное условие условного экстремума.

Вопросы к экзамену в 4 семестре

1. Мера Жордана, множества, измеримые по Жордану
2. Интеграл Римана от функции многих переменных по прямоугольнику, интегрируемость непрерывной функции.

3. Повторный интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному.
4. Замена переменных в кратном интеграле Римана.
5. Непрерывная кривая и ее длина.
6. Регулярная поверхность и ориентированная регулярная поверхность в трехмерном пространстве.
7. Площадь поверхности, ее инвариантность относительно параметризации и ориентации.
8. Криволинейный интеграл I типа, его независимость от параметризации и ориентации кривой. Определение и вычисление.
9. Криволинейный интеграл II типа, его независимость от параметризации кривой и зависимость от ориентации кривой. Вычисление криволинейного интеграла.
10. Интеграл по замкнутому контуру, формула Грина. Механический смысл криволинейного интеграла.
11. Поверхностный интеграла I типа, его независимость от параметризации и ориентации поверхности, определение и вычисление.
12. Поверхностный интеграла II типа, его независимость от параметризации поверхности и смена знака при смене ориентации поверхности, определение и вычисление.
13. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.
14. Дивергенция и ротор тор как инварианты векторного поля.
15. Потенциальное векторное поле, критерий потенциальности поля.

Вопросы к экзамену в 5 семестре

1. Интегралы, зависящие от параметра. Переход к пределу, непрерывность, инегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра.
2. Гамма-функция, бета-функция, их свойства.
3. Пространство L^2 и его полнота
4. Ортогональные функции, ортогональные и ортонормированные системы в L^2, их линейная независимость.
5. Теорема о наименьшем уклонении. Неравенство Бесселя и сходимость ряда из квадратов коэффициентов Фурье.
6. Замкнутость и полнота ортогональных систем, эквивалентность этих понятий в пространстве L^2.
7. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность и полнота.
8. Тригонометрические ряды Фурье для суммируемых на отрезке функций.
9. Представление частных сумм тригонометрического ряда интегралом Дирихле. Средние Фейера, теорема Фейера. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции тригонометрическими
10. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции и алгебраическими полиномами.
11. Теорема Римана-Лебега о коэффициентах Фурье.
12. Теорема Римана о локализации.
13. Признаки Липшица, Дирихле и Жордана сходимости тригонометрического ряда. Равномерная сходимость тригонометрического ряда для гладких функций.

Вопросы к экзамену в 6 семестре

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной.
2. Геометрическая интерпретация. Интегральные кривые.
3. Простейшие уравнения, интегрируемые в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные и приводящиеся к ним, обобщённые однородные, линейные.
4. Уравнения Бернулли и Риккати.
5. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Интегрирующий множитель и методы его нахождения.

7. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной.
8. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных и параметров.
9. Уравнения Клеро и Лагранжа.
10. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные определения. Простейшие типы уравнений, допускающих интегрирование в квадратурах. Уравнения, допускающие понижение порядка.
11. Гладкость решения уравнения n-го порядка.
12. Интегрирование уравнений с помощью рядов.
13. Линейные уравнения n-го порядка.
14. Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка.
15. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
16. Свойства определителя Вронского.
17. Существование фундаментальной системы решений для линейного однородного уравнения n-го порядка.
18. Вид общего решения линейного однородного и неоднородного уравнения n-го порядка.
19. Построение линейного однородного уравнения n-го порядка по заданной фундаментальной системе решений.
20. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения при наличии известных частных решений.
21. Построение частного решения линейного линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом вариации постоянных.

7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

Таблица 1.1. Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сессия	***Лекции***	***Лабораторные занятия***	***Практические занятия***	***Самостоятельная работа***	***Автоматизированное тестирование***	***Др. виды учебной деятельности***	***Промежуточная аттестация***	***Итого***
0	5	0	5	0	0	0	0	10
1	5	0	5	40	0	0	40	90
2	10	0	10	40	0	0	40	100
3	10	0	10	40	0	0	40	100
4	10	0	10	40	0	0	40	100
5	10	0	10	40	0	0	40	100
6	10	0	10	40	0	0	40	100

Программа оценивания учебной деятельности студента за 0 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 5
Критерии оценки:
- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 3 баллов
- от 51 % до 75 % - 4 баллов
- от 76 % до 100 % - 5 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 5
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 3 баллов
- от 51 % до 75 % - 4 баллов
- от 76 % до 100 % - 5 баллов

Программа оценивания учебной деятельности студента за 1 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 5
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 3 баллов
- от 51 % до 75 % - 4 баллов
- от 76 % до 100 % - 5 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 5
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 3 баллов
- от 51 % до 75 % - 4 баллов
- от 76 % до 100 % - 5 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.

1. Работа №1 (от 0 до 40 баллов).

Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов

Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 1 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

Программа оценивания учебной деятельности студента за 2 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.

2. Работа №2 (от 0 до 40 баллов).

Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов
Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 2 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

Программа оценивания учебной деятельности студента за 3 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия

Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.
3. Работа №3 (от 0 до 40 баллов).
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов
Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 3 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

Программа оценивания учебной деятельности студента за 4 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:
- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:
- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.
4. Работа №4 (от 0 до 40 баллов).
Критерии оценки:
- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов
Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 4 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

Программа оценивания учебной деятельности студента за 5 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.

5. Работа №5 (от 0 до 40 баллов).

Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов

Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**

.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 5 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

Программа оценивания учебной деятельности студента за 6 семестр:

Лекции
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Лабораторные занятия
Не предусмотрены.

Практические занятия
Посещаемость, опрос, активность и др. за один семестр – от 0 до 10
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 4 баллов
- от 51 % до 75 % - 7 баллов
- от 76 % до 100 % - 10 баллов

Самостоятельная работа
Оценивается качество и количество выполненных работ, проверяется грамотность в оформлении и правильность выполнения.

6. Работа №6 (от 0 до 40 баллов).
Критерии оценки:

- менее 25% - 0 баллов
- от 25% до 50% - 14 баллов
- от 51 % до 75 % - 28 баллов
- от 76 % до 100 % - 40 баллов

Автоматизированное тестирование
Не предусмотрено

Другие виды учебной деятельности
Не предусмотрены.

Промежуточная аттестация – экзамен от 0 до 40 баллов
Промежуточная аттестация проводится в виде письменных ответов на вопросы и индивидуальных собеседований.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на **«отлично»** оценивается от **36 до 40 баллов**;
ответ на **«хорошо»** оценивается от **30 до 35 баллов**;
ответ на **«удовлетворительно»** оценивается от **24 до 29 баллов**;
ответ на **«неудовлетворительно»** оценивается от **23 до 0 баллов.**
.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 6 семестр по дисциплине «Математический анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2.2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Математический анализ» в оценку (экзамен):

от 90 до 100 баллов	«отлично»
от 80 до 89 баллов	«хорошо»
от 60 до 79 баллов	«удовлетворительно»
меньше 60 баллов	«неудовлетворительно»

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Математический анализ»

а) литература:

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа - М. : ФИЗМАТЛИТ, Т.1. - 2009 - 399 с. ISBN 978-5-9221-0183-7. -**ISBN**978-5-9221-0184-4.–**Экз.** ОХФ (1), ОХФ-ЧЗ-4 (2), ОУОЕН (27) V
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – М.: АСТ: Астрель, 2007, 2009. **Экз.** ОУОЕН (143). **Экз.** ОУОЕН (11) V

б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Лицензионное программное обеспечение:
1. операционная система Windows 7, или более поздняя версия
2. Microsoft Office Word,
3. Microsoft Office Exel,
4. Microsoft Office PowerPoint.

Интернет-ресурсы:

1. file:///C:/Users/dekanat/Downloads/1038.pdf
2. file:///C:/Users/dekanat/Downloads/1041.pdf
3. http://bookre.org
4. Матвеева Ю.В., Осипцев М.А., Прохоров Д.В. Линейное векторное пространство. Функции многих переменных. [Электронный ресурс]: - Саратов : 2014. - 61, Перейти к внешнему ресурсу: Текст ID= 1038

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Математический анализ»

Учебная аудитория с обязательным наличием специализированной доски, мела (маркера), ноутбука с программным обеспечением, проекционной техники, экрана и с возможностью размещения всех обучающихся.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **44.03.01- Педагогическое образование** и профилю подготовки **Математическое образование**.

Авторы кандидат физико-математических наук, доцент В.Г.Гордиенко
Ассистент, Амозова К.Ф.

Программа актуализирована на заседании кафедры математического анализа **протокол № 15 от 18 марта 2022 г.**

Приложение

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература:

1. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу, в 2-х кн. Издательство Московского университета, 2000.
2. *Ильин В.А. Садовничий В.А., Сендов., Бл.Х.* Математический анализ т.1-2, М.: Проспект: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
3. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа: в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 6-е изд., стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова ; Вып. 1).
4. *Лукомский С.Ф, Сахно Л.В., Терехин П.А., Шевцов В.И.* Практические занятия по математическому анализу. Ч.3. Функции многих переменных. Теория поля. РядыФурье. Изд-во Сарат. ун-та. 2005.
5. *Никольский. С.М.*. Курс математического анализа. Т.1-2, Наука, 1983.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 - 2006.
7. *Шилов, Г.Е.* Математический анализ: Функции одного переменного / Г. Е. Шилов. – М.: Наука. 2002 г.
8. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. [Электронный ресурс]: учебник / - Москва : Лань, 2008. - 560 с. - **ISBN** 978-5-8114-0136-9