

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ  
Декан механико-математического факультета  
Захаров А.М.  
"30" \_\_\_\_\_ 2019 г.

Рабочая программа дисциплины

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ


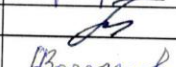
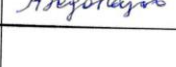
Направление подготовки бакалавриата  
02.03.01 – Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки бакалавриата  
Математические основы компьютерных наук

Квалификация (степень) выпускника  
Бакалавр

Форма обучения  
очная

Саратов,  
2019

Статус	ФИО	Подпись	Дата
Преподаватель-разработчик	Кривобок В.В.		30.08.2019г
Председатель НМК	Тышкевич С.В.		30.08.2019г
Заведующий кафедрой	Водолазов А.М.		30.08.2019г
Специалист Учебного управления			

### 1. Цели освоения дисциплины «Теория чисел»

Целями освоения дисциплины «Теория чисел», реализуемого в первом семестре, являются овладение студентами элементарной теорией чисел, теорией сравнений и начальными сведениями в области аналитической теории чисел в объёме, необходимом для изучения всех последующих специальных курсов по кафедре компьютерной алгебры и теории чисел. Во втором семестре целями освоения дисциплины являются овладение студентами знаниями в области аналитической теории чисел, в объёме, необходимом для изучения всех последующих специальных курсов по кафедре компьютерной алгебры и теории чисел.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Теория чисел» включена в часть, формируемую участниками образовательных отношений блока 1 «Дисциплины (модули)» ООП бакалавриата. На ее изучение отводится 216 часов (87 часов аудиторной работы, 1 час КСР, 93 часа СР, 36 часов контроль). Согласно учебному плану направления и профиля подготовки данный курс в шестом семестре заканчивается зачетом, в седьмом семестре заканчивается экзаменом.

Дисциплина «Теория чисел» является специальным курсом. Изучение курса требует знания математики в объеме средней общеобразовательной школы, математического анализа и теории функций комплексной переменной. В свою очередь, знание в области теории чисел в той или иной степени необходимо для всех специальных курсов кафедры компьютерной алгебры и теории чисел и для подготовки бакалавров по направлению 020301.

### 3. Результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции	Результаты обучения
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>1.1_Б.УК-1.</b> Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет декомпозицию задачи.	<b>Знать:</b> – постановку основных задач теории чисел; – основные этапы решения и исследования задач теории чисел. <b>Уметь:</b> – анализировать задачи, выделяя ее базовые составляющие; – осуществлять декомпозицию задачи.  <b>Владеть:</b> – навыками анализа задачи с выделением ее базовых составляющих.
	<b>2.1_Б.УК-1.</b> Находит и	<b>Знать:</b>

	<p>критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи.</p>	<p>– основные источники информации по теории чисел;  – способы извлечения необходимой научно-технической информации из электронных и бумажных носителей теории чисел.  <b>Уметь:</b>  – находить и критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи.  <b>Владеть:</b>  – навыками критического анализа информации по применению теории чисел к различным задачам.</p>
	<p><b>3.1_Б.УК-1.</b> Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.</p>	<p><b>Знать:</b>  – основные аналитические методы решения задач теории чисел.  <b>Уметь:</b>  – оценить достоинства и недостатки различных вариантов решения задач при применении методов теории чисел.  <b>Владеть:</b>  – навыками выбора оптимального решения для поставленной задачи.</p>
	<p><b>4.1_Б.УК-1.</b> Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.</p>	<p><b>Знать:</b>  – основные факты теории чисел и направления их применения к различным задачам.  <b>Уметь:</b>  – грамотно, логично, аргументированно формировать собственные суждения и оценки в области применения аппарата теории чисел;  – отличать факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.  <b>Владеть:</b>  – навыками формирования собственных суждений и оценок в области</p>

		<p>применения методов теории чисел;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– навыками грамотного, логичного и аргументированного изложения своей позиции по вопросам применения методов теории чисел.</li> </ul>
	<p><b>5.1 Б.УК-1.</b> Определяет и оценивает практические последствия возможных решений задачи.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные методы решения задач теории чисел.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– определить практические последствия решения задач с помощью методов теории чисел;</li> <li>– оценить практические последствия решения задач с помощью методов теории чисел.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– навыками определения и оценивания практических последствий возможных решений задач с помощью методов теории чисел.</li> </ul>
<p><b>ПК-1.</b> Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.</p>	<p><b>1.1 Б.ПК-1.</b> Понимает основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с математикой, естественными науками и информационными технологиями.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с теорией чисел.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– находить основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с теорией чисел.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основными концепциями, принципами, теорией и фактами, связанными с теорией чисел.</li> </ul>
	<p><b>2.1 Б.ПК-1.</b> Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные методы теории чисел для решения задач в собственной научно-исследовательской деятельности.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– применять методы теории чисел для решения задач в собственной научно-исследовательской</li> </ul>

		<p>деятельности.</p> <p>– обрабатывать и анализировать научно-техническую информацию для постановки и решения задач.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>– навыками применения методов теории чисел для решения задач в собственной научно-исследовательской деятельности.</p>
	<p><b>3.1_Б.ПК-1.</b> Способен проводить научно-исследовательскую деятельность в математике и информатике.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <p>– основные методы проведения научно-исследовательской деятельности при помощи задач теории чисел.</p> <p><b>Уметь:</b></p> <p>– проводить научно-исследовательскую деятельность при помощи задач теории чисел.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>– навыками научно-исследовательской деятельности с применением задач теории чисел.</p>

#### 4. Структура и содержание дисциплины.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц 216 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	КСР	СР	Контроль	

1.	Понятие делимости целых чисел. Основная теорема арифметики.	6	1,2	2	2		8		Опрос Консультация
2.	Теоретико-числовые функции.	6	3-6	4	4		8		Консультация
3.	Понятие сравнения целых чисел.	6	7,8	2	2		8		Консультация

4.	Сравнения с одним неизвестным.	6	9-12	4	4		8		Контрольная работа
5.	Сравнения второй степени.	6	13-16	4	4		8		Консультация
	<b>Промежуточная аттестация</b>								<b>Зачет</b>
	<b>Итого за 6 семестр</b>			<b>16</b>	<b>16</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	<b>0</b>	<b>72</b>
6.	Асимптотический закон распределения простых чисел.	7	1-3	3	6		4		Консультация
7.	$\zeta$ -функция Римана Свойства.	7	4,5	2	4		7		Консультация
8.	Теоремы Дирихле о простых в арифметических прогрессиях.	7	6-8	3	6		7		Консультация
9.	$L$ -функция Дирихле. Свойства.	7	9,10	2	4	0,5	7		Консультация
10	Характеры Дирихле.	7	11	1	2		7		Коллоквиум
11	Алгебраические и трансцендентные числа.	7	12-14	3	6		7		Консультация Контрольная работа
12	Приближение действительных чисел рациональными числами.	7	15,16	2	4	0,5	7		Консультация
13	Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$ .	7	17,18	2	4		7		Консультация
	<b>Промежуточная аттестация</b>							<b>36</b>	<b>Экзамен</b>
	<b>Итого за 7 семестр</b>			<b>18</b>	<b>36</b>	<b>1</b>	<b>53</b>		
	<b>Итого</b>			<b>34</b>	<b>52</b>	<b>1</b>	<b>93</b>	<b>36</b>	<b>216 ч.</b>

### 6 семестр.

**Делимость целых чисел.** Понятие делимости целых чисел. Свойства делимости. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное. Рекуррентная формула. Связь НОД и НОК двух целых чисел. Постулат Бертрана.

**Теоретико-числовые функции.** Целая часть действительного числа. Основные свойства и график. Теорема о количестве натуральных делителей числа, не превосходящих данного натурального. Дробная часть действительного числа. Основные свойства и график. Лемма о показателе, с которым входит простое число в разложение  $n!$ . Следствие из него. Мультипликативные функции. Примеры мультипликативных функций.

Свойства. Количество и сумма натуральных делителей натурального числа. Функция Мёбиуса. Свойства функции Мёбиуса, формулы обращения. Функция Эйлера. Свойства функции Эйлера. Формулы сложения и умножения.

**Сравнение целых чисел.** Понятие сравнения целых чисел по натуральному модулю. Свойства сравнений. Классы вычетов по модулю  $m$ . Полная система вычетов. Свойства полных систем вычетов. Приведённая система вычетов. Свойства приведённых систем вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма (малая).

**Сравнения с одним неизвестным первой степени.** Понятие сравнения с одним неизвестным, его степень. Решение сравнений. Равносильные сравнения. Теорема о сравнении первой степени. Метод Эйлера. Китайская теорема об остатках, дополнение к ней. Число решений сравнения по простому модулю. Критерий простоты числа.

**Сравнения с одним неизвестным второй степени.** Понятие сравнения с одним неизвестным второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты по  $\text{mod } p$ . Теорема о числе квадратичных вычетов и невычетов. Сравнения второй степени с одним неизвестным, сводящиеся к сравнениям первой степени с одним неизвестным. Символ Лежандра и его свойства. 2 леммы Гаусса. Символ Якоби и его свойства. Теорема о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю для сравнения второй степени с одним неизвестным.

## 7 семестр

**Асимптотический закон распределения простых чисел (АЗРПЧ).** Функция  $\pi(x)$ , формулировка АЗРПЧ. Теорема Чебышева. Лемма о связи функций  $\theta(x)$ ,  $\psi(x)$ , и  $\pi(x)$ . Лемма о вычислении интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2} ds$ . Лемма о функции  $\omega(x)$ . Лемма о связи функций  $\omega(x)$  и  $R(x)$ . Доказательство АЗРПЧ.

**$\zeta$ -функция Римана.**  $\zeta$ -функция Римана, ее простейшие свойства. Лемма об абсолютной сходимости в полуплоскости  $\sigma > 1$ . Нули  $\zeta$ -функции Римана в полуплоскости  $\sigma > 1$ . Тождество Эйлера. Нетривиальные нули  $\zeta$ -функции Римана. Лемма о нулях  $\zeta$ -функции на прямой  $\text{Re } s = 1$ . Лемма об оценке модуля логарифмической производной  $\zeta$ -функции. Гипотеза Римана для  $\zeta$ -функции Римана.

**Теоремы Дирихле о простых в арифметических прогрессиях.** Простейшие случаи теоремы Дирихле. Характеры Дирихле: определение и простейшие свойства, примеры характеров. Теорема о сумме значений характера. Теорема о сумме характеров. Теорема о числе характеров по заданному модулю. Лемма об оценке сумматорной функции. Доказательство теоремы Дирихле.

**$L$ -функция Дирихле.** Определение  $L$ -функции Дирихле и простейшие случаи. Основные свойства  $L$ -функции Дирихле. Представление  $L$ -функции в виде эйлеровского произведения. Следствие. Неравенство нулю  $L$ -функции в

точке  $s=1$ . Лемма о логарифмической производной  $L$ -функции. Расширенная гипотеза Римана. Связь расширенной и обычной гипотез Римана.

**Алгебраические и трансцендентные числа.** Понятие алгебраического и трансцендентного чисел. Поле алгебраических чисел. Понятие степени алгебраического числа. Понятие минимального многочлена. Свойства минимального многочлена. Теорема о минимальном многочлене.

**Приближение действительных чисел рациональными числами.** Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены. Теорема Дирихле. Приближение действительных чисел рациональными дробями с заданным ограничением для знаменателей. Рациональные приближения алгебраических чисел. Цепные дроби. Подходящие дроби, их свойства. Разложение действительных чисел в цепную дробь. Отыскание наилучших приближений с помощью цепных дробей.

**Трансцендентность чисел  $e$  и  $\pi$ .** Теорема о трансцендентности числа  $e$ . Теорема о квадратичной иррациональности числа  $e$ . Тождество Эрмита. Трансцендентность числа  $\pi$ . Теорема Линдемана.

## Практические занятия

### 6 семестр.

**Делимость целых чисел.** Теорема о делении с остатком. Отыскание НОД и НОК двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Простые и составные числа.

**Понятие сравнения.** Свойства сравнений. Классы вычетов. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма.

**Сравнения с одним неизвестным.** Системы сравнений с одним неизвестным первой степени.

Контрольная работа №1.

### 7 семестр.

**Сравнения второй степени.** Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Решение сравнений второй степени с одним неизвестным.

**Непрерывные дроби.** Основные понятия. Сходимость непрерывной бесконечной дроби. Квадратичные иррациональности и периодические дроби.

**Алгебраические и трансцендентные числа.** Теорема Лиувилля. Теорема Линдемана.

Контрольная работа №2.

## 5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

При проведении лекционных и практических занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты стандартных статистических программ: Statistica, SPSS и др. Использование информационных технологий осуществляется, в частности, в процессе реализации активных и интерактивных форм проведения занятий.



При чтении лекций в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30 % аудиторных занятий.

### **Особенности проведения занятий для инвалидов и граждан с ОВЗ**

При обучении лиц с ограниченными возможностями используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

*- для слабовидящих:*

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

*- для глухих и слабослышащих:*

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

*- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих* все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

#### **Примерный перечень вопросов по дисциплине.**

1. Понятие делимости целых чисел. Свойства делимости.
2. Простые и составные числа. Теорема Евклида.
3. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение числа.

4. Целая и дробные части действительного числа. Их графики и свойства.
5. Лемма о показателе, с которым входит простое число в разложение  $n!$ . Следствие из него.
6. Мультипликативные функции. Примеры мультипликативных функций. Свойства.
7. Количество и сумма натуральных делителей натурального числа.
8. Функция Мёбиуса. Свойства функции Мёбиуса, формулы обращения.
9. Функция Эйлера. Свойства функции Эйлера. Формулы сложения и умножения.
10. Теорема Чебышева.
11. Лемма о показателе, с которым входит простое число в разложение  $n!$ . Следствие из него.
12. Теорема Чебышева.
13. Лемма о связи функций  $\theta(x)$ ,  $\psi(x)$ , и  $\pi(x)$ .
14. Понятие сравнимости целых чисел. Свойства сравнений. Классы вычетов по модулю  $m$ .
15. Полная система вычетов. Свойства полных систем вычетов.
16. Приведённая система вычетов. Свойства приведённых систем вычетов.
17. Теоремы Эйлера и Ферма (малая).
18. Сравнения с одним неизвестным, его степень. Решение сравнений. Равносильные сравнения.
19. Теорема о сравнении первой степени. Метод Эйлера.
20. Китайская теорема об остатках, дополнение к ней.
21. Число решений сравнения по простому модулю. Критерий простоты числа.
22. Квадратичные вычеты и невычеты по  $\text{mod } p$ . Теорема о числе квадратичных вычетов и невычетов.
23. Символ Лежандра и его свойства. 2 леммы Гаусса. Символ Якоби.
24.  $\zeta$ -функция Римана, леммы об абсолютной сходимости и нули в полуплоскости  $\sigma > 1$ .
25. Тождество Эйлера.
26. Нули  $\zeta$ -функции.
27. Лемма о нулях  $\zeta$ -функции на прямой  $\text{Re } s=1$ .
28. Лемма об оценке модуля логарифмической производной  $\zeta$ -функции.
29. Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.
30. Лемма о вычислении интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b^s}{s^2} ds$ .
31. Лемма о функции  $\omega(x)$ .
32. Лемма о связи функций  $\omega(x)$  и  $R(x)$ .
33. Простейшие случаи теоремы Дирихле.
34.  $L$ -функция Дирихле: определение и простейшие случаи.
35. Характеры Дирихле: определение и свойства, примеры характеров.
36. Теорема о числе характеров по заданному модулю.
37. Теорема о сумме характеров.
38. Лемма об оценке сумматорной функции.

39. Свойства  $L$ -функции Дирихле.
40. Представление  $L$ -функции в виде эйлеровского произведения. Следствие.
41. Неравенство нулю  $L$ -функции в точке  $s=1$ .
42. Лемма о логарифмической производной  $L$ -функции.
43. Доказательство теоремы Дирихле.
44. Поле алгебраических чисел.
45. Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены.
46. Приближение действительных чисел рациональными числами.
47. Теорема Дирихле.
48. Теорема о бесконечности множества неравенства  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ .
49. Теорема Лиувилля.
50. Теорема о бесконечности множества неравенства  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$ .
51. Теорема о трансцендентности числа  $e$ .
52. Теорема о квадратичной иррациональности числа  $e$ .
53. Тождество Эрмита.
54. Трансцендентность числа  $\pi$ .
55. Теорема Линдемана.

Самостоятельная работа студентов предполагает индивидуальную работу с учебно-методической литературой: учебниками, методическими пособиями.

### **Контрольно-самостоятельная работы Индивидуальные задания**

В шестом семестре студентам выдаются следующие индивидуальные самостоятельные задания по темам «Конечные поля», «Распределение простых чисел», «Алгебраические и иррациональные числа», «Сравнения второй степени». Соответствующая методическая литература в достаточном количестве имеется на кафедре. Самостоятельная работа оформляется в виде реферата и докладывается на практических занятиях.

1. Конечные поля. Арифметика в конечных полях.
2. Решение систем линейных сравнений по простому модулю.
3. Оценки числа решений систем сравнений по простому модулю.
4. Теорема Зигеля.
5. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии.
6. Критерии иррациональности числа.
7. Метод решета А. Сельберга.
8. Теоремы Вильсона и Шевалье.
9. Вертикальное распределение нулей  $L$ -функции.
10. Степенные вычеты.
11. Закон взаимности для символа Лежандра.
12. Первообразные корни по простому модулю.
13. Длина периода десятичной дроби.
14. Первообразные корни по составным модулям.

## 15. Разложение числа $e$ в цепную дробь.

В седьмом семестре студентам выдаются следующие индивидуальные самостоятельные задания по темам «конечные поля», «Цепные дроби», «Трансцендентные числа», «Распределение простых чисел», «Диофантовы уравнения». Соответствующая методическая литература в достаточном количестве имеется на кафедре. Самостоятельная работа оформляется в виде реферата и докладывается на практических занятиях.

1. Приближение действительных чисел подходящими дробями.
2. Приближение действительных чисел рациональными дробями.
3. Наилучшие приближения.
4. Последовательности Фарея.
5. Трансцендентные числа Лиувилля.
6. Индексы и их свойства. Индексы по простому модулю.
7. Индексы по составному модулю.
8. Некоторые диофантовы уравнения.
9. Представление натуральных чисел в виде суммы четырех квадратов.
10. Проблема Варинга.
11. Неопределенное уравнение Ферма.
12. Проблема Ферма.
13. Простые числа-близнецы.
14. Уравнения Пелля.
15. Десятая проблема Гильберта.

Консультации лектора помогают усвоению материала. Контроль за успеваемостью также осуществляется в форме бесед учебного и творческого характера, опроса, индивидуальных заданий, контрольных работ.

### Примеры контрольных работ

Контрольная работа №1 (Темы: Разложение на множители.

Мультипликативные функции. Сравнения первой степени)

*Вариант 1.*

1. Доказать, что числа вида  $4^n + 15n - 1$  ( $n=1,2,\dots$ ) кратны 9.
2. Найти такое простое число  $p$ , чтобы числа  $4p^2 + 1$  и  $6p^2 + 1$  оба были простыми.
3. Решить уравнение  $\varphi(x) = 120$ , где  $x = p_1 p_2$  и  $p_1 - p_2 = 2$ .
4. При каких целых значениях  $x$  следующие функции принимают целочисленные значения: 1)  $f(x) = \frac{9x-1}{7}$ ; 2)  $f(x) = \frac{7x-1}{15}$ ?
5. Решить систему сравнений  $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \pmod{10}$ .

*Вариант 2.*

1. Доказать, что  $(a,b) = (5a+3b, 13a+8b)$ .
2. Если числа  $p$  и  $8p^2 + 1$  простые, доказать что тогда и число  $8p^2 + 2p + 1$  тоже простое.
3. Решить уравнения 1)  $\varphi(5^x) = 100$ , 2)  $\varphi(3^x \cdot 5^x) = 600$ .

4. При каких целых значениях  $x$  следующая функция принимает целочисленные значения:  $f(x) = \frac{5x-3}{11}$  ?
5. Решить систему сравнений  $\begin{cases} 5x-y \equiv 3 \\ 2x+2y \equiv -1 \end{cases} \pmod{6}$ .

Контрольная работа №2 (Тема: Сравнения второй степени)

*Вариант 1.*

1. Решить сравнение, предварительно приведя его к двучленному:  $2x^2+4x-1 \equiv 0 \pmod{5}$ .
2. Найти целые точки, через которые проходят следующие кривые:  $4x^2-5y=6$ ,  $11y=5x^2-7$ .
3. Найти остаток от деления числа  $2^{64}$  на 360.
4. Установить какие из следующих сравнений разрешимы, и найти соответствующие решения: 1)  $x^2 \equiv 7 \pmod{27}$ ; 2)  $x^2 \equiv 59 \pmod{125}$ .

*Вариант 2.*

1. Решить сравнение, предварительно приведя его к двучленному:  $2x^2-2x-1 \equiv 0 \pmod{7}$ .
2. Найти целые точки, через которые проходят следующие кривые:  $15x^2-7y^2=9$ ,  $13y=x^2-21x+110$ .
3. Найти остаток от деления числа  $1532^5-1$  на 9.
4. Установить какие из следующих сравнений разрешимы, и найти соответствующие решения: 1)  $x^2 \equiv 31 \pmod{24}$ ; 2)  $x^2 \equiv 13 \pmod{105}$ .

Контрольная работа №2 (Темы: Цепные дроби. Алгебраические и трансцендентные числа) (Альтернативный вариант)

*Вариант 1.*

1. Разложить в непрерывную дробь  $\sqrt{x^2+1}$ .
2. Доказать, что иррациональность вида  $\sqrt{m}$  ( $m$  – натуральное число) разлагается в непрерывную дробь, период которой начинается со второго неполного частного.
3. Найти с точностью до 0,0001 наилучшее приближение корней уравнения  $x^2-5x+2=0$ .
4. Доказать, что число  $\alpha = \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$  (число Лиувилля) является трансцендентным.
5. С помощью теоремы Гельфонда доказать трансцендентность чисел: 1)  $\lg 2$ ; 2)  $\log_2 10$ ; 3)  $\ln 5$ .

*Вариант 2.*

1. Разложить в непрерывную дробь  $\sqrt{a^4+2a}$ .
2. Доказать, что если положительная квадратичная иррациональность разлагается в чистую периодическую непрерывную дробь, то сопряженная ей иррациональность принадлежит интервалу  $(-1;0)$ .
3. Найти с точностью до 0,0001 наилучшее приближение корней уравнения  $4x^2+20x+23=0$ .
4. Найти порядок алгебраических чисел: 1)  $\sqrt[3]{3}$ ; 2)  $\sqrt[3]{2}-1$ ; 3)  $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ .

5. Доказать, что корни уравнения  $x^5 - 3x^2 + 12x - 6 = 0$  есть алгебраические числа пятого порядка.

## 7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

**Таблица 1.** Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
6	5	0	15	10	0	30	40	100
7	5	10	5	10		30	40	100

### Программа оценивания учебной деятельности студента

#### 6 семестр

##### Лекции

Посещаемость, опрос, активность и др. от 0 до 5 баллов.

##### Лабораторные занятия

Не предусмотрены.

##### Практические занятия

Самостоятельность и правильность при выполнении работы – от 0 до 5 баллов, активность работы в аудитории – от 0 до 5 баллов, уровень подготовки к занятиям – от 0 до 5 баллов.

##### Самостоятельная работа

Контроль качества и количества выполненных домашних работ – от 0 до 5 баллов, правильность выполнения – от 0 до 5 баллов.

##### Автоматизированное тестирование

Не предусмотрено.

##### Другие виды учебной деятельности

Контрольная работа – от 0 до 30 баллов.

##### Промежуточная аттестация

при проведении промежуточной аттестации  
ответ на «отлично» оценивается от 36 до 40 баллов;  
ответ на «хорошо» оценивается от 31 до 35 баллов;

ответ на «удовлетворительно» оценивается от 25 до 30 баллов;  
ответ на «неудовлетворительно» оценивается от 0 до 24 баллов.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента по дисциплине «Теория чисел» составляет 100 баллов.

**Таблица 2.1** Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Теория чисел» в оценку (зачет):

60 – 100 баллов	«зачтено»
0 – 59 баллов	«не зачтено»

## **7 семестр**

### **Лекции**

Посещаемость, опрос, активность и др. от 0 до 5 баллов.

### **Лабораторные занятия**

Самостоятельность и правильность при выполнении работы – от 0 до 5 баллов, уровень подготовки к занятиям – от 0 до 5 баллов.

### **Практические занятия**

Самостоятельность и правильность при выполнении работы, активность работы в аудитории – от 0 до 5 баллов.

### **Самостоятельная работа**

Контроль качества и количества выполненных домашних работ – от 0 до 5 баллов, правильность выполнения – от 0 до 5 баллов.

### **Автоматизированное тестирование**

Не предусмотрено.

### **Другие виды учебной деятельности**

1. Контрольная работа – от 0 до 30 баллов.

### **Промежуточная аттестация**

при проведении промежуточной аттестации  
ответ на «отлично» оценивается от 36 до 40 баллов;  
ответ на «хорошо» оценивается от 31 до 35 баллов;  
ответ на «удовлетворительно» оценивается от 25 до 30 баллов;  
ответ на «неудовлетворительно» оценивается от 0 до 24 баллов.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента по дисциплине «Теория чисел» за 7 семестр составляет 100 баллов.

**Таблица 2.2** Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Теория чисел» в оценку (экзамен) :

90 – 100 баллов	«отлично»
75 – 89 баллов	«хорошо»
60 – 74 баллов	«удовлетворительно»
0 – 59 баллов	«не удовлетворительно»



## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Теория чисел»

### Литература

1. *Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2004.*
2. *Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. - М., 1995.*
1. *Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. - М., 1965.*
2. *Михелович Ш.Х. Теория чисел. - М.: Высшая школа, 1967.*
3. *Оре О. Приглашение в теорию чисел. - М.: Наука, 1980.*
4. *Елистратов И.В., Каменский В.Г. Сборник задач по теории чисел. Изд-во СГУ, 1988 г.*
5. *Окунев Л.Я. Краткий курс теории чисел. - М.: Учпедгиз, 1956.*
6. *Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. - М., 1965.*
9. *Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. - М.: Наука, 1982.*
10. *Хинчин А.Я. Цепные дроби. - М.: Наука, 1989.*
11. *Оре О. Приглашение в теорию чисел. - М.: Наука, 1980.*
12. *Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. Физматгиз, 1994.*
13. *Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.*
14. *Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.*
15. *Чудаков Н.Г. Введение в теорию L-функции Дирихле. М.: Наука, 1948.*
16. *Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2006.*
17. *Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: Просвещение, 1966.*

### Интернет-ресурсы:

1. Саратовской государственной университет им. Н.Г. Чернышевского. – Режим доступа: [www.sgu.ru/](http://www.sgu.ru/)
2. Зональная научная библиотека им. В.А. Артисевич Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. – Режим доступа: <http://library.sgu.ru/>

Каталог образовательных Интернет-ресурсов. – Режим доступа:

<http://window.edu.ru/>

## 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Теория чисел»

Учебная аудитория с обязательным наличием специализированной доски, мела (маркера), проектора, с возможностью размещения всех обучающихся по данной дисциплине.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС по направлению 02.04.01 «Математика и компьютерные науки» и профилю подготовки «Математические основы компьютерных наук».

Автор:

доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел  
В.В. Кривобок

Программа одобрена на заседании кафедры компьютерной алгебры и теории чисел от 30 августа 2019 года, протокол № 1.