

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Декан механико-математического
факультета


А.М. Захаров
"16" марта 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Спецкурс 7.1

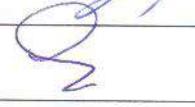
Направление подготовки магистратуры
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки магистратуры
Математические основы компьютерных наук

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
очная

Саратов,
2021

| Статус | ФИО | Подпись | Дата |
|--------------------------------|---------------|---|------------|
| Преподаватель-разработчик | Сергеев А.Н. |  | 16.03.2021 |
| Председатель НМК | Тышкевич С.В. |  | 16.03.2021 |
| Заведующий кафедрой | Галаев С.В. |  | 16.03.2021 |
| Специалист Учебного управления | | | |

1. Цели освоения дисциплины

Основная цель дисциплины «Специальный курс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» состоит в ознакомлении студентов с основами теории алгебр Ли и ассоциативных алгебр на примере универсальных обертывающих алгебр, их обобщений, и овладении методами этой теории. Алгебры Ли и их обобщения являются одной из наиболее важных в приложениях областей современной математики.

Поскольку приложения этой теории огромны, то этот курс должен позволить студентам ориентироваться в современной математической литературе. Студенты получают навыки проведения доказательств утверждений общего теоретического характера и их применения при изучении конкретных объектов. Знания, полученные в результате освоения данного курса, позволяют использовать методы теории алгебр Ли при изучении других современных математических теорий.

Основной задачей дисциплины «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» является овладение студентами современными методами изучения сложных и весьма абстрактных математических объектов. Это возможно только в результате приобретения ими достаточно высокой математической культуры. Кроме того, необходимо уметь пользоваться полученными общими результатами для исследования конкретных примеров. Эта весьма сложная задача требует большой работы, в частности, самостоятельной.

Задачи дисциплины «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)»:

- сформировать у студентов положительную мотивацию на использование современных математических методов в фундаментальных и прикладных задачах математики;
- дать знания об основных понятиях теории алгебр Ли и их применении для изучения конкретных случаев;
- изучить ассоциативные алгебры связанные с алгебрами Ли
- познакомить с современными методами математики на примере данной теории;
- получить необходимую подготовку для изучения специальной литературы по теме.

Знания, полученные в результате освоения данного курса, позволят использовать методы алгебр Ли при изучении других современных математических теорий.

Студенты получают навыки проведения доказательств утверждений общего теоретического характера и их применения при изучении конкретных объектов.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» (Б1.В.ДВ.02.01) включена в часть, формируемую участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» и относится к дисциплинам по выбору учебного плана ООП магистратуры по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профилю «Математические основы компьютерных

наук». На ее изучение отводится 180 часов (54 часа аудиторной работы, 90 часов СР, 36 ч. контроль). Согласно учебному плану направления и профилю подготовки данный курс в третьем семестре заканчивается экзаменом.

Для изучения дисциплины необходимы знания основ общей и линейной алгебры, топологии, основ теории гладких многообразий. Дисциплина «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» используется для прохождения производственной практики, преддипломной практики, для выполнения научно-исследовательской работы, при написании магистерских работ.

3. Результаты обучения по дисциплине

| Код и наименование компетенции | Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции | Результаты обучения |
|---|--|---|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | 1.1_М.УК-1. Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними. | Знать: - современную математическую литературу в данной области и ее применениях; - методы и приемы формализации задач. Уметь: - выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах, делать обоснованные выводы из научной и учебной литературы; - собирать и анализировать информацию по решаемой задаче, составлять ее математическое описание. Владеть: - навыками сбора, обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования; - навыками самостоятельного изучения математической литературы по данной тематике. |
| | 1.2_М.УК-1. Осуществляет поиск алгоритмов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации. Определяет в рамках выбранного алгоритма вопросы (задачи), подлежащие дальнейшей детальной разработке. Предлагает способы их решения. | Знать: алгоритмы решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации. Уметь: выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах, делать обоснованные выводы из учебной литературы; Владеть: навыками критического анализа информации из математической литературы по данной тематике. |
| | 2.1_М.УК-1. Разрабатывает | Знать: основы планирования целей |

| | | |
|---|---|---|
| | <p>стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности</p> | <p>деятельности. Уметь: планировать цели деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности. Владеть: – навыками постановки и решения задач в рамках поставленной цели; – навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи.</p> |
| <p>ПК-1 Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.</p> | <p>1.1_М.ПК-1. Понимает основные концепции, принципы, теории и факты в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.</p> | <p>Знать: – основные понятия теории ассоциативных алгебр; – определения и понятия теории представлений ассоциативных алгебр; примеры ассоциативных алгебр их представлений – основные теоремы об ассоциативных алгебрах и их представлениях. Уметь: – доказывать основные теоремы об ассоциативных алгебрах; – описывать структуру ассоциативной алгебры для конкретных примеров; – находить базис для конкретных ассоциативных алгебр. Владеть: понятийным аппаратом теории ассоциативных алгебр.</p> |
| | <p>2.1_М.ПК-1. Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности.</p> | <p>Знать: основные задачи ассоциативных алгебр и их приложений; Уметь: – осуществлять выбор методов и средств решения задач исследования; – использовать современный аппарат ассоциативных алгебр в собственной научно-исследовательской деятельности. Владеть: навыками использования методов ассоциативных алгебр в решении задач профессиональной деятельности.</p> |
| | <p>3.1_М.ПК-1. Проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук.</p> | <p>Знать: – применение ассоциативных алгебр в области математики и компьютерных наук; – новые научные результаты в</p> |

| | | |
|--|--|---|
| | | <p>области ассоциативных алгебр и их приложений.</p> <p>Уметь: проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук, используя методы ассоциативных алгебр.</p> <p>Владеть: навыками научно-исследовательской работы в области ассоциативных алгебр и их приложений.</p> |
|--|--|---|

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы, 180 часов.

| № п/п | Раздел дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | | | | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам) |
|-------|---|----------|-------------------------|--|--------------------|----------------------------------|----------|-----------|-----------|---|
| | | | | лекции | Пр.занятия | | КСР | СР | Контроль | |
| | | | | | Общая трудоемкость | Из них - практическая подготовка | | | | |
| 1 | Тема 1. Алгебры определяемые образующими и соотношениями | 3 | 1/ 1-2 | 2 | 4 | 2 | | 20 | | Опрос, проверка домашнего задания |
| 2 | Тема 2. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$ | 3 | 3,5 ,7, 9/ 3-8 | 8 | 12 | 6 | | 20 | | Опрос, проверка домашнего задания |
| 3 | Тема 3. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$ | 3 | 11, 13/ 9- 13 | 4 | 10 | 5 | | 20 | | Опрос, проверка домашнего задания |
| 4 | Тема 4. Квантовая группа $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ | 3 | 15, 17/ 14- 17 | 4 | 8 | 4 | | 20 | | Опрос, проверка домашнего задания |
| 5 | Контрольная работа | 3 | 18 | | 2 | 1 | | 10 | | Контрольная работа по темам 1-4. Отчет по практической подготовке. |
| 6 | Промежуточная аттестация | 3 | | | | | | | 36 | Контрольная работа. Экзамен. |
| 7 | ИТОГО (180 ч.) | 3 | | 18 | 36 | 18 | 0 | 90 | 36 | |

Содержание дисциплины

Тема 1. Ассоциативные алгебры.

Определение и примеры ассоциативных алгебр. Алгебра коммутативных многочленов и алгебра некоммутативных многочленов. Их универсальное свойство. Подалгебры и идеалы, факторалгебры. Образ и ядро гомоморфизма. Определение алгебры, порожденной образующими и соотношениями. Примеры. Нахождение базиса по образующим и соотношениям. Представления и модули их эквивалентность. Неприводимые представления.

Тема 2. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$

Определение алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Понятие старшего вектора и его веса. Теорема о существовании вектора старшего веса и неприводимость порожденного им подмодуля. Описание неприводимых конечномерных представлений алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Модули Верма их неприводимость. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Центр обертывающей алгебры. Тензорное произведение представлений. Алгебра представлений. Действие оператора Казимира на неприводимых представлениях.

Тема 3. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$

Определение алгебры $U(\mathfrak{osp}(1,2))$. Понятие старшего вектора и его веса. Теорема о существовании вектора старшего веса и неприводимость порожденного им подмодуля. Описание неприводимых конечномерных представлений алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Модули Верма их неприводимость. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Центр обертывающей алгебры. Тензорное произведение представлений. Алгебра представлений. Действие оператора Казимира на неприводимых представлениях.

Тема 4. Квантовая группа $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Квантовые целые числа. Определение алгебры $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$ как предел квантовой группы. Понятие старшего вектора и его веса. Теорема о существовании вектора старшего веса и неприводимость порожденного им подмодуля. Описание неприводимых конечномерных представлений алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Модули Верма их неприводимость. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Центр обертывающей алгебры. Тензорное произведение представлений. Алгебра представлений. Действие оператора Казимира на неприводимых представлениях.

Темы практических занятий

Практическое занятие 1. Примеры ассоциативных алгебр. Алгебра матриц и линейных операторов. Различные способы задания алгебры коммутативных многочленов. Размерности ее однородных компонент. Алгебра некоммутативных многочленов. Представления ассоциативных алгебр. Представления матричной алгебры.

Практическое занятие 2. Задание алгебр образующими и соотношениями. Примеры. Алгебры с одной образующей. Алгебры с двумя образующими, построение базиса с помощью гомоморфизма в другие алгебры и с помощью регулярного представления. Алгебра кососимметрических многочленов (внешняя алгебра). Алгебра Вейля.

Практическое занятие 3. Задание алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$ образующими и соотношениями. Доказательство теоремы Пуанкаре - Биркгофа – Витта с использованием регулярного представления. Стандартное представление и присоединенное представление и их старшие веса. Алгебра многочленов от двух переменных как модуль над алгеброй $U(\mathfrak{sl}(2))$.

Практическое занятие 4. Модули Верма. Реализация модуля Верма. Универсальное свойство модуля Верма. Описание гомоморфизмов между модулями Верма. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Многочлены инвариантные относительно циклической группы порядка 2.

Практическое занятие 5. Разложение конечномерного модуля на неприводимые с помощью векторов старшего веса. Случай тензорного произведения. Тензорное произведение трех модулей. Тензорные степени тождественного представления и их разложение.

Практическое занятие 6. Характеры конечномерного представления. Линейная независимость характеров. Разложение представлений на неприводимые с помощью характеров. Характеры модулей Верма. Характеры как собственные функции операторов Казимира. Формула Пиери.

Практическое занятие 7. Примеры алгебр подобных алгебре $U(\mathfrak{sl}(2))$ их задание образующими и соотношениями. Доказательство теоремы Пуанкаре -Биркгофа – Витта с использованием регулярного представления.

Практическое занятие 8. Конечномерные представления алгебр подобных $U(\mathfrak{sl}(2))$. Условия на старший вес. Критерий неприводимости конечномерного представления. Описание всех неприводимых представлений.

Практическое занятие 9. Задание алгебры $U(\mathfrak{osp}(1,2))$ образующими и соотношениями. Доказательство теоремы Пуанкаре - Биркгофа – Витта с использованием регулярного представления. Стандартное представление и присоединенное представление и их старшие веса. Алгебра многочленов от двух переменных как модуль над алгеброй $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.

Содержание практической подготовки

Практическое занятие 10. Алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$. Модули Верма. Реализация модуля Верма. Универсальное свойство модуля Верма. Описание гомоморфизмов между модулями Верма. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Многочлены инвариантные относительно циклической группы порядка 2.

Практическое занятие 11. Алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$. Разложение конечномерного модуля на неприводимые с помощью векторов старшего веса. Случай тензорного произведения. Тензорное произведение трех модулей. Тензорные степени тождественного представления и их разложение.

Практическое занятие 12. Алгебра. $U(\mathfrak{osp}(1,2))$. Характеры конечномерного представления. Линейная независимость характеров. Разложение представлений на неприводимые с помощью характеров. Характеры модулей Верма. Характеры как собственные функции операторов Казимира. Формула Пиери.

Практическое занятие 13. Примеры алгебр подобных алгебре $U(\mathfrak{osp}(1,2))$ их задание образующими и соотношениями. Доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта с использованием регулярного представления. Конечномерные представления.

Практическое занятие 14. Задание алгебры $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ образующими и соотношениями. Доказательство теоремы Пуанкаре - Биркгофа – Витта с использованием регулярного представления. Стандартное представление и присоединенное представление и их старшие веса. Алгебра многочленов от двух переменных как модуль над алгеброй $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Практическое занятие 15. Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Модули Верма. Реализация модуля Верма. Универсальное свойство модуля Верма. Описание гомоморфизмов между модулями Верма. Гомоморфизм Хариш – Чандры. Многочлены инвариантные относительно циклической группы порядка 2.

Практическое занятие 16. Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Разложение конечномерного модуля на неприводимые с помощью векторов старшего веса. Случай тензорного произведения. Тензорное произведение трех модулей. Тензорные степени тождественного представления и их разложение.

Практическое занятие 17. Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Характеры конечномерного представления. Линейная независимость характеров. Разложение представлений на неприводимые с помощью характеров. Характеры модулей Верма. Характеры как собственные функции операторов Казимира. Формула Пиери.

Практическое занятие 18. Контрольная работа. Отчет по практической подготовке.

5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

В учебном процессе при реализации компетентного подхода используются активные и интерактивные формы проведения занятий:

1) при проведении лекционных занятий: информационные лекции, проблемные лекции, лекции беседы, лекции дискуссии, лекции с заранее запланированными ошибками.

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором студенты не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала. Преподаватель заранее намечает список вопросов,

стимулирующих ассоциативное мышление и установления связей с ранее освоенным материалом.

2) при проведении практических занятий: традиционные занятия, занятия исследования, проблемные ситуации, ситуации с ошибкой.

Практические занятия проводятся на основе реализации метода обучения действием: определяются проблемные области, формируются группы. При проведении практических занятий ставятся следующие цели: применение знаний отдельных дисциплин и креативных методов для решения проблем; отработка у обучающихся навыков взаимодействия в составе коллектива; закрепление основ теоретических знаний.

Проведение некоторых практических занятий основывается на интерактивном методе обучения, при котором обучающиеся взаимодействуют не только с преподавателем, но и друг с другом. При этом доминирует активность обучающихся в процессе обучения. Место преподавателя в интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия.

3) *Практическая подготовка* осуществляется путем проведения практических занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Обучающиеся продолжают формировать профессиональные умения и навыки по обработке и анализу научной информации и результатов исследований, полученные при прохождении *практической подготовки по дисциплинам Спецкурс 1, Спецкурс 3, Спецкурс 4*, при прохождении учебной практики (Технологическая практика), производственной практики (Введение в научно-исследовательскую работу).

Прохождение практической подготовки в рамках практических занятий формирует способность проводить исследовательскую деятельность в математике, формулировать и решать стандартные задачи в научно-исследовательской деятельности. Обучающиеся продолжают формировать профессиональные умения и навыки при прохождении *Производственной практики* (Проектно-технологическая практика), при написании магистерских работ.

Примеры профессиональных действий: умение работать с литературой, сравнивать изложение одних и тех же вопросов в различных источниках; решение задач аналитического характера; самостоятельное доказательство отдельных фактов; оформление результатов научно-исследовательских работ.

Примеры задач. При прохождении практической подготовки студенты решают задачи, направленные на формирование исследовательских умений и навыков в использовании аппарата ассоциативной алгебры для решения математических задач, применении основ ассоциативной алгебры при решении практических задач.

4) при организации самостоятельной работы студентов: поиск и обработка информации, в том числе с использованием информационно-

коммуникационных технологий; исследование проблемной ситуации; постановка и решение задач из предметной области; отработка навыков применения стандартных методов к решению задач предметной области.

Успешное освоение материала курса предполагает большую самостоятельную работу студентов и руководство этой работой со стороны преподавателей. Применяются следующие формы контроля: устный опрос, проверка решения практических задач, контрольная работа.

При проведении лекционных и практических занятий, а также практической подготовки предусматривается использование информационных технологий: пакеты офисных программ (LibreOffice и др.) для создания презентаций, которые могут быть использованы при введении нового материала, а также для быстрого обзора предыдущего теоретического материала к текущему занятию; стандартные пакеты программ для визуализации и решения задач; языки программирования для решения практических заданий.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов не могут составлять более 50% аудиторных занятий.

Особенности проведения занятий для граждан с ОВЗ и инвалидностью

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидностью используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

- для слабовидящих:

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- для глухих и слабослышащих:

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

В процессе самостоятельной работы студентам предлагается более подробно ознакомиться с некоторыми вопросами курса. Для этого рекомендуется использовать указанные учебники и пособия, чтобы научиться работать с источниками.

План самостоятельной работы

Тема 1. Ассоциативные алгебры

Разобрать определение ассоциативной алгебры и конкретные примеры: алгебра матриц, алгебра линейных операторов, алгебра коммутативных многочленов, алгебра некоммутативных многочленов. Доказать универсальное свойство алгебр коммутативных и некоммутативных многочленов. Разобрать определение гомоморфизма, его ядра и изоморфизма. Доказать изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов в пространстве соответствующей размерности. Разобрать задание алгебры образующими и соотношениями на конкретных примерах: алгебра с одной образующей и одним соотношением, алгебра Клиффорда с двумя и тремя образующими, алгебра Грассмана. В каждом случае построить базис и определить размерность алгебры.

Тема 2. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$.

Разобрать определение обертывающей алгебры. Доказать основные формулы для коммутаторов. Пользуясь понятием вектора старшего веса, дать явное описание неприводимых модулей конкретной размерности (4,5). Объяснить, почему они не изоморфны. Записать заданные элементы обертывающей алгебры в виде суммы стандартных мономов. Доказать теорему Пуанкаре - Биркгофа - Витта основываясь на понятии левого регулярного представления. Показать, что если продолжить модуль Верма на отрицательные числа то тоже получится модуль. Привести явное описание старших векторов в тензорном произведении неприводимых модулей. Для алгебр подобных $U(\mathfrak{sl}(2))$ дать описание неприводимых модулей заданной размерности (4,5) и указать их старшие веса.

Тема 3. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.

Разобрать определение обертывающей алгебры. Доказать основные формулы для коммутаторов. Пользуясь понятием вектора старшего веса, дать

явное описание неприводимых модулей конкретной размерности (4,5). Объяснить, почему они не изоморфны. Записать заданные элементы обертывающей алгебры в виде суммы стандартных мономов. Доказать теорему Пуанкаре - Биркгофа - Витта основываясь на понятии левого регулярного представления. Показать, что если продолжить модуль Верма на отрицательные числа то тоже получится модуль. Привести явное описание старших векторов в тензорном произведении неприводимых модулей. Для алгебр подобных $U(\mathfrak{sl}(2))$ дать описание неприводимых модулей заданной размерности (4,5) и указать их старшие веса.

Тема 4. Квантовая группа $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.

Разобрать определение обертывающей алгебры. Доказать основные формулы для коммутаторов. Пользуясь понятием вектора старшего веса, дать явное описание неприводимых модулей конкретной размерности (4,5). Объяснить, почему они не изоморфны. Записать заданные элементы обертывающей алгебры в виде суммы стандартных мономов. Доказать теорему Пуанкаре - Биркгофа - Витта основываясь на понятии левого регулярного представления. Показать, что если продолжить модуль Верма на отрицательные числа то тоже получится модуль. Привести явное описание старших векторов в тензорном произведении неприводимых модулей. Для алгебр подобных $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ дать описание неприводимых модулей заданной размерности (4,5) и указать их старшие веса.

Примерные варианты контрольной работы

Вариант 1.

1. Построить линейный базис в алгебре заданной образующими и соотношениями

$$X^2=1, Y^2=0, XY+YX=1.$$

2. Описать явно неприводимый конечномерный модуль размерности 4 над алгеброй

$$XY-YX=N^2, NX-XN=X, NY-YN=-Y.$$

Вариант 2.

1. Построить линейный базис в алгебре заданной образующими и соотношениями

$$X^2=1, Y^2=4, XY+YX=0.$$

2. Описать явно неприводимый конечномерный модуль размерности 4 над алгеброй

$$XY-YX=N^2+N, NX-XN=X, NY-YN=-Y.$$

Оценочные средства по практической подготовке в рамках практических занятий

По итогам *практической подготовки* составляется письменный отчет. Студенты представляют на кафедру отчеты о практической подготовке в

печатной и электронной форме, оформленные в соответствии с правилами и требованиями, установленными Университетом. После проверки и предварительной оценки этих отчетов руководителями практической подготовки (с их подписью) студенты устно отчитываются по практике. Основными целями отчета являются:

- краткое изложение теоретических и практических основ изученных ранее результатов, использованных в ходе прохождения практической подготовки;

- формализация и детальное изложение разработок, осуществленных студентом в ходе прохождения практической подготовки;

- выводы, полученные в результате выполнения работ по практической подготовке.

Типовой отчет по практике включает следующие разделы:

- 1) титульный лист с наименованием темы работы, выполненной на практике;
- 2) введение с обоснованием актуальности изучаемой задачи, формулировкой целей работы, ее кратким содержанием и возможных применений;
- 3) постановка задачи, построение ее математической модели и теоретическое обоснование решения задачи;
- 4) разработка алгоритма решения рассматриваемой задачи;
- 5) реализация алгоритма на одном из языков программирования и проверка правильности программы на конкретном примере;
- 6) список литературы, использованной при работе и цитированной в отчете;
- 7) приложения с основными текстами программы и результатами выполнения программы (если они есть).

Вопросы для текущего контроля успеваемости

1. Определение ассоциативных алгебр. Примеры.
2. Определение подалгебры идеала факторалгебры.
3. Определение свободных коммутативных и некоммутативных алгебр.
4. Гомоморфизмы и изоморфизму алгебр. Примеры.
5. Задание алгебр образующими и соотношениями.
6. Линейный базис алгебры, заданной образующими и соотношениями.
7. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{sl}(2))$.
8. Теорема Пуанкаре – Биркгофа - Витта.
9. Неприводимые конечномерные представления алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$.
10. Полупростота конечномерных представлений $U(\mathfrak{sl}(2))$.
11. Разложения конечномерного представления на неприводимые.
12. Модули Верма их неприводимость.
13. Центр алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$ и гомоморфизм Хариш- Чандры.
14. Описание центра $U(\mathfrak{sl}(2))$.
15. Тензорное произведение представлений.
16. Разложение тензорного произведения на неприводимые.

17. Алгебра представлений.
18. Действие оператора Казимира на алгебре представлений.
19. Алгебры подобные $U(\mathfrak{sl}(2))$.
20. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта для алгебр подобных $U(\mathfrak{sl}(2))$.
21. Неприводимые конечномерные представления алгебр подобных
22. Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.
23. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.
24. Неприводимые конечномерные представления алгебры $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.
25. Полупростота конечномерных представлений $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.
26. Разложения конечномерного представления на неприводимые.
27. Модули Верма их неприводимость.
28. Центр алгебры $U(\mathfrak{osp}(1,2))$ и гомоморфизм Хариш- Чандры.
29. Описание центра $U(\mathfrak{osp}(1,2))$.
30. Тензорное произведение представлений.
31. Разложение тензорного произведения на неприводимые.
32. Алгебра представлений.
33. Действие оператора Казимира на алгебре представлений.
34. Обертывающая алгебра $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.
35. Теорема Пуанкаре – Биркгофа - Витта.
36. Неприводимые конечномерные представления алгебры $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.
37. Полупростота конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.
38. Разложения конечномерного представления на неприводимые.
39. Модули Верма их неприводимость.
40. Центр алгебры $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ и гомоморфизм Хариш- Чандры.
41. Описание центра $U_q(\mathfrak{sl}(2))$.
42. Тензорное произведение представлений.
43. Разложение тензорного произведения на неприводимые.
44. Алгебра представлений.
45. Действие оператора Казимира на алгебре представлений.

Вопросы для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

1. Определение алгебры, заданной образующими и соотношениями.
2. Гомоморфизмы алгебр. Изоморфизмы.
3. Ядро и образ гомоморфизма. Идеалы факторалгебры.
4. Определение представления и модуля.
5. Эквивалентность понятия представления и модуля.
6. Гомоморфизм представлений. Изоморфизм представлений.
7. Подпредставления. Неприводимые представления.
8. Полупростые представления.
9. Определение обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$.
10. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта.

11. Неприводимые конечномерные представления.
12. Полупростые представления. Критерий полупростоты конечномерного представления.
13. Неразложимые представления. Разложения представления на неразложимые.
14. Разложение конечномерного пространства на обобщенные собственные подпространства.
15. Диагонализируемость подалгебры Картана в обобщенном собственном подпространстве.
16. Оператор Казимира второго порядка. Его действие в неприводимых и неразложимых модулях.
17. Неприводимость конечномерного неразложимого представления $U(\mathfrak{sl}(2))$.
18. Модули Верма их неприводимость.
19. Гомоморфизм Хариш-Чандры.
20. Тензорное произведение представлений.
21. Разложение тензорного произведения конечномерных представлений.
22. Алгебра конечномерных представлений.

7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

Таблица 1.1 Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|--------|----------------------|----------------------|------------------------|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------|-------|
| Семестр | Лекции | Лабораторные занятия | Практические занятия | Самостоятельная работа | Автоматизированное тестирование | Другие виды учебной деятельности | Промежуточная аттестация | Итого |
| 3 | 10 | 0 | 20 | 20 | 0 | 10 | 40 | 100 |

Программа оценивания учебной деятельности студента

3 семестр

Лекции

*Посещаемость, активность, умение выделить главную мысль и др.
(от 0 до 10 баллов)*

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;

- от 25% до 50% – 3 баллов;
- от 51% до 75% – 6 баллов;
- от 76% до 100% – 10 баллов.

Лабораторные занятия

Не предусмотрены

Практические занятия

Самостоятельность при выполнении работы, активность работы в аудитории, правильность выполнения заданий, уровень подготовки к занятиям и т.д. (от 0 до 20 баллов)

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 7 баллов;
- от 51% до 75% – 13 баллов;
- от 76% до 100% – 20 баллов.

Самостоятельная работа

Письменный отчет по практической подготовке. Устный отчет студента включает раскрытие целей и задач практической подготовки, описание выполненной работы с указанием примененных методов и средств, ее количественных и качественных характеристик, выводы.

Анализ результатов практической подготовки проводится по следующим параметрам:

1. объем и качество выполненной работы;
2. качество аналитического отчета, выводов и предложений;
3. соблюдение сроков выполнения работы;
4. самостоятельность, инициативность, творческий подход к работе;
5. своевременность представления и качество отчетной документации.

(от 0 до 20 баллов)

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 7 баллов;
- от 51% до 75% – 13 баллов;
- от 76% до 100% – 20 баллов.

Автоматизированное тестирование

Не предусмотрено.

Другие виды учебной деятельности

Контрольная работа (от 0 до 10 баллов)

Промежуточная аттестация – *от 0 до 40 баллов*

Формой промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины в 3 семестре является *экзамен*, который проводится в виде ответа на билет, состоящий из двух вопросов. Задаются еще два–три дополнительных вопроса из перечня вопросов к промежуточной аттестации. На прохождение аттестации студенту отводится 30 минут.

При проведении промежуточной аттестации
ответ на «отлично» оценивается от 31 до 40 баллов;
ответ на «хорошо» оценивается от 21 до 30 баллов;
ответ на «удовлетворительно» оценивается от 11 до 20 баллов;
ответ на «неудовлетворительно» оценивается от 0 до 10 баллов.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 3 семестр по дисциплине «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» составляет **100** баллов.

Таблица 2.1 Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Спецкурс 7.1 (Ассоциативные алгебры)» в оценку (экзамен):

| | |
|-----------------|-----------------------|
| 85 – 100 баллов | «отлично» |
| 71 – 84 баллов | «хорошо» |
| 56 – 70 баллов | «удовлетворительно» |
| менее 55 баллов | «неудовлетворительно» |

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) литература:

1. Царев А. В. Основы теории абелевых групп [Электронный ресурс] : учебное пособие / Царев А.В. - Москва : Прометей, 2012. - 66 с. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18597.html>. Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. ✓

2. Шилин И.А. Введение в алгебру. Группы [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.А. Шилин. - 1-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 208 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. ✓
<https://e.lanbook.com/book/4120>



б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" предоставляет свободный доступ к полнотекстовой электронной учебно-методической библиотеке для профессионального образования. <http://window.edu.ru/>
2. Научная электронная библиотека <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
3. Свободное программное обеспечение: LibreOffice и др.
4. Лицензионное программное обеспечение: ОС Microsoft Windows 7, ОС Microsoft Windows 8, Microsoft Office 2007.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные и практические занятия проводятся в аудиториях на 15-20 посадочных мест. В отведенных для занятий аудиториях имеются учебные доски для требуемых визуализаций излагаемой информации.

В ходе лекционных и практических занятий используются учебно-демонстрационные мультимедийные презентации, которые обеспечиваются следующим техническим оснащением:

1. Компьютеры (в комплекте с колонками).
2. Мультимедийный проектор
3. Экран.

Практическая подготовка в рамках практических занятий проводится на кафедре геометрии и в других структурных подразделениях университета: научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего», Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Управление цифровых и информационных технологий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки и профилю подготовки «Математические основы компьютерных наук».

Автор
профессор кафедры геометрии

А.Н. Сергеев

Программа одобрена на заседании кафедры геометрии от 16 марта 2021 года, протокол №14.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература:

1. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: Изд-во МЦНМО, 2005.
2. Александров П.С. Введение в теорию групп [Текст] / П.С. Александров. - Москва : Бюро Квантум, 2008. - 159 с.
3. Каргаполов М. И. Основы теории групп [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. - 5-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 288 с. Книга из коллекции Лань - Математика
4. Компактные группы Ли и их представления [Текст] / Д. П. Желобенко. - 2-е изд., доп. - Москва : МЦНМО, 2007. - 552 с.
5. Курош А.Г. Теория групп [Электронный ресурс] / А. Г. Курош. - 4-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2005. - 648 с. Книга из коллекции Лань - Математика
6. Ляпин Е.С. Упражнения по теории групп [Электронный ресурс] / Е. С. Ляпин, М. М. Лесохин, А. Я. Айзенштат. - Москва : Лань, 2010. - 264 с. Перейти к внешнему ресурсу http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=528
7. Окунев Л.Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] / Л.Я. Окунев. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. - 336 с. - Книга из коллекции Лань - Математика
8. Парамонова И.М. Алгебры Ли и их приложения [Электронный ресурс] : задачи семинара / Парамонова И. М. - Москва : МЦНМО, 2004. - 48 с. Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks.
9. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах [Текст] / Ю. Л. Сачков. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 223 с.