МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»
Механико-математический факультет

СОГЛАСОВАНО
заведующий кафедрой геометрии
__________________ Галаев С.В.
"30" августа 2022 г.

УТВЕРЖДАЮ
председатель НМК механико-математического факультета
__________________ Тышкевич С.В.
"30" августа 2022 г.

Фонд оценочных средств

Текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Спецкурс 5

Направление подготовки магистратуры
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки магистратуры
Математические основы компьютерных наук

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
очная

Саратов,
2022

Карта компетенций

Контролируемые компетенции (шифр компетенции)	Индикаторы достижения компетенций	Планируемые результаты обучения (знает, умеет, владеет, имеет навык)	Виды заданий и оценочных средств
ОПК-2 Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	**1.1_М.ОПК-2.** Создает и исследует новые математические модели в естественных науках. **2.1_М.ОПК-2.** Используя методы математического моделирования, находит эффективные решения научных и прикладных задач. **3.1_М.ОПК-2.** Совершенствует и разрабатывает методы математического моделирования, оценивает пригодность модели, ее соответствие практике.	**Знать:** геометрические методы, применяемые в построении математических моделей в естественных науках. **Уметь:** - использовать геометрические методы в классической механике и других разделах теоретической физики; - применять геометрическое и вычислительное моделирование в решении задач смежных и прикладных областей. **Владеть**: методами геометрического моделирования при решении профессиональных задач.	Контрольная работа. Задания для практических занятий. Задания для самостоятельной работы.
ПК-1 Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.	**1.1_М.ПК-1.** Понимает основные концепции, принципы, теории и факты в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. **2.1_М.ПК-1.** Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности. **3.1_М.ПК-1.** Проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук.	**Знать:** основные задачи, решаемые на многообразиях с дополнительными структурами. **Уметь:** формулировать и решать задачи в собственной научно-исследовательской деятельности, использую методы современной дифференциальной геометрии. **Владеть:** навыками решения задач из различных областей математики, которые требуют знаний из теории дифференциальной геометрии многообразий.	Контрольная работа. Задания для практических занятий. Задания для самостоятельной работы.

Показатели оценивания планируемых результатов обучения

Семестр	Шкала оценивания			
	2	3	4	5
2 семестр	не владеет навыками критического анализа и оценки современных научных достижений; не умеет правильно ставить задачи по выбранной тематике, не умеет выбирать для исследования необходимые методы; не знает классические и современные методы решения задач математического моделировани, не знает основных понятий римановой и симплектической геометрии, не владеет методами интегрирования простейших гамильтоновых систем	слабо владеет навыками критического анализа и оценки современных научных достижений; допускает ошибки в постановке задач по выбранной тематике; слабо ориентируется в классических и современных методах решения задач математического моделирования; слабо знает основные понятия римановой и симплектической геометрии, не достаточно владеет методами интегрирования простейших гамильтоновых систем	хорошо владеет навыками критического анализа и оценки современных научных достижений; умеет ставить задачи по выбранной тематике и выбирать методы исследования, хорошо ориентируется в классических и современных методах решения задач по математическому моделированию; достаточно хорошо знает основные понятия римановой и симплектической геометрии, хорошо владеет методами интегрирования простейших гамильтоновых систем	отлично владеет навыками критического анализа и оценки современных научных достижений; грамотно и обоснованно ставит задачи по выбранной тематике и выбирает методы исследования, уверенно ориентируется в классических и современных методах решения задач математическому моделированию; отлично знает основные понятия римановой и симплектической геометрии, в совершенстве владеет методами интегрирования простейших гамильтоновых систем.

Оценочные средства

1.1 Задания для текущего контроля

Задания для оценки «ОПК-2», «ПК-1»:

Контрольная работа

Методические рекомендации. Контрольная работа по дисциплине «Спецкурс 5» проводится в письменном виде. Учебным планом по направлению подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки» предусмотрена одна контрольная работа. Подготовка студента к контрольной работе осуществляется в период лекционных и практических занятий, а также во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами лекций, практических занятий, литературой по дисциплине (см. перечень литературы в рабочей программе дисциплины).

Критерии оценивания. Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий, зависит от полноты решения и правильности ответа. Общие требования к выполнению заданий: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ контрольной работы

Билет №1.

1. На R^2 задана связность ∇, все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma^1_{11} \equiv 1,\ \Gamma^2_{12} = x^2$ а) Может ли связность ∇ быть римановой? б) Найти компоненту R^1_{121} тензора кривизны связности ∇.
2. Найти производную Ли тензорного поля $\eta = dx^1 \otimes dx^2$ вдоль векторного поля $V = \partial_1 + x^1\partial_2$. Будет ли это тензорное поле инвариантно относительно потока V?
3. Определить риманову связность и доказать теорему о ней.
4. Определить секционную кривизну и доказать, что задание секционной кривизны однозначно определяет тензор кривизны риманова пространства.

Билет №2.

1. Найти геодезические линии трехмерной сферы с метрикой, индуцированной из E_4.
2. Показать, что геодезические линии метрики $dt^2 = v(du^2 + dv^2)$ – это параболы на плоскости (u,v).
3. Определить геодезические пути и доказать теорему о максимальном геодезическом пути. Привести примеры полных и неполных римановых пространств.
4. Вывести уравнение Киллинга. Найти римановы многообразия, имеющие наибольшую группу движений.

Задания для практических занятий

Примеры заданий по теме «Гладкие многообразия»

Цель решаемых задач - позволяют оценить и диагностировать знания материала по теме «Гладкие многообразия» и умение правильно использовать специальные термины и понятия.

1. Проверить, что топология, индуцированная на касательном расслоении – хаусдорфова.

2. Дать основные примеры гладких многообразий.

3. Задать структуру гладкого многообразия на n-мерной сфере

4. Задать структуру гладкого многообразия на n-мерном проективном пространстве.

5. Задать структуру гладкого многообразия на многообразии Грассмана.

4. Можно ли на восьмерке с индуцированной из плоскости топологией ввести структуру гладкого многообразия?

5. Доказать, что линейное пространство канонически изоморфно своему касательному пространству в каждой точке.

6.Доказать, что объединение двух координатных осей в R^n не является гладким многообразием.

7.Доказать, что график гладкой функции $y = f(x^1, \dots x^n)$ является гладким многообразием.

8. Существует ли компактное многообразие, которое можно покрыть одной картой?

9. Доказать, что связное многообразие является линейно связным.

10. Доказать, что поворот есть гладкое отображение окружности на себя.

11. Привести пример гладкой биекции, не являющейся диффеоморфизмом.

Примеры заданий по теме «Связности в главном расслоенном пространстве»

Цель решаемых задач - позволяют оценить и диагностировать знание материала по теме "Связности в главном расслоенном пространстве" и умение правильно использовать специальные термины и понятия.

1. Дать определение главного расслоения.

2. Найти условия, при которых горизонтальное распределение на касательном расслоении многообразия со связностью интегрируемо.

3. На R^2 задана связность ∇, все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma^2_{12} \equiv 1$. Найти $\nabla_i\, \omega_{jk}$, где $\omega = dx^1 \wedge dx^2$.

4. Пусть R^l_{ijk} – координаты тензора кривизны римановой связности. Найти $g^{ij}R^l_{ijk}$.

5. На R^2 задана линейная связность $\nabla : \nabla_{\partial_1}\partial_1 = \partial_1,\ \nabla_{\partial_2}\partial_1 = 0,\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0,$

$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0$. Найти геодезическую $\gamma(t)$такую, что $\gamma(0) = (0{,}0)$ и $\dot{\gamma(0)} = \partial_1$.

6. Найти геодезические линии трехмерной сферы с метрикой, индуцированной из E_4.

7. Найти производную Ли тензорного поля $\eta = dx^1 \otimes dx^2$ вдоль векторного поля $V = \partial_1 + x^1\partial_2$. Будет ли это тензорное поле инвариантно относительно потока *V*?

8. На R^2 задана связность ∇, все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma^1_{11} \equiv 1$, $\Gamma^2_{12} = x^2$ а) Может ли связность ∇ быть римановой? б) Найти компоненту R^1_{121} тензора кривизны связности ∇.

9. Пусть $\gamma(t) = (t,t), t \in [0,1]$ – геодезическая некоторой линейной связности ∇ на плоскости R^2. Найти вектор, полученный в результате параллельного переноса вектора $\vec{v} = (1,1) \in T_{\gamma(0)} R^2$ вдоль γ.

10 Доказать, что пространство касательных реперов является дифференцируемым многообразием.

11. Построить горизонтальный лифт векторного поля.

12. вывести формулу преобразования коэффициентов связности.

13. Вывести тождество Риччи.

14 Доказать необходимое и достаточное условие локально аффинного пространства.

Примеры заданий по теме «Геометрия G-структур»

Цель решаемых задач - позволяют оценить и диагностировать знание материала по теме «Геометрия G-структур» и умение правильно использовать специальные термины и понятия.

1. Доказать теорему Амброза-Сингера.

2. Найти условия эквивалентности для разных G-структур: обращение в нуль тензора Нейенхейса как условие интегрируемости почти комплексной структуры и структуры почти произведения, обращение в нуль внешнего дифференциала как условие интегрируемости симплектической структуры и т.д.

3. Описать контактную метрическую структуру как G-структуру.

Примеры заданий по теме «Риманова структура»

Цель решаемых задач - позволяют оценить и диагностировать знание материала по теме «Риманова структура» и умение правильно использовать специальные термины и понятия.

1. Доказать, что поверхность в трехмерном пространстве является двумерным римановым многообразием.

2. Задать риманову структуру на трехмерной сфере.

3. Доказать, что геодезические на римановом многообразии являются экстремалями вариационной задачи.

4. Доказать тождества Бьянки.

5. На R^2 задана связность ∇, все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме $\Gamma^1_{11} \equiv 1, \Gamma^2_{12} = x^2$. Может ли связность ∇ быть римановой?

6. На R^2 задана метрика $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$. Найти координату R^2_{121} тензора кривизны римановой связности ∇ метрики g.

7. На R^2 задана риманова связность ∇, и известно, что $R_{1212} = x^2$. Найти R_{2121}.

Примеры заданий по теме «Симплектические и контактные многообразия»

Цель решаемых задач - позволяют оценить и диагностировать знание материала по теме «Симплектические и контактные многообразия» и умение правильно использовать специальные термины и понятия.

1. Привести примеры кососимметрических билинейных форм.

2. Доказать, что имеет место разложение $W = V \oplus V^{\perp}$, где W - симплектическое пространство, V - его произвольное подпространство, $V^{\perp}$ - кососортогональное дополнение подпространства V.

3. Показать, что если V лагранжево подпространство (W, ω), то для любого базиса $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n$ подпространства V существует его продолжение до симплектического базиса (W, ω).

4. Доказать теорему об эквивалентности симплектических структур.

5. Определить каноническую симплектическую структуру на кокасательном расслоении T^*X.

6. Привести примеры вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

7. Доказать теорему Нетер для случая контактных гамильтоновых систем.

8. Применить теорему Нетер для интегрирования гамильтоновой системы на поверхности вращения.

Методические рекомендации. Решение задач осуществляется во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы и во время практических занятий. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами лекций, практических занятий, литературой по дисциплине (см. перечень литературы в рабочей программе дисциплины). Задания оформляются в отдельной тетради. Условие задачи должно быть переписано полностью. Решение выполняется в логической последовательности с пояснениями и краткими формулировками производимых действий. Работы, выполненные небрежно, без соблюдения предъявляемых требований или не своего варианта, не рассматриваются.

Критерии оценивания. Общие требования к выполнению заданий: решение должно быть математически грамотным, полным. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

1.2 Промежуточная аттестация

2 семестр

1) Список вопросов к устному экзамену:

Вопрос	***Компетенция в соответствии с РПД***
1. Главное расслоение. 2. Редукция структурной группы расслоения к её подгруппе. 3. Дифференцируемая структура в расслоенном пространстве касательных реперов. 4. Необходимое и достаточное условие редуцируемости структурной группы главного расслоения. 5. Фундаментальные векторные поля на главном расслоении. 6. Фундаментальные векторные поля на пространстве реперов. 7. Тензорные функции и тензорные формы на многообразии. 8. Определение связности в главном расслоении. 9. Аффинная связность как специальная	**ОПК-2** **ПК-1.**

дифференциальная система на пространстве касательных реперов. 10. Существование и продолжение связностей. 11. Параллельное перенесение в пространстве аффинной связности. 12. Базисные векторные поля в пространстве реперов пространства аффинной связности. 13. Коэффициенты связности. Форма связности. 14. Ковариантное дифференцирование как действие базисных векторных полей. 15. Локальное выражение ковариантной производной тензорного поля. 16. Ковариантная производная как абсолютная внешняя производная. 17. Абсолютная производная от тензорного поля, заданного вдоль пути. Геодезические пути и линии. 18. Плоская и локально плоская аффинные связности. 19. Форма кривизны и тензор кривизны связности. 20. Структурные уравнения для формы кривизны. 21. Форма и тензор кручения связности. 22. Структурные уравнения для формы кручения. 23. Тождество Риччи. 24. Тождества Бьянки. 25. Основная теорема об аффинной связности. 26. Понятие главного расслоения. Примеры. Связность в главном расслоении. 27. Форма кривизны связности. 28. Связность в присоединенном расслоении. 29. Определение и основные свойства псевдоевклидова и евклидова линейного пространства. Теорема о касательном пространстве в точках аффинного пространства. 30. Определение секционной кривизны. Теорема о связи тензора кривизны и секционной кривизны. 31. Определение алгебры Ли векторных полей, сохраняющих тензорное поле. Группа изометрий (движений) риманова многообразия. Уравнение Киллинга. 32. Сфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве сигнатуры (1,n) как пространство постоянной отрицательной кривизны.	

А) методические рекомендации по подготовке и процедуре осуществления контроля выполнения

Промежуточная аттестация по дисциплине «Спецкурс 5» проводится в виде устного экзамена. Учебным планом по направлению подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки» предусмотрена одна промежуточная аттестация. Подготовка студента к прохождению промежуточной аттестации осуществляется в период лекционных и практических занятий, а также во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами лекций, практических занятий, литературой и Интернет-ресурсами по дисциплине (см. «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» в рабочей программе дисциплины).

Б) критерии оценивания

Формой промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины во 2 семестре является *экзамен*, который проводится в виде ответа на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов.

Во время экзамена студент должен дать развернутый ответ на вопросы, изложенные в билете. Преподаватель вправе задавать дополнительные вопросы по всему изучаемому курсу.

«Отлично» – выставляется студенту, показавшему глубокие знания содержания дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений. Студент четко и ясно излагает свои мысли, приводит примеры и отвечает на дополнительные вопросы.

«Хорошо» – выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, отвечает на большинство дополнительных вопросов, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

«Удовлетворительно» – выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении материала, но при этом он владеет основными разделами содержания дисциплины, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

«Неудовлетворительно» – выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

ФОС для проведения промежуточной аттестации одобрен на заседании кафедры геометрии (протокол № 1 от 30 августа 2022 года).

Автор:
к.ф-.м.н., доцент С.В. Галаев