



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского»**  
Механико-математический факультет

СОГЛАСОВАНО  
заведующий кафедрой геометрии

  
Галаев С.В.  
"30" августа 2022 г.

УТВЕРЖДАЮ  
председатель НМК механико-  
математического факультета

  
Тышкевич С.В.  
"30" августа 2022 г.

**Фонд оценочных средств**  
Текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Спецкурс 1

Направление подготовки магистратуры  
02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль подготовки магистратуры  
Математические основы компьютерных наук

Квалификация (степень) выпускника  
*Магистр*

Форма обучения  
*очная*

Саратов,  
2022

## Карта компетенций

| Контролируемые компетенции (шифр компетенции)   | Индикаторы достижения компетенций  | Планируемые результаты обучения (знает, умеет, владеет, имеет навык)  | Виды заданий и оценочных средств                           |
|---|--|---|--|
| <p><b>ОПК-2</b><br/>Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы</p> | <p><b>1.1_М.ОПК-2.</b><br/>Создает и исследует новые математические модели в естественных науках.</p>                                  | <p><b>Знать:</b><br/>- методы неевклидовых геометрий, применяемые в построении математических моделей в естественных науках.<br/><b>Уметь:</b><br/>- применять понятия неевклидовых геометрий к решению задач визуализации математических объектов и понятий;<br/>- математически грамотно формулировать задачи неевклидовых геометрий и проводить их анализ.<br/><b>Владеть:</b><br/>- методами построения неевклидовых геометрий и навыками моделирования при решении профессиональных задач.</p> | <p>Разноуровневые задачи и задания. Контрольная работа</p> |
|   | <p><b>2.1_М.ОПК-2.</b><br/>Используя методы математического моделирования, находит эффективные решения научных и прикладных задач.</p> | <p><b>Знать:</b><br/>- методы построения неевклидовых геометрий, методы поиска и доказательств новых математических фактов и применение этих методов в решении научных и прикладных задач.<br/><b>Уметь:</b><br/>- применять методы неевклидовых геометрий в решении научных и прикладных задач.<br/><b>Владеть:</b><br/>- навыками применения методов неевклидовых геометрий в решении научных и прикладных задач.</p>   | <p>Разноуровневые задачи и задания. Контрольная работа</p> |
|   | <p><b>3.1_М.ОПК-2.</b><br/>Совершенствует и разрабатывает методы</p>   | <p><b>Знать:</b><br/>- методы математического моделирования в области неевклидовых геометрий и</p>  | <p>Разноуровневые задачи и задания. Контрольная работа</p> |

|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
|   | <p>математического моделирования, оценивает пригодность модели, ее соответствие практике.</p>  | <p>их приложений,<br/> <b>Уметь:</b><br/> - совершенствовать и разрабатывать методы математического моделирования в области неевклидовых геометрий и их приложений;<br/> - оценивать пригодность математической модели, ее соответствие практике.<br/> <b>Владеть:</b><br/> - навыками разработки модели методами неевклидовых геометрий.</p>  |   |
| <p><b>ПК-1</b><br/> Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.</p> | <p><b>1.1_М.ПК-1.</b><br/> Понимает основные концепции, принципы, теории и факты в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.</p> | <p><b>Знать:</b><br/> - основные понятия неевклидовых геометрий;<br/> - основные результаты неевклидовых геометрий.<br/> <b>Уметь:</b><br/> - решать типовые задачи неевклидовых геометрий;<br/> - использовать современный аппарат неевклидовых геометрий в научно-исследовательской деятельности.<br/> <b>Владеть:</b><br/> - навыками получения и визуализации фактов неевклидовых геометрий.</p>   | <p>Разноуровневые задачи и задания.<br/> Контрольная работа</p> |
|   | <p><b>2.1_М.ПК-1.</b><br/> Формулирует и решает стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности.</p>  | <p><b>Знать:</b><br/> - основные задачи неевклидовых геометрий и их приложения в математике и физике;<br/> <b>Уметь:</b><br/> - формулировать и решать задачи в собственной научно-исследовательской деятельности, используя теорию неевклидовых геометрий и ее приложения.<br/> <b>Владеть:</b><br/> - приемами и методами неевклидовых геометрий;<br/> - навыками решения задач и проблем различных областей математики, опирающиеся на знания теории неевклидовых</p> | <p>Разноуровневые задачи и задания.<br/> Контрольная работа</p> |

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  | <p><b>3.1_М.ПК-1.</b><br/>Проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук.</p> | <p>геометрий.</p> <p><b>Знать:</b><br/>- применение неевклидовых геометрий в области математики и компьютерных наук;<br/>- новые научные результаты в области неевклидовых геометрий и их приложений.</p> <p><b>Уметь:</b><br/>- проводит научно-исследовательские работы в области математики и компьютерных наук, используя неевклидовы геометрии и их приложения.</p> <p><b>Владеть:</b><br/>- навыками научно-исследовательской работы в области неевклидовых геометрий и их приложений.</p> | <p>Разноуровневые задачи и задания.<br/>Контрольная работа</p> |
|--|--|--|--|

Показатели оценивания планируемых результатов обучения

| Семестр | Шкала оценивания   |   |  |  |
|---------|--|---|--|--|
|         | 2  | 3   | 4  | 5  |
| 1       | <p>Не владеет методами решения задач в области неевклидовых геометрий, проективной аналитической геометрии (методом использования проективных координат); не может производить основные доказательства, применяя проективные координаты, вычислять сложное отношение четырех точек, составлять уравнение прямой на проективной плоскости, определять принадлежность трех прямых одному пучку; не знает определения основных понятий формулировки и доказательства, наиболее важных теорем дисциплины.</p> <p>Не владеет методами поиска и отбора литературы, наиболее соответствующей заданной тематике; не умеет составлять библиографический список по заданной тематике; не знает государственные стандарты в области оформления библиографических ссылок и</p> | <p>Плохо владеет методами решения задач в области неевклидовых геометрий, проективной аналитической геометрии (методом использования проективных координат); с трудом может производить основные доказательства, применяя проективные координаты, вычислять сложное отношение четырех точек, составлять уравнение прямой на проективной плоскости, определять принадлежность трех прямых одному пучку; не достаточно хорошо знает определения основных понятий формулировки и доказательства, наиболее важных теорем дисциплины.</p> <p>Не понимает определения основных понятий формулировки и доказательства основных утверждений и теорем.</p> <p>Плохо владеет методами</p> | <p>Достаточно хорошо владеет методами решения задач в области неевклидовых геометрий, проективной аналитической геометрии (методом использования проективных координат); может производить основные доказательства, применяя проективные координаты, вычислять сложное отношение четырех точек, составлять уравнение прямой на проективной плоскости, определять принадлежность трех прямых одному пучку; не знает определения основных понятий формулировки и доказательства, наиболее важных теорем дисциплины.</p> <p>хорошо решает задачи на доказательство проективных свойств фигур;</p> <p>показано хорошее понимание определения основных понятий, формулировок и доказательств теорем дисциплины.</p> | <p>Достаточно хорошо владеет методами решения задач в области неевклидовых геометрий, проективной аналитической геометрии (методом использования проективных координат); может грамотно производить основные доказательства, применяя проективные координаты, вычислять сложное отношение четырех точек, составлять уравнение прямой на проективной плоскости, определять принадлежность трех прямых одному пучку; безошибочно знает определения основных понятий формулировки и доказательства, наиболее важных теорем дисциплины.</p> <p>Хорошо решает задачи на доказательство проективных свойств фигур.</p> <p>Показано хорошее понимание определений основных понятий, формулировок и доказательств теорем дисциплины.</p> |

|  |                |  |   |   |
|--|----------------|--|---|---|
|  | <p>списков</p> | <p>поиска и отбора литературы, наиболее соответствующей заданной тематике; с трудом может составлять библиографический список по заданной тематике; не достаточно хорошо знает государственные стандарты в области оформления библиографических ссылок и списков</p> | <p>Достаточно хорошо владеет методами поиска и отбора литературы, наиболее соответствующей заданной тематике; хорошо составляет библиографический список по заданной тематике; показано хорошее знание государственных стандартов в области оформления библиографических ссылок и списков</p> | <p>Отлично владеет методами поиска и отбора литературы, наиболее соответствующей заданной тематике; уверенно справляется с составлением библиографических списков по заданной тематике; уверенно ориентируется в государственных стандартах в области оформления библиографических ссылок и списков</p> |
|--|----------------|--|---|---|

## *Оценочные средства*

### 1.1. Задания для текущего контроля

#### 1. Задания для оценки «ОПК-2»

1. Кейс-задача – не предусматривается.
2. Доклад – не предусматривается.
3. Реферат - не предусматривается.
4. Контрольная работа

#### **ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

1. Определите на расширенной евклидовой плоскости проективный смысл понятий: аффинный репер; ортогональный репер; ортонормированный репер.

2. Проверьте справедливость утверждений:

а) все преобразования первого рода евклидовой плоскости образуют разрешимую группу Ли;

б) все преобразования второго рода евклидовой плоскости образуют разрешимую группу Ли.

3. Абсолют флаговой плоскости состоит из прямой и точки на ней. Определите матрицу фундаментальной группы преобразований флаговой плоскости, задав абсолют уравнениями наиболее простого вида. Найдите особенности расположения вершин и единичной точки канонических реперов относительно абсолютных элементов, соответствующие уравнениям абсолюта. Укажите типы прямых флаговой плоскости.

4. Проведите классификацию овальных линий копсевдоевклидовой плоскости, абсолют которой состоит из двух вещественных прямых, учитывая расположение овальной линии по отношению к абсолюту.

5. Найдите формулы для вычисления угла между прямыми на расширенной псевдоевклидовой плоскости (плоскости Минковского), если абсолютные элементы заданы координатами  $l (0:0:1)$ ,  $P (1:0:0)$ ,  $K (0:1:0)$ .

*Методические рекомендации.* Контрольная работа по дисциплине проводится в письменном виде. Учебным планом предусмотрена 1 контрольная работа. Подготовка студента к контрольной работе осуществляется в период практических занятий, а также во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами практических занятий, литературой по дисциплине (см. перечень литературы в рабочей программе дисциплины).

*Критерии оценивания.* Количество баллов, выставляемых за выполнение

заданий, зависит от полноты решения и правильности ответа. Общие требования к выполнению заданий: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов. Имеется верное доказательство утверждения и обоснованно получен верный ответ - 2 балла.



Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения - 1 балл.

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше - 0 баллов.

**5) Тесты** - не предусматриваются.

**6) Задания для практических занятий**

План практических занятий написан в форме вопросов для текущего контроля знаний.

### **Вопросы для текущего контроля знаний на практических занятиях**

1. Укажите отличия евклидовой плоскости и расширенной евклидовой плоскости.

2. Сформулируйте определение  $n$ -мерного проективного пространства.

3. Существуют ли параллельные прямые на проективной плоскости?

4. Сформулируйте определения проективной системы координат и проективных координат точки на проективной плоскости и в  $n$ -мерном проективном пространстве.

5. Выведите формулы преобразования проективных координат точек в  $n$ -мерном проективном пространстве.

6. Выведите параметрические уравнения прямой на проективной плоскости.

7. Составьте общее уравнение прямой на проективной плоскости.

8. Составьте уравнения  $m$ -мерной плоскости в проективном  $n$ -мерном пространстве.

9. Сформулируйте принцип двойственности проективного пространства и малый принцип двойственности проективной плоскости.

10. Сформулируйте и докажите теорему Дезарга.

11. Определите сложное отношение четырех точек прямой.

12. Определите сложное отношение четырех прямых пучка.

13. Определите полный четырехвершинник и докажите его свойства.

14. Дайте определение проективного преобразования.
15. Сформулируйте основные свойства проективных преобразований.
16. Сформулируйте и докажите основную теорему о проективном преобразовании.
17. Введите понятие отрезка проективной прямой.
18. Определите понятие линии второго порядка на проективной плоскости и докажите основные свойства линий второго порядка.
19. Проведите классификацию линий второго порядка на проективной плоскости.
20. Укажите различные подходы к построению геометрических систем.

## 2. Задания для оценки «ПК-1»

1. **Кейс-задача** – не предусматривается.
2. **Доклад** – не предусматривается.
3. **Реферат** - не предусматривается.
4. **Контрольная работа**

### ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Абсолют псевдоевклидовой плоскости состоит из действительной прямой и пары действительных точек на ней. Проведите классификацию овальных линий псевдоевклидовой плоскости, учитывая расположение овальной линии по отношению к абсолюту.
2. Определите фундаментальную группу преобразований псевдоевклидовой плоскости.
3. Проведите классификацию сфер пространства Минковского.
4. Определите инварианты двух точек и двух прямых на расширенной плоскости Лобачевского. Найдите формулы для вычисления расстояния между точками на плоскости Лобачевского, задав абсолют наиболее простым уравнением.
5. Сформулируйте аксиомы скалярного произведения векторов в аксиоматике Вейля для евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей.

**Методические рекомендации.** Контрольная работа по дисциплине проводится в письменном виде. Учебным планом предусмотрена 1 контрольная работа. Подготовка студента к контрольной работе осуществляется в период практических занятий, а также во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами практических занятий, литературой по дисциплине (см. перечень литературы в рабочей программе дисциплины).

**Критерии оценивания.** Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий, зависит от полноты решения и правильности ответа. Общие требования к выполнению заданий: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Имеется верное доказательство утверждения и обоснованно получен верный ответ - 2 балла.

Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения - 1 балл.

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше - 0 баллов.

**5) Тесты** - не предусматриваются.

**6) Задания для практических занятий**

План практических занятий написан в форме вопросов для текущего контроля знаний.

#### **Вопросы для текущего контроля знаний на практических занятиях**

1. Охарактеризуйте идеи Клейна построения различных геометрий, указывая их преимущества и недостатки.
2. Чем отличается современная проективная интерпретация неевклидовых геометрий от интерпретации Клейна?
3. Как связаны фундаментальные группы евклидовой и неевклидовых плоскостей с группой проективных преобразований?
4. Опишите абсолюты классических плоскостей в системе Кэли-Клейна.
5. В чем заключается проективная интерпретация евклидовой геометрии?
6. На каком методе основан поиск и доказательство геометрических фактов в проективных моделях различных неевклидовых плоскостей?
7. Охарактеризуйте процесс построения геометрии в проективной модели на примере плоскости Лобачевского.
8. В чем заключается аксиоматический метод построения геометрий?
9. Какие требования предъявляются к системам аксиом?
10. Каковы были исторические предпосылки появления и развития неевклидовых геометрий?
11. Опишите логику рассуждений Николая Ивановича Лобачевского в решении проблемы пятого постулата Евклида.

12. Сформулируйте аксиому Лобачевского и первые следствия из нее.
13. Приведите примеры геометрии с аффинной базой.
14. Сформулируйте аксиомы векторной аксиоматики Вейля евклидовой плоскости.
15. Сформулируйте аксиомы векторной аксиоматики Вейля псевдоевклидовой плоскости.
16. На чем основан вывод основных метрических формул евклидовой геометрии в проективной модели?
17. Какие следствия их аксиом псевдоевклидова пространства Вам знакомы?
18. Какие типы векторов существуют в псевдоевклидовом пространстве?
19. Как вычислить скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе в псевдоевклидовом пространстве?
20. Как найти длину вектора в ортонормированном базисе в псевдоевклидовом пространстве?
21. На чем основана классификация и измерение углов псевдоевклидовой плоскости?
22. На чем основана классификация линий второго порядка псевдоевклидовой плоскости?
23. Какие типы окружностей псевдоевклидовой плоскости Вам знакомы? Какие существуют типы сфер в трехмерном псевдоевклидовом пространстве?
24. В чем заключается метод исследования объектов вблизи бесконечности?
25. Какие программные средства могут быть применены для визуализации объектов неевклидовых геометрий?

Обучающиеся продолжают формировать общепрофессиональные и профессиональные компетенции (ОПК-2, ПК-1) в рамках практической подготовки, которая осуществляется путем проведения практических занятий.

#### **Примерный перечень тем по практической подготовке в рамках практических занятий:**

1. Определение проективного пространства. Основные факты проективной геометрии на плоскости.
2. Основные факты проективной геометрии на плоскости и в пространстве. Проективная интерпретация геометрий.
3. Построение геометрических теорий в проективной модели.
4. Аксиоматический метод построения геометрий.
5. Основные факты псевдоевклидовой геометрии в аксиоматическом изложении.
6. Исследование объектов евклидовой геометрии вблизи бесконечности.
7. Визуализация объектов и понятий неевклидовых геометрий с помощью программных средств.

#### **Литература:**

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия (в 2-х частях). Ч. 2. [Электронный ресурс] / Атанасян Л.С., Базылев В.Т. - Москва : КноРус, 2017. - 424 с. - ISBN 978-5-406-05977-7 : Б. ц. Перейти к внешнему ресурсу <http://www.book.ru/book/927669> Книга находится в ЭБС "BOOK.ru"

2. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского : учебное пособие [Электронный ресурс] / Л.С. Атанасян. - Москва : Лаборатория знаний, 2021. - 467 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/166727> - ISBN 978-5-93208-508-0 : Б. ц. - Текст : электронный. Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".

### **Промежуточная аттестация**

**Методические указания.** Промежуточная аттестация по дисциплине, предусмотренная по учебному плану, проводится в виде зачета. Подготовка студента к прохождению промежуточной аттестации осуществляется в период практических занятий, а также во внеаудиторные часы в рамках самостоятельной работы. Во время самостоятельной подготовки студент пользуется конспектами практических занятий, основной и дополнительной литературой по дисциплине (см. перечень литературы в рабочей программе дисциплины).

**Критерии оценивания.** Во время зачета студент должен дать развернутый ответ на вопросы, изложенные в билете. Преподаватель вправе задавать дополнительные вопросы по всему изучаемому курсу. Полнота ответа определяется показателями оценивания планируемых результатов обучения.

При проведении промежуточной аттестации

ответ на «отлично» / «зачтено» оценивается от 23 до 30 баллов;

ответ на «хорошо» / «зачтено» оценивается от 16 до 22 баллов;

ответ на «удовлетворительно» / «зачтено» оценивается от 8 до 15 баллов;

ответ на «неудовлетворительно» / «не зачтено» оценивается от 0 до 7 баллов.

### **Вопросы для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

#### **1 семестр**

| <b>№</b> | <b>Вопрос</b>  | <b>Компетенция в соответствии с РПД</b> |
|----------|--|---|
| 1.       | Пропедевтические задачи введения бесконечно удаленных объектов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве. Понятие $n$ - | ОПК-2, ПК-1                             |

|     |   |             |
|-----|---|-------------|
|     | мерного проективного пространства с фиксированной вещественной компонентой, в частности, понятие вещественной проективной плоскости, пополненной мнимыми точками.   |             |
| 2.  | Понятие проективных систем координат, координат точек, прямых и $m$ -мерных плоскостей.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 3.  | Формулы преобразования проективных координат точек на проективной плоскости.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 4.  | Уравнения прямой на проективной плоскости.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 5.  | Малый принцип двойственности проективной плоскости.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 6.  | Теорема Дезарга   | ОПК-2, ПК-1 |
| 7.  | Сложное отношение четырех точек прямой и сложное отношение четырех прямых пучка.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 8.  | Полный четырехвершинник.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 9.  | Проективные преобразования. Основная теорема о проективном преобразовании.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 10. | Отрезки проективной прямой  | ОПК-2, ПК-1 |
| 11. | Уравнения $m$ -мерной плоскости в проективном $n$ -мерном пространстве.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 12. | Принцип двойственности проективного пространства.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 13. | Линии второго порядка на проективной плоскости (определение, основные свойства, классификация).   | ОПК-2, ПК-1 |
| 14. | Различные подходы к построению геометрических систем. Классическая схема Кэли-Клейна построения различных геометрий (ее преимущества и недостатки). Современная проективная интерпретация неевклидовых геометрий. | ОПК-2, ПК-1 |
| 15. | Абсолюты и фундаментальные группы евклидовой и неевклидовых плоскостей как подгруппы группы проективных преобразований.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 16. | Проективная интерпретация евклидовой геометрии.   | ОПК-2, ПК-1 |

|     |  |             |
|-----|--|-------------|
| 17. | Поиск и доказательство геометрических фактов в проективных моделях различных неевклидовых плоскостей.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 18. | Процесс построения геометрии в проективной модели на примере плоскости Лобачевского.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 19. | Аксиоматический метод. Требования, предъявляемые к системам аксиом.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 20. | Исторический обзор развития неевклидовых геометрий. Николай Иванович Лобачевский и его геометрия.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 21. | Геометрии с аффинной базой. Векторная аксиоматика Вейля евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 22. | Вывод основных метрических формул евклидовой геометрии в проективной модели.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 23. | Первые следствия их аксиом псевдоевклидова пространства, в частности, псевдоевклидовой плоскости (типы векторов, понятие ортонормированного базиса, вычисление скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, длина вектора в ортонормированном базисе, классификация и измерение углов, классификация линий второго порядка, в частности, классификация окружностей, решение треугольников псевдоевклидовой плоскости, типы сфер в трехмерном псевдоевклидовом пространстве). | ОПК-2, ПК-1 |
| 24. | Реализация неевклидовых геометрий на сферах псевдоевклидова пространства.  | ОПК-2, ПК-1 |

ФОС для проведения промежуточной аттестации одобрен на заседании кафедры геометрии (протокол № 1 от «30» августа 2022 года).

Автор:

к.ф.-м.н., доцент

Л.Н. Ромакина