

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»
Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Д.В. Иванов, А.В. Доль

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Издание второе,
переработанное и дополненное

Монография

Саратов

2021

УДК 531/534+514.86+681.3

ББК 22.193я73

И20

Иванов Д.В., Доль А.В.

И20 Биомеханическое моделирование: Монография. – Саратов: Амирит, 2021. – 250 с.: ил.

ISBN

Монография может быть полезна всем, кто интересуется биомеханическим моделированием и его применением к решению реальных научно-практических задач.

Для студентов, магистров, аспирантов и инженерно-технических работников, специализирующихся по вычислительной механике и биомеханике.

Работа выполнена при поддержке

Грантового конкурса Стипендиальной программы В. Потанина

(проект ГК200000431)

Работа выполнена в авторской редакции

УДК 531/534+514.86+681.3

ББК 22.193я73

ISBN 978-5-00140-752-2

© Д.В. Иванов, 2021

© А.В. Доль, 2021

Оглавление

Предисловие	8
Глава 1. Тензорный анализ в евклидовом пространстве	10
Система отсчета и системы координат	12
Вектор в евклидовом пространстве	12
Преобразование компонент вектора при переходе к новому базису	14
Преобразование векторов сопряженного базиса в трехмерном евклидовом пространстве	14
Ковариантные компоненты вектора	15
Прямое и обратное преобразования компонент тензора 2-го ранга.....	18
Алгебраические операции с тензорами.....	19
Транспонирование тензора.....	20
Основные инварианты симметричного тензора.....	22
Свойства симметричного тензора 2-го ранга	22
Каноническая форма симметричного тензора.....	23
Единичный тензор	24
Ортогональный тензор	24
Ковариантная производная компонент векторного поля.....	25
Ковариантное дифференцирование компонент тензорного поля.....	26
Ковариантное дифференцирование метрического тензора	27
Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования	27
Глава 2. Основы линейной теории упругости	28
Введение.....	28
Основные гипотезы.....	29
Кинематика сплошной среды	31
Точки зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды.....	31
Точка зрения Лагранжа на движение сплошной среды.....	32
Определение скорости и ускорения частиц по заданному закону движения	34
Математическая интерпретация закона движения сплошной среды.....	34
Точка зрения Эйлера на движение сплошной среды	35
Отличие точек зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды.....	36
Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера.....	37
Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа.....	37
Скалярные и векторные поля в механике сплошных сред	38

Скалярное поле температур	38
Понятие полной, локальной и конвективной производной скалярного поля	40
Векторное поле скоростей	41
Потенциальные движения сплошной среды	44
Необходимое и достаточное условие существования потенциала скоростей ...	44
Теория деформации	45
Вектор перемещения и деформированное состояние	45
Тензор деформации	46
Тензор малой деформации	48
Главные деформации и инварианты тензора деформации.....	49
Условия совместности деформаций.....	49
Теория напряжений	50
Внешние силы	50
Вектор напряжения и напряженное состояние	50
Тензор напряжений	52
Дифференциальные уравнения равновесия	53
Принцип Сен-Венана	54
Соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжения.....	55
Упругое поведение тел	55
Обобщенный закон Гука.....	55
Обобщенный закон Гука для однородного изотропного тела	56
Основные уравнения и задачи теории упругости	58
Основные уравнения	58
Основные задачи статики упругого тела	59
Уравнения упругого равновесия в перемещениях	60
Краткие выводы	60
Глава 3. Некоторые вопросы механики жидкости и газа	61
Предмет механики жидкости и газа. Основные свойства жидкой и газообразной сред	61
Формула дифференцирования интеграла по времени, взятого по подвижному объему	62
Дивергенция векторного поля	63
Физическая интерпретация	63
Теорема Остроградского-Гаусса.....	63

Основные уравнения и теоремы динамики идеальной жидкости и газа	64
Теорема Бернулли.....	67
Математическая модель вязкой несжимаемой жидкости.....	69
Опыт Ньютона	69
Обобщенный закон вязкого трения.....	71
Понятие о нелинейных неньютоновских жидкостях	72
Уравнения Навье-Стокса изотермического движения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости	74
Глава 4. Введение в метод конечных элементов	77
Краткое описание метода.....	77
Физическая и математическая постановки задачи	79
Решение некоторых краевых задач методом конечных элементов	80
Метод конечных элементов для задач теории упругости.....	86
Метод конечных элементов для задач теории поля	89
Дифференцирование матричных соотношений. Продолжение рассмотрения задач теории поля.....	93
Метод Галеркина.....	95
Двумерные задачи теории поля	98
Применение метода Галеркина к решению задачи Коши	100
Система дифференциальных уравнений первого порядка.....	101
Элементы высокого порядка. Одномерный элемент.....	103
Квадратичные и кубические элементы.....	103
Применение квадратичного элемента.....	106
Естественная система координат.....	106
Применение численного интегрирования при вычислении матриц элементов ..	107
Субпараметрические, изопараметрические и суперпараметрические элементы	108
Глава 5. Медицинские постановки задач биомеханики	111
Биомеханика сердечно-сосудистой системы.....	111
Граничные условия на выходах при численном моделировании гемодинамики сонной артерии.....	111
Получение механических свойств сосудов	113
Получение знаний о геометрии сонных артерий.....	113
Граничные условия на выходах наружной и внутренней сонных артерий.....	114
Факторы разрыва аневризм сосудов головного мозга	116

Соотношение размеров аневризмы (aspect ratio)	116
Отношение к размеру сосуда (size ratio).....	117
Неправильная форма (irregular shape)	118
Касательные напряжения на стенке аневризмы	118
Краткие выводы по факторам разрыва аневризм	119
Механическая теория атерогенеза	120
Стенозы внутренних сонных артерий и гемодинамика артерий виллизиевого круга.....	122
Биомеханика опорно-двигательного аппарата.....	124
Биомеханика интрамедуллярных фиксаторов при остеосинтезе диафизарных переломов бедра.....	126
Биомеханика в стоматологии	127
Глава 6. Создание моделей биологических объектов.....	129
Обработка КТ данных в ручном режиме	129
Создание моделей биологических объектов	129
Создание 3D моделей системы фиксации и заменителей диска	130
Полуавтоматический режим обработки КТ данных.....	131
Метод рекурсивного двумерного фронтального роста.....	132
Программа для обработки данных КТ и МРТ.....	134
Построение стоматологических шаблонов.....	136
Построение модели сонной артерии по данным УЗИ.....	137
Глава 7. Испытания на одноосное растяжение образцов артерий.....	140
Одноосное растяжение образцов артерий виллизиевого круга	140
Одноосное растяжение образцов плечевой артерии	153
Получение параметров гиперупругой модели	158
Алгоритм получения констант модели Муни-Ривлина с использованием системы компьютерной алгебры Matlab.....	161
Глава 8. Постановка и решение задач биомеханики.....	163
Возможности биомеханического моделирования	163
Этапы биомеханического моделирования.....	163
Одномерная теория динамики кровотока	164
Построение частных периодических решений уравнения для объемного кровотока	168
Связанные задачи биомеханики сердечно-сосудистой системы	178

Статические задачи биомеханики опорно-двигательного аппарата.....	181
Моделирование бедренной кости	183
Глава 9. Анализ результатов численного моделирования.....	185
Задачи статики опорно-двигательного аппарата	185
Численный расчет динамики кровотока в плечевой артерии.....	192
Расчет гемодинамики плечевой артерии по одномерной теории	198
Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза.....	202
Течение крови по сосудам виллизиевого круга при наличии аневризм	208
Течение крови по сосудам виллизиевого круга при наличии стенозов сонных артерий	211
Течение крови в бифуркации сонной артерии при разных типах граничных условий.....	218
Сравнение систем фиксации диафизарных переломов бедра	225
Задачи статики в стоматологии.....	229
Глава 10. Использование платформы Arduino для проведения натуральных экспериментов.....	231
Платформа Arduino.....	231
Разработка скетча.....	233
Эксперимент о течении крови по сосудам.....	237
Список литературы.....	241
Литература к главе 5	241
Литература к главе 6	246
Литература к главе 8	246
Литература к главе 9	246
Литература к главе 10	248
Список рекомендуемой литературы.....	249

Предисловие

Монография содержит 10 глав. Первая глава раскрывает базовые вопросы тензорного исчисления, являющегося основным математическим языком, при помощи которого формулируются уравнения и постановки задач механики и биомеханики. Глава «Основы линейной теории упругости» содержит базовые понятия теории упругости, необходимые для понимания теории деформаций, напряжений, упругого поведения тел и закона Гука. Приведены также основные задачи статики упругого тела, находящие свое применение при формулировке статических задач биомеханики опорно-двигательного аппарата. Третья глава содержит описание некоторых вопросов механики жидкости и газа, понимание которых необходимо для грамотной постановки задач биомеханики сердечно-сосудистой системы. Глава 4 «Введение в метод конечных элементов» раскрывает основные понятия метода конечных элементов. Описаны вариационная постановка задачи, а также метод Галеркина. В главе 5 приведены медицинские постановки задач биомеханики на примере сонных артерий человека, аневризм сосудов головного мозга, спондилолистеза пояснично-крестцового сегмента позвоночника и планирования дентальной имплантации. Кратко описана также механическая теория атерогенеза. В главе «Создание моделей биологических объектов» раскрыты вопросы, касающиеся обработки данных медицинского оборудования с целью построения реалистичных моделей биологических объектов: рассказывается о методах обработки данных компьютерной томографии, приводятся примеры создания трехмерных геометрических моделей виллизиевого круга человека, сегмента позвоночника, сонных артерий, а также стоматологического шаблона. В главе 7 приведены результаты одноосных испытаний сосудов человека с целью выявления их прочностных свойств. В главе 9 «Анализ результатов численного моделирования» приведены результаты численного решения задач биомеханики. Описана одномерная теория динамики кровотока. Заключительная глава 10 посвящена основам и процессу создания

испытательного стенда, позволяющего моделировать движение крови по фрагментам сердечно-сосудистой системы. Описана платформа Arduino, показаны ее возможности применительно к выполнению натуральных экспериментов и обработки данных с расходомеров.

Монография может быть полезна студентам, магистрам, молодым ученым, а также всем, кто интересуется биомеханикой и ее практическим применению к моделированию сердечно-сосудистой системы и опорно-двигательного аппарата человека.

Монография может являться учебным пособием для студентов механико-математического факультета Саратовского университета.

Во многих главах книги встречаются имена известных ученых и авторов различных формул, уравнений и констант. На страницах, где впервые встречается имя известного ученого, приводится сноска с краткой справкой о его биографии.

Если у вас в руках оказалась эта книга и вы бы хотели прокомментировать ее содержание или задать вопросы авторам, сделать это можно по электронной почте: ivanovdv@gmail.com, nerevishl@gmail.com.

Благодарности

Выражаем благодарность своим семьям, а также Благотворительному фонду Владимира Потанина. Без вашей поддержки издание этой книги было бы невозможным.

Глава 1. Тензорный анализ в евклидовом пространстве

Тензорное исчисление – основной математический язык, при помощи которого формулируются фундаментальные законы механики сплошной среды, физики твёрдого тела, электродинамики, теории относительности и их приложений.

Если говорить простым языком, то тензором называют пространственное математическое описание некоторого геометрического или физического объекта в виде таблицы величин, называемых его компонентами. Компоненты тензора зависят от системы координат и преобразуются при переходе к новой системе координат. При преобразовании компонент, тем не менее, неизменными остаются «особые» величины, называемые инвариантами тензора. Далее дадим основные понятия.

Множество Z будем называть *линейным пространством*, а его элементы – векторами, если:

а) задан закон (операция сложения), по которому любым двум элементам x и y из Z сопоставляется элемент, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$;

б) задан закон (операция умножения на число), по которому элементу x из Z и числу a сопоставляется элемент из Z , называемый произведением x на a и обозначаемый ax ;

в) для любых элементов x, y и z из Z и для любых чисел a и b выполнены следующие требования:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует элемент 0 такой, что для каждого x из Z выполнено равенство $x + 0 = x$;

4) для каждого x существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$;

5) $a(x + y) = ax + ay$;

6) $(a + b)x = ax + bx$;

7) $a(bx) = (ab)x$;

8) произведение любого элемента x из Z на 1 равно x , то есть, $1x = x$.

Если в пункте б) ограничиться вещественными числами, то Z называется *вещественным линейным пространством*. Если же определено умножение на любое комплексное число, то пространство Z называется *комплексным*.

Система векторов называется *линейно зависимой*, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов (не все ее коэффициенты равны нулю). В противном случае, то есть, когда только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулю, система векторов называется *линейно независимой*.

Базисом в пространстве Z будем называть упорядоченную конечную систему векторов, если она является линейно независимой, и каждый вектор из Z представляется в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Вещественное линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция скалярного умножения, то есть, любым двум векторам x и y сопоставлено вещественное число, которое обозначается (x, y) , и это соответствие удовлетворяет следующим условиям, каковы бы ни были векторы x, y, z и число a :

- а) $(x, y) = (y, x)$;
- б) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- в) $(ax, y) = a(x, y)$;
- г) $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.

Рассмотрим вещественное линейное пространство Z_n и дадим следующее определение.

Множество Z_n называется n -мерным аффинным пространством, а его элементы – точками, если задан закон, сопоставляющий каждой упорядоченной паре его элементов A, B единственный вектор из Z_n (его будем обозначать AB) таким образом, что:

а) для любой точки A из Z_n и любого вектора x из Z_n существует единственная точка B такая, что $AB = x$. Такую точку будем обозначать $P(A, x)$;

б) для любых трех точек A, B, C выполнено равенство $AB + BC = AC$.

Утверждение под пунктом а) говорит о том, что от любой точки можно отложить вектор произвольной длины. Второе утверждение под пунктом б) вводит определение операции сложения векторов.

Система отсчета и системы координат

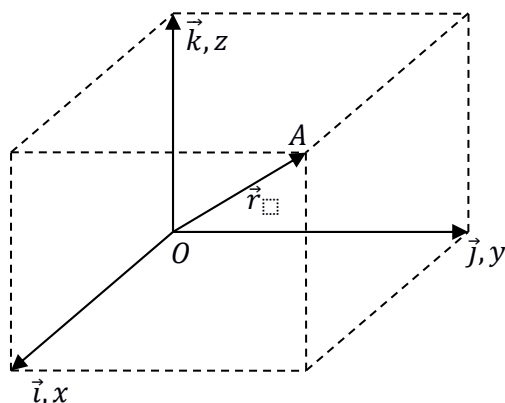


Рисунок 1.1 – Система отсчета.

Введем в евклидовом пространстве репер из направленных отрезков $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, отложенных от точки O , углы между которыми равны $\frac{\pi}{2}$, но при этом не обязательно нормированных. Присоединим к реперу $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ множество точек пространства, которые определяются при помощи радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. На рисунке 1.1 показан репер, а также точка A пространства с проведенным к ней радиус-вектором \vec{r} .

Телом отсчета будем называть репер, изображенный на рисунке 1.1, с присоединенным к нему множеством точек, задаваемых радиус-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Тело отсчета может служить для наблюдения за движением других тел относительно него.

Система отсчета – тело отсчета, снабженное часами.

Введенный в данном параграфе репер и координаты x, y, z будем называть отсчетными. Эта совокупность определяет систему отсчета и не подлежит каким-либо заменам.

Системой координат в данной системе отсчета будем называть систему идентификации точек системы отсчета.

Наряду с отсчетными координатами можно рассматривать и другие координаты, в том числе, и движущиеся относительно системы отсчета.

Вектор в евклидовом пространстве

Пусть в евклидовом пространстве выбрана косоугольная аффинная система координат (рисунок 1.2) с невырожденным базисом $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 \neq 0$.

Рассмотрим точку M , заданную своими координатами a^i . Построим радиус-вектор $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{e}_i$ точки M . Для краткости здесь и далее такие суммы будем записывать в более удобной форме без знака "суммы", то есть $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{e}_i = a^i \vec{e}_i$. Здесь индекс i , по которому осуществляется суммирование, встречается в записи два раза и называется немым (впервые использовал Эйнштейн).

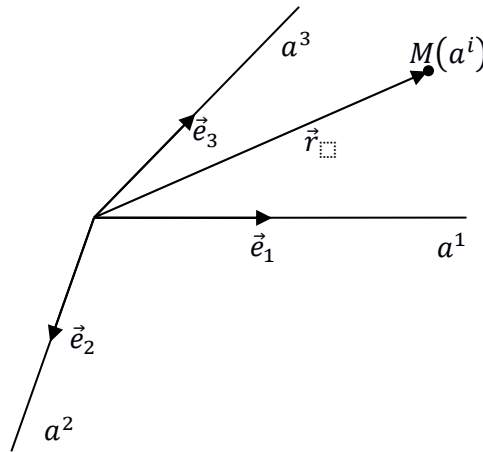


Рисунок 1.2 – Косоугольная аффинная система координат.

Введем новую систему координат, определяемую новым базисом $\{\vec{e}'_i\}$. Векторы нового базиса определяются через векторы старого базиса с помощью линейного и однородного преобразования $\vec{e}'_i = A_i^j \vec{e}_j$, где A_i^j – невырожденная матрица линейного и однородного преобразования векторов базиса, то есть, $\det(A_i^j) \neq 0$. Следовательно, существует матрица обратного преобразования $(A_i^j)^{-1} = A_i^{(-1)j}$. Тогда можно выразить векторы старого базиса через векторы нового базиса из соотношения $\vec{e}_i = A_i^{(-1)j} \vec{e}'_j$.

Матрицы прямого и обратного преобразований связаны соотношением

$$A_j^k A_k^{(-1)i} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Вектором \vec{u} в евклидовом пространстве называется инвариантный объект, компоненты которого при переходе к новому базису преобразуются по линейному однородному закону относительно компонент матрицы преобразования векторов базиса.

Преобразование компонент вектора при переходе к новому базису

Пусть дан вектор \vec{u} . Запишем его представления в старом и новом базисах: $\vec{u} = u^i \vec{e}_i = u^{i'} \vec{e}_{i'}$. Тогда, используя формулу, выражающую вектора старого базиса через вектора нового базиса $\vec{e}_i = A_i^{(-1)j} \vec{e}_{j'}$, получим $u^i A_i^{(-1)j} \vec{e}_{j'} = u^{i'} \vec{e}_{i'} \leftrightarrow u^j A_j^{(-1)i} \vec{e}_{i'} = u^{i'} \vec{e}_{i'} \rightarrow u^{i'} = A_j^{(-1)i} u^j$. Здесь компоненты u^i вектора \vec{u} называются контравариантными компонентами. Аналогичным образом можно получить выражение для контравариантных компонент вектора \vec{u} в старом базисе через контравариантные компоненты вектора \vec{u} в новом базисе: $u^i = A_j^i u^{j'}$. Контравариантные компоненты вектора при переходе от старой системы координат к новой преобразуются через обратную матрицу преобразования векторов базиса.

Введем сопряженный базис $\{\vec{e}^i\}$. Для этого введем метрический тензор, компоненты которого определяются соотношением $g = (g_{ij}) = \vec{e}_i \vec{e}_j$, $g = \det(g_{ij}) \neq 0$. Тогда $\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j$. Следовательно, $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$, где g^{ij} – элементы обратной матрицы g_{ij} . При этом $g^{kj} g_{ki} = \delta_i^j$.

Векторы $\{\vec{e}^i\}$ сопряженного базиса обладают следующим геометрическим свойством $\vec{e}^i \vec{e}_j = \delta_j^i$. Докажем это свойство.

Умножим равенство $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$ скалярно на \vec{e}_k , тогда $\vec{e}^i \vec{e}_k = g^{ij} \vec{e}_j \vec{e}_k = g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

Смысл метрического тензора состоит в том, что g_{ij} – это коэффициенты разложения исходного базиса $\{\vec{e}_i\}$ по векторам сопряженного базиса $\{\vec{e}^i\}$: $\vec{e}_i = (\vec{e}_i \vec{e}_j) \vec{e}^j = g_{ij} \vec{e}^j = g_{i1} \vec{e}^1 + g_{i2} \vec{e}^2 + g_{i3} \vec{e}^3$. Определитель матрицы метрического тензора вычисляется как $g = \det(g_{ij}) = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)^2$.

Преобразование векторов сопряженного базиса в трехмерном евклидовом пространстве

Запишем выражения для векторов сопряженного базиса через векторы базиса $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{g}}, \vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3} = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\sqrt{g}}, \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{g}}.$$

Можно показать, что эти выражения выполняются, если каждое из них скалярно умножить на соответствующий вектор исходного базиса.

Аналогичным образом векторы исходного базиса могут быть вычислены через векторы сопряженного базиса:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\vec{e}^1 \vec{e}^2 \vec{e}^3} = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\sqrt{g'}}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{\vec{e}^1 \vec{e}^2 \vec{e}^3} = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{\sqrt{g'}}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \vec{e}^2 \vec{e}^3} = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\sqrt{g'}}.$$

$$\text{Здесь } g' = \det(g^{ij}) = \frac{1}{g}.$$

Введем в рассмотрение символы Леви-Чивиты¹.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ или } j = k \text{ или } i = k, \\ 1, & i, j, k - \text{четная перестановка,} \\ -1, & i, j, k - \text{нечетная перестановка.} \end{cases}$$

Тогда для векторов сопряженного базиса соотношения можно переписать в виде:

$$\vec{e}^k = 0.5 \varepsilon^{ijk} \frac{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}{\sqrt{g}} \text{ или } \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \vec{e}^k.$$

К примеру,

$$\begin{aligned} \vec{e}^1 &= 0.5 \varepsilon^{ij1} \frac{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}{\sqrt{g}} = 0.5 * \varepsilon^{231} \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{g}} + 0.5 * \varepsilon^{321} \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}{\sqrt{g}} \\ &= 0.5 * (1) * \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{g}} + 0.5 * (-1) * (-1) * \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{g}} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Если исходный базис является декартовым², то $\vec{e}_i = \vec{e}^i$, так как $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Ковариантные компоненты вектора

Рассмотрим представление вектора \vec{u} в сопряженном базисе $\vec{u} = u_i \vec{e}^i$. Покажем, что ковариантные компоненты вектора при переходе от старого

¹ Туллио Леви-Чивита (итал. Tullio Levi-Civita; 29 марта 1873, Падуа — 29 декабря 1941, Рим) — итальянский математик еврейского происхождения, знаменитый главным образом своими работами в области тензорного исчисления и его приложениями к теории относительностей также значительный вклад и в другие отрасли математики. Был учеником Риччи, изобретателя тензорного исчисления. Основные работы включают основополагающие статьи по чистой и прикладной математике, небесной механике (особенно по проблеме трёх и более тел) и гидродинамике.

² Рене Декарт (фр. René Descartes [кэ'не де'каит], лат. Renatus Cartesius — Картезий; 31 марта 1596, Лаэ (провинция Турень), ныне Декарт (департамент Эндр и Луара) — 11 февраля 1650, Стокгольм) — французский философ, математик, механик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии.

базиса к новому преобразуются через матрицу преобразования векторов базиса, то есть $u_i' = A_i^j u_j$ и $u_i = A_i^{(-1)j} u_j'$.

Для этого сначала получим формулу преобразования векторов сопряженного базиса при переходе от старого базиса к новому.

Воспользуемся формулой $\vec{e}_i' = A_i^j \vec{e}_j$. Согласно определению $\vec{e}^{l'} = g^{il'} \vec{e}_i'$.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{e}^{l'} &= A_i^j \vec{e}_j g^{il'} = A_i^j \vec{e}_j \vec{e}^n g_{nj} g^{il'} = A_i^j \vec{e}^n (\vec{e}_n \vec{e}_j) g^{il'} = \\ &= A_i^j \vec{e}^n \left(A_n^{(-1)p} \vec{e}_p' \right) \left(A_j^{(-1)t} \vec{e}_t' \right) g^{il'} = \\ &= A_i^j A_n^{(-1)p} A_j^{(-1)t} g_{pt}' g^{il'} \vec{e}^n = \delta_i^t A_n^{(-1)p} g_{pt}' g^{il'} \vec{e}^n = A_n^{(-1)p} g_{pi}' g^{il'} \vec{e}^n \\ &= A_n^{(-1)p} \delta_p^l \vec{e}^n = A_n^{(-1)l} \vec{e}^n. \end{aligned}$$

Тогда перепишем начало и конец равенства $\vec{e}^{l'} = A_n^{(-1)l} \vec{e}^n$.

Получим формулу $u_i' = A_i^j u_j$.

$\vec{u} = u_i \vec{e}^i = u_i' \vec{e}^{i'} = u_i A_j^i \vec{e}^{j'} = u_i' \vec{e}^{i'}$, тогда $u_i' = A_i^j u_j$. Аналогичным образом можно вывести следующую формулу $u_i = A_i^{(-1)j} u_j'$.

Вернемся к задаче вычисления скалярного произведения в произвольной косоугольной системе координат с базисом $\{\vec{e}_i\}$. Известно, что для двух произвольных векторов \vec{a} и \vec{b} справедливо выражение для нахождения их скалярного произведения

$$\vec{a}\vec{b} = (a^i \vec{e}_i)(b^j \vec{e}_j) = a^i b^j g_{ij}.$$

В общем случае ни один из коэффициентов g_{ij} не равен нулю. В развернутом виде выражение для скалярного произведения далеко от простоты, которую можно получить в декартовой системе координат. Положение можно исправить, если для записи векторов \vec{a} , \vec{b} использовать различные базисы. На самом деле, если помимо базиса $\{\vec{e}_i\}$ использовать некоторый базис $\{\vec{e}^k\}$ такой, что $\vec{e}^i \vec{e}_k = \delta_k^i$, то можно записать

$$\vec{a}\vec{b} = (a^i \vec{e}_i)(b_k \vec{e}^k) = a^i b_k \delta_i^k = a^i b_i.$$

С использованием вспомогательной системы координат, которую принято называть взаимной (сопряженной), получается максимально простое выражение для скалярного умножения.

Векторы взаимного базиса можно охарактеризовать следующим образом:

1. Каждый базисный вектор взаимной системы ортогонален ко всем разноименным с ним базисным векторам основной системы.

2. Длина базисного вектора взаимной системы выбирается таким образом, чтобы скалярное произведение его на одноименный вектор основной системы равнялось единице.

Компоненты u^i вектора \vec{u} в базисе $\{\vec{e}_i\}$ можно вычислить с помощью векторов сопряженного базиса. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\vec{u}\vec{e}^k = u^i\vec{e}_i\vec{e}^k = u^i\delta_i^k = u^k.$$

Аналогичным образом можно вычислить компоненты u_i вектора \vec{u} в базисе $\{\vec{e}^i\}$. Для базиса $\{\vec{e}^i\}$ сопряженным (или взаимным) является базис $\{\vec{e}_i\}$, что сразу же дает нам возможность вычислить координаты вектора \vec{u} относительно базиса $\{\vec{e}^i\}$. На самом деле,

$$\vec{u}\vec{e}_k = u_i\vec{e}^i\vec{e}_k = u_i\delta_k^i = u_k.$$

Иногда исходный и взаимный базисы совпадают. Это происходит тогда и только тогда, когда базис $\{\vec{e}_i\}$ – ортонормирован, то есть, векторы \vec{e}_i являются единичными и попарно ортогональными между собой. В декартовом базисе ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают, то есть, $u_i = u^i$.

Введем понятие тензора. *Вектор* – это тензор 1-го ранга. *Рангом тензора* называют число индексов, которыми нумеруются его компоненты.

Тензором 2-го ранга (будем далее обозначать T^2) в евклидовом пространстве называется инвариантный объект, компоненты которого при переходе к новому базису преобразуются по однородному квадратичному закону относительно компонент матрицы преобразования векторов базиса.

Введем понятие диадного произведения векторов. Для этого рассмотрим два вектора, заданных своими контравариантными компонентами: $\vec{a}|a^i$, $\vec{b}|b^i$.

Диадным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} будем называть

$$\begin{aligned}\vec{a} \otimes \vec{b} &= \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix} = a^1 b^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + a^3 b^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a^1 b^1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \dots + a^3 b^3 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = a^i b^j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.\end{aligned}$$

Перепишем диадное произведение векторов с помощью контравариантных компонент тензора T^{ij} : $\vec{a} \otimes \vec{b} = a^i b^j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

Диадное произведение базисных векторов $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ называется тензорным базисом. Если рассмотреть базис $\{\vec{e}_i\}$ и сопряженный базис $\{\vec{e}^i\}$, то можно ввести смешанные тензорные базисы $\vec{e}_i \otimes \vec{e}^j, \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j$. Тогда можно записать

$$T^2 = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = T_{\cdot j}^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = T_i^{\cdot j} \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j.$$

При этом $T_{\cdot j}^i \neq T_i^{\cdot j}$.

Приведем пример. $T^2 = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^{ij} g_{ik} \vec{e}^k \otimes \vec{e}_j = T_k^{\cdot j} \vec{e}^k \otimes \vec{e}_j$.

Тогда можно записать следующие выражения для связи контравариантных, ковариантных и смешанных компонент тензора $T_{ij} = T^{kl} g_{ki} g_{jl}, T^{ij} = T_{kl} g^{ki} g^{jl}, T_{\cdot j}^i = T^{ik} g_{kj}, T_i^{\cdot j} = T^{ki} g_{kj}$.

Порядок следования индексов у координат важен; первый индекс у координаты всегда относится к первому базису в диаде базисных векторов, а второй – ко второму. Поэтому при записи тензора в смешанном базисе у координатных индексов ставятся точки, чтобы было ясно, какой индекс является первым, а какой вторым.

Приведем еще одно определение тензора второго ранга.

Тензором второго ранга является неупорядоченная совокупность конечного числа упорядоченных пар векторов (диад).

Прямое и обратное преобразования компонент тензора 2-го ранга

Пусть дан тензор 2-го ранга $T^2 = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^{ij'} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j'$. Сначала получим формулы прямого и обратного преобразования контравариантных компонент тензора 2-го ранга.

Рассмотрим преобразование контравариантных компонент тензора при переходе от старого базиса $\{\vec{e}_i\}$ к новому базису $\{\vec{e}_i'\}$.

Базисные векторы старого базиса можно выразить через векторы нового (штрихованного) базиса по формулам $\vec{e}_i = A_i^{(-1)j} \vec{e}_j' = A_i^{(-1)k} \vec{e}_k'$, $\vec{e}_j = A_j^{(-1)l} \vec{e}_l'$.

Тогда

$$T^2 = T^{ij} A_i^{(-1)k} A_j^{(-1)l} \vec{e}_k' \otimes \vec{e}_l' = T^{ij'} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j' = T^{kl} A_k^{(-1)i} A_l^{(-1)j} \vec{e}_i' \otimes \vec{e}_j'.$$

Выпишем отдельно формулы прямого и обратного преобразований контравариантных компонент тензора 2-го ранга.

$$T^{ij'} = T^{kl} A_k^{(-1)i} A_l^{(-1)j}, \quad T^{ij} = T^{kl'} A_k^i A_l^j.$$

Для ковариантных компонент тензора 2-го ранга существуют аналогичные формулы преобразования.

$$T'_{ij} = T_{kl} A_k^i A_l^j, \quad T_{ij} = T'_{kl} A_i^{(-1)k} A_j^{(-1)l}.$$

Приведем также формулы прямого и обратного преобразований смешанных компонент тензора 2-го ранга.

$$T_{\cdot j}^{\cdot i'} = T_{\cdot l}^{\cdot k} A_k^{(-1)i} A_j^l, \quad T_{\cdot j}^{\cdot i'} = T_{\cdot l}^{\cdot k} A_k^{(-1)i} A_j^l.$$

Введем понятие метрического тензора. Будем обозначать метрический тензор буквой G . Введем его следующим образом

$$G = g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = g_{\cdot j}^{\cdot i} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = g_{\cdot i}^{\cdot j} \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j.$$

Следует отметить, что $g_{\cdot j}^{\cdot i} = g_i^{\cdot j} = \delta_j^i$, $g_{\cdot j}^{\cdot i} = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$.

Покажем, что компоненты $(g_{ij}) = \vec{e}_i \vec{e}_j$ образуют тензор. Для этого выведем соотношения, выражающие компоненты (g_{ij}) при переходе от исходной системы координат к штрихованной. Запишем выражения для векторов нового базиса через вектора исходного базиса

$$\vec{e}_i' = A_i^k \vec{e}_k, \quad \vec{e}_j' = A_j^l \vec{e}_l.$$

Тогда $g_{ij}' = \vec{e}_i' \vec{e}_j' = \vec{e}_k \vec{e}_l A_i^k A_j^l = g_{kj} A_i^k A_j^l$, следовательно, $g_{ij}' = g_{kj} A_i^k A_j^l$. Аналогично можно записать, что $g^{ik'} = g^{kl} A_k^{(-1)i} A_l^{(-1)j}$. Следовательно, в соответствии с данным выше определением, G является тензором.

Алгебраические операции с тензорами

Пусть дано два тензора 2-го ранга T^2 , P^2 , а также числа α , β .

Линейная комбинация двух тензоров 2-го ранга тоже является тензором 2-го ранга, то есть,

$$\alpha T^2 + \beta P^2 = C^2.$$

Обозначим компоненты тензоров T^2 , P^2 и C^2 через T^{ij} , P^{ij} и C^{ij} соответственно. Тогда

$$\alpha T^{ij} + \beta P^{ij} = C^{ij}.$$

Транспонирование тензора

Пусть дан тензор 2-го ранга $T = T_{ij}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{\cdot j}^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = T_{\cdot}^i \vec{e}^j \otimes \vec{e}_i$. Если поменять сомножители местами, то получим транспонированный тензор

$$T^T = T_{ij}\vec{e}^j \otimes \vec{e}^i = T^{ij}\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i = T_{\cdot j}^i \vec{e}^j \otimes \vec{e}_i = T_{\cdot}^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j.$$

Другими словами, для диады операцию транспонирования запишем в виде:

$$T = \vec{a} \otimes \vec{b}, \quad T^T = \vec{b} \otimes \vec{a}.$$

Можно показать, что $(P \cdot Q)^T = Q^T P^T$, $(P \cdot Q \cdot R)^T = ((P \cdot Q) \cdot R)^T = R^T (P \cdot Q)^T = R^T Q^T P^T$.

Тензор Q называется *симметричным*, если $Q^T = Q$. Тензор P называется *антисимметричным*, если $P^T = -P$.

Таким образом, любой тензор 2-го ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного $R = \frac{1}{2}(R + R^T) + \frac{1}{2}(R - R^T)$.

Представим тензор второго ранга $T^2|T^{ij}$ в виде суммы двух тензоров $T^2 = T_1^2 + T_2^2$, где $T_1^2|T_1^{ij}, T_2^2|T_2^{ij}$. Тогда если $T_1^2|T_1^{ij}, T_2^2|T_2^{ij}$ определить как $T_1^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$, $T_2^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$, то $T_1^{ij} = T_1^{ji}$ – симметричный тензор 2-го ранга, $T_2^{ij} = -T_2^{ji}$ – антисимметричный тензор 2-го ранга.

Отметим, что $Q \cdot Q^T = P$ – симметричный тензор. Покажем это.

$$(Q \cdot Q^T)^T = (Q^T)^T Q^T = Q \cdot Q^T.$$

Тензор P называется *неособым*, если $\det(P) \neq 0$.

Пример.

$$1. \text{ Рассмотрим тензор 2-го ранга } \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \begin{vmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{vmatrix} = a^1 a^2 a^3 \begin{vmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $\vec{a} \otimes \vec{b}$ - особый тензор.

2. Рассмотрим антисимметричный тензор 2-го ранга $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что $\det(B) = 0$.

Если тензор неособый, то можно ввести обратный тензор.

Тензор P называется *обратным* к Q , если $Q \cdot P = I$. Обратный тензор обозначается как $P = Q^{-1}$.

Свойства операции обратного тензора

1. $(P \cdot Q)^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1}$.
2. $(Q^{-1})^{-1} = Q$.
3. $(Q^T)^{-1} = (Q^{-1})^T$.

Рассмотрим и другие операции с тензорами: тензорное умножение, свертка и двукратная свертка.

1. Тензорное умножение. При тензорном умножении образуется тензор более высокого ранга.

Пусть дан тензор 2-го ранга $T^2 | T^{ij}$ и вектор $\vec{u} = u^k \vec{e}_k$. Рассмотрим тензорное умножение T^2 и \vec{u} .

$$T^2 \otimes \vec{u} = T^{ij} u^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k = T^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k.$$

При тензорном умножении двух тензоров 2-го ранга получаем тензор 4-го ранга.

2. Операция свертки тензоров приводит к образованию тензора более низкого ранга. Рассмотрим векторы $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$ и $\vec{v} = v^k \vec{e}_k$. Свертка двух векторов – скалярное произведение, которое в результате дает число (скаляр - тензор нулевого ранга).

$$\vec{u} \vec{v} = u^i \vec{e}_i v^k \vec{e}_k = u^i v^k g_{ik} = u^i v_i = u_k v^k.$$

Свертка тензора 2-го ранга и вектора дает вектор.

$$T^2 \vec{u} = T^{ij} u^k g_{kj} \vec{e}_i = T^{ij} u_j \vec{e}_i.$$

Свертка двух тензоров 2-го ранга дает тензор 2-го ранга.

$$T^2 P^2 = T^{ij} P^{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l g_{jk} = T^{ij} P^{kl} g_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l = T^{ij} P_j^l \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l.$$

3. Двукратная свертка тензоров 2-го ранга. В результате получается скаляр.

$$T^2: P^2 = T^2 \cdot P^2 = T^{ij} P^{kl} g_{jk} g_{il}.$$

В качестве примера рассмотрим двукратную свертку тензора 2-го ранга $T^2 = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ и метрического тензора $G^2 = g_{kl} \vec{e}^k \otimes \vec{e}^l$.

$$T^2: G^2 = T^2 \cdot G^2 = T^{ij} g_{kl} \delta_j^k \delta_i^l = T^{ij} g_{ij} = T_i^i = T_j^j - \text{инвариант.}$$

Рассмотрим свертку метрического тензора $G = g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$ и вектора $\vec{u} = u^k \vec{e}_k$.

$$G\vec{u} = (g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j) u^k \vec{e}_k = g_{ij} u^k \vec{e}^i \delta_k^j = g_{ij} u^j \vec{e}^i = u_i \vec{e}^i = \vec{u}.$$

Основные инварианты симметричного тензора

Инвариантом тензора называется скалярная функция его компонент, не меняющая своих значений при переходе к новому базису.

Рассмотрим первые три инварианта симметричного тензора 2 ранга T .

$$1. I_1 = T_i^i.$$

$$2. I_2 = \frac{1}{2} (T_i^i T_j^j - T_j^i T_i^j).$$

$$3. I_3 = \det \|T^{ij}\|.$$

Любые инварианты симметричного тензора T могут быть выражены через инварианты I_1, I_2, I_3 .

Свойства симметричного тензора 2-го ранга

Пусть дан симметричный тензор 2-го ранга $T^2 = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ такой, что $T^{ij} = T^{ji}$.

Введем понятие главных направлений и главных значений тензора 2-го ранга. Рассмотрим единичный вектор \vec{n} : $n_i n^i = 1$ и свертку $T\vec{n} = \vec{b}$. Среди множества векторов \vec{n} существуют такие, при которых выполняется равенство $T\vec{n} = \varepsilon \vec{n}$. В таком случае вектор \vec{n} определяет главные направления, другими словами, \vec{n} – собственный вектор тензора T , а ε – собственные значения или главные значения тензора T .

Выведем уравнение для нахождения главных значений тензора T . Для этого рассмотрим более подробно равенство $T\vec{n} = \varepsilon \vec{n}$.

$$(T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)n_k\vec{e}^k = \varepsilon n^i\vec{e}_i \leftrightarrow T^{ij}n_k\delta_j^k\vec{e}_i = \varepsilon n^i\vec{e}_i \leftrightarrow T^{ij}n_j\vec{e}_i = \varepsilon n^i\vec{e}_i \leftrightarrow T^{ij}n_j = \varepsilon n^i, i = 1,2,3.$$

Используем метрический тензор в правой части получившегося равенства и получим.

$$T^{ij}n_j = \varepsilon g^{ik}n_k \leftrightarrow T^{ij}n_j = \varepsilon g^{ij}n_j \leftrightarrow (T^{ij} - \varepsilon g^{ij})n_j = 0 \leftrightarrow |T^{ij} - \varepsilon g^{ij}| = 0.$$

Так как тензор T – симметричный, то $T_{\cdot j}^{\cdot i} = T_j^{\cdot i}$. Следовательно, с учетом последнего уравнения получим $|T_{\cdot k}^{\cdot j}g^{ki} - \varepsilon g_k^jg^{ki}| = 0 \leftrightarrow |g^{ij}| \cdot |T_j^{\cdot i} - \varepsilon\delta_j^i| = 0 \leftrightarrow |T_j^{\cdot i} - \varepsilon\delta_j^i| = 0$.

Получившееся кубическое уравнение решается для поиска трех корней ε_i . Каждому собственному (главному) значению ε_i соответствует направление, задаваемое нормалью \vec{n}_i . Следует отметить, что $\vec{n}_i \perp \vec{n}_j$ при $i \neq j$.

Кубическое уравнение для поиска главных значений тензора может быть записано и через инварианты тензора $\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$.

Каноническая форма симметричного тензора

Пусть задан симметричный тензор 2-го ранга T в точке A евклидового пространства. Введем в точке A главную систему координат, оси которой направим по главным направлениям \vec{n}_i тензора T . Покажем, что в главной системе координат матрица, составленная из компонент тензора T , будет иметь диагональный вид.

В таком случае в виду ортогональности главных направлений будем иметь.

$$\vec{n}_i = n_{ik}\vec{e}^k, \vec{n}^i = n_{ik}\vec{e}^k, \vec{n}_i = \vec{n}^i,$$

здесь n_{ik} – корни системы линейных алгебраических уравнений $(T^{ij} - \varepsilon g^{ij})n_j = 0$.

При этом можем записать формулы преобразования векторов базиса через обратную матрицу перехода при $\vec{n}^i = A_k^{(-1)i}\vec{e}^k$, где $A_k^{(-1)i} = n_{ik}$. Тогда компоненты тензора T , заданного в базисе \vec{e}_i , преобразуются по однородному квадратичному закону относительно компонент матрицы преобразования векторов базиса.

$$T^{ij'} = T^{kl} A_k^{(-1)i} A_l^{(-1)j} = T^{kl} n_{ik} n_{jl}.$$

Учтем также, что $T^{kl} n_{ik} = \varepsilon_i g^{kl} n_{ik}$, тогда можем записать $T^{ij'} = \varepsilon_i g^{kl} n_{ik} n_{jl} = \varepsilon_i n_i^l n_{jl} = \varepsilon_i \vec{n}_i \vec{n}_j = \varepsilon_i \delta_{ij}$.

Перепишем последнее равенство иначе. В главном базисе тензор T будет иметь следующий вид.

$$T = \varepsilon_i \delta_{ij} \vec{n}_i \otimes \vec{n}_j.$$

Или матрица тензора T в главном базисе будет иметь диагональный вид

$$T^{ij'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Первые три инварианта симметричного тензора 2-го ранга T , записанного относительно главного базиса, могут быть записаны следующим образом (главные значения тензора обозначим через ε_i , где $i = 1, 2, 3$)

1. $I_1 = T_{i \cdot}^i = \text{trace } T = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
2. $I_2 = T_{\cdot 1}^1 T_{\cdot 2}^2 + \dots = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3$.
3. $I_3 = |T_{\cdot j}^i| = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$.

Единичный тензор

Тензор второго ранга I называется *единичным*, если для любого вектора \vec{x} справедливо равенство $\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}I$.

Для единичного тензора справедливы также равенства $T \cdot I = I \cdot T = T$.

Таким тензором является метрический тензор.

$$I = G = g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \delta_j^i \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j.$$

Тензор I является единственным.

Ортогональный тензор

Важным классом тензоров второго ранга являются ортогональные тензоры. К множеству ортогональных тензоров принадлежат тензоры поворота, посредством которых описываются спинорные движения, играющие важную роль в механике.

Тензор P называется *ортогональным*, если $P \cdot P^T = I$.

Поскольку транспонированный тензор существует всегда, то любой ортогональный тензор невырожден (является неособым) и, следовательно, обратим. Множество ортогональных тензоров не пусто, так как единичный тензор является, очевидно, ортогональным.

Если P – ортогональный тензор, то $P^{-1} = P^T$. Следовательно, $\det(P) \cdot \det(P^T) = \det(I) = 1$. Тогда $\det(P) = \det(P^T)$ и $(\det(P))^2 = 1$. Окончательно получаем, что $\det(P) = \pm 1$.

Если $\det(P) = -1$, то переводит правую тройку в левую и наоборот. Другими словами, такой тензор осуществляет зеркальное отображение пространства относительно некоторой плоскости.

Пусть дан ортогональный тензор P и векторы \vec{a} и \vec{b} . Рассмотрим $P \cdot \vec{a} = \vec{a}'$ и $P \cdot \vec{b} = \vec{b}'$.

Рассмотрим теперь скалярное произведение

$$\vec{a}' \vec{b}' = (P \cdot \vec{a})(P \cdot \vec{b}) = (\vec{a} P^T)(P \cdot \vec{b}) = \vec{a}(P^T \cdot P) \vec{b} = \vec{a} \vec{b}.$$

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$, тогда $\vec{a}'^2 = (\vec{a}')^2$.

Ковариантная производная компонент векторного поля

Рассмотрим декартову и криволинейную системы координат в пространстве. Криволинейные координаты точки в пространстве будем обозначать через a^i , а через $\vec{r} = \vec{r}(a^i)$ – связь между декартовыми и криволинейными координатами. Будем рассматривать гладкое векторное поле $\vec{u} = u^i(a^k) \vec{e}_i$, где $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i}$ – векторы локального базиса криволинейной системы координат.

Вычислим $\frac{\partial \vec{u}}{\partial a^k} = \frac{\partial u^i}{\partial a^k} \vec{e}_i(a^k) + u^i(a^k) \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial a^k}$. Здесь производные базисных векторов по криволинейным координатам можно обозначить $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial a^k} = \Gamma_{ik}^m \vec{e}_m$.

Умножим последнее равенство скалярно на \vec{e}^n , получим $\Gamma_{ik}^n = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial a^k} \vec{e}^n$.

Γ_{ik}^n – символы Кристоффеля 2-го рода. Отметим, что тензора 3-го ранга они не образуют.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial a^k} &= \frac{\partial u^i}{\partial a^k} \vec{e}_i + u^i \Gamma_{ik}^m \vec{e}_m = \frac{\partial u^i}{\partial a^k} \vec{e}_i + u^m \Gamma_{mk}^i \vec{e}_i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial a^k} + u^m \Gamma_{mk}^i \right) \vec{e}_i \\ &= (\nabla_k u^i) \vec{e}_i, \end{aligned}$$

где $\nabla_k u^i = \frac{\partial u^i}{\partial a^k} + u^m \Gamma_{mk}^i$ – ковариантная производная контравариантной компоненты вектора.

В декартовом базисе ковариантная производная совпадает с частной производной ($\Gamma_{ik}^n = 0$), то есть, $\nabla_k u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}$.

По нижним индексам Символы Кристоффеля 2-го рода симметричны, так как

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial a^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial a^k \partial a^i}.$$

Следовательно, $\Gamma_{ik}^n = \Gamma_{ki}^n$. В силу симметрии независимых символов Кристоффеля 2-го рода 18 штук (всего их 27).

Для ковариантных компонент вектора имеем $\frac{\partial \vec{u}}{\partial a^k} = \frac{\partial u_i}{\partial a^k} \vec{e}^i + u_i \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial a^k}$. Разложим второй множитель в последнем слагаемом по векторам сопряженного базиса $\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial a^k} = \Gamma_{kn}^{*i} \vec{e}^n$. Γ_{kn}^{*i} обратные к символам Кристоффеля 2-го рода, то есть, $\Gamma_{kn}^{*i} = -\Gamma_{kn}^i$. Следовательно, выражение для ковариантной производной ковариантных компонент вектора можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial a^k} = \frac{\partial u_i}{\partial a^k} \vec{e}^i - u_i \Gamma_{kn}^{*i} \vec{e}^n = \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^k} - u_n \Gamma_{ki}^{*n} \right) \vec{e}^i = \nabla_k u_i \vec{e}^i.$$

В декартовом базисе $\nabla_k u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Ковариантное дифференцирование компонент тензорного поля

Пусть дано гладкое тензорное поле 2-го ранга $T(a^i) = T^{kl}(a^i)(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$.

Вычислим $\frac{\partial T}{\partial a^i}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial a^i} &= \frac{\partial T^{kl}}{\partial a^i} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) + T^{kl} \left(\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial a^i} \otimes \vec{e}_l \right) + T^{kl} \left(\vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial a^i} \right) = \\ &= \frac{\partial T^{kl}}{\partial a^i} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) + T^{kl} \cdot \Gamma_{ik}^n \vec{e}_n \otimes \vec{e}_l + T^{kl} \cdot \vec{e}_n \otimes \Gamma_{li}^n \vec{e}_n = \\ &= \left(\frac{\partial T^{kl}}{\partial a^i} + T^{kl} \cdot \Gamma_{in}^k + T^{kn} \cdot \Gamma_{ni}^l \right) (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = (\nabla_i T^{kl}) \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l. \end{aligned}$$

Здесь $\nabla_i T^{kl}$ – компоненты тензора 3-го ранга.

Аналогично можно получить $\nabla_i T_{kl} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial a^i} - T_{nl} \cdot \Gamma_{ik}^n - T_{kn} \cdot \Gamma_{il}^n$.

Ковариантное дифференцирование метрического тензора

Пусть метрический тензор задан своими ковариантными компонентами $g = g_{kl} \vec{e}^k \otimes \vec{e}^l$. Требуется вычислить $\nabla_i g_{kl}$. Покажем, что $\nabla_i g_{kl} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial a^i} - g_{nl} \cdot \Gamma_{ik}^n - g_{kn} \cdot \Gamma_{il}^n \equiv 0$.

Будем использовать определение компонент метрического тензора $g_{kl} = \vec{e}_k \vec{e}_l$. Тогда

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial a^i} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial a^i} \vec{e}_l + \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial a^i} \vec{e}_k = \Gamma_{ik}^n \vec{e}_n \vec{e}_l + \Gamma_{il}^n \vec{e}_n \vec{e}_k = \Gamma_{ik}^n g_{nl} + \Gamma_{il}^n g_{nk}.$$

Следовательно, $\frac{\partial g_{kl}}{\partial a^i} - g_{nl} \cdot \Gamma_{ik}^n - g_{kn} \cdot \Gamma_{il}^n \equiv 0$.

Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования

1. Линейность

$$\nabla_i (\alpha T^{kl} + \beta Q^{kl}) = \alpha \nabla_i T^{kl} + \beta \nabla_i Q^{kl}.$$

2. Дифференцирование произведения

$$\nabla_i (T^{kl} u_k) = (\nabla_i T^{kl}) u_k + T^{kl} (\nabla_i u_k).$$

Глава 2. Основы линейной теории упругости

Введение

Теория упругости – это раздел механики сплошной среды, посвященный определению напряжений и деформаций, возникающих в теле под действием механических или температурных нагрузок. При этом в основе теории упругости не лежат недоказанные гипотезы и предположения (как, например, в случае сопротивления материалов), что позволяет получать более точные и строгие решения задач для тел произвольной формы.

Классическая теория упругости изучает напряженно-деформированное состояние тел, которые обладают следующими свойствами: сплошность, идеальная упругость, линейная связь напряжений и деформаций, малость перемещений, однородность, изотропность.

Линейная теория упругости рассматривает более широкий круг задач. В рамках этой теории могут рассматриваться тела, модель которых может быть неоднородной и анизотропной.

В связи с разработкой новых материалов и применением в различных конструкциях гибких элементов в последние десятилетия XX века стремительно развивалась *нелинейная* теория упругости, охватывающая еще больший круг задач определения напряженно-деформированного состояния. Нелинейность выделяют геометрическую и физическую.

Геометрическая нелинейность предполагает, что тело не обладает достаточной жесткостью, как, например, в случае гибких стержней.

Физическая нелинейность подразумевает, что тело не подчиняется закону Гука.

В случае резиноподобных материалов говорят, как правило, о геометрической и физической нелинейности одновременно.

Таким образом, в рамках нелинейной теории упругости модели материалов подчиняются лишь гипотезам о сплошности и идеальной упругости, в то время как остальные свойства могут определяться конкретным рассматриваемым объектом. Очевидно, что нелинейная теория является наиболее общей, охватывающей как классическую, так и линейную теорию упругости. Однако изучение, как и в любом другом разделе науки и техники, необходимо начинать с простых основ, поэтому в данном пособии приводятся

основные гипотезы, определения и уравнения только линейной теории упругости.

Основы теории упругости необходимы при постановке и решении задач во многих областях науки и техники. Кроме того, при решении задач численными методами, в частности методом конечных элементов, без базовых знаний в области теории упругости невозможно корректно задать все необходимые граничные и контактные условия и, зачастую, просто понять суть проблемы. Таким образом, знание основ теории упругости необходимо при использовании конечно-элементных программных пакетов, позволяющих решать соответствующие классы задач.

Основные гипотезы

Механика сплошной среды, частью которой, как было сказано выше, является теория упругости, основана на трех фундаментальных гипотезах: сплошности, евклидовости пространства и абсолютного времени. Таковую механику сплошной среды принято называть *классической* или *ньютоновской*. Рассмотрим данные гипотезы подробнее.

1. Гипотеза сплошности (материального континуума).

Все реальные материальные тела представляются в виде конечного или бесконечного объема пространства, целиком и полностью заполненного материальным веществом.

Частица материального континуума – это бесконечно малый объем пространства, непрерывно заполненный материальным веществом.

2. Гипотеза евклидовости пространственного движения сплошной среды.

Пространство (с математической точки зрения) – множество точек, задаваемых с помощью чисел.

В трехмерном пространстве любой точке ставятся во взаимнооднозначное соответствие 3 числа. Соответствие между точками пространства и числами осуществляется с помощью системы координат. Чтобы измерять расстояния между любыми двумя точками пространства, необходимо вводить *меру*.

Евклидова³ мера измеряет расстояние между двумя точками по прямой (рисунок 2.1).

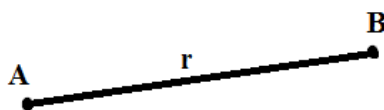


Рисунок 2.1 – Прямая, соединяющая две точки.

Если т.А имеет координаты (x_{ia}) , а т.В (x_{ib}) , где i меняется от 1 до 3, то расстояние между ними r будет вычислено (в случае евклидовой меры) по формуле (2.1):

$$r = \sqrt{(x_{ia} - x_{ib})^2}. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что в пространстве материального континуума вводится евклидова мера, и, следовательно, в этом пространстве может быть введена декартова система координат.

Если пространство движения сплошной среды имеет небольшие масштабы, то с достаточной точностью в нем всегда можно ввести евклидову меру, а значит, можно ввести единую декартову систему координат.

Примером неевклидовой меры может являться мера, измеряющая расстояния между точками на поверхности сферы по отрезку дуги большого круга (рисунок 2.2).

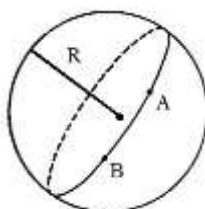


Рисунок 2.2 – Дуга большого круга, соединяющая точки на сфере.

Для всех точек, лежащих на поверхности сферы, невозможно ввести единую декартову систему координат. Однако это можно сделать для малого куска поверхности сферы. Для него евклидову меру с достаточной степенью

³ Евклид или Эвклид (др.-греч. Εὐκλείδης, от «добрая слава», время расцвета — около 300 года до н. э.) — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в III веке до н. э. Евклид — первый математик Александрийской школы. Его главная работа «Начала» (Στοιχεῖα, в латинизированной форме — «Элементы») содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел; в ней он подвёл итог предшествующему развитию древнегреческой математики и создал фундамент дальнейшего развития математики.

точности всегда можно ввести, а, следовательно, можно ввести и декартову систему координат.

3. Гипотеза абсолютного времени.

Время – непрерывно изменяющийся параметр, показывающий последовательность каких-либо событий.

В классической механике полагается, что во всех системах координат, связанных как с самими телами, так и с пространством движения, время течет равномерно и одинаково. Эта гипотеза работает точно, если скорости движения материальных тел значительно меньше скорости света.

Кинематика сплошной среды

Точки зрения Лагранжа⁴ и Эйлера⁵ на движение сплошной среды

Для изучения движения сплошной среды за некоторое конечное время t необходимо изучить движение каждой частицы сплошной среды за это время. Чтобы одну частицу отличить от другой, вводится *правило индивидуализации*.

Переменные Лагранжа – это 3 независимых параметра, которые индивидуализируют частицы сплошной среды. В качестве лагранжевых координат часто берут координаты точки пространства, в которой эта частица находилась в начальный момент времени.

Переменные Эйлера – это координаты точек пространства движения.

Таким образом, с точки зрения Лагранжа, наблюдение ведется за каждой частицей сплошной среды, а точка зрения Эйлера заключается в том, что наблюдаются не частицы, а точки пространства, через которые эти частицы могут проходить (точки наблюдения за движением).

В теории упругости, как правило, применяется способ описания движения Лагранжа, который позволяет определять перемещение материальной точки из начального положения, полученное в результате

⁴ Жозеф Луи Лагранж (25.01.1736 – 10.04.1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Один из крупнейших математиков XVIII века. Внес огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, теорию вероятностей и численные методы. Считается создателем вариационного исчисления. В честь Лагранжа названы 8 теорем, а в целом имя ученого носит около 30 различных объектов.

⁵ Леонард Эйлер (15.04.1707 – 7(18).09.1783 СПб) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик. Внес крупнейший вклад в развитие математики, механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Долгое время работал в России, был академиком Петербургской академии наук. Является автором более чем 850 работ. В честь Леонарда Эйлера названы 7 теорем, 6 уравнений, 8 формул, а в общем около 50 объектов в различных областях науки.

воздействия на тело внешних сил. Однако следует отметить, что оба подхода эквивалентны с точки зрения получаемых результатов. Ниже рассмотрим обе точки зрения и связь между ними.

Точка зрения Лагранжа на движение сплошной среды

Чтобы изучить движение сплошной среды за некоторое конечное время t , необходимо изучить движение каждой частицы сплошной среды за это время. То есть необходимо знать зависимости $x_i(t)$, $v_i(t)$, $T_i(t)$ и т. д.

Для того, чтобы отличить одну частицу от другой, надо ввести правило индивидуализации частиц.

Переменные Лагранжа – 3 независимых параметра ξ_1, ξ_2, ξ_3 которые индивидуализируют частицы сплошной среды.

В качестве специальных переменных Лагранжа могут браться начальные декартовы координаты частицы.

Рассмотрим объем сплошной среды, который в момент времени t_0 (начальный момент) занимал некоторое положение в пространстве, после чего в результате перемещения в момент времени t объем занял новое положение (рисунок 2.3).

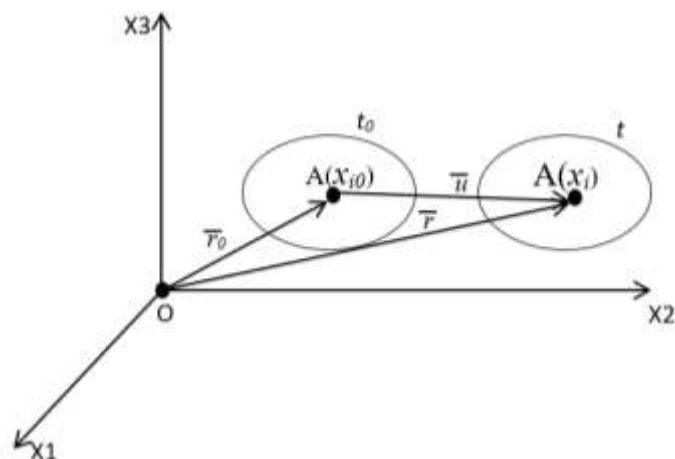


Рисунок 2.3 – Перемещение тела и вектор перемещения.

Точка A , принадлежащая объему, имеет в этом случае переменные Лагранжа x_{i0} .

Вектор \bar{u} , соединяющий начальное и конечное положения точки A , называется *вектором перемещения (смещения)* частицы из начального положения в конечное.

Таким образом,

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{u}, \bar{u} = \bar{u}(x_{i0}, t).$$

Функцией \bar{u} задан закон движения сплошной среды:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{u}(x_{i0}, t). \quad (2.2)$$

В координатной форме закон движения может быть записан следующим образом:

$$x_i = x_{i0} + u_i(x_{j0}, t), i=\overline{1,3}. \quad (2.3)$$

Здесь x_i – координаты вектора \bar{r} , x_{i0} – координаты \bar{r}_0 , u_i – координаты \bar{u} .

Переменным x_{i0} могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие наборы параметров ξ_i :

$$x_{i0} = x_{i0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), i=\overline{1,3}$$

Если выполняется условие взаимно однозначного соответствия $(x_{i0}) \leftrightarrow (\xi_i)$, то переменные ξ_i – обобщенные переменные Лагранжа. Это условие выполняется, если:

$$\frac{\partial(x_{i0})}{\partial(\xi_j)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{10}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{10}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_{10}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_{20}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_{20}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_{30}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{30}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_{30}}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда обобщенный закон движения может быть записан в виде:

$$\bar{r} = \bar{f}(\xi_i, t) \quad (2.4)$$

Выполним преобразования с учетом формулы (2.4):

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{f}(\xi_i, t) - \bar{r}_0 = \bar{u} \rightarrow \bar{f}(\xi_i, t) = \bar{u}(\xi_i, t) + \bar{r}_0(\xi_i).$$

Тогда:

$$\bar{r} = \bar{r}_0(\xi_i) + \bar{u}(\xi_i, t).$$

В координатной форме закон (2.4) запишется в виде:

$$x_i = f_i(\xi_i, t), i=\overline{1,3} \quad (2.5)$$

Среди множества движений сплошных сред выделяют класс непрерывных движений.

Движение сплошной среды – *непрерывное*, если для него выполняются условия: 1) две частицы, бесконечно близкие в данный момент времени, остаются бесконечно близкими в любой следующий момент времени; 2) исключается столкновение двух или более далеких частиц в данной точке пространства движения.

Эти условия выполняются, если функции $f_i(\xi_i, t)$ удовлетворяют условиям:

1) функции являются непрерывными по ξ_i, t вместе со своими частными производными, т.е. $\frac{\partial f^{(k)}}{\partial \xi_j^m \partial t^n}$ ($n+m=k$) до конечного порядка k ;

2) $\frac{\partial(f_i)}{\partial(f_j)} \neq 0$, т.е. якобиан $\neq 0$.

Определение скорости и ускорения частиц по заданному закону движения

Пусть задан закон движения сплошной среды $\bar{r} = \bar{f}(\xi_i, t)$. Тогда скорость движения частиц будем определять по формуле:

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t},$$

или в координатной форме:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2.6)$$

Ускорение частиц будет определяться по формулам:

$$\bar{W} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2},$$

$$W_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Математическая интерпретация закона движения сплошной среды

Пусть задан закон движения сплошной среды:

$$\bar{r} = \bar{f}(x_{i_0}, t) \quad (2.7)$$

$$x_i = f_i(x_{i_0}, t).$$

Задание трех функций равносильно заданию отображения (отображающих функций). Эти функции отображают друг на друга части пространства движения, которые занимает материальная среда в разные

моменты времени (рисунок 2.4). В силу предположений, сделанных ранее, это отображение непрерывно и взаимно однозначно.

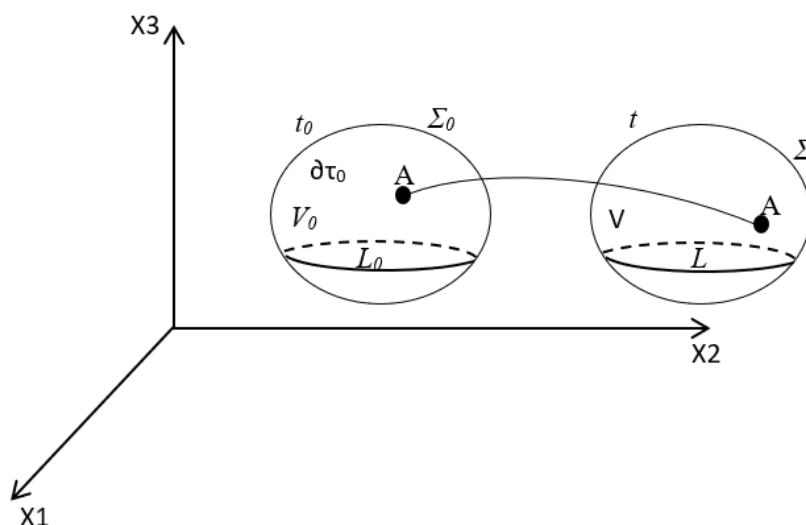


Рисунок 2.4 – Начальное и текущее положение тела (моменты времени t и t_0).

В силу свойств отображающих функций, справедливо:

1) Любой конечный объем V_0 переходит в конечный объем V , т.е. не вырождается в точку.

2) Любая замкнутая поверхность Σ_0 переходит в замкнутую поверхность Σ .

3) Любая замкнутая кривая L_0 переходит в замкнутую кривую L .

В общем случае отображающие функции нелинейны.

При отображении бесконечно малых частей пространства $dx_i = df_i$ – линейные функции, отображение линейное.

Тогда по свойству линейного отображения:

1) любая прямая переходит в прямую, причем параллельность прямых сохраняется;

2) любая плоскость переходит в плоскость, параллельность сохраняется;

3) любая алгебраическая поверхность n -го порядка переходит в алгебраическую поверхность того же порядка.

Точка зрения Эйлера на движение сплошной среды

Точка зрения Эйлера на движение сплошной среды состоит в том, что в качестве независимых переменных выбираются не частицы, а точки пространства движения (точки наблюдения за движением).

Движение сплошной среды с точки зрения Эйлера считается *известным*, если будут известны все характеристики движения сплошной среды в каждой точке пространства движения и в каждой момент времени.

Переменные Эйлера – это координаты точек пространства движения.

Отличие точек зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды

С точки зрения Лагранжа, наблюдение ведется за отдельными частицами сплошной среды. То есть, выбрав конкретную частицу, которую идентифицируют лагранжевы координаты, мы следим за ее поведением во времени (рисунок 2.5).

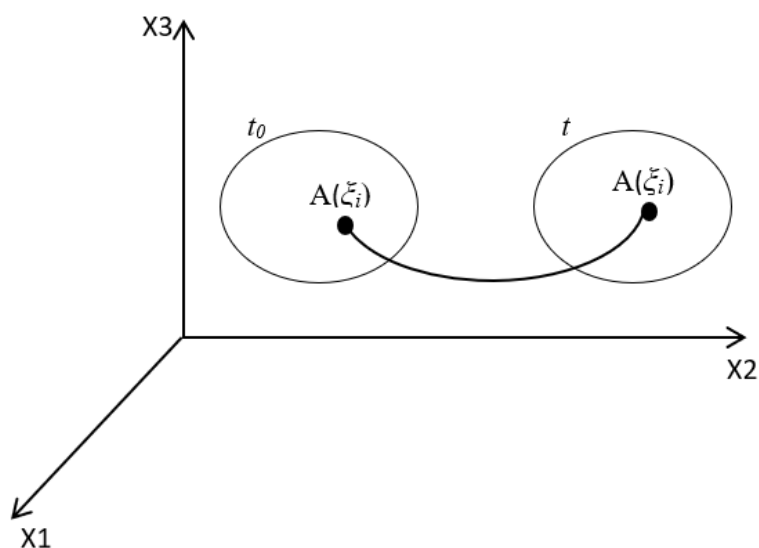


Рисунок 2.5 – Начальное и текущее положение тела (моменты времени t и t_0): наблюдаем за частицей $A(\xi_i)$.

При эйлеровом подходе наблюдение ведется не за конкретными частицами, а за точками в пространстве. Мы выбираем точку в пространстве (точка наблюдения) и следим за тем, какие частицы оказываются в ней в процессе движения сплошной среды (рисунок 2.6).

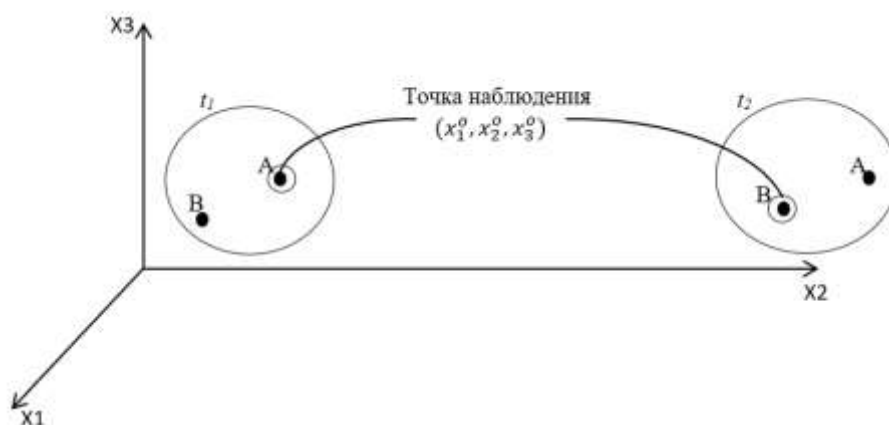


Рисунок 2.6 – Начальное и текущее положение тела (моменты времени t и t_0): наблюдаем за точкой с координатами (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .

Подход Лагранжа более удобен при изучении поведения твердых тел, так как для них удобнее следить именно за отдельными частицами объема вещества.

Подход Эйлера чаще применяется при исследовании жидкостей и газов. В этом случае удобно, к примеру, брать определенное сечение и смотреть, какое количество вещества проходит через него в разные моменты времени.

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

Лагранжев и эйлеров подходы эквивалентны: если события описаны в рамках одного из них, то описание в рамках другого может быть получено с помощью процедуры перехода. Чтобы перейти от лагранжева описания к эйлерову, необходимо соотношения закона движения $x_i = f_i(\xi_i, t)$, $i = \overline{1,3}$ разрешить относительно лагранжевых координат, т.е. найти функции

$$\xi_\alpha = g_\alpha(x_i, t), i = \overline{1,3}$$

Тогда для любой величины A , лагранжево описание которой $A(\xi_i)$ известно, эйлерово описание находится как сложная функция

$$A(g_1(x_i, t), g_2(x_i, t), g_3(x_i, t)).$$

Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

Чтобы перейти от эйлерова описания к лагранжеву, необходимо найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_j(x_i, t), i = \overline{1,3},$$

с начальными условиями

$$X_1|_{t=0} = \xi_1; X_2|_{t=0} = \xi_2; X_3|_{t=0} = \xi_3.$$

Это решение $x_i = f_i(\xi_i, t), i = \overline{1,3}$, найденное для всевозможных значений параметров (ξ_i) , и есть закон движения, а (ξ_i) – лагранжевы координаты частиц. Тогда для всякой величины $V(\xi_i, t)$, эйлерово описание которой известно, лагранжево описание находится как сложная функция:

$$V(f_1(\xi_i, t), f_2(\xi_i, t), f_3(\xi_i, t)).$$

Скалярные и векторные поля в механике сплошных сред

Множество значений некоторой характеристики движения сплошной среды, заданных в каждой точке пространства движения, называется *полем* этой характеристики.

Если заданная характеристика-скаляр, то поле называется *скалярным*. Если заданная характеристика – вектор, то поле *векторное*.

На примере скалярного поля температур и векторного поля скоростей рассмотрим общие свойства полей

Скалярное поле температур

Пусть задано поле температур в переменных Эйлера

$$T = T(x_i, t), i = \overline{1,3}.$$

Рассмотрим точки пространства, в которых в фиксированный момент времени t_0 функция $T = T(x_i, t)$ имеет постоянное значение C :

$$T(x_i, t) = C = const. \tag{2.8}$$

Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Если взять другое значение C , то получится другая поверхность. Эти поверхности называются *поверхностями уровня*.

$T(x_i, t_0) = C = const$ – уравнение геометрического семейства поверхностей уровня.

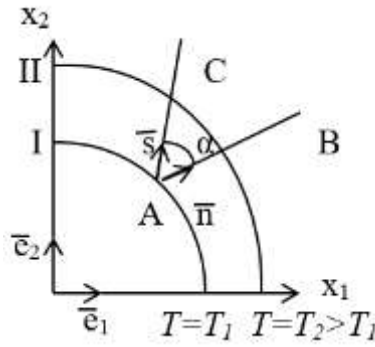


Рисунок 2.7 – Поверхности уровня.

Будем изучать быстроту изменения температуры в пространстве при переходе из точки А в бесконечно близкие точки В и С (рисунок 2.7).

Обозначим:

$$AB = \Delta n;$$

$$AC = \Delta s;$$

$$\Delta n = \Delta s \cdot \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Устремим Δn и Δs к нулю:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{dT}{dn}; \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{dT}{ds}.$$

Используя (2.9), получим:

$$\frac{dT}{ds} = \cos \alpha \frac{dT}{dn}.$$

$$T_2 > T_1; \quad \frac{dT}{ds} > 0; \quad \frac{dT}{dn} > 0.$$

$$\text{При } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ получаем, что } \cos \alpha > 0, \text{ тогда } \frac{dT}{ds} \leq \frac{dT}{dn}.$$

Таким образом, наибольшая скорость изменения температуры в пространстве происходит по направлению нормали поверхности уровня.

$$\text{При } \alpha = 0 \quad \vec{s} \uparrow \vec{n}, \text{ а } \cos \alpha = 1. \text{ Тогда } \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dn}.$$

$$\text{При } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \vec{s} \uparrow \vec{n}, \cos \alpha = 0. \text{ Тогда } \frac{dT}{ds} = 0.$$

Введём вектор градиента скалярного поля температур:

$$\text{grad} T = \vec{n} \frac{dT}{dn} \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.10) следуют следующие свойства градиента:

$$1) \quad \text{grad} T \parallel \vec{n}.$$

$$2) \quad |\text{grad}T| = \frac{dT}{dn}.$$

Рассмотрим проекцию вектора $\text{grad}T$ на произвольное направление \bar{s} (в преобразованиях используем формулу 2.10):

$$(\text{grad}T)_s = (\text{grad}T) \cdot \bar{s} = \frac{dT}{dn} (\bar{n} \cdot \bar{s}) = \frac{dT}{dn} \cos \alpha = \frac{dT}{ds}$$

Таким образом:

$$(\text{grad}T)_s = \frac{dT}{ds} \quad (3)$$

Рассмотрим частный случай, когда $\bar{s} \parallel \bar{e}_i$:

$$(\text{grad}T)_{x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,3} \quad \text{—}$$

В декартовой системе координат:

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \bar{e}_i, \quad \text{—}$$

т.е компонентами вектора $\text{grad}T$ будут $(\frac{\partial T}{\partial x_1}; \frac{\partial T}{\partial x_2}; \frac{\partial T}{\partial x_3})$

Понятие полной, локальной и конвективной производной скалярного поля

Пусть дано скалярное поле температуры $T = T(x_i, t), i = \overline{1,3}$.

Вычислим скорость изменения температуры во времени отдельных частиц сплошной среды:

$$\text{Запишем } T(x_i, t) = T(x_i(\xi_i, t), t) = T^*(\xi_i, t)$$

Здесь ξ_i – переменные Лагранжа конкретных частиц.

Тогда:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} \Big|_{\xi_i} = \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x_i} \quad (2.11)$$

В формуле (2.11):

$\frac{dT}{dt}$ – полная (индивидуальная, субстанциальная) производная;

$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x_i}$ – локальная (местная) производная, показывающая скорость

изменения температуры данной точки пространства за счет прохождения через нее различных частиц;

$\frac{\partial T}{\partial x_i} v_i = (\text{grad} T) \cdot \bar{v}$ – конвективная производная, показывающая

скорость изменения температуры в данной точке пространства только за счет движения частиц. Она равна нулю, если движение отсутствует.

Векторное поле скоростей

Пусть задано поле скоростей:

$$\bar{v} = \bar{v}(x_i, t), \quad i = \overline{1,3}.$$

Линия тока – линия в пространстве движения, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора скорости в данный фиксированный момент времени t_0 .

Получим дифференциальное уравнение линии тока.

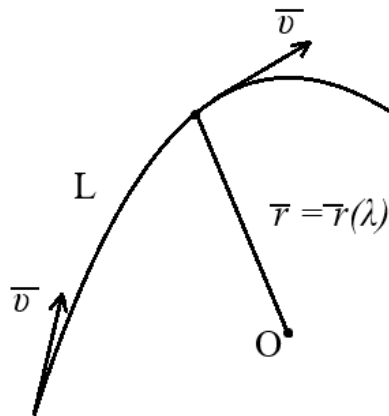


Рисунок 2.8 – Линия тока.

$\bar{r} = \bar{r}(\lambda)$ – векторное уравнение линии в трёхмерном пространстве в параметрическом виде (рисунок 2.8).

В проекциях на оси параметрические уравнения кривой в пространстве будут иметь вид:

$$x_i = x_i(\lambda), \quad i = \overline{1,3}.$$

Предполагаем, что L – гладкая кривая, а значит существует производная $\frac{d\bar{r}}{d\lambda}$ – вектор касательной к кривой L.

Тогда $\frac{d\bar{r}}{d\lambda} \parallel \bar{v}$, и, следовательно, $\frac{d\bar{r}}{d\lambda} = k(\lambda)\bar{v}$. Без нарушения общности полагаем $k(\lambda) \equiv 1$. Если это не так, введём

$$d\lambda^* = k(\lambda)d\lambda,$$

$$\lambda^* = \int_{\lambda_0}^{\lambda} k(\xi)d\xi.$$

т.е. $\frac{d\bar{r}}{d\lambda^*} = \bar{v}$.

Таким образом, векторное дифференциальное уравнение линии тока имеет вид:

$$\frac{d\bar{r}}{d\lambda} = \bar{v}.$$

Или в координатах:

$$\frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} = v_i(x_j(\lambda), t), \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.12)$$

Время t в (2.12) фиксировано.

Если правая часть (2.12) удовлетворяет условиям непрерывности по всем переменным, то через каждую точку пространства можно провести одну линию тока.

Уравнение (2.12) может быть также записано в виде:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = d\lambda. \quad (2.13)$$

Траекторией частицы (ξ_i) называется геометрическое место её положения во все моменты времени.

Для линии тока, напомним, время фиксируется ($t=t_0$).

Дифференциальное уравнение траектории частицы имеет вид:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(x_j(t), t), \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.14)$$

В общем случае решения систем уравнений (2.12) и (2.14) (для линии тока и траектории) разные, так как в (2.12) интегрирование ведётся по λ при фиксированном t , а в (2.14) интегрирование ведётся именно по t . То есть в общем случае траектории и линии тока не совпадают.

Пример: движение прямоугольного бруска в плоскости, такое, что его центр тяжести описывает окружность вокруг точки O (рисунок 2.9).

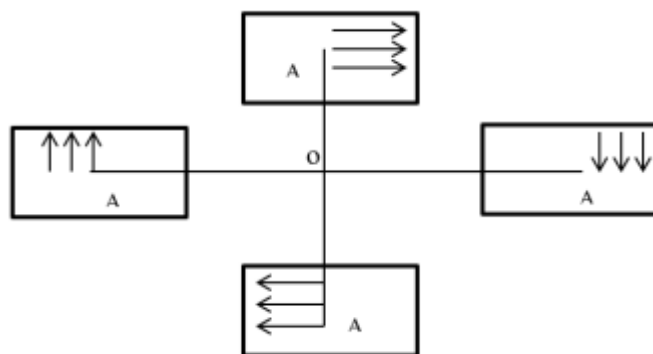


Рисунок 2.9 – Схема движения прямоугольного бруска в плоскости.

Траектории движения частиц в этом случае – окружности. Линии тока – прямые линии.

Движение сплошной среды с точки зрения Эйлера – *установившееся*, если все характеристики сплошной среды явно от времени не зависят. В противном случае движение *неустановившееся*.

Понятие установившегося движения является относительным и связано с выбором системы координат.

Если движение сплошной среды установившееся, то линии тока и траектории движения частиц совпадают. В этом случае время t не входит в правые части уравнений (2.12) и (2.14).

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(x_j(t)), \text{ (I)}$$

$$\frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} = v_i(x_j(\lambda)), \text{ (II)}$$

I и II в этом случае совпадают и определяют одно решение

Пример: движение бруска по ровной поверхности (рисунок 2.10).

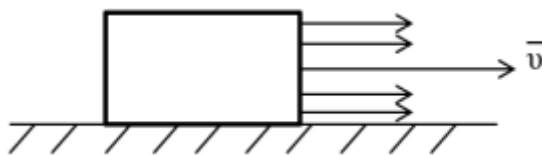


Рисунок 2.10 – Движение бруска по ровной поверхности.

Линии тока и траектории частиц совпадают.

Картинку линий тока можно получить экспериментально. Они являются средствами обнаружения (визуализации) движения жидкости.

Пример: горящие свечи на поплавках визуализируют движения воды в водохранилище (рисунок 2.11).

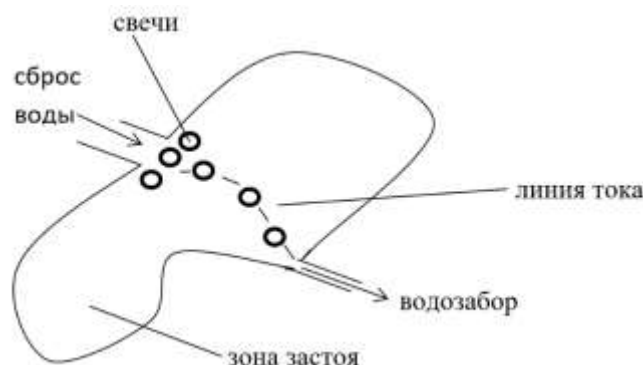


Рисунок 2.11 – Движение поплавков со свечами по поверхности водохранилища.

Потенциальные движения сплошной среды

Движение сплошной среды – *потенциальное*, если поле скоростей представимо в виде:

$$v_i(x_i, t) = \text{grad}\Phi(x_i, t), \quad i = \overline{1,3},$$

где $\Phi(x_i, t)$ – скалярный *потенциал скоростей*,

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Изучение потенциальных движений является более простой задачей, так как вместо трех функций достаточно найти одну. Реальные движения сплошной среды очень часто можно приближенно считать потенциальными.

Необходимое и достаточное условие существования потенциала скоростей

Теорема 2.1 Рассмотрим линейную дифференциальную однородную форму (A):

$$(A) = v_i dx_i.$$

Для того, чтобы движение сплошной среды было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная форма (A) была полным дифференциалом функции Φ .

$$A = d\Phi.$$

Доказательство: \Rightarrow Пусть движение сплошной среды потенциально, то есть: $v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. Необходимо показать: $v_i dx_i = d\Phi$.

$$v_i dx_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi.$$

\Leftarrow Пусть $(A) = v_i dx_i = d\Phi$.

Покажем, что $v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$.

$$v_i dx_i = d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i.$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i$ перенесем влево:

$$(v_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) dx_i = 0 \Rightarrow v_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \text{ (} dx_i \text{ – независимые величины). } \blacksquare$$

Теорема 2.2 Для того, чтобы дифференциальная форма (A) была полным дифференциалом функции Φ , необходимо и достаточно, чтобы поле скоростей удовлетворяло условию:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Без доказательства.

Примером потенциального движения является поступательное движение сплошной среды:

$$\Phi(x_i, t) = m_i(t)x_i + c, \text{ тогда } v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = m_i(t).$$

Теория деформации

Вектор перемещения и деформированное состояние

Под действием внешних сил или в результате изменения теплового состояния тело меняет свои размеры и форму, то есть *деформируется* (рисунок 2.12).

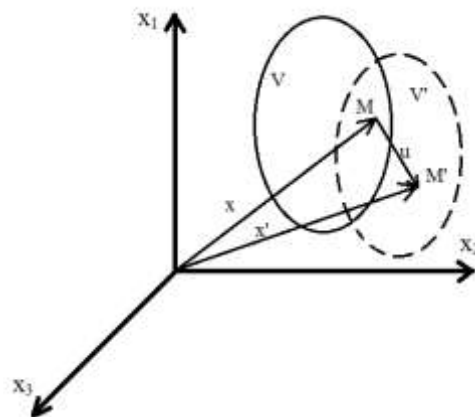


Рисунок 2.12 – Недеформированное и деформированное состояния тела.

Вектор $\vec{u} = M\vec{M}'$, соединяющий начальное и конечное положение точки M , называется ее *вектором перемещения*.

Переход тела из начального состояния V в новое состояние V' возможен вследствие перемещения тела, как абсолютно твердого, т.е. без изменения расстояний между любыми двумя его точками. Такое перемещение тела называется *жестким смещением*.

Если переход тела из начального состояния V в новое V' происходит вследствие изменения расстояний между его точками, то новое состояние V' называют *деформированным состоянием тела*.

Деформированное состояние тела вполне определяется, если известны функции $u_i = u_i(x_k)$.

Деформированное состояние, определяемое линейными функциями $u_i = u_i(x_k)$, называют *однородным*. В этом случае любая прямая или плоскость, которые можно вообразить в состоянии тела V , переходят в прямую или плоскость в состоянии V' .

Тензор деформации

При неоднородном произвольном деформировании тела функции $u_i = u_i(x_k)$ будут нелинейными. Но в этом случае в малой окрестности любой точки M тела деформированное состояние может рассматриваться как однородное, то есть элементы некоторой малой окрестности точки M , которые были прямолинейными до деформирования, останутся прямолинейными и после деформации.

Пусть в общем случае деформирования тела его две бесконечно близкие точки $M(x_i)$ и $N(x_i+dx_i)$, расстояние между которыми $ds = |d\vec{x}|$ в начальном состоянии V , перемещаются в положения $M'(x'_i)$ и $N'(x'_i+dx'_i)$ состояния V' (рисунок 2.13).

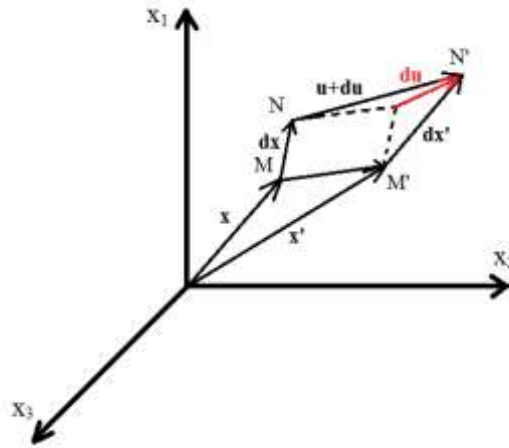


Рисунок 2.13 – Определение тензора деформации.

Компоненты du_i вектора перемещения точки N относительно точки M определяются по формуле (2.15):

$$du_i = u_{i,j} dx_j. \quad (2.15)$$

Несимметричный тензор $(u_{i,j})$, через компоненты которого определяются компоненты вектора относительного перемещения, называется *тензором относительного перемещения*.

Раскладывая тензор относительного перемещения на симметричную и антисимметричную (кососимметричную) части, получим:

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2. \quad (2.16)$$

Тензор (e_{ij}) в формуле (2.16) называется *нелинейным тензором деформации*. Его компоненты образуют симметричную матрицу.

Диагональные компоненты тензора деформации характеризуют относительные удлинения, а компоненты, не лежащие на главной диагонали, характеризуют углы сдвига.

Тензор относительного перемещения $(u_{i,j})$ можно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры, компоненты которых будут, соответственно, равны:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.17)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (2.18)$$

Тогда формула (2.16) запишется в виде (2.19):

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj})/2 \quad (2.19)$$

Тензор (ε_{ij}) в формуле (2.17) называется *линейным тензором деформации*. Тензор (ω_{ij}) в формуле (2.18) называется *тензором малого поворота*.

Тензор малой деформации

Деформации называются *малыми*, если относительные удлинения ε_i и углы сдвига γ_{ij} являются малыми порядка $\eta \ll 1$. В случае малых деформаций тензор (ε_{ij}) называется *тензором малых деформаций*.

При незначительном деформировании тел, размеры которых существенно не отличаются друг от друга, компоненты тензора малой деформации совпадают с компонентами линейного тензора деформации. В дальнейшем будем называть этот тензор тензором деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.20)$$

Шесть независимых компонент тензора деформации определяются *дифференциальными зависимостями Коши*⁶:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

При некоторых условиях нагружения тел, один из размеров которых существенно больше двух других (тонкий стержень, тонкостенный цилиндр) компоненты ε_{kj} имеют более высокий порядок малости, чем ω_{kj} , то есть могут

⁶ Огюстен Луи Коши (фр. Augustin Louis Cauchy; 21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Со, Франция) — французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики; один из основоположников механики сплошных сред. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

возникать большие перемещения при малых деформациях. В этом случае компоненты тензора малых деформаций будут определяться формулой:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ki}\omega_{kj}/2. \quad (2.22)$$

Главные деформации и инварианты тензора деформации

Главные значения тензора деформации (ε_{ij}) определяются как корни кубического уравнения:

$$\varepsilon^3 - I_1(\varepsilon_{ij})\varepsilon^2 + I_2(\varepsilon_{ij})\varepsilon - I_3(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad (2.23)$$

где $I_1(\varepsilon_{ij})$, $I_2(\varepsilon_{ij})$, $I_3(\varepsilon_{ij})$ – соответственно первый, второй и третий инварианты тензора деформации, которые определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\varepsilon_{ij}) &= \varepsilon_{ii}, \\ I_2(\varepsilon_{ij}) &= (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})/2, \\ I_3(\varepsilon_{ij}) &= |\varepsilon_{ij}| = [\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} - (\varepsilon_{ss})_3]/3 + (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ss})/2. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Главные значения тензора деформации называют *главными деформациями* и обозначают ε_i .

Первый (линейный) инвариант тензора деформации имеет смысл объемного расширения окрестности точки тела. Относительное объемное расширение или объемная деформация окрестности точки тела, таким образом, определяется по формуле:

$$\Theta = I_1(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii}. \quad (2.25)$$

Условия совместности деформаций

Компоненты вектора перемещений u_i и компоненты тензора деформаций ε_{ij} связаны между собой дифференциальными зависимостями Коши. Эти зависимости позволяют определить компоненты ε_{ij} непосредственным дифференцированием компонент вектора перемещения u_i при условии, что как компоненты тензора деформации, так и компоненты вектора перемещений являются непрерывными и однозначными функциями координат x_k .

Для решения обратной задачи, то есть определения трех компонент u_i по известным компонентам тензора деформаций, имеется шесть уравнений (2.8). Очевидно, что данная задача не может иметь однозначного решения,

если компоненты ε_{ij} не будут подчиняться дополнительным зависимостям. Такие зависимости были впервые получены Сен-Венаном и имеют вид:

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \quad (2.26)$$

Уравнения (13) называют условиями неразрывности или совместности деформаций. Часто их также называют дифференциальными зависимостями Сен-Венана.

Теория напряжений

Внешние силы

Внешние силы, действующие на тело, разделяют на массовые и поверхностные.

Массовыми называются силы, действующие на частицы объема тела (сила тяжести, сила инерции).

Главный вектор массовых сил, действующих на тело, занимающее область V , и главный момент относительно начала координат определяются следующим образом:

$$\vec{R} = \iiint_V \rho \vec{f}(x_i) dV, \quad (2.27)$$

$$\vec{M} = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{f}(x_i) dV. \quad (2.28)$$

Поверхностными называются силы, распределенные по поверхности S , ограничивающей область V , занятую телом.

Главный вектор и главный момент поверхностных сил определяются так:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{t} dS, \quad (2.29)$$

$$\vec{M} = \iint_S \vec{r} \times \vec{t} dS. \quad (2.30)$$

Вектор напряжения и напряженное состояние

В недеформированном теле частицы располагаются таким образом, что оно находится в тепловом равновесии. При этом каждая его условная (мысленно выделенная) часть находится в состоянии механического равновесия, то есть главный вектор и главный момент сил, действующих на эту часть со стороны смежных частей, равны нулю. При деформировании тела происходит изменение относительного расположения его частиц друг

относительно друга. В результате между частицами возникают дополнительные силы взаимодействия, которые стремятся вернуть тело в первоначальное (недеформированное) состояние. Такие внутренние силы могут быть определены методом сечений.

Мысленно проведем секущую плоскость S' , проходящую через некоторую точку $M(x_i)$ тела. Таким образом, тело будет условно разделено на 2 части. Силы взаимодействия между соседними частицами, расположенными по обе стороны плоскости S' , до его рассечения представляют собой внутренние силы. После условного разделения необходимо приложить эти силы к обеим частям тела на поверхности сечения, чтобы обе части оставались в положении равновесия. Таким образом, эти силы мысленно переходят в категорию внешних поверхностных.

Рассмотрим на поверхности S' первой части тела элементарную площадку площадью ΔS , содержащую точку $M(x_i)$. Обозначим главный вектор и главный момент поверхностных сил на данной площадке через $\Delta \vec{P}$ и $\Delta \vec{M}$, а единичный вектор нормали к S' в точке M через \vec{n} .

В классической теории упругости используется модель сплошной среды, в рамках которой между частицами по разделяющей их площадке осуществляется только силовое взаимодействие (безмоментная теория). Таким образом, устремляя площадь элементарной площадки к 0, то есть «стягивая» элементарную площадку в точку M , получим:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta \vec{P} / \Delta S) = d\vec{P} / dS = \vec{p}_n, \quad (2.31)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta \vec{M} / \Delta S) = 0. \quad (2.32)$$

Вектор \vec{p}_n , определяемый равенством (2.31), называется *вектором напряжения* в точке M на площадке с нормалью \vec{n} .

Множество векторов напряжения на всевозможных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, определяет *напряженное состояние в этой точке*. *Напряженным состоянием тела* называется совокупность напряженных состояний во всех точках тела.

Если вектор напряжения зависит только от вектора нормали, а от координат точки тела не зависит, то напряженное состояние тела называется *однородным*.

Тензор напряжений

Рассмотрим произвольную точку $M(x_i)$ деформированного тела и проходящую через нее произвольную площадку, определяемую вектором нормали \vec{n} . Совместим с точкой M начало системы координат, а за положительные направления внешних нормалей к координатным площадкам примем положительные направления координатных осей.

Выделим в окрестности точки M элементарный тетраэдр (рисунок 2.14), три грани которого перпендикулярны осям координат и проходят через точку M , а четвертая перпендикулярна вектору нормали \vec{n} . Тетраэдр находится в равновесии под действием поверхностных и, в общем случае, массовых сил, т.е. имеет место равенство:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i n_i + \vec{f} \rho h / 3, \quad (2.33)$$

где \vec{p}_n – вектор напряжения на площадке с нормалью \vec{n} ; \vec{p}_i – вектора напряжений на соответствующих координатных плоскостях; n_i – компоненты векторов нормалей к граням тетраэдра, лежащих на координатных плоскостях; \vec{f} – вектор массовых сил; h – высота перпендикуляра, опущенного из точки M на грань ABC .

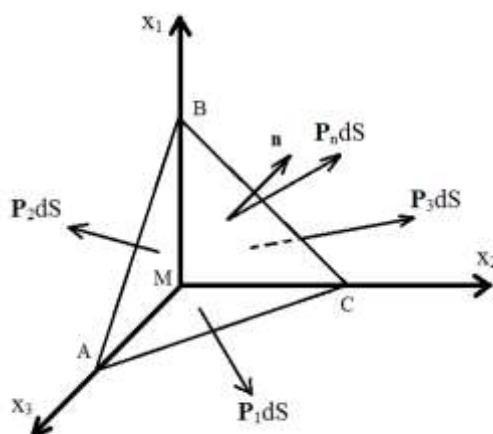


Рисунок 2.14 – Элементарный тетраэдр в точке M .

Чтобы определить вектор \vec{p}_n , будем перемещать грань ABC к точке M , при этом оставляя ее перпендикулярной вектору \vec{n} . Высота h в этом случае, очевидно, будет стремиться к нулю.

В результате получим:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i n_i, \quad (2.34)$$

$$p_{nj} = \sigma_{ij} n_i, \quad (2.35)$$

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Тензор второго ранга σ_{ij} (2.36) называется *тензором напряжений*. Диагональные элементы σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} называются *нормальными напряжениями* на координатных площадках, остальные элементы матрицы – *касательные напряжения* на координатных площадках.

Дифференциальные уравнения равновесия

Пусть на деформируемое тело объемом V , ограниченное поверхностью S , действуют массовые и поверхностные силы, вызывающие малые перемещения его точек и, следовательно, малые деформации.

Тело будет находиться в равновесии, если главный вектор и главный момент массовых и поверхностных сил будут равны нулю:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{t} dS + \iiint_V \rho \vec{f} dV, \quad (2.37)$$

$$\vec{M} = \iint_S (\vec{r} \times \vec{t}) dS + \iiint_V (\vec{r} \times \rho \vec{f}) dV. \quad (2.38)$$

Из уравнений (2.37), (2.38) может быть получена следующая форма уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \quad (2.39)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i. \quad (2.40)$$

Соотношения (2.39) называются *уравнениями равновесия деформированного тела*. Соотношения (2.40) – *краевые или граничные*

условия. Уравнения (2.39) и граничные условия (2.40) являются необходимыми условиями равновесия деформированного тела.

Принцип Сен-Венана⁷

Во многих задачах поверхностные силы, приложенные к некоторой поверхности тела, известны только суммарно, а закон распределения известен лишь примерно или неизвестен вообще. Таким образом, имеют место затруднения в формулировке граничных условий.

Принцип Сен-Венана утверждает, что если к небольшому участку поверхности тела приложена система сил, главный вектор и главный момент которой равны нулю, то эта система сил вызывает локальное напряженно-деформированное состояние, быстро убывающее по мере удаления от участка приложения сил (рисунок 2.15).

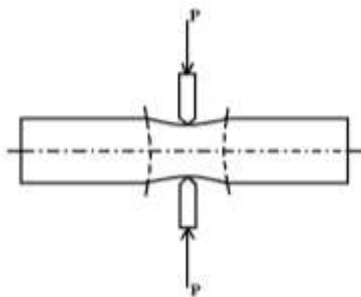


Рисунок 2.15 – Равные противоположно направленные силы действуют на стержень.

Принцип Сен-Венана может быть также сформулирован следующим образом: если некоторую совокупность поверхностных сил на сравнительно малой части поверхности тела заменить статически эквивалентной системой сил, действующих на той же части поверхности, то такая замена сил практически не изменит напряжений и перемещений в точках, удаленных от площадки приложения сил на расстояния, не меньшие наибольшего линейного размера этой площадки.

⁷ Сан Сен-Венан (23 августа 1797, Вилье-ан-Бер — 6 января 1886, Сент-Уан) — французский инженер, механик и математик, известный своими многочисленными работами по теории упругости, в развитие которой внёс большой вклад, гидродинамике и другим отраслям механики и математической физики. Ввёл так называемый полуобратный метод решения задач в теории упругости и построил общую теорию кручения и изгиба призматических стержней (1855 г.), записал уравнения для нестационарного одномерного движения жидкости, известные как уравнения Сен-Венана — одни из фундаментальных в современной гидравлике. Его именем также названы принцип смягчения граничных условий — принцип Сен-Венана, теорема Сен-Венана, условие совместности Сен-Венана, число Сен-Венана (в некоторых отечественных публикациях — число Сен-Венана — Ильюшина), формула Сен-Венана — Ванцеля для скорости истечения газа через малое отверстие из сосуда под повышенным давлением. Также он является автором целого ряда работ по гидравлике и гидродинамике, в числе которых находятся исследования о течении и движении жидкостей, о распространении волн, о толчее, о трении жидкостей и многие другие.

Соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжения

Упругое поведение тел

Способность тел восстанавливать свою начальную форму и размеры при устранении внешнего воздействия называется *упругостью*, а снимаемые при этом деформации называются *упругими*.

При больших деформациях после снятия их вызвавших внешних сил в большинстве случаев (за исключением гиперупругих тел типа резины) тело не возвращается в свое начальное состояние. Полученные в этом случае деформации при разгрузке тела частично сохраняются. Эти оставшиеся деформации называются *остаточными* или *пластическими*.

Твердое тело называется *идеально упругим*, если напряженное состояние в любой его точке в произвольный момент деформирования зависит только от деформаций в этой точке (не зависит от температуры):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (2.41)$$

Функция $W(\varepsilon_{ij})$ называется *упругим потенциалом* и представляет собой удельную работу деформации или удельную потенциальную энергию деформации. Равенство (2.41) называется *формулой Грина*⁸.

Обобщенный закон Гука⁹

Обобщенный закон Гука гласит, что компоненты σ_{ij} тензора напряжений в каждой точке тела являются однородными линейными функциями компонент ε_{ij} тензора деформации в той же точке рассматриваемого состояния равновесия тела.

⁸ Джордж Грин (George Green) (14 июля 1793 — 31 мая 1841) — английский математик, внёсший значительный вклад во многие разделы математической физики. Главнейшие заслуги Грина заключаются в выводе одной основной теоремы теории потенциальных функций и в открытии особого метода вывода дифференциальных уравнений теории упругости.

⁹ Роберт Гук (англ. Robert Hooke; Роберт Хук, 18 (28) июля 1635 — 3 марта 1703) — английский естествоиспытатель и изобретатель. Член Лондонского королевского общества (1663). Гука смело можно назвать одним из отцов физики, в особенности экспериментальной, но и во многих других науках ему принадлежат зачастую одни из первых основополагающих работ и множество открытий. Изобретения Гука весьма разнообразны. Между 1656 до 1658 гг. Гук изобрёл спиральную пружину для регулирования хода часов. В 1666 г. Гук изобрёл спиртовой уровень. В 1684 г. Гук изобрёл первую в мире систему оптического телеграфа. Предложил прототип тепловых машин. Для метеорологических наблюдений Гук изобрёл термометр-минима, усовершенствованный ртутный барометр со стрелочным указателем, гигрометр, анемометр, регистрирующий дождемер. Гук изобрёл особый ареометр для определения степени пресности речной воды (water-poise).

Упругий потенциал $W(\varepsilon_{ij})$ представляет собой функцию второго порядка компонент тензора деформации, общее выражение которой можно записать в виде:

$$W(\varepsilon_{ij}) = C_{ij} \varepsilon_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} / 2. \quad (2.42)$$

Подставляя это выражение в формулу Грина (2.41), а также учитывая, что в начальном положении тела (при отсутствии внешних сил) $W(0)=0$ и $C_{ij}=0$, получим:

$$W(\varepsilon_{ij}) = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} / 2, \quad (2.43)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.44)$$

Тензор (C_{ijkl}) называется *тензором упругих постоянных* (в случае однородного тела компоненты этого тензора не зависят от координат точек тела). Как тензор 4 ранга он имеет $3^4=81$ компоненту.

Из-за условий симметрии тензора C_{ijkl} , в самом общем случае он имеет 21 независимую компоненту. В общем случае анизотропии тела упругие постоянные зависят от ориентации координатных осей.

У тела, обладающего одной плоскостью упругой симметрии, число упругих постоянных равно 13.

Тело, обладающее тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии, называется *ортотропным*. В этом случае число упругих постоянных будет равно 9.

Тело называется *изотропным*, если его упругие свойства, которые характеризуются упругими постоянными, одинаковы для всех направлений, выходящих из произвольной точки тела. В этом случае количество независимых упругих постоянных равно 2.

Обобщенный закон Гука для однородного изотропного тела

Тело называется *однородным* в отношении упругих свойств, если эти свойства одинаковы во всех точках тела, т.е. если упругие постоянные не зависят от координат точек тела.

Для однородного изотропного тела компоненты тензора упругих постоянных не зависят от направления координатных осей. В этом случае выражения для упругого потенциала, а также для связи тензоров напряжений и деформаций запишутся в виде:

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.46)$$

$$\Theta = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \quad (2.47)$$

Упругие постоянные λ и μ называются *постоянными Ламе*¹⁰. Из условия $W(\varepsilon_{ij}) > 0$ следует, что $\lambda > 0$ и $\mu > 0$.

Упругую постоянную Ламе μ называют *модулем упругости при сдвиге* (*модулем сдвига*) и часто обозначают G .

Часто вводят так называемые технические постоянные, которые определяются по формулам:

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}, \quad (2.48)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \quad (2.49)$$

Величину E называют модулем продольной упругости или модулем Юнга¹¹, а ν – коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона¹².

Закон Гука иногда удобно записывать в других формах:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \Theta = u_{s,s}. \quad (2.50)$$

¹⁰ Габриэль Ламэ (фр. Gabriel Lamé; 22 июля 1795, Тур — 1 мая 1870, Париж) — французский математик, механик, физик и инженер, член-корреспондент Петербургской АН (1829); член Парижской академии наук (1843), профессор Политехнической школы (1832—1863) и Парижского университета (1848—1863). В 1820—1831 работал в России (в Институте корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге). Основные труды по математической физике и теории упругости. Разработал (1833) общую теорию криволинейных координат, ввёл (1859) т. н. коэффициенты Ламе и специальный класс функций (1839, функции Ламе).

¹¹ Томас Юнг (англ. Thomas Young; 13 июня 1773, Милвертон, графство Сомерсет — 10 мая 1829, Лондон) — английский учёный широкого профиля: физик (один из создателей волновой теории света, ввёл понятие механической энергии и представление о модуле упругости), механик, врач (впервые описал явление астигматизма), астроном, филолог и востоковед (ввёл понятие «индоевропейские языки»). Полиглот — владел 13 языками. Учёный секретарь Королевского общества по переписке с границей (1804—1829). В 1801—1803 годах был профессором Королевского института в Лондоне. С 1818 года — секретарь Бюро долгов и редактор «Морского альманаха». Занимаясь египтологией, вплотную подошёл к расшифровке древнеегипетской иероглифики, в англоязычном мире именно Юнг, а не Шампольон, считается дешифровщиком египетского письма. За широту интересов и фундаментальность вклада в науку биограф Эндрю Робинсон охарактеризовал Юнга как «последнего человека, который знал всё».

Член Лондонского королевского общества (1794), иностранный член Французской академии наук (1827; корреспондент с 1818) и Шведской королевской академии наук (1828).

¹² Симеон Дени Пуассон (фр. Siméon Denis Poisson; 21 июня 1781, Питивье, Франция — 25 апреля 1842, Со, Франция) — французский математик, механик и физик. Член Парижской академии наук (1812), иностранный член Лондонского королевского общества (1818), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1826). Число учёных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu (\Sigma) \delta_{ij} \right], \quad \Sigma = \sigma_{ii}. \quad (2.51)$$

В случае, когда помимо упругой деформации в теле возникает деформация под действием температуры, необходимо рассматривать общую деформацию тела в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}'' + \varepsilon_{ij}', \quad (2.52)$$

где ε_{ij}'' – «силовая» или упругая деформация, а ε_{ij}' – тепловая деформация.

Будем рассматривать малые изменения температуры $\vartheta = T - T_0$ в точках тела, при которых тепловая деформация имеет величину одного порядка малости с ε_{ij} , а упругие постоянные материала и коэффициент линейного расширения α остаются при этом такими же, как при T_0 .

В этом случае связь между напряжениями и деформациями получим в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \vartheta \delta_{ij}, \quad (2.53)$$

где $\beta = 3k\alpha$, $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

Величину k называют *изотермическим модулем* объемного сжатия.

Форма закона Гука (2.51) в этом случае примет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu (\Sigma) \delta_{ij} \right] + \alpha \vartheta \delta_{ij}. \quad (2.54)$$

Основные уравнения и задачи теории упругости

Основные уравнения

Деформированное состояние тела вполне определяется тензором поля деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k)$ или полем перемещений $u_i = u_i(x_k)$. Компоненты тензора деформации связаны с перемещениями дифференциальными зависимостями Коши и должны удовлетворять дифференциальным зависимостям Сен-Венана:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \quad (2.56)$$

Напряженное состояние тела определяется тензором поля напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k)$. Компоненты тензора напряжений должны удовлетворять трем дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0. \quad (2.57)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и перемещения u_i связаны шестью уравнениями закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.58)$$

К основным уравнениям, определяющим состояние линейно-упругого тела в его внутренних точках объема V , необходимо добавить условия на его поверхности S . Эти условия называются *граничными условиями*. Они определяются либо заданными внешними поверхностными силами t_i , либо заданными перемещениями $u_i^{(S)}$ точек поверхности тела. В первом случае граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i. \quad (2.59)$$

Во втором случае граничные условия выражаются равенством:

$$u_i = u_i^{(S)}. \quad (2.60)$$

Граничные условия могут также иметь смешанный характер:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_t} = t_i \\ u_i \Big|_{S_u} = u_i^{(S)} \end{array} \right\}. \quad (2.61)$$

Основные задачи статики упругого тела

В зависимости от вида граничных условий различают три основных типа задач статики упругого тела.

Основная задача первого типа состоит в определении компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ внутри области V , занятой телом, и компонент вектора перемещений $u_i(x_k)$ внутри области V и на поверхности S по заданным массовым f_i и поверхностным t_i силам. Искомые девять функций должны удовлетворять уравнениям (2.57), (2.58), а также граничным условиям (2.59).

Основная задача второго типа состоит в определении компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ и компонент вектора перемещений $u_i(x_k)$ внутри области V по заданным массовым силам f_i и по заданным перемещениям $u_i^{(S)}$

на поверхности тела. Искомые функции $u_i(x_k)$ и $\sigma_{ij}(x_k)$ должны удовлетворять уравнениям (2.57), (2.58), а также граничным условиям (2.60).

Основная задача третьего типа или *смешанная задача* состоит в том, что по заданным поверхностным силам $t_i(x_s)$ на одной части поверхности тела S_t и по заданным перемещениям $u_i^{(s)}(x_s)$ на другой части поверхности тела S_u , а также, вообще говоря, по заданным массовым силам f_i требуется определить компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ и перемещения $u_i(x_k)$, удовлетворяющие уравнениям (2.44), (2.45), а также граничным условиям (2.61).

Уравнения упругого равновесия в перемещениях

Некоторые задачи статики упругого тела удобно решать в перемещениях. При этом основные уравнения следует выразить через перемещения. Уравнения равновесия с помощью несложных преобразований приводятся к виду:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \Theta_{,i} = -\frac{\rho}{G} f_i, \quad (2.62)$$

где $\Theta = \text{div} \bar{u} = u_{j,j}$, $\nabla^2 u_i = u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$.

Три уравнения (2.62) представляют собой уравнения упругого равновесия в перемещениях и называются *уравнениями Ламе*.

Краткие выводы

В данной главе рассмотрены основные понятия теории напряжений и деформаций в рамках механики сплошной среды. Приведены основные уравнения и соотношения линейной теории упругости, рассмотрены постановки основных задач статики упругого тела.

Знание базовых понятий и соотношений теории упругости необходимо при постановке и решении прикладных технических и научных задач. Без понимания основ механики численное решение прикладных и фундаментальных задач методом конечных элементов становится невозможным, поэтому данная глава является необходимой для студентов естественно-научных дисциплин, связанных с математическим и численным моделированием механических процессов и систем.

Глава 3. Некоторые вопросы механики жидкости и газа

Предмет механики жидкости и газа. Основные свойства жидкой и газообразной сред

Материальная система может быть дискретной, состоящей из отдельных материальных точек, или сплошной, то есть представляющей непрерывные распределения вещества и физических характеристик его состояния и движения в пространстве. Таковую систему называют *сплошной средой*.

Самый простой пример сплошной среды – недеформируемая среда или абсолютно твердое тело.

У сплошной среды есть несколько свойств. Первое – ее сплошность, то есть непрерывность распределения массы и физико-механических характеристик среды. Это свойство лежит в основе кинематики жидкости и газа. Второе основное свойство жидкой или газообразной среды – текучесть, выражающаяся в том, что касательные напряжения в среде не равны нулю только при наличии относительного движения между слоями среды. В случае относительного покоя внутреннее трение отсутствует. В этом и заключается отличие жидких или газообразных сред от упругих. В последних касательные напряжения обуславливаются наличием деформаций (но не скоростей деформаций) сдвига, которые не равны нулю даже при относительном покое среды. Связь между касательными напряжениями и скоростью сдвига изучается наукой *реологией*.

Далее будем рассматривать два типа жидких или газообразных сред – идеальная (без внутреннего трения) и вязкая (ньютоновская). Как правило, все газы и многие жидкости (вода, глицерин) являются вязкими ньютоновскими. Будем рассматривать только такие вязкие жидкости и газы, в которых трение возникает только при относительном движении между слоями (но не битум, который течет даже в случае покоя).

По сравнению с жидкостями газы существенно более сжимаемы за счет больших расстояний между молекулами и, соответственно, меньшими силами сцепления.

Далее рассмотрим формулу дифференцирования интеграла по времени, взятого по подвижному объёму, понятие дивергенции, а также приведем

теорему Остроградского-Гаусса, необходимые для формулировки законов и уравнений динамики жидкости и газа.

Формула дифференцирования интеграла по времени, взятого по подвижному объему

Пусть есть функция $f(x, y, z, t)$. Рассмотрим интеграл $\iiint_V f(x, y, z, t) d\tau$ по подвижному объему V .

Пусть в момент времени t объем V ограничивает поверхность S . В точках поверхности S выберем внешний по отношению к объему V вектор нормали \vec{n} .

В момент времени $t + \Delta t$ объем V перейдет в объем V' , а поверхность S в поверхность S' .

Запишем определение производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_V f(x, y, z, t) d\tau \right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V'} f(x, y, z, t + \Delta t) d\tau - \int_V f(x, y, z, t) d\tau}{\Delta t} = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V f(x, y, z, t + \Delta t) d\tau - \int_V f(x, y, z, t) d\tau + \int_{V' - V} f(x, y, z, t + \Delta t) d\tau}{\Delta t} &= \int_V \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} d\tau + \\ + \int_S f(x, y, z, t) \cdot v_n d\sigma. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь представим объем $V' - V$ (рисунок 3.1) как совокупность элементарных цилиндров $dV = v_n d\sigma \Delta t$, при этом при $\Delta t \rightarrow 0$ поверхность $S' \rightarrow S$ и $f(x, y, z, t + \Delta t) \rightarrow f(x, y, z, t)$.

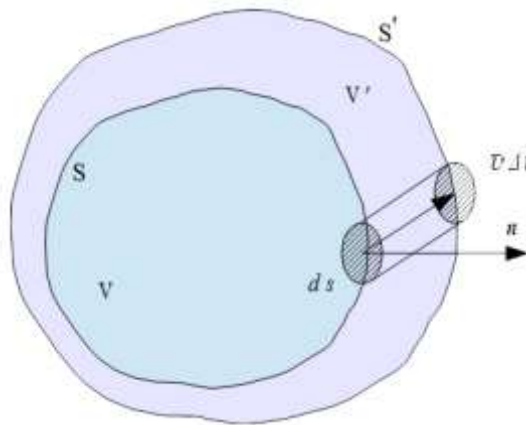


Рисунок 3.1 – Формула дифференцирования интеграла по времени, взятого по подвижному объему.

В (3.1) ко второму слагаемому применим формулу Гаусса-Остроградского. Тогда (3.1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V f(x, y, z, t) d\tau \right) = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i) \right) d\tau. \quad (3.2)$$

В правой (3.2) части можно несколько иначе расписать подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i(fv^i) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f + f \nabla_i v^i = \frac{df}{dt} + f \nabla_i v^i, \text{ где } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f.$$

Выражение (3.2) и есть формула дифференцирования интеграла по времени, взятого по подвижному объему.

Дивергенция векторного поля

Дивергенция – дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное, который для каждой точки определяет, насколько расходитя входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле, т.е. насколько расходятся входящий и исходящий потоки.

Дивергенция – линейный дифференциальный оператор на векторное поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой окрестности каждой внутренней точки области определения поля:

$$\operatorname{div} \bar{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_F}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S F_n ds}{V}.$$

Физическая интерпретация

Дивергенция векторного поля – это показатель того, что в какой-то степени данная точка пространства (точнее, достаточно малая окрестность точки) является источником или стоком этого поля.

Теорема Остроградского¹³-Гаусса¹⁴

Поток векторного поля \bar{F} через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от $\operatorname{div} \bar{F}$ по области V , ограниченной поверхностью S .

$$\oint_S F_n ds = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV.$$

¹³ Михайл Васи́льевич Острогра́дский (рус. дореф. Михаилъ Васильевичъ Остроградскій; укр. Михаїло Васи́льович Острогра́дський; 12 сентября [24 сентября] 1801, деревня Пашенная, Кобелякский уезд, Полтавская губерния — 20 декабря 1861 [1 января 1862], Полтава) — российский математик и механик украинского происхождения, академик Санкт-Петербургской академии наук с 1830 года, признанный лидер математиков Российской империи в 1830—1860-е годы. Ученик Т. Ф. Осиповского.

¹⁴ Иогáнн Карл Фрiдрих Га́усс (нем. Johann Carl Friedrich Gauß; 30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Лауреат медали Копли (1838), член Лондонского королевского общества (1804), иностранный член Парижской (1820) и Шведской (1821) академий наук, иностранный член-корреспондент (1802) и почётный член (1824) Петербургской академии наук.

Доказательство.

Разобьём область V на N малых объемов ΔV_k , границами которых являются поверхности ΔS_k . Согласно определению дивергенции поля, имеем: поток $\Delta \Phi_k$ поля \bar{F} через поверхность ΔS_k малой области ΔV_k приблизительно равен $\approx \text{div} \bar{F}_k \cdot \Delta V_k$.

Выполним суммирование по всем областям ΔV_k и осуществим предельный переход при $\Delta V_k \rightarrow 0$. Используем, что сумма потоков из всех частей ΔV_k объема V равна потоку вектора \bar{F} через поверхность S :

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \Delta \Phi_k = \oint_S (\bar{F} \cdot \bar{n}) ds = \oint_S F_n ds.$$

$$\text{При этом } \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \text{div} \bar{F}_k \cdot \Delta V_k = \iiint_V \text{div} \bar{F} dV.$$

$$\text{Тогда } \iiint_V \text{div} \bar{F} dV = \oint_S F_n dS. \blacksquare$$

Основные уравнения и теоремы динамики идеальной жидкости и газа

Простейшая схема (модель) движущейся жидкости – *идеальная жидкость*. Это среда, в которой отсутствует внутреннее трение, то есть по площадкам соприкосновения двух движущихся друг относительно друга объемов действуют только нормальные к площадке силы давления и полностью отсутствует касательное напряжение. Тогда

$$p_{xy} = p_{yx} = p_{zx} = p_{xz} = p_{zy} = p_{yz} = 0. \quad (3.4)$$

То же получаем и на наклонных к координатным осям плоскостях:

$$p_{nx} = p_n \cdot n_x; p_{ny} = p_n \cdot n_y; p_{nz} = p_n \cdot n_z; \quad (3.5)$$

Тогда с учетом формул Коши $\bar{p}_n = p_{ij} \cdot n^j$ имеем:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_n. \quad (3.6)$$

Из (3.4) и (3.6) получим, что нормальное направление в данной точке не зависит от направления площадки, к которой оно приложено.

Величину нормальных направлений в данной точке потока обозначим через $(-p)$. Величина p – *гидродинамическое давление* или просто *давление* в данной точке потока. Знак «-» подчеркивает противоположность направления вектора нормального направления \bar{p}_n направлению нормали \bar{n} к лицевой стороне площадки, тогда $\bar{p}_n = -p \cdot \bar{n}$.

Таким образом, тензор напряжений идеальной жидкости является *шаровым*, то есть

$$P = -p \cdot I. \quad (3.7)$$

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости могут быть получены путем упрощения общих уравнений движения сплошной среды. Уравнение неразрывности при этом сохраняет вид:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) – уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости.

Запишем (3.8) в виде, предложенном И.С. Громекой¹⁵ и Г. Лэмбом¹⁶. Для этого в (3.8) из конвективного ускорения выделим потенциальную часть:

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \text{rot} \bar{v} \times \bar{v} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right); \quad (3.9)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} \bar{v} \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p; \quad (3.10)$$

Далее будем работать с формулой (3.9). Пусть объемные силы потенциальны, то есть $\bar{F} = -\text{grad} \Pi$.

Введем в рассмотрение функцию давления:

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)},$$

$$\text{grad} P = \frac{dP}{dp} \text{grad } p = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Тогда (3.10) принимает вид:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + \Pi \right) + \text{rot} \bar{v} \times \bar{v} = 0. \quad (3.11)$$

Обозначим $B = \frac{v^2}{2} + P + \Pi$, $\text{rot} \bar{v} = \bar{\Omega}$. Тогда

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad} B + \bar{\Omega} \times \bar{v} = 0; \quad (3.12)$$

¹⁵ Ипполит Степáнович Громе́ка (27 января (8 февраля) 1851, Бердичев — 13 октября (26 октября) 1889, Кутаиси) — российский учёный-механик, профессор Казанского университета; дал оригинальное изложение теории капиллярных явлений. Сын известного в своё время публициста, а впоследствии чиновника С. С. Громеки. Окончил с золотой медалью Седлецкую гимназию. В 1869 году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Все труды И. С. Громеки приходятся на одно десятилетие. Именем Громеки названо уравнение Громеки — Лэмба, описывающее течение идеальной жидкости. Специальный класс течений сплошной среды, в котором вектор вихря пропорционален скорости, называется течениями Громеки — Бельтрами.

¹⁶ Сэр Гораций Лэмб (21 ноября 1849 года, Стокпорт, Чешир (ныне — в графстве Большой Манчестер), Англия — 4 декабря 1934 года, Кембридж, Англия) — английский математик и гидродинамик. Известен как учёный, описавший волны, распространяющиеся в тонком слое твердого тела. Эти волны теперь называют волнами Лэмба.

где B – трехчлен Бернулли.

Уравнение (3.12) связывает кинематические характеристики \bar{v} и $\bar{\Omega}$ с динамическими характеристиками Π и P . Перепишем (3.12):

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{v} = -gradB. \quad (3.13)$$

Движение или равновесие называют *баротропным*, если плотность зависит только от давления $\rho = \rho(p)$. При баротропном движении левая часть уравнения (3.13) является потенциальным вектором (при действии потенциальных сил на жидкость). То есть поле скоростей является *безвихревым* (согласно определению).

Продолжим рассмотрение уравнения (3.13). Применим к (3.13) операцию rot , учитывая, что $rot(gradB) = 0$:

$$rot\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right) + rot(\bar{\Omega} \times \bar{v}) = 0. \quad (3.14)$$

$$\text{Или } \frac{\partial}{\partial t}(rot\bar{v}) + rot(\bar{\Omega} \times \bar{v}) = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + rot(\bar{\Omega} \times \bar{v}) = 0. \quad (3.15)$$

Получим в (3.15) полную производную $\bar{\Omega}$ по времени. Для этого не хватает слагаемого $(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{\Omega}$.

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{\Omega}\nabla)\bar{v} - \bar{\Omega}div\bar{v} = 0. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) – *уравнение динамической возможности движения*, полученное Фридманом¹⁷.

В случае несжимаемой жидкости уравнение (3.16) перепишем в виде:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{\Omega}\nabla)\bar{v}. \quad (3.17)$$

Уравнение (13) получено Гельмгольцем¹⁸.

¹⁷ Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — российский и советский математик, физик и геофизик, основоположник современной физической космологии, автор исторически первой нестационарной модели Вселенной (Вселенная Фридмана). Основные работы посвящены проблемам динамической метеорологии (теории атмосферных вихрей и порывистости ветра, теории разрывов непрерывности в атмосфере, атмосферной турбулентности), гидродинамике сжимаемой жидкости, физике атмосферы и релятивистской космологии. В июле 1925 года с научными целями совершил полёт на аэростате вместе с пилотом Павлом Федосеенко, достигнув рекордной по тому времени для СССР высоты 7400 м. Фридман одним из первых освоил математический аппарат теории гравитации Эйнштейна и начал читать в университете курс тензорного исчисления как вводную часть к курсу общей теории относительности. В 1923 году вышла в свет его книга «Мир как пространство и время» (переиздана в 1965 году), познакомившая широкую публику с новой физикой.

¹⁸ Герман фон Гельмгольц (полное имя — Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц (нем. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz); 31 августа 1821, Потсдам — 8 сентября 1894, Шарлоттенбург) — немецкий физик, врач, физиолог, психолог, акустик. Член Прусской академии наук (1871; член-корреспондент с 1857),

Теорема Бернулли¹⁹

Пусть идеальная жидкость под действием потенциального поля объемных сил с потенциалом Π совершает стационарное баротропное движение с функцией давления P . Тогда в уравнении движения

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad}B + \bar{\Omega} \times \bar{v} = 0$$

первый член равен 0 и оно может быть записано в виде:

$$\text{grad}B + \bar{\Omega} \times \bar{v} = 0. \quad (3.18)$$

Умножим (3.18) скалярно на \bar{v} :

$$\bar{v} \cdot \text{grad}B \equiv |\bar{v}| \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \cdot \text{grad}B \right) = 0.$$

Заметим, что $\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \cdot \text{grad}B = \frac{dB}{ds}$, где $\frac{dB}{ds}$ – производная, взятая вдоль траектории или линии тока. Тогда

$$\frac{dB}{ds} = 0. \quad (3.19)$$

Равенство (3.19) означает, что B сохраняет свое значение вдоль траектории или линии тока, то есть вдоль линии тока выполняется

$$B = \frac{v^2}{2} + P + \Pi = \text{const}. \quad (3.20)$$

Равенство (3.20) – *первый интеграл уравнения Эйлера*, справедливый в случае стационарного движения при наличии функций давления, представляющий потенциал объемного действия поверхностных сил и потенциала объемных сил. Этот интеграл называется интегралом кинетической энергии уравнений движения центра инерции элементарного объема жидкости.

Сформулируем *теорему Бернулли*.

При стационарном баротропном движении идеальной жидкости под действием потенциальных объемных сил сумма кинетической энергии единицы массы, функции давлений и приведенного к единице массы

иностраннй член Лондонского королевского общества (1860), иностраннй член-корреспондент Петербургской академии наук (1868).

¹⁹ Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli; 29 января (8 февраля) 1700 — 17 марта 1782) — швейцарский физик, механик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики. Сын Иоганна Бернулли. Академик и иностраннй почётный член (1733) Петербургской академии наук, член Академий: Болонской (1724), Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского королевского общества (1750). Более всего Даниил Бернулли прославился трудами в области математической физики и теории дифференциальных уравнений — его считают, наряду с Д'Аламбером и Эйлером, основателем математической физики.

потенциала объемных сил сохраняет вдоль линии тока (траектории) постоянное значение.

Выведем интеграл Бернулли непосредственно из уравнений Эйлера:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p. \quad (3.21)$$

Перепишем (3.21) с учетом Π и P :

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\text{grad}(\Pi + P). \quad (3.22)$$

Умножим (3.22) скалярно на \bar{v} , получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\bar{v} \cdot \text{grad}(\Pi + P). \quad (3.23)$$

По определению полной производной по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \bar{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Тогда (3.23) преобразуется к виду

$$\bar{v} \cdot \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + P \right) = 0.$$

Отсюда можно получить интеграл Бернулли.

Рассмотрим частные случаи уравнения Бернулли.

1. Случай несжимаемой жидкости.

$$P = \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{const}.$$

В качестве объемных сил рассмотрим только вес, ось OZ направим вертикально вверх:

$$\Pi = gz + \text{const}.$$

Тогда формула (3.20) принимает вид:

$$B = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (3.24)$$

В равенстве (3.24) перейдем к удельному весу: $\gamma = \rho \cdot g$, тогда

$$\frac{B}{g} = H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}. \quad (3.25)$$

В средней части равенства (3.25) стоит сумма высот, которая называется гидравлической высотой H .

2. Отсутствие весовых сил (движение жидкости в трубе).

В этом случае потенциалом веса пренебрегают и уравнение Бернулли принимает вид:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (3.26)$$

Первый член в (3.26) называют *пьезометрическим напором*, второй член – *динамический напор*. Их сумма – *полный напор*.

Теорема Бернулли может быть сформулирована и так. При стационарном движении идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие объемных сил полный напор, равный сумме пьезометрического и скоростного напоров, сохраняет свою величину вдоль любой линии тока или вихревой линии.

Математическая модель вязкой несжимаемой жидкости

Модель вязкой несжимаемой жидкости играет большую роль при изучении динамики кровотока в крупных сосудах. В этом случае можно пренебречь неоднородной структурой крови, считая её однородной несжимаемой ньютоновской жидкостью. Свойство вязкости реальных жидкостей было впервые обнаружено опытным путем Исааком Ньютоном²⁰ и было описано им в его знаменитых «Началах» (1686 год). Рассмотрим подробно этот опыт.

Опыт Ньютона

Имеем две бесконечные жесткие и непроницаемые для жидкости пластины. Нижняя пластина жестко закреплена. Между пластинами находится исследуемая жидкость (например, вода). Первоначально она находится в равновесии. Далее верхняя пластина начинает двигаться поступательно с постоянной скоростью V_0 , увлекая за собой жидкость (рисунок 3.2).

²⁰ Сэр Исаак Ньютон (англ. Isaac Newton, английское произношение: [ˌaɪzək ˈnjuːtən]; 25 декабря 1642 года — 20 марта 1727 года по юлианскому календарю, действовавшему в Англии до 1752 года; или 4 января 1643 года — 31 марта 1727 года по григорианскому календарю) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории. Член (1672) и президент (1703—1727) Лондонского королевского общества.

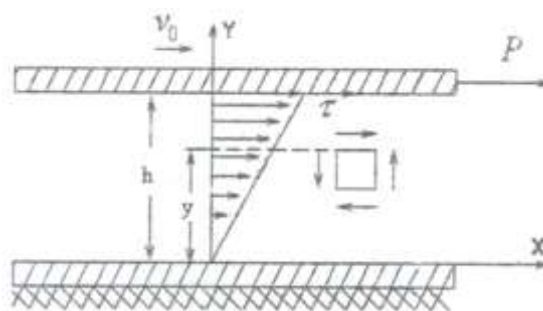


Рисунок 3.2 – Иллюстрация опыта Ньютона.

Для осуществления такого движения необходимо приложить к верхней пластине постоянную силу P . Величина этой силы определяется касательными напряжениями τ , возникающими на поверхности контакта пластины и исследуемой вязкой жидкости.

Введем систему координат: ось Y направим вертикально вверх, ось X – по линии контакта нижней пластины и жидкости.

В процессе поступательного движения пластины устанавливается поле скоростей.

Для относительно тонкого слоя жидкости распределение скоростей течения в поперечном направлении определяется формулой

$$V = \frac{v_0}{h} y,$$

где h – толщина слоя, v_0 – скорость перемещения верхней пластины, y – высота текущего слоя жидкости.

Градиент скорости в поперечном направлении определяется следующим соотношением: $\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{h}$.

Контактное касательное напряжение τ связано с силой P простым соотношением:

$$\frac{P}{F} = \tau,$$

где F – площадь поверхности контакта верхней пластины с жидкостью.

Ньютоном был экспериментально установлен следующий закон вязкого трения:

$$\tau = \mu \frac{v_0}{h},$$

где μ – коэффициент вязкого трения.

Его можно записать в стандартной форме

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 2\mu v_{xy},$$

где v_{xy} – сдвиговая компонента тензора скоростей деформации прямоугольного элемента жидкости в декартовой системе координат.

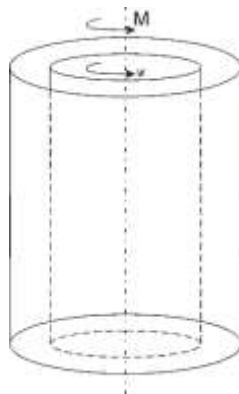


Рисунок 3.3 – Опыт Ньютона (опыт с вискозиметром).

В реальных условиях опыт Ньютона проводится так (рисунок 3.3). Вместо пластин берут два коаксиальных тонкостенных цилиндра. Один из них (например, наружный) неподвижный, а другой вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ϖ . Расстояние между стенками цилиндров считается малым:

$$R_{\text{наруж}} - R_{\text{внутр}} = \delta \ll R_{\text{наруж}}.$$

Между стенками цилиндров находится исследуемая жидкость. При вращении внутреннего цилиндра возникает силовой момент M , который выражается через касательные напряжения в коаксиальных слоях жидкости следующей формулой:

$$\tau = \frac{M}{2\pi R_B^2 \cdot l};$$

$$v_0 = R_B \varpi, \frac{v_0}{h} = \frac{R_B \varpi}{\delta} \Rightarrow \tau = \mu \frac{R_B \varpi}{\delta}.$$

Приведем примеры значений коэффициентов вязкости реальных жидкостей:

для воды: при $t = 0^\circ\text{C}$ $\mu = 0,018 \text{ г/см}\cdot\text{с}$;

при $t = 15^\circ\text{C}$ $\mu = 0,010 \text{ г/см}\cdot\text{с}$;

для крови при $t = 15^\circ\text{C}$ $\mu = 0,043 \text{ г/см}\cdot\text{с}$;

для воздуха: при $t = 15^\circ\text{C}$, $P_{\text{воздуха}} = 760 \text{ мм рт. ст.}$ $\mu = 0,00017 \text{ г/см}\cdot\text{с}$

Обобщенный закон вязкого трения

Опыт Ньютона был проведен для специального поля скоростей:

$$\begin{cases} v_x = \frac{x_0}{h} y, \\ v_y = v_z = 0. \end{cases}$$

Для произвольного поля скоростей можно сформулировать *обобщенный закон вязкого трения* (иногда его называют *законом Стокса*²¹), постулируя следующую связь между компонентами девиатора напряжений и девиатора скоростей деформаций:

$$S_{ij} = 2\mu V_{ij}. \quad (3.27)$$

$$\text{Здесь } S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, V_{ij} = v_{ij} - v\delta_{ij},$$

где σ_{ij} – компоненты тензора внутренних напряжений в текущей жидкости, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ij}$ – среднее напряжение в текущей жидкости, $v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ – компоненты тензора скоростей деформаций частиц жидкости, $v = \frac{1}{3}v_{ii} = \frac{1}{3}\vartheta$ – скорость объемного расширения.

Запишем (3.27) в развернутом виде:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} - 2\mu\delta_{ij} + 2\mu v_{ij}, \quad (3.278)$$

где P – давление жидкости, $P = -\sigma$, $v = \frac{1}{3}\vartheta = \frac{1}{3}\text{div}\vec{v} = \frac{1}{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$.

Для несжимаемой жидкости $\text{div}\vec{v} = 0$, и закон вязкого трения (3.28) запишется в виде

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu v_{ij}. \quad (3.29)$$

Легко проверить, что из него вытекает закон вязкого трения Ньютона для поля скоростей частного вида: $v_1 = \frac{V_0 \cdot h}{y}$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$. Это поле скоростей как раз и осуществляется в опыте Ньютона.

Понятие о нелинейных неньютоновских жидкостях

Жидкость называется неньютоновской, если её коэффициент вязкости μ зависит от скорости деформации сдвига. Соотношения между напряжением сдвига τ и скоростью деформации сдвига v_{xy} для различных жидкостей представлены на рисунке 3.4. На правом графике изображены характерные зависимости коэффициента вязкости жидкости от скорости деформации сдвига.

²¹ Сэр Джордж Габриэль Стокс (англ. Sir George Gabriel Stokes; 13 августа 1819 — 1 февраля 1903) — английский математик, механик и физик-теоретик ирландского происхождения. Работал в Кембриджском университете, внёс значительный вклад в гидро- и газодинамику (уравнения Навье — Стокса), оптику и математическую физику. Член Лондонского королевского общества (1851), его секретарь в 1854—1885 гг. и президент в 1885—1890 гг.

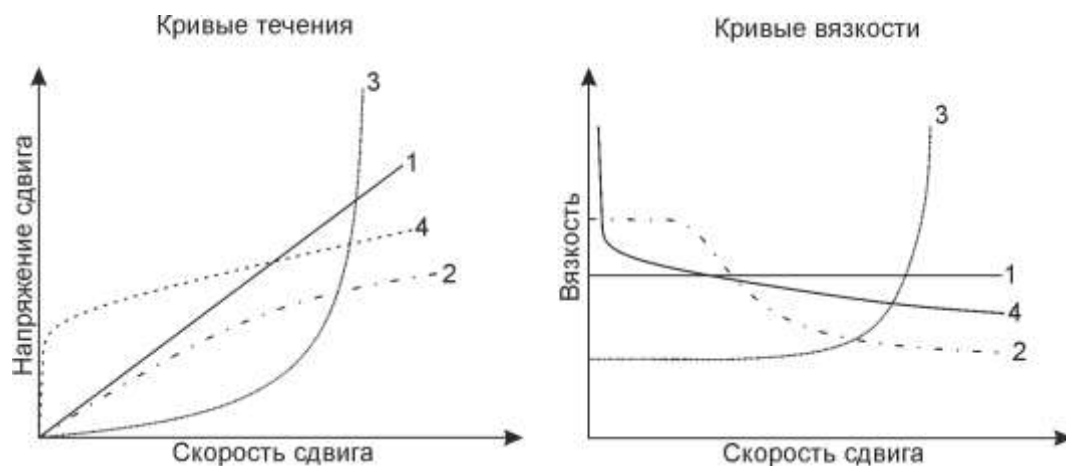


Рисунок 3.4 – Кривые течения и вязкости для неньютоновских жидкостей.

Для очень многих жидкостей, имеющих важное значение, таких как эмульсии, суспензии или дисперсии, характерно резкое снижение вязкости при повышении скорости деформации сдвига. Другими словами, чем быстрее, например, кровь перекачивается по сосудам и капиллярам, тем быстрее снижается её вязкость – это *псевдопластическая* жидкость (кривая 2). Наряду с псевдопластическими жидкостями в природе встречаются жидкости, вязкость которых возрастает при увеличении скорости деформации сдвига. Такие среды называются *дилатантными* (кривая 3). Некоторые среды (например, пластилин) начинают своё течение только при достижении напряжения некоторого предела, называемого пределом текучести. Их называют *вязкопластическими* (кривая 4). Известно, что кровь – это эмульсия форменных элементов (эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов) в плазме – водном растворе солей, белков и других органических и неорганических веществ. Общее содержание форменных элементов в объеме крове называется *гематокритом*. В крови имеются несколько видов клеток.

Эритроциты (40 – 48% объема крови) – безъядерные клетки, способные упруго деформироваться, образовывать агрегаты. Их форма в норме – двояковогнутый диск, который можно аппроксимировать цилиндром высотой 2,5 мкм и диаметром 8 мкм.

Лейкоциты – обладают собственной подвижностью, участвуют в реакциях иммунитета, входят в состав тромба, гидродинамический размер 5 мкм, концентрация в крови примерно 0,05%.

Тромбоциты участвуют в свертывании крови, их диаметр 1 мкм, концентрация в норме 0,3 %. Вязкость крови у человека колеблется в норме от

4η до 5η . При патологии от $1,78\eta$ до $22,89\eta$, (η - вязкость дистиллированной воды, которая составляет $0,001006 \text{ Па}\cdot\text{сек.}$). Она зависит от количества и свойств форменных элементов крови (особенно эритроцитов), содержания в плазме белков и их состава, содержания в крови гемоглобина и углекислоты. Вязкость крови повышается с увеличением содержания углекислоты, вызывающей разбухание эритроцитов, и понижается с увеличением в крови количества кислорода. Поэтому вязкость венозной крови больше, чем артериальной. При ряде болезней и ухудшении газообмена в легких вязкость крови повышается. Способные к упругой деформации красные кровяные клетки, формой напоминающие круглые, вдавленные в середине лепешки, могут изменять свою форму вплоть до длинных цилиндров с уменьшенным диаметром, что позволяет им при высокой скорости течения легче проходить через капилляры.

Сдвиговые напряжения могут вызывать разрушение агрегированных комков эритроцитов, что способствует уменьшению вязкости и увеличению скорости кровотока. Отсюда можно сделать вывод о том, что кровь является неньютоновской псевдопластической жидкостью. Однако надо иметь в виду, что нелинейные свойства вязкости крови наиболее ярко выражены при течении в тонких сосудах – капиллярах. При изучении течения крови в крупных сосудах можно пренебречь нелинейными свойствами вязкости крови и считать её достаточно точно ньютоновской жидкостью.

Уравнения Навье²²-Стокса изотермического движения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости

Запишем общее уравнение движения сплошной среды в напряжениях в декартовой системе координат:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \text{div}P, \quad (3.30)$$

²² Клод Луи Мари Анри Навье (фр. Claude Louis Marie Henri Navier) (10 февраля 1785 года, Дижон, — 21 августа 1836 года, Париж) — французский механик и инженер. Автор ряда трудов по строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, гидравлике и гидромеханике. Автор курса сопротивления материалов. Навье сформулировал теорию упругости в математическом виде (1821 г.), сделал её пригодной для применения в строительстве с достаточной на первое время точностью. В 1819 г. он определил нулевой уровень механического напряжения, исправив тем самым результаты Галилея, а в 1826 г. он ввёл модули упругости как характеристику материалов, независимую от второго момента площади. Навье считается одним из основателей современной теории упругости. Наиболее известный его вклад в науку — вывод в 1822 г. уравнений Навье — Стокса, играющих ключевую роль в гидродинамике.

где ρ – плотность среды, \vec{v} – вектор скорости, \vec{F} – вектор внешних массовых сил, P – тензор напряжений.

Уравнение (3.30) в проекциях на оси декартовой системы координат имеет вид:

$$\begin{aligned}\rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Подставим вместо компонент тензора P их выражения из закона вязкого трения Ньютона

$$\begin{aligned}p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & p_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Тогда в первом уравнении из системы (3.31) будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u.\end{aligned}$$

Аналогично получаются два других уравнения. Тогда система уравнений Навье-Стокса запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases}.\tag{3.32}$$

Преобразуем первое уравнение системы (3.32) к форме Громеки-Лэмба. Для этого запишем выражение

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{v}) = \text{grad}(\text{div} \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}.$$

Тогда с учетом второго уравнения системы (3.32):

$$\nabla^2 \vec{v} = \text{grad}(\text{div} \vec{v}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{v}) = -\text{rot}(\text{rot} \vec{v}).\tag{3.33}$$

Приведем равенство (без доказательства)

$$(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = \text{rot}\bar{v} \times \bar{v} + \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (3.34)$$

Подставим (3.33) и (3.34) в первое уравнение системы (3.32):

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{rot}\bar{v} \times \bar{v} + \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \bar{F} \frac{1}{\rho} \text{grad}p - v \text{rot}(\text{rot}\bar{v}). \quad (3.35)$$

Пусть объемные силы имеют потенциал Π , тогда $\bar{F} = -\text{grad}\Pi$ и равенство (3.35) примет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{rot}\bar{v} \times \bar{v} = -\text{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}\right) - v \text{rot}(\text{rot}\bar{v}). \quad (3.36)$$

Уравнение (3.36) удобно для записи в криволинейных координатах.

Глава 4. Введение в метод конечных элементов

Краткое описание метода

Метод конечных элементов (КЭ) успешно применяется в самых различных задачах. Он был создан для решения сложных уравнений теории упругости и строительной механики и оказался гораздо эффективнее метода конечных разностей. Этот метод незаменим, если нужно учитывать геометрические особенности областей.

С математической точки зрения метод КЭ представляет собой обобщение метода Релея²³-Ритца²⁴-Галеркина²⁵. Поэтому он применим к широкому классу уравнений в частных производных. В методе Ритца, однако, не решается непосредственно дифференциальное уравнение; вместо этого исходная задача представляется в эквивалентной вариационной формулировке, а затем ищется приближенное решение последней в виде комбинации $\sum q_j \varphi_j$ заданных пробных функций $\varphi_j(x)$. При этом весовые коэффициенты q_j вычисляются из вариационного принципа, соответствующего задаче.

²³ Джон Уильям Стретт, третий барон Рэлей (англ. John Strutt, 3rd Baron Rayleigh; 12 ноября 1842 — 30 июня 1919), более известный как лорд Рэйли (Рэлей) — британский физик и механик, открывший (с Уильямом Рамзаем) газ аргон и получивший за это Нобелевскую премию по физике в 1904 году. Открыл также явление, ныне называемое рассеянием Рэля, и предсказал существование поверхностных волн, которые также называются волнами Рэля. Член Лондонского королевского общества (1873), его президент в 1905—1908 годах. Иностраный член Французской академии наук (1910; член-корреспондент с 1890). Основные работы Рэля по механике и физике относятся к теории колебаний, одним из основоположников которой он является. Приложения данной теории он находил в самых разных областях — в теории упругости, акустике, оптике, электричестве и других.

²⁴ Вальтер Ритц (нем. Walter Ritz, 22 февраля 1878, Сьон (Зиттен) — 7 июля 1909, Гёттинген) — швейцарский физик-теоретик и математик. Окончил Цюрихский университет (1900). Работал в Гёттингене, Бонне, Париже, Цюрихе, Тюбингене. Работы по физике посвящены спектроскопии, теории теплового излучения, электродинамике. В 1908 открыл закон, согласно которому волновое число любой спектральной линии равно разности двух термов из множества термов, присущих данному элементу. Формулу, описывающую любую спектральную линию элемента, дал в 1890 И. Ридберг. Отсюда и название «принцип Ридберга — Ритца», или «комбинационный принцип Ридберга — Ритца». В математике известен «метод Ритца» — метод решения вариационных задач (1908). Скоропостижно скончался в возрасте всего 31 год от последствий туберкулёза.

²⁵ Борис Григорьевич Галёркин (при рождении Берка Гиршевич Галёркин; 20 февраля (4 марта) 1871, Полоцк — 12 июля 1945, Ленинград) — русский и советский механик и математик (наиболее известный своими результатами в области теории упругости); академик АН СССР (1935; член-корреспондент с 1928 года), инженер-генерал-лейтенант. Лауреат Сталинской премии первой степени. Один из создателей и первый директор Института механики АН СССР (1939). Главный редактор журнала «Прикладная математика и механика». Участвовал в обороне Ленинграда. Летом 1941 года, с началом Великой Отечественной войны, была создана Комиссия по руководству строительством оборонительных сооружений Ленинграда. В её составе оказалось несколько академиков и крупных учёных, но имел непосредственное отношение к строительству только один Б. Г. Галёркин, по существу, ставший руководителем Комиссии. Борис Галёркин разработал методы решения дифференциальных уравнений теории упругости: его именем назван метод конечных элементов математического анализа, применяемый для численного и аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных. Один из создателей теории изгиба пластинок.

В методе КЭ пробные функции являются кусочно-полиномиальными. Каждая функция $\varphi_j(x)$ равна нулю на большей части области и отлична от нуля только в окрестности одного узла. В этой окрестности $\varphi_j(x)$ составлена из полиномов небольшой степени, и все вычисления становятся максимально простыми.

Метод КЭ можно описать несколькими словами. Пусть задача, которую нужно решить, поставлена в вариационной форме: требуется найти функцию u , минимизирующую заданный функционал потенциальной энергии. Необходимость минимизации приводит к дифференциальному уравнению для u , которое обычно нельзя решить точно и приходится применять приближенные методы. Идея метода Релея-Ритца-Галеркина состоит в том, что выбирается конечное число пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, и среди всех линейных комбинаций вида $\sum q_j \varphi_j$ ищется комбинация, доставляющая минимум функционалу. Это аппроксимация Ритца. Неизвестные веса q_j определяются уже не из дифференциальных уравнений, а из системы N дискретных алгебраических уравнений, для решения которой можно применять компьютер. Теоретическое обоснование этого метода очень простое: процесс минимизации автоматически дает комбинацию, ближайшую к функции u . Таким образом, цель состоит в том, чтобы выбрать пробные функции φ_j достаточно удобными для вычисления и минимизации потенциальной энергии и в то же время обеспечить хорошее приближение неизвестного решения u .

Основополагающая идея метода КЭ весьма проста. Все начинается с разбиения исходной области на мелкие куски. Структура их должна быть понятна для распознавания с помощью компьютера. Это могут быть треугольники или прямоугольники. Затем внутри каждого элемента разбиения задается пробная функция в максимально простой форме – обычно это полином, как правило, третьей или четвертой степени. Краевые условия гораздо проще поставить вдоль стороны треугольника или прямоугольника, чем сразу на всей границе области. Точность расчета повышается за счет более мелкого разбиения области. компьютер при этом работает по той же программе, только дольше.

Основная задача состоит в исследовании точности, с которой кусочно-полиномиальные функции могут аппроксимировать неизвестное решение u . Другими словами, надо определить, насколько хороши КЭ, построенные на основе вычислительной простоты, и дадут ли они хорошую аппроксимацию. Интуитивно ясно, что всякую достаточно хорошую функцию u можно с произвольной точностью приблизить кусочно-линейными функциями. Математическая задача состоит в получении максимально точной оценки ошибки и определении скорости убывания ошибки при возрастании количества элементов разбиения (или степени полинома внутри каждого элемента).

Физическая и математическая постановки задачи

КЭ методы используются для решения задач инженерного анализа и проектирования. *Физическая постановка задачи*, как правило, представляет собой какую-то конструкцию с приложенными к ней нагрузками. Идеализация физической постановки задачи и дальнейшее получение из нее математической модели предполагает наличие допущений, которые все вместе приводят к системе дифференциальных уравнений, представляющих *математическую постановку задачи*. Метод КЭ решает математическую модель. Учитывая, что метод КЭ является численным методом, немаловажным является достижение точности полученного результата. Если заданная точность не достигается, то нужно перерешать задачу с уточненными параметрами (например, более мелкая сетка), пока требуемый результат не будет получен.

Очевидно, что КЭ метод решает поставленную математическую задачу, следовательно, все упрощения, сделанные при постановке проблемы, отразятся на решении. Более того, кроме информации, содержащейся в математической постановке, о решении ничего предположить невозможно. Поэтому при выборе математической модели надо не только стремиться к ее максимальной простоте, но и требовать от нее точного описания поставленной физической задачи, полученной из анализа проблемы.

Решение некоторых краевых задач методом конечных элементов

В задачах теории поля минимизируется функционал, который обладает таким свойством, что минимизирующая его функция будет удовлетворять не только исходные дифференциальные уравнения, но и граничные условия. Позже система уравнений, решение которой давало искомые узловые значения, получалась при использовании таких методов, как метод Галеркина и др.

В данном разделе рассмотрим процесс вывода уравнений для метода конечных элементов. Будем основываться на минимизации некоторой интегральной величины. Сначала проведем анализ небольшого примера, иллюстрирующего задачу теории поля. Далее покажем, что минимизация может быть завершена до момента вычисления интеграла по конечным элементам.

Сначала рассмотрим небольшой пример о переносе тепла в стержне. Рассматривается стержень, закрепленный на одном конце, второй конец свободен. Боковая поверхность теплоизолирована. Со стороны закрепленного конца к стержню подводится тепловой поток (рисунок 4.1).

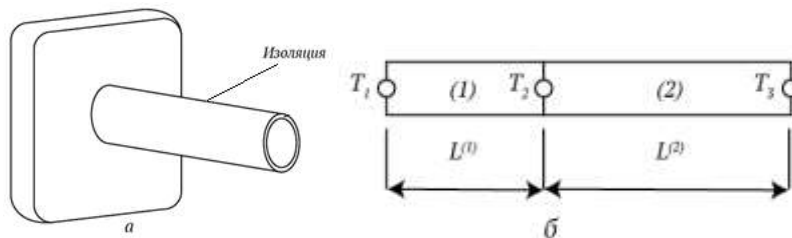


Рисунок 4.1 – Стержень в задаче о переносе тепла.

На свободном конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Коэффициент теплообмена h , температура окружающей среды T_∞ .

Дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры внутри стержня, имеет следующий вид:

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (4.1)$$

Граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\text{при } x = 0 \quad K_{xx} \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{при } x = L \quad K_{xx} \frac{dT}{dx} + h(T - T_\infty) = 0, \quad (4.3)$$

где K_{xx} – коэффициент теплопроводности. Тепловой поток q является положительным, если тепло отводится от стержня.

Рассмотрим вариационный подход к решению этой задачи о переносе тепла. Вариационное исчисление дает, что минимизация функционала

$$\chi = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right] dS, \quad (4.4)$$

требует, чтобы дифференциальное уравнение

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (4.5)$$

удовлетворялось, а также выполнялись граничные условия

$$K_{xx} \frac{dT}{dx} + h(T - T_\infty) = 0. \quad (4.6)$$

Эти выражения совпадают с исходным уравнением переноса тепла и граничным условием на свободном конце. Любое температурное поле, которое минимизирует функционал χ , будет являться решением исходной поставленной задачи. Оба граничных условия из постановки задачи будут выполняться, так как поверхностный интеграл в функционале разбивается на два по каждой из торцевых поверхностей.

Покажем, что для минимизации этого функционала необходимо выполнение озвученных выше условий (4.5), (4.6).

Вариационное исчисление занимается отысканием стационарных значений функционалов. *Функционал* – интеграл, принимающий числовое значение при подстановке в него конкретной функции. Например, если подставить в интеграл $I = \int_a^b F(x) dx$ конкретную функцию $F(x)$, то получим числовое значение.

Задача вариационного исчисления – отыскание такой $F(x)$, бесконечно малое изменение которой $\delta F(x)$ не изменит значение функционала I .

Пусть имеется функционал $I = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi_x(x)) dx$, где x – независимая переменная, а φ , φ_x – функция от x и ее производная. Варьирование функционала I вызывается с помощью изменения функции $F(x)$:

$$\delta I = \int_a^b \delta F(x, \varphi(x), \varphi_x(x)) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta \varphi_x \right) dx,$$

заметим, что $\delta\varphi_x = \frac{d}{dx}(\delta\varphi)$. Проинтегрируем второе слагаемое в интеграле, получим:

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \right) \delta\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi \Big|_a^b.$$

Стационарное значение функционала достигается в случае, если $\delta I = 0$. Эта величина равна нулю, если равен нулю интеграл, который входит в это выражение. Очевидно, что $\varphi(a) = \text{const}$, $\varphi(b) = \text{const}$, тогда $\delta\varphi(a) = 0$, $\delta\varphi(b) = 0$. Также $\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(a) = \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(b) = 0$.

Вариация $\delta\varphi$ задается произвольным образом на отрезке $[a; b]$, тогда должно выполняться следующее выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) = 0.$$

Это выражение обеспечивает равенство нулю записанного выше интеграла.

Пусть функционал имеет несколько независимых переменных.

$$I = \int_V F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dV.$$

Вариация функционала запишется следующим образом:

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi_x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \delta\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \delta\varphi_z \right) dV.$$

Если вспомнить, что $\delta\varphi_x = \frac{d}{dx}(\delta\varphi)$, то получим:

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) \right) dV.$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в интеграле и применим формулу Гаусса, получим:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi \right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \delta\varphi dV$$

и

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \delta\varphi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) \delta\varphi dV,$$

где l_x – направляющий косинус нормали к поверхности с осью Ox . Аналогичным образом преобразуем другие слагаемые.

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) \right] \delta \varphi dV + \\ + \int_S \left[l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right] \delta \varphi dS.$$

Стационарное значение функционала получится только в том случае, если выражения в скобках в интеграле, записанном выше, будут равны нулю. Эти требования приводят к дифференциальным уравнениям и граничным условиям для функции F .

Если рассмотреть функционал вида

$$\int_V \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\varphi \right] dV, \quad (4.7)$$

то он достигает своего минимального значения, если искомая функция будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) \right) = 0.$$

Подсчитаем производные и подставим их в уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2Q \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 2K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(2K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 2K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(2K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 2K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Тогда получим окончательный вид уравнения:

$$Q + K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение является уравнением задач теории поля.

Перейдем к рассмотрению примера о переносе тепла в стержне.

Уравнение (4.5) является основным, на базе которого мы должны получить распределение температуры в стержне. Функционал из (4.4) минимизируется на множестве функций элементов. Эти функции определяются на своих элементах и выражаются через узловые значения.

Узловые значения являются неизвестными, а функционал минимизируется по этим неизвестным величинам.

Начнем реализацию метода конечных элементов, для чего определим подобласти и узловые точки. Разобьем стержень на два элемента (линейных). Тогда обозначим узловые значения как T_1, T_2, T_3 . Температуру внутри каждого элемента можно определить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2, \\ T^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Функции формы определяются соотношениями:

$$N_i^{(1)} = \frac{X_j - x}{L^{(1)}}, \quad N_j^{(2)} = \frac{x - X_i}{L^{(2)}}.$$

В рассматриваемом примере функционал принимает следующий вид:

$$\chi = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)^2 dV + \int_{S_1} qT(x)dS + \int_{S_2} \frac{1}{2} h(T(x) - T_\infty)^2 dS, \quad (4.10)$$

где S_1, S_2 – площади торцевых поверхностей, на которых задаются q, h .

Числовое значения функционала χ получается тогда, когда в него подставляются температура $T(x)$ и вычисляются соответствующие интегралы.

Вычислим сначала поверхностные интегралы, начнем с того, в который включена q .

$$\int_{S_1} qT(x)dS = qT_1 \int_{S_1} dS = qT_1 A_1,$$

где A_1 – площадь поперечного сечения, которая соответствует первому узлу. В точках этого сечения $T(x)$ постоянна и равна T_1 . Далее рассмотрим второй поверхностный интеграл, в которых входит коэффициент теплообмена h :

$$\int_{S_2} \frac{1}{2} h(T(x) - T_\infty)^2 dS = \frac{h}{2} (T_3 - T_\infty)^2 \int_{S_2} dS = \frac{hA_3(T_3 - T_\infty)^2}{2}.$$

Объемный интеграл в функционале содержит производную по координате от температуры, найдем эту производную для каждого из двух элементов:

$$\begin{aligned} \frac{dT^{(1)}}{dx} &= \frac{1}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2), \\ \frac{dT^{(2)}}{dx} &= \frac{1}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3). \end{aligned}$$

При вычислении объемного интеграла его нужно разбить на два – по каждому из двух элементов, так как производная dT/dx не является непрерывной по общему объему.

При вычислении интеграла будем предполагать, что каждый элемент имеет постоянную площадь поперечного сечения, поэтому $dV = A^{(e)} dx$. Тогда интеграл примет вид:

$$\int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)^2 dV = \frac{K_{xx}^{(1)} A^{(1)}}{2L^{(1)}} (T_2 - T_1)^2 + \frac{K_{xx}^{(2)} A^{(2)}}{2L^{(2)}} (T_3 - T_2)^2.$$

Такое представление интеграла в виде суммы двух интегралов, каждый из которых вычисляется по своему элементу, позволяет задавать различные свойства материалов на каждом элементе. Запишем окончательное значение функционала, получив его сложением вычисленных интегралов:

$$\chi = \frac{C^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2T_2 T_3 + T_3^2) + qA_1 T_1 + \frac{hA_3}{2} (T_3^2 - 2T_3 T_\infty + T_\infty^2),$$

где $C^{(1)} = \frac{A^{(1)} K_{xx}^{(1)}}{L^{(1)}}$, $C^{(2)} = \frac{A^{(2)} K_{xx}^{(2)}}{L^{(2)}}$.

Искомые узловые значения температуры T_1, T_2, T_3 – это такие значения, которые доставляют минимум функционалу χ . Найдем эти значения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial T_1} &= C^{(1)} T_1 - C^{(1)} T_2 + qA_1 = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_2} &= -C^{(1)} T_1 + (C^{(1)} + C^{(2)}) T_2 - C^{(2)} T_3 = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T_3} &= -C^{(2)} T_2 + (C^{(2)} - hA_3) T_3 - hA_3 T_\infty = 0. \end{aligned}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & (C^{(1)} + C^{(2)}) & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & (C^{(2)} + hA_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ hA_3 T_\infty \end{Bmatrix} \text{ или } [K]\{T\} = \{F\}.$$

Матрица коэффициентов $[K]$ называется *матрицей жесткости*, в данном примере ее лучше назвать *матрицей теплопроводности*, так как решается задача о переносе тепла в стержне. Вектор-столбец $\{F\}$ – *вектор нагрузки*.

На последнем шаге нужно задать числовые значения физических параметров стержня и найти числовые значения температуры в узлах.

Метод конечных элементов для задач теории упругости

Задачи теории упругости решаются одним из двух известных методов. Первый подразумевает решение дифференциальных уравнений вместе с краевыми условиями. Второй метод – метод минимизации потенциальной энергии, которая представляет собой работу напряжений и внешних нагрузок. Мы будем использовать последний подход.

Если задача решается в перемещениях, то есть на границах задаются их значения, то должна минимизироваться потенциальная энергия системы. Если задача решается в напряжениях, а на границах заданы внешние нагрузки, то минимизируется дополнительная работа системы.

В методе конечных элементов отыскиваются такие узловые значения (перемещения системы), которые минимизируют потенциальную энергию системы. После нахождения перемещений могут быть определены тензоры деформаций и напряжений.

Приведем *теорему* о потенциальной энергии.

Из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, стационарное (экстремальное) значение потенциальной энергии доставляют те перемещения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия.

Здесь важно понимать, что перемещения должны удовлетворять граничным условиям.

Полная потенциальная энергия системы состоит из двух компонент – потенциальная энергия деформаций и потенциальная энергия массовых и поверхностных сил.

Тогда запишем потенциальную энергию в виде суммы:

$$\Pi = \Lambda + W_p,$$

где Λ – энергия деформаций, а W_p – потенциальная энергия внешних нагрузок.

Внешние силы выполняют работу, противоположную по знаку их потенциальной энергии, поэтому $W = -W_p$.

Тогда перепишем выражение для полной потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Lambda - W.$$

Перейдем к решению задачи об осевом растяжении стержня.

На следующем примере проиллюстрируем применение теоремы о минимуме потенциальной энергии системы.

Рассмотрим консольный стержень, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен. К свободному концу прикладывается растягивающее осевое усилие. Требуется определить перемещения в стержне.

На рисунке 4.2 приведена простая схема данной конструкции.

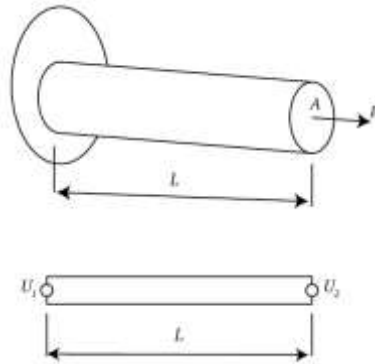


Рисунок 4.2 – Стержень в задаче об осевом растяжении.

Выберем линейную модель, описывающую перемещения в данной конструкции. Пусть стержень аппроксимируется одним линейным элементом с двумя концевыми узлами. Тогда перемещения в стержне могут быть записаны в следующем виде:

$$u = N_1 U_1 + N_2 U_2.$$

На закрепленном конце перемещение равняется нулю, следовательно,

$$U_1 = 0 \text{ и } u = N_2 U_2 = \frac{x}{L} U_2.$$

Потенциальная энергия стержня определяется следующим выражением

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV - P U_2.$$

Первое слагаемое – потенциальная энергия деформации стержня, второе – работа приложенной силы.

Напряжение связано с деформациями законом Гука $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$. Тогда перепишем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_{xx}^2 dV - P U_2.$$

Если принять во внимание постоянство поперечного сечения стержня по его длине, то $dV = Adx$, где A – площадь поперечного сечения, получим:

$$\Pi = \frac{A}{2} \int_0^L E \varepsilon_{xx}^2 dx - PU_2.$$

Деформация и перемещение связаны соотношением $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$. Тогда с учетом выражения для перемещения получим $\varepsilon_{xx} = \frac{U_2}{L}$. Подставим это выражение в формулу для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{A}{2} \int_0^L E \frac{U_2^2}{L^2} dx - PU_2 = \frac{AE}{2L} U_2^2 - PU_2.$$

Минимизация потенциальной энергии дает уравнение для нахождения узлового перемещения:

$$\frac{d\Pi}{dU_2} = \frac{AE}{L} U_2 - P = 0.$$

Отсюда получаем:

$$U_2 = \frac{PL}{AE}.$$

Получившееся выражение точно совпадает с теоретическим значением перемещения, что достигнуто за счет линейности как модели, так и самой задачи.

Рассмотрим этот пример повторно. Будем использовать два линейных конечных элемента. Тогда задача будет иметь три степени свободы U_1, U_2, U_3 . На закрепленном конце перемещение равняется нулю, следовательно, $U_1 = 0$. При этом перемещение в стержне запишем в виде $u = N_2 U_2 + N_3 U_3$. Тогда потенциальная энергия системы запишется как $\Pi = \Lambda - PU_3$.

Потенциальная энергия деформации стержня будет иметь вид

$$\Lambda = \int_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV = \int_{V^{(1)}} \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV + \int_{V^{(2)}} \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV = \frac{A}{2} \int_0^L E \varepsilon_{xx1}^2 dx + \frac{A}{2} \int_0^L E \varepsilon_{xx2}^2 dx.$$

Здесь и далее считаем длины конечных элементов одинаковыми.

В предыдущем выражении деформации перепишем через перемещения

$$\Lambda = \frac{A}{2} \int_0^L E \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 dx + \frac{A}{2} \int_0^L E \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 dx.$$

Здесь перемещения в конечных элементах аппроксимируются линейными функциями

$$u_1 = N_2^1 U_2, \quad u_2 = N_2^2 U_2 + N_3^2 U_3.$$

С учетом выражений для функций формы получим

$$u_1 = \frac{x-X_i}{0.5L} U_2 = \frac{x}{0.5L} U_2, \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{2U_2}{L};$$

$$u_2 = \frac{X_j - x}{0.5L} U_2 + \frac{x - X_i}{0.5L} U_3, \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{2U_3}{L} - \frac{2U_2}{L}.$$

Тогда после вычисления интегралов получим:

$$\Pi = A \left(\frac{2EU_2^2}{L} + \frac{EU_3^2}{L} - 2 \frac{EU_2U_3}{L} \right) - PU_3.$$

Окончательно находим стационарное значение потенциальной энергии системы, что дает два уравнения для нахождения двух степеней свободы.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = A \left(\frac{4EU_2}{L} - \frac{2EU_3}{L} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_3} = A \left(\frac{2EU_3}{L} - \frac{2EU_2}{L} \right) - P = 0.$$

В результате находим степени свободы:

$$U_2 = \frac{PL}{2AE}, \quad U_3 = \frac{PL}{AE}.$$

Метод конечных элементов для задач теории поля

Запишем общее квазигармоническое уравнение, из которого можно получить частные уравнения, описывающие тот или иной процесс:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + Q = 0. \quad (4.11)$$

К уравнению добавляются следующие граничные условия:

$$\varphi = \varphi_B \text{ на } S_1 \quad (4.12)$$

и (или)

$$K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0 \text{ на } S_2. \quad (4.13)$$

Полная граница исследуемой области образуется при объединении S_1 и S_2 . Предполагается, что коэффициенты K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} , а также q могут быть функциями пространственных переменных, но не зависят от φ . l_x , l_y , l_z – направляющие косинусы нормали к поверхности.

Краевая задача, состоящая из уравнения (4.11) и граничных условий (4.12), (4.13), используется для описания распространения тепла в трехмерных областях. В такой постановке коэффициенты K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} – коэффициенты теплопроводности, Q – внутренний источник тепла, а q определяет тепловой поток на части поверхности, h – коэффициент теплообмена. Функция φ , называемая полевой, представляет собой температуру тела. Для одномерных и двумерных задач можно получить соответствующие уравнения, положив равными нулю $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и/или $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Если рассматривается теплоизолированная граница, то на S_2 $q = 0$, $h = 0$, что дает:

$$K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z = 0 \text{ на } S_2. \quad (4.14)$$

Далее рассмотрим двумерный случай, когда $K_{xx} = K_{yy} = 1$ и $Q = 2G\theta$ и $\varphi_B = 0$. Тогда уравнение (4.11) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) будет использоваться нами в задаче о кручении упругого стержня некругового сечения. Функция φ в данной задаче будет являться функцией напряжений, G – упругая постоянная материала стержня, а θ – угол закручивания стержня. Напряжения сдвига, которые возникают при воздействии внешним скручивающим усилием, могут быть получены с помощью дифференцирования функции напряжений φ по переменным x , y .

Не менее важным приложением уравнения (4.11) является использование его в качестве уравнения безвихревого течения жидкости. Тогда $K_{xx} = K_{yy} = 1$, $Q = 0$, следовательно, уравнение (4.11) дает:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.16)$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$\varphi = \varphi_B \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y = 0. \quad (4.17)$$

Если полевую функцию задавать на непроницаемых границах расчетной области, то (6) будет определять линии тока такого безвихревого течения.

Вернемся к рассмотрению уравнения (4.11) с граничными условиями (4.12) и (4.13). С вариационной точки зрения такая постановка эквивалентна отысканию минимального значения следующего функционала:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left(K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2Q\varphi \right) dV + \int_S \left(q\varphi + \frac{1}{2} h(\varphi - \varphi_\infty)^2 \right) dS. \quad (4.18)$$

Минимизация функционала (4.18) осуществляется на множестве узловых значений $\{\Phi\}$. Сначала будем проводить процедуру минимизации функционала до вычисления интегралов. Такой подход даст возможность выбрать параметры элементов, наиболее удобные для выбранной задачи.

Сначала преобразуем функционал (4.18), для чего введем новые матрицы:

$$\begin{aligned} \{g\}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тогда функционал (4.18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi &= \int_V \frac{1}{2} (\{g\}^T [D] \{g\} - 2\varphi Q) dV + \int_{S_1} \varphi q dS + \\ &+ \int_{S_2} \frac{h}{2} (\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty + \varphi_\infty^2) dS. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Мы помним, что функции, зависящие от φ , не являются непрерывными по исследуемой области, поэтому введем в рассмотрение функции $\varphi^{(e)}$, которые определяются на отдельных элементах. Интегралы в (4.20) разбиваются на интегралы по каждому элементу в отдельности, поэтому

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\}) dV - \int_{V^{(e)}} \varphi^{(e)} Q dV + \int_{S_1^{(e)}} \varphi^{(e)} q^{(e)} dS + \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} (\varphi^{(e)} \varphi^{(e)} - 2\varphi^{(e)} \varphi_\infty + \varphi_\infty^2) dS \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В данном выражении E – общее число конечных элементов. Соотношение (4.21) можно записать в упрощенном виде:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}. \quad (4.22)$$

В данном выражении $\chi^{(e)}$ – вклад каждого конечного элемента.

Для того чтобы минимизировать χ , необходимо выполнить соотношения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} (\chi^{(e)}). \quad (4.23)$$

В (4.22) невозможно найти частные производные $\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} (\chi^{(e)})$, пока интегралы в выражении (4.20) не будут выражены через узловые значения, то есть через $\{\Phi\}$.

Вспомним, что

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}]\{\Phi\}. \quad (4.24)$$

Тогда мы можем найти $\{g\}^T$ из выражения (4.19) и подставим ее вместе с (4.24) в функционал (4.21).

Сначала запишем $\{g^{(e)}\}$:

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_p \end{Bmatrix}, \quad (4.25)$$

или в матричном виде

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{\Phi\}. \quad (4.26)$$

В выражении (4.26) $[B^{(e)}]$ – матрица производных функций формы. Ее элементы пока неизвестны, так как остаются неопределенными функции формы. Формулы (4.24) и (4.26) позволяют нам записать интегралы по конечным элементам в (4.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = & \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \left(\{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} \right) dV - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{\Phi\} dV + \\ & + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS - \\ & - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \varphi_\infty^2 dS. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Величины Q, q, h, φ_∞ являются неизвестными коэффициентами. Они оставлены под знаком интеграла по той причине, что могут изменяться внутри конечного элемента. Дифференцирование выражения (4.27) по узловым

величинам $\{\Phi\}$ – простая операция, тем не менее, требует некоторых пояснений.

Дифференцирование матричных соотношений. Продолжение рассмотрения задач теории поля

При минимизации функционала приходится дифференцировать матричные произведения $[N]\{\Phi\}$ и $\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}$ по $\{\Phi\}$. Здесь $[N]$ является вектор–строкой, а $[A]$ представляет собой квадратную матрицу. Данное дифференцирование проводится довольно просто, тем не менее, рассмотрим здесь его более подробно.

Запишем соотношение $\varphi = [N]\{\Phi\}$, в котором $[N] = [N_1 N_2 \dots N_r]$, $\{\Phi\}^T = \{\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_r\}$.

Здесь нам необходимо рассчитать производную φ по $\{\Phi\}$, то есть $\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}}$. Данная производная выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_r} \end{Bmatrix}.$$

Компоненты этого вектор–столбца вычисляются следующим образом:

$$\varphi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + \dots + N_r \Phi_r.$$

Если продифференцировать это соотношение, то получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = N_1, \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = N_2, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_r} = N_r.$$

Подставив эти выражения в $\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}}$, получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_r \end{bmatrix} = [N]^T.$$

Производная от $\{\Phi\}^T [N]^T$ по $\{\Phi\}$ дает то же самое.

Возьмем произведение следующего вида $\{\Phi\}^T [A] \{\Phi\}$. Нахождение его производной довольно просто проиллюстрировать, если взять небольшое

число коэффициентов матрицы $[A]$. Рассмотрим симметричную матрицу $[A]$ в виде:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ вектор } \{\Phi\}^T = \{\Phi_1 \Phi_2\}.$$

С использованием условия симметрии матрицы $[A]$ запишем:

$$\varphi = \{\Phi\}^T [A] \{\Phi\} = a_{11} \Phi_1^2 + 2a_{12} \Phi_1 \Phi_2 + a_{22} \Phi_2^2.$$

Дифференцируя это соотношение, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} = 2a_{11} \Phi_1 + 2a_{12} \Phi_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} = 2a_{21} \Phi_1 + 2a_{22} \Phi_2.$$

Тогда запишем окончательно соотношение для производной:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} \Phi_1 + 2a_{12} \Phi_2 \\ 2a_{21} \Phi_1 + 2a_{22} \Phi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} (\{\Phi\}^T [A] \{\Phi\}) = 2[A] \{\Phi\}.$$

Вернемся к рассмотрению дифференцирования функционала, о котором речь велась выше.

Будем находить производные слагаемых, входящих в формулу (4.27).

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} (\{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\}) dV \right) = \int_{V^{(e)}} ([B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\}) dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{\Phi\} dV \right) = \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}] \{\Phi\} dS \right) = \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS \right) = \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}] \{\Phi\} dS \right) = \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \varphi_\infty^2 dS \right) = 0.$$

Тогда запишем вклад отдельного элемента в общую сумму:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = \int_{V^{(e)}} ([B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\}) dV - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV +$$

$$+ \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS.$$

Запишем интегралы в компактном виде:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = [k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}, \quad \text{где}$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \left([B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \right) dV + \int_{S_2^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS,$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS.$$

Окончательно получаем следующую систему уравнений для нахождения неизвестных узловых значений:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}) = 0.$$

$$\text{Или } [K] \{\Phi\} = \{F\}, \text{ где } [K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Первая – матрица теплопроводности, вторая – вектор нагрузок.

Метод Галеркина

Рассмотрим метод Галеркина для решения дифференциальных уравнений. С помощью этого метода получается приближенное решение дифференциального уравнения. При этом должно выполняться следующее условие: разность между приближенным и точным решениями должна быть ортогональна функциям, используемым при аппроксимации.

Если исходить из дифференциального уравнения $Lu - f = 0$ (L – дифференциальный оператор) и приближенное решение искать в виде $\bar{u} = \sum N_i U_i$, то для него будем иметь $L\bar{u} - f = \varepsilon$, где ε – остаток или ошибка, поскольку это решение только приближенное. Необходимо, чтобы ε была малой величиной, для этого требуется выполнение равенства $\int_R N_i \varepsilon dR = 0$ для каждой из базисных функций N_i . Это равенство математически означает, что базисные функции должны быть ортогональны ошибке по области R .

Применение этого метода в сочетании с методом конечных элементов приводит к уравнениям:

$$\int_R N_\beta L(\varphi) dR = 0, \beta = i, j, k, \dots, \quad (4.28)$$

где φ искомая величина, которая аппроксимируется соотношением

$$\varphi = [N_i, N_j, N_k, \dots] \{\Phi\},$$

а $L(\varphi) = 0$ дифференциальное уравнение, определяющее φ . Пусть

$$L(\varphi) = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0,$$

$$\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0.$$

В этом случае (4.28) примет следующий вид:

$$\int_0^L N_\beta \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0.$$

Верхний предел интегрирования равен длине одномерной области, в которой ищется решение.

Высший порядок производных, которые могут содержаться в $L(\varphi)$, не ограничен, он определяется физическим смыслом задачи. Однако высший порядок производных в (4.28) на единицу больше порядка непрерывности интерполяционных соотношений.

Рассмотрим пример применения метода Галеркина к задаче об изгибе балки. Уравнение упругой линии балки, которое описывает одномерную задачу, запишем в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (4.29)$$

Здесь M – изгибающий момент в произвольной точке x балки, Н*см, E – модуль упругости, Н/см², I – момент инерции сечения, см⁴, и y – прогиб балки, см. Предполагаем, что M – известная функция координаты x , тем самым M/EI считаем заданной величиной.

Применим метод Галеркина к уравнению (4.29).

$$\int_0^L [N]^T \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0. \quad (4.30)$$

Интерполяционная функция для y определена на отдельном элементе, поэтому перепишем уравнение в виде суммы:

$$\sum_{e=1}^R \int_{L^{(e)}} [N^e]^T \left(\frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx, \quad (4.31)$$

где R – число элементов, а $L^{(e)}$ – длина отдельного элемента. Чтобы перейти к вычислению, необходимо выбрать функции формы $[N^e]$ и преобразовать интеграл (4.31) так, чтобы он содержал производные порядка не выше первого.

Ограничимся линейной моделью для y :

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right), \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = [N^e] \{Y\}.$$

Момент M – функция длины элемента, величина M/EI может быть аппроксимирована также с помощью линейной модели:

$$\frac{M}{EI} = [N^e] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}.$$

Интеграл

$$\int_{L^{(e)}} [N^e]^T \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx$$

преобразуем путем интегрирования по частям, что дает:

$$\int_{L^{(e)}} [N^e]^T \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx = [N^e]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^e]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx.$$

Подставляя этот интеграл в (3), получим соотношение:

$$[N^e]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{L^{(e)}} \left(\frac{d[N^e]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^e]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0.$$

Первое слагаемое в интеграле есть матрица коэффициентов элемента $[k^{(e)}]$ в уравнении

$$[k^{(e)}] \{Y\} = \{f^{(e)}\}.$$

После суммирования по элементам второе слагаемое в интеграле будет соответствовать вектор-столбцу $\{F\}$, а член вне интеграла вносит вклад в вектор-столбец $\{F\}$, при условии, что dy/dx определена на каждом конце элемента.

Вычислим первый интеграл:

$$\frac{d}{dx} [N]^T = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [N]\{Y\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix},$$

$$\int_0^L \frac{d[N]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix}.$$

Интегрирование выполняется в пределах от 0 до L , так как функции формы выражены в местной системе координат с центром в i -ом узле, L – длина элемента. Для второго интеграла имеем:

$$\int_0^L [N]^T \frac{M}{EI} dx = \int_0^L [N]^T [N] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}. \blacksquare$$

Двумерные задачи теории поля

Рассмотрим уравнение вида:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0.$$

Применение метода Галеркина дает нам:

$$\int_V [N]^T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q \right) dV = 0.$$

Преобразуем вторые производные. Для этого запишем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + [N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Следовательно:

$$[N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Аналогично:

$$[N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left([N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} ([N]^T) \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Тогда в интеграле первое слагаемое преобразится к виду:

$$\int_V [N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV.$$

К первому интегралу применим т. Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dV = \int_S [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x dS.$$

Интеграл от $\int_V [N]^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dV$ преобразуем аналогичным образом.

Будем считать, что $dV = t dS, dS = t dL$, при этом положим, что $t=1$ (толщина элемента =1):

$$\int_L [N]^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y \right) dL - \int_A \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - [N]^T Q) dA.$$

Преобразуем первый интеграл к следующему виду с учетом введения величины $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$:

$$\int_L [N]^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y \right) dL = \int_L [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL;$$

$$\int_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA - \int_A [N]^T Q dA - \int_L [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL = 0.$$

Первый интеграл здесь вносит вклад в $[k]$ – матрица жесткости, второй – вектор нагрузок, а третий и в $[k]$, и в $\{f\}$

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на границе, тогда интеграл исчезает.

Далее вспомним, что $\varphi = [N] * \{\Phi\}$.

Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial [N]}{\partial x} \{\Phi\}$, теперь подставим это в полученное предыдущее уравнение:

$$\int_S \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA * \{\Phi\} = \int_A [B]^T [B] dA * \{\Phi\}$$

Более детально рассмотрим последний интеграл. Он дает конвективную матрицу в задачах о переносе тепла

Пусть имеем на вертикальной границе ряд треугольных элементов (для простоты) и нам необходимо вычислить интеграл $\int_L [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL$ вдоль этой границы.

На ней поток тепла равен тем потерям, которые вызваны теплообменом с окружающей средой, т.е. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = h(\varphi_s - \varphi_d)$, где φ_s – температура границы тела, h – коэффициент теплообмена, φ_d – температура окружающей среды.

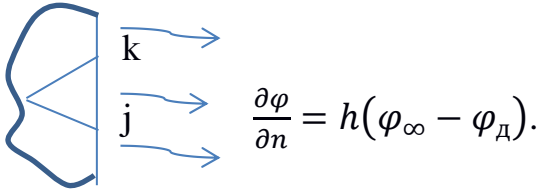
Внутри элемента: $\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$, а на поверхности (вертикальной границе): $\varphi = 0 * \Phi_i + L_2 \Phi_j + L_3 \Phi_k$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = h(\varphi_s - \varphi_d) = h[0 \ L_2 \ L_3] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} - h\varphi_d$$

$$\text{Тогда } \int_L [N]^T \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL = h \int_L [N]^T [N] dL * \{\Phi\} - \int_L [N]^T h\varphi_d dL,$$

где $[N] = [0 \ L_2 \ L_3]$

Если проинтегрировать с помощью L – координат, то получим те же соотношения, что получали ранее.



Применение метода Галеркина к решению задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши, получим ее решение численно, а затем обобщим на случай системы дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0$ при начальных условиях: $y(0)=0$ и $y'(0)=4$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 4 = 0$. Корни уравнения $\lambda = \pm 2i$ ($D < 0$), тогда решение записывается в виде:

$$y = e(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)e^{0 \cdot t}.$$

С учетом начальных условий получим: $y=4\sin 2t$.

Рассмотрим решение поставленной задачи методом Галеркина:

$$\int_0^t [N]^T \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y \right) dt = 0. \quad (4.30)$$

Преобразуем интеграл по частям, избавимся от 2-ой производной:

$$\int_{T_e} [N]^T \frac{d^2 y}{dt^2} dt = [N]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{T_j}^{T_i} - \int_{T_e} \frac{d[N]^T}{dt} \frac{dy}{dt} dt, \text{ где } T_e \text{ – шаг по времени}$$

(длина конечного элемента).

Тогда (4.30) запишется в следующем виде:

$$-[N^{(1)}]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} - \sum_{e=1}^n \int_{T_i}^{T_j} \left(\frac{d[N^{(e)}]^T}{dt} \frac{dy}{dt} - 4[N^{(e)}]^T y \right) dt = 0, \quad (4.31)$$

где R – число конечных элементов, T_i, T_j – значения времени, соответствующие узлам i и j элемента.

Запишем линейный интерполяционный полином в виде:

$$y = [N^{(e)}]\{Y\} = \left[\left(1 - \frac{t}{T_e}\right) \frac{t}{T_e} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix}. \quad (4.32)$$

Здесь в (4.32) использовалась местная система координат с центром в i -том узле. Тогда подставим (4.32) в (4.31):

$$-[N^{(1)}]^T \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} - \sum_{e=1}^E \int_0^{T_e} \left(\frac{d[N^{(e)}]^T}{dt} \frac{d[N^{(e)}]}{dt} \{Y\} - 4[N^{(e)}]^T [N^{(e)}]\{Y\} \right) dt = 0.$$

Для первого элемента получим:

$$-\begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Т.к. угол поворота во всех узлах не определен, то для других элементов получаем следующие выражения:

$$-\frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Положим длину элементов одинаковой, объединим уравнения:

$$\begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ \dots \end{Bmatrix} - \frac{1}{T_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \end{Bmatrix} + \frac{4T_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{Bmatrix}. \quad (4.33)$$

Все уравнения в (4.33), кроме первого, идентичны, тогда запишем систему для определения узловых значений в следующем виде:

$$\begin{aligned} -4 - \frac{1}{T_e} (Y_1 - Y_2) + \frac{4T_e}{6} (2Y_1 - Y_2) &= 0; \\ -\frac{1}{T_e} (-Y_{n-1} + 2Y_n - Y_{n+1}) + \frac{4T_e}{6} (Y_{n-1} + 4Y_n + Y_{n+1}) &= 0, n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Отметим некоторые особенные преимущества решения задачи Коши методом Галеркина.

- Шаг по времени может меняться (при необходимости).
- Функции формы можно варьировать.
- При большом шаге по времени можно применять функции формы более высокого порядка.
- При изменении шага по времени мы получили более одной пары рекуррентных соотношений (4.34).

Система дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$[C] \frac{d}{dt} \{\Phi\} + [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0; \quad (4.35)$$

где $[C]$ – матрица демпфирования, поговорим о ней позже, $[K]$ – матрица жесткости, $\{F\}$ – столбец нагрузок.

Решение данной системы позволит получить значения $\{\Phi\}$ в каждой точке рассмотренного временного интервала.

Будем решать эту систему двумя способами: методом конечных разностей и методом Галеркина.

Сначала рассмотрим первый метод.

В соответствии с определением производной будем иметь приближенное соотношение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta t} - \text{первая производная в средней точке интервала } [t_0, t_1].$$

Если считать узловые значения функциями времени, тогда можно записать:

$$\frac{d\{\Phi\}}{dt} = \{\dot{\Phi}\} = \frac{1}{\Delta t} (\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_0). \quad (4.36)$$

Так как $\{\dot{\Phi}\}$ вычисляем в средней точке интервала, то в ней же должны быть вычислены и $\{\Phi\}, \{F\}$.

Эти величины определим следующим образом:

$$\{\Phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_0), \quad \{F\}^* = \frac{1}{2} (\{F\}_1 - \{F\}_0). \quad (4.37)$$

Подставим (4.37), (4.36) в (4.25):

$$\frac{1}{\Delta t} [C]\{\Phi\}_1 - \frac{1}{\Delta t} [C]\{\Phi\}_0 + \frac{1}{2} [K]\{\Phi_1\} + \frac{1}{2} [K]\{\Phi_0\} + \{F\}^* = 0.$$

Преобразуем полученное соотношение:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\Phi_1\} = \left(\frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \{\Phi_0\} - 2\{F\}^* = 0. \quad (4.38)$$

Если считать известные узловые значения в момент времени t_0 , то $\{\Phi\}_1$ так же можно вычислить. $\{F\}^*$ содержит известные параметры и может быть вычислен до решения уравнения (4.38).

Так как (4.36) и (4.37) записаны в средней точке временного интервала, то $\{\Phi\}$ можно вычислять в ней же.

Это можно сделать, если решение из (4) вместе с $\{\Phi\}_0$ подставить в (4.37). Это же можно сделать исключением из (4) членов, содержащих $\{\Phi\}_1$. Тогда получим уравнение:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\Phi\}^* = \frac{2}{\Delta t} [C]\{\Phi\}_0 - \{F\}^*. \quad (4.39)$$

Независимо от того, какую формулу (4.38) или (4.39) мы используем, окончательно получаем:

$$[A]\{\Phi\}_{new} = [P]\{\Phi\}_{old} - \{F\}, \quad (4.40)$$

где $[A]$ – комбинация матриц $[C]$ и $[K]$ и зависит от шага по времени Δt . Если Δt и параметры материала от времени не зависят, то $[A]$ – постоянна во времени. Если же Δt и параметры материала изменяются в процессе решения,

то [A] необходимо вычислять на каждом шаге заново, суммировать по элементам и проводить к треугольному виду.

Элементы высокого порядка. Одномерный элемент

Раньше мы рассматривали симплекс-элементы. Другой подход состоит в применении элементов более высокого порядка, то есть комплекс или мультиплекс-элементов. Число узлов в таких элементах на более, чем единицу больше размерности задачи. При таком подходе требуемая точность достигается при меньшем количестве элементов.

В задачах, где градиенты искомых величин не могут аппроксимироваться кусочно-постоянными функциями, элементы более высоких порядков позволяют получать более точные результаты.

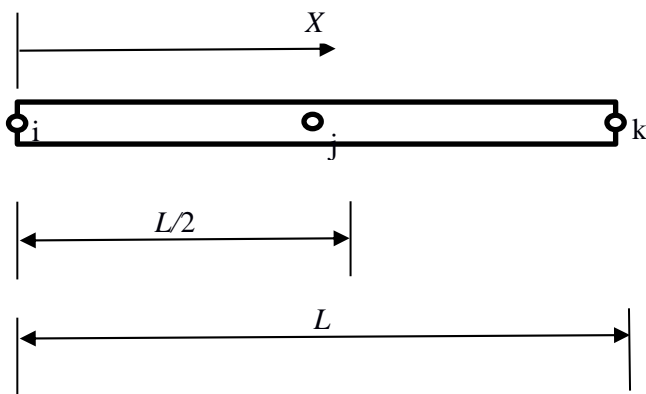
Квадратичные и кубические элементы

В общей форме аппроксимирующий полином имеет вид:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_r x^{r-1}, \quad (4.41)$$

где r – число узлов.

Рассмотрим элемент с тремя узлами (один посередине элемента)



Такому элементу соответствует полином

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2; \quad (4.42)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определяются из условий

$$\begin{cases} \varphi = \Phi_i \text{ при } x = 0 \\ \varphi = \Phi_j \text{ при } x = \frac{1}{2} \\ \varphi = \Phi_k \text{ при } x = L \end{cases} \quad (4.43)$$

Применение данных условий приводит к системе алгебраических уравнений, из которой находим:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \Phi_i \\ \alpha_2 = \frac{4\Phi_j - 3\Phi_i - \Phi_k}{L} \\ \alpha_3 = \frac{2}{L^2}(\Phi_k - 2\Phi_j + \Phi_i) \end{cases}. \quad (4.44)$$

Подставим (4.44) в (4.42) и сгруппируем коэффициенты перед узловыми значениями $\varphi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k$.

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1 - \frac{2x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right); \\ N_j &= \frac{4x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right); \\ N_k &= -\frac{x}{L}\left(1 - \frac{2x}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Функции в (4.45) удовлетворяют критерию

$$\sum_{\beta=1}^r N_\beta = 1, \quad \beta = i, j, k, \dots, r. \quad (4.46)$$

При большом числе узлов такая процедура поиска коэффициента α становится очень трудозатратной.

Рассмотрим второй способ поиска коэффициента α . Для этого воспользуемся формулой (4.46) и еще следующими свойствами функций формы:

$$N_\beta = \begin{cases} 0, & \text{во всех других узлах} \\ 1, & \text{в узле } \beta \end{cases}. \quad (4.47)$$

Запишем функцию формы в виде:

$$N_\beta = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_r x^{r-1}. \quad (4.48)$$

(4.48) следует из того факта, что все коэффициенты α_β из (4.41) или (4.42) можно представить в виде линейных комбинаций Φ_β . На самом деле, формулы

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_i\Phi_i + a_j\Phi_j + a_k\Phi_k; \\ \alpha_2 &= b_i\Phi_i + b_j\Phi_j + b_k\Phi_k; \\ \alpha_3 &= c_i\Phi_i + c_j\Phi_j + c_k\Phi_k. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Используем для трехузлового узлового элемента:

$$\begin{aligned} a_i &= 1, a_j = a_k = 0; \\ b_i &= \frac{4}{L}; b_j = -\frac{3}{L}; b_k = -\frac{1}{L}; \\ c_i &= \frac{2}{L^2}; c_j = -\frac{4}{L^2}; c_k = \frac{2}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Если в (4.42) коэффициенты α заменить линейными комбинациями угловых значений Φ_β , то после перегруппировки можно получить, что функции формы будут иметь вид, как аппроксимирующая функция

Например, можно записать функцию формы в виде:

$$N_\beta = a_\beta + b_\beta x + c_\beta x^2.$$

Выражение (7) запишем в следующем виде:

$$N_i = (\psi_1 + \psi_2 x)(\psi_3 + \psi_4 x) \cdot \dots \cdot (\psi_{2r-1} + \psi_{2r} x). \quad (4.51)$$

Коэффициенты ψ_β в (4.51) определяются из условий (4.47), которые легко удовлетворить подбором сомножителей в (4.51), чтобы каждый из них обращался в нуль в одном из узлов.

Для квадратичного элемента запишем совокупность функций f_β , каждая из которых обращается в нуль в определенном узле:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{x}{L}; \\ f_j &= 1 - \frac{2x}{L}; \\ f_k &= 1 - \frac{x}{L}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Введем функцию F_k следующим образом:

$$F_k = \begin{cases} f_k, & \text{если } k \neq \beta \text{ для } N_\beta \\ 1, & \text{если } k = \beta \text{ для } N_\beta \end{cases} \quad (\beta \text{ фиксировано, } k = i, j, k, \dots, r) \quad (4.53)$$

Тогда запишем выражения для функции формы с учётом введённой функции F_k :

$$N_\beta = A \cdot \prod_{k=i}^r F_k, \text{ где } \prod_{k=i}^r F_k = F_i \cdot F_j \cdot F_k \cdot \dots \cdot F_r, r - \text{число узлов элемента,}$$

A – константа, которая определяется из условия, что $N_\beta = 1$ в узле β .

Тогда N_β примет вид:

$$N_\beta = \prod_{k=i}^r \frac{F_k}{F_k|_{x=X_\beta}}. \quad (4.54)$$

Рассмотрим пример.

Запишем функции формы для квадратичного одномерного элемента для узла i :

$$\begin{aligned} \beta &= i, X_\beta = X_i = 0, \\ F_i &= 1, \text{ т. к. } k = i = \beta, \end{aligned}$$

$$F_j = f_j = 1 - \frac{2x}{L},$$

$$F_k = f_k = 1 - \frac{x}{L},$$

$$F_j|_{x=x_i} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{L} = 1,$$

$$F_k|_{x=x_i} = 1 - \frac{0}{L} = 1.$$

$$\text{Тогда } N_i = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-2x}{1} \cdot \frac{1-x}{1} = \left(1 - \frac{2x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Применение квадратичного элемента

Элементы высокого порядка применяются также, как и симплекс элементы, т.к. выбор интерполяционного многочлена не влияет на дифференциальные уравнения, решаемые в задаче.

Все отличия заключаются в том, что интегралы приходится вычислять заново. $\{g\}^T = [B]^T \{\varphi_1\}$.

Рассмотрим интеграл $\int_V [B]^T [D] [B] dV$ в задаче об одномерном переносе тепла в стержне.

$$T = [N] \cdot [T] = [N_i N_j N_k] \cdot \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix}.$$

Матрица градиентов

$$\{g\} = \frac{dt}{dx} \begin{bmatrix} dN_i & dN_j & dN_k \\ dx & dx & dx \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix}.$$

Используя выражение (4), получим:

$$\{g\} = \left\{ \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right); \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right); \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \right\} \{T\}.$$

В одном случае $[D] = [K_{xx}]$, $dV = A \cdot dx$:

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = K_{xx} A \int_0^L [\dots] dx.$$

Естественная система координат

Рассмотрим естественную систему координат применительно к одномерному квадратичному элементу. Введем относительную длину одномерного элемента $-1 \leq \xi \leq 1$, где ξ – координата. Начало отсчета ξ располагают в средней точке элемента.

Функции формы можно записать, используя (4.54) при условии, что f выражают через ξ , а не через x .

Покажем вычисление матрицы элемента.

В одномерном случае в выражение для коэффициентов матрицы теплопроводности входят производные $\frac{dN_\beta}{dx}$.

$$\left[K_{\beta\gamma}^{(l)} \right] = \int_V K_{xx} \cdot \frac{dN_\beta}{dx} \cdot \frac{dN_\gamma}{dx} dV, \quad \beta=i,j,k, \quad \gamma=i,j,k \quad (4.55)$$

Для вычисления $\left[K_{\beta\gamma}^{(l)} \right]$ нам необходимы зависимости

$$x = f(\xi) \text{ или } \xi = g(x). \quad (4.56)$$

Соотношение (4.56) можно записать с использованием выражений (4.45). Покажем это для квадратичного элемента.

Пусть интегральное соотношение для температуры

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k, \quad (4.57)$$

где $N_i = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi)$, $N_j = (1 + \xi)(1 - \xi)$, $N_k = \frac{\xi}{2}(1 + \xi)$.

Теперь запишем формулу преобразования координат, используя функции формы, а в интегральном соотношении узловые значения на координаты узлов:

$$x = N_i X_i + N_j X_j + N_k X_k. \quad (4.58)$$

$$\text{Тогда } \frac{dN_\beta}{d\xi} = \frac{dN_\beta}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} \rightarrow \frac{dN_\beta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} \cdot \frac{dN_\beta}{d\xi}.$$

$\frac{dx}{d\xi}$ – матрица Якоби преобразования координат, обозначается как $[Y]$.

В однородном случае эта величина

$$[Y] = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot X_i + \frac{dN_k}{d\xi} X_k + \dots + \frac{dN_V}{d\xi} X_V.$$

Применение численного интегрирования при вычислении матриц элементов

Матрица Якоби $[Y]$ является функцией ξ и не может быть вычислена, так как ее коэффициенты являются полиномами. В таких случаях $[Y]^{-1}$ не определяют явным образом, а при вычислении матриц элементов применяют метод численного интегрирования.

Существует 2 способа взятия интегралов численно.

При первом способе фиксируют n точек, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Строится интерполяционный многочлен степени $(n-1)$, совпадающий с подынтегральной функцией в указанных точках.

При $n=2$ получают формулу трапеций, а при $n=3$ получают формулу Симпсона²⁶. Этот способ называют квадратурой Ньютона–Котеса²⁷. Значение интеграла вычисляют как сумму значений подынтегральной функции в точках интегрирования, умноженных на весовые коэффициенты.

$$\int_a^b f(x)dx = L \cdot \sum_{S=1}^n H_S \cdot f(x_S), L = b - a.$$

При втором способе численного интегрирования точки разбиения области интегрирования не фиксируются, а подбираются, чтобы достичь наибольшую точность вычислений. При выборе n точек получают $2n$ неизвестных f и x , а порядок интегрируемого многочлена равен $(2n-1)$.

Это подход Гаусса–Лагранжа, при котором дополнительно решают некоторые уравнения для вычисления значений f и x .

В МКЭ применяют второй подход, так как он даёт меньшее количество точек интегрирования, чем квадратура Ньютона–Котеса при той же точности.

Субпараметрические, изопараметрические и суперпараметрические элементы

В *изопараметрических* элементах функции формы соотношения преобразования координат совпадают с интерполяционным полиномом. Такие элементы являются чаще исключением, а не правилом.

Для ускорений вычислений в соотношениях преобразования координат можно использовать более простые функции формы. Если стороны элемента прямолинейные, то для описания преобразований координат используют линейные функции формы. Матрица Якоби при использовании элементов с прямыми сторонами будут теми же самыми независимо от того, какие функции формы – линейные, квадратичные или кубические – использовать в формулах преобразования координат.

²⁶ Томас Симпсон (англ. Thomas Simpson, 20 августа 1710 — 14 мая 1761) — английский математик.

²⁷ Роджер Котс (англ. Roger Cotes; 10 июля 1682 — 5 июня 1716) — английский математик, астроном и философ, помощник Исаака Ньютона. «По своим математическим способностям из его поколения в Англии он уступал только Ньютону». Член Лондонского королевского общества (1711). За свою короткую жизнь (33 года) он совершил немало математических открытий, в том числе: квадратурные формулы Ньютона — Котеса и формула Эйлера, ввёл в науку радианную меру углов. Котс существенно помог Ньютону в подготовке второго издания его «Начал».

Покажем это на примере. Так как элемент – отрезок, то используем линейную формулу преобразования координат $x = N_i X_i + N_k X_k$.

С использованием линейных функций формы получим

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi), N_k = \frac{1}{2}(1 + \xi),$$

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)X_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)X_k,$$

$$X_i = \frac{1}{2}, X_k = \frac{3}{2}, \text{ тогда матрица Якоби примет вид}$$

$$[Y] = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot X_i + \frac{dN_k}{d\xi} \cdot X_k = \frac{1}{2} \cdot X_i + \frac{1}{2} \cdot X_k.$$

Получили тот же результат, что и при использовании квадратичных функций формы.

Получаем, что функция, определяющая преобразования координат, не должна иметь порядок интерполяционной функции. Таким образом, геометрия элемента может описываться независимо от аппроксимации искомой функции. Становится возможным сочетание интерполяционных полиномов высокого порядка и элементов простой геометрии, а также элементов сложной формы с простыми интерполяционными многочленами.

В некоторой области могут быть заданы два независимых множества узлов. Одно из них определяет форму элемента. Второе определяет интерполяционный полином

Возможны три варианта соотношения между числами узлов в этих множествах:

- Число узлов, использованных для определения формы элемента, меньше числа узлов, использованных при определении интерполяции функции.
- Число узлов, определяющих форму элемента, равно числу узлов, определяющих интерполяционную функцию.
- Число узлов, использующихся для задания формы элемента, больше числа узлов, использующихся для определения интерполяционной функции.

В соответствии с этими вариантами элементы называют субпараметрическими, изопараметрическими и суперпараметрическими.

Субпараметрические элементы используются там, где применяются комплекс-элементы. Они применяются, когда нет необходимости в искажении формы элемента.

Таким образом, становится неудобным использовать для обозначений узлов индексы i, j, k , так как нельзя отличить узлы, которые используются для определения формы элемента, от узлов, которые определяют интерполяционный полином.

Далее будем использовать числовые значения индексов и

$$\varphi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 + \dots + N_r \Phi_r.$$

Глава 5. Медицинские постановки задач биомеханики

Биомеханика сердечно-сосудистой системы

Граничные условия на выходах при численном моделировании гемодинамики сонной артерии

Индивидуальный подход к моделированию гемодинамики сонных артерий и артерий виллизиевого круга человека требуется в случаях, когда встает вопрос о необходимости хирургического вмешательства в связи с атеросклеротическим поражением или возникновением аневризм. При этом часто данные патологические состояния протекают бессимптомно, и показанием к операции является лишь личный опыт врача (консилиума врачей). В случае же, когда врач при планировании лечения хочет прибегнуть к методам биомеханического моделирования, необходимо поставить максимально адекватную задачу о течении крови в системе сосудов. Разработка строгого подхода к постановке задачи, включающей индивидуальные граничные условия, свойства сосудов и персонализированную геометрию, является актуальной научной проблемой, которой посвящена работа.

С точки зрения научной значимости и актуальности, научная проблема, на решение которой направлен проект, полностью соответствует современным потребностям медицинских работников и ученых-биомехаников, занимающихся моделированием гемодинамики. Дело в том, что в целом ряде работ [7, 14, 15, 17], которые были выпущены различными научными группами в последние несколько лет, ставится задача о необходимости проработки вопроса изучения гемодинамики в случае конкретного пациента. Постепенно теряет актуальность решение модельных [4], существенно упрощенных задач с рядом допущений, касающихся свойств материалов и граничных условий. Современная медицина, инструментом которой и является раздел биомеханики, посвященный численному моделированию гемодинамики, ориентирована именно на персонализированный подход, не терпящий осредненных значений и существенных упрощений.

При планировании лечения и анализе процессов, происходящих в системе кровеносных сосудов пациента, важно получить количественные результаты, а не только качественную картину гемодинамики. При этом

очевидно, что проводить моделирование всей сердечно-сосудистой системы целиком практически невозможно ввиду огромной трудоемкости такого подхода и чрезвычайной сложности получения большого объема исходных данных, необходимых для постановки задачи о кровотоке конкретного пациента. Следовательно, граничные условия, которые ставятся исследователем при численных расчетах, должны не только обеспечивать банальную сходимость решения, но также моделировать влияние на рассматриваемые артерии той части сосудистого русла, которая в данном исследовании не рассматривается.

На сегодняшний день нет единого мнения по поводу персонализированного подхода к постановке задачи гемодинамики с точки зрения численного моделирования. Нет также работ, которые бы содержали полный цикл сравнения и верификации разработанных на текущий момент математических подходов к моделированию как между собой, так и с экспериментальными данными (данными натуральных экспериментов) и данными медицинского диагностического оборудования. Здесь имеется в виду так называемая двухуровневая или двухступенчатая верификация результатов численного биомеханического моделирования.

Своевременная диагностика атеросклероза и выявление бляшек, склонных к отрыву или разрыву, позволяет правильно спланировать лечение, предотвратить инсульт и спасти жизнь человека. Сегодня решение о необходимости лечения принимается на основе симптоматики заболевания и степени сужения просвета (стеноза) сонной артерии.

Степень стеноза обычно оценивают при помощи стандартных методов визуализации, таких как ультразвуковое исследование [3]. Тем не менее, становится все более очевидным, что одна только степень стеноза не является наиболее объективным предиктором риска инсульта, и морфология атеросклеротической бляшки играет важную роль. Поэтому современные исследования направлены на оценку плотности бляшки, ее прочностных свойств. Эти характеристики могут служить объективными и точными предикторами ее разрыва. Исследования в области визуализации сонной артерии направлены на выявление характеристик, определяющих нестабильные бляшки. Фиброзная покрышка атеросклеротической бляшки

может быть подвержена разрыву, если возникающие в ней механические напряжения превышают ее прочность.

Биомеханика позволяет рассчитать напряжения и деформации в бляшке и ее покрышке, что позволит обеспечить надежный прогноз риска ее разрыва [4, 5]. Биомеханические исследования и расчеты требуют знаний биомеханических свойств атеросклеротической ткани бляшки, а также знаний о форме сосуда, его геометрии и характеристиках течения крови.

Получение механических свойств сосудов

В последние годы у исследователей появился крайне высокий интерес к применению сдвиговой эластографии при исследовании прочностных характеристик сосудов человека. Показана высокая воспроизводимость результатов при измерении модуля Юнга методом эластографии [1, 2]. Выявлено, что сдвиговая эластография может служить дополнительным методом обнаружения симптоматических бляшек сонных артерий и в сочетании с обычным ультразвуком может повысить эффективность их дифференциации по степени риска разрыва.

Авторы показали [2], что сдвиговая эластография способна количественно оценить эластичность сонной артерии и идентифицировать нестабильные бляшки сонных артерий.

Исследования показывают, что полученные при эластографии данные могут быть использованы для классификации уязвимости и классификации атеросклеротических бляшек. Так в работе [19] рассмотрен конкретный случай сонной артерии с атеросклерозом. Авторами показано, что модуль упругости кальцифицированной части бляшки составил 110 кПа, в то время как модуль упругости части бляшки с тромбом и кровоизлиянием составил 47 кПа.

Получение знаний о геометрии сонных артерий

Разные авторы и научные школы используют различные методы оценки морфометрических параметров сосудистой стенки сонных артерий. Используются данные магнитно-резонансной томографии [5] для построения и дальнейшего анализа моделей сонных артерий человека (и плоских, и трехмерных). Опубликованы статьи [6] с результатами сегментации

изображений ультразвукового исследования для построения моделей сонных артерий.

Разработаны методы [7] обработки изображений КТ-ангиографии для создания 3D моделей артерий. Созданы программные средства для автоматизации данного процесса [8].

Сегодня на базе сосудистых клиник в России обычно доступны и высококлассные современные УЗ-аппараты и компьютерные томографы. Комбинация этих устройств позволяет подробно изучить морфометрические характеристики сонных артерий и сосудов головного мозга и построить их реалистичные трехмерные и плоские модели, пригодные для биомеханического моделирования. И если для сонных артерий может быть достаточно УЗ-аппарата, то для изучения артерий виллизиевого круга в общем случае необходимо выполнять КТ исследование с контрастированием. Если говорить об артериях виллизиевого круга, то чаще такие сосуды моделируют в постановке с жесткими стенками [9].

Граничные условия на выходах наружной и внутренней сонных артерий

Выбор граничных условий при биомеханическом моделировании сонных артерий зависит и от цели моделирования, и от применяемой модели, и от возможностей исследователя в получении исходных данных пациентов.

Многие авторы сегодня озадачены вопросом выбора и постановки корректных граничных условий на выходах из сонных артерий. Нулевое давление, которое ставили в более ранних работах, в последние годы уже почти не используется, так как не является физиологичным. Сегодня среди подходов [10, 11], позволяющих подобрать корректные граничные условия на выходе, применяют решение Уомерсли²⁸, методы электроаналогии, закон Мюррея и другие методики. Все эти подходы нацелены на то, чтобы подобрать такие граничные условия, при использовании которых получалось бы решение индивидуальной задачи биомеханики для конкретного пациента, соответствующее его клиническим данным.

²⁸ Джон Рональд Уомерсли (20 июня 1907 - 7 марта 1958) был британским математиком и ученым-компьютерщиком, внесшим важный вклад в развитие компьютеров и гемодинамики. В настоящее время его главным образом помнят за его вклад в кровоток, гидродинамику и одноименное число Уомерсли, безразмерный параметр, характеризующий нестационарный поток.

Ряд исследователей поддерживает постановку граничных условий на выходах в виде модели Windkessel [12, 13]. И это на сегодняшний день – наиболее правильный и реалистичный вариант граничных условий на выходах, так как он позволяет оценить сопротивление сосудов. Модель Франка²⁹ Windkessel (при переводе с немецкого «воздухосборник» или «воздушная камера») описывает гемодинамику артериальной системы с точки зрения сопротивления и податливости. Это объясняет снижение аортального давления в диастолу. Модель Windkessel описывает общие характеристики входного сопротивления с физиологически интерпретируемыми параметрами.

Что касается входных граничных условий, то здесь все довольно просто. Обычно это объемный кровоток или поле скорости с тем или иным профилем [18]. Эту информацию можно получить для конкретного пациента при ультразвуковом исследовании, причем и для сонных артерий [14, 15], и для виллизиевого круга. В последний кровь попадет из внутренних сонных и позвоночных артерий, которые доступны для УЗИ.

Есть работы [16, 17], в которых входной кровоток оценивают при помощи фазоконтрастной магнитно-резонансной томографии, но из-за ее низкой распространенности и высокой стоимости в России и в мире (при исследовании сосудов) этот способ менее интересен и применим при моделировании.

Если подытожить, то наиболее перспективный способ оценки индивидуальных свойств сосудистой стенки – это эластография, входных граничных условий при моделировании течения крови – ультразвуковое доплеровское исследование, оценки толщины стенки сонных артерий – УЗИ. А наиболее перспективные и реалистичные граничные условия на выходах из артериальных сосудов – модель Windkessel.

²⁹ Отто Франк (Otto Frank, 21 июня 1865 – 12 ноября 1944) - немецкий врач и физиолог, внесший ряд важных вкладов в физиологию сердца и кардиологию. Первые исследования Франка были связаны с поглощением жира. Но в своей постдокторской работе Франк исследовал изометрическое и изотоническое сократительное поведение сердца, и именно этой работой он наиболее известен. Работа Фрэнка по этой теме предшествовала работе Эрнеста Старлинга, но обычно считается, что оба они заложили основы того, что называется законом сердца Франка–Старлинга.

Факторы разрыва аневризм сосудов головного мозга

Аневризмы сосудов головного мозга представляют собой патологические расширения просвета сосудов и присутствуют у 2-5% населения. Их разрыв приводит к субарахноидальному кровоизлиянию, которое является одной из причин геморрагического инсульта. Смертность при субарахноидальном кровоизлиянии составляет до 45%, а половина выживших имеет серьезные проблемы неврологического характера. Более того, пациенты с множественными аневризмами имеют худший прогноз при разрыве по сравнению с пациентами с одной аневризмой. Диагностика аневризм затруднена в связи с отсутствием характерной симптоматики.

Несмотря на то, что прогноз при разрыве аневризмы довольно неблагоприятный, выполнение превентивного операционного вмешательства по лечению неразорвавшейся аневризмы остается под вопросом, так как оно может быть связано с серьезными постоперационными осложнениями. Именно этот факт требует выработки адекватных и надежных критериев, позволяющих оценить риск и вероятность разрыва.

На протяжении нескольких десятилетий многие авторы пытаются выявить морфологические и механические факторы, определяющие риск разрыва аневризм сосудов головного мозга. Сегодня авторами оцениваются отношение размера аневризмы и сосуда, соотношение сторон аневризмы, ширина шейки, расположение аневризмы, неправильная форма, величина касательных напряжений на стенке, эффективные напряжения в стенке, давление крови в куполе аневризмы.

Соотношение размеров аневризмы (aspect ratio)

В научной литературе первое упоминание о соотношении размеров аневризмы относится к 1999 году. Hiroshi Ujiie [34] с соавторами при помощи ультразвуковой доплерографии исследовал влияние данного параметра на гемодинамику внутри аневризмы. Показано, что при соотношении размеров от 1.6 и выше гемодинамика внутри аневризматического мешка характеризуется малыми скоростями, приводящими к разрушению стенки, что справедливо для разорвавшихся аневризм. Эти же авторы измерили соотношения размеров для более 200 пациентов с разорвавшимися (129 штук) и неразорвавшимися (78 штук) аневризмами. Статистический анализ

подтвердил, что соотношение размеров, равное 1.6, является критерием отличия аневризм, склонных к разрыву, от аневризм, не склонных к разрыву.

Аналогичные выводы получил Weir [36] в 2003 году в своей работе на основе данных о 774 аневризмах 532 пациентов. В статье изучены морфологические характеристики 183 аневризм (75 разорвавшихся и 107 неразорвавшихся). Было выявлено, что соотношение размеров аневризмы является надежным предиктором их разрыва. Для разорвавшихся аневризм было получено среднее значение 2.7, а для неразорвавшихся – 1.8.

В последние годы соотношение размеров аневризмы также считается предиктором разрыва. Backes [24] наряду с неправильной формой считает соотношение размеров более 1.3 ассоциированным с разорвавшимися аневризмами. Jing [29] с соавторами показали, что большое соотношение размеров аневризмы характеризует разрыв множественных аневризм сосудов головного мозга. Huang [26] выявил, что соотношение размеров более 1.6 независимо от размеров аневризмы и индивидуальных параметров пациента характеризует разрыв.

Отношение к размеру сосуда (size ratio)

Первая работа, посвященная исследованию отношения размера аневризмы к размеру сосуда, была опубликована в 2008 году. Позднее, в 2009 году, Tremmel [33] с соавторами при помощи численного моделирования показали, что отношение размера аневризмы к размеру сосуда связано с риском разрыва, а высокие значения данного параметра определяют аневризмы с потоками крови, характерными для разорвавшихся аневризм. Этот вывод подтверждает факт, что именно гемодинамика является одной из причин разрыва аневризмы. Показано, что не размер аневризмы, а именно соотношение ее размера с диаметром сосуда определяют гемодинамику внутри аневризмы. Отношение размера аневризмы к диаметру сосуда может быть довольно просто измерено и вычислено на основе двумерных ангиографических изображений, а величина данного параметра, большая 3, свидетельствует о том, что такая аневризма имеет высокий риск разрыва.

Исследования последних лет также указывают на то, что отношение размера аневризмы к диаметру сосуда может считаться предиктором разрыва. Средние значения данного параметра были 2.09 и 1.55 для разорвавшихся и

неразорвавшихся аневризм. Jiang [28] с соавторами вычислил другие средние значения: 1.07 и 1.55 для неразорвавшихся и для разорвавшихся аневризм, а Futami считает, что отношение размера аневризмы к диаметру сосуда величиной 2.1 может считаться пороговым и характеризовать переход аневризмы в стадию высокого риска разрыва.

Lv [32] с соавторами в своем исследовании рассматривали одиночные аневризмы задней соединительной артерии малого диаметра (до 7 мм), которые, в соответствии с выводами ISUIA, являются безопасными с точки зрения разрыва. Lv приводит данные, что более половины (68 против 40) малых аневризм задней мозговой артерии разорвались, а их size ratio оказалось более высоким, что подтвердил многофакторный логистический анализ.

Неправильная форма (irregular shape)

Под неправильной формой аневризмы будем понимать наличие неровностей и выпуклостей на ее стенке или "аневризм на аневризме". Такую форму аневризм описал Weir [35] еще в 1987 году. Известно, что в 84% случаев разрыв аневризмы происходит в ее куполе. Все больше исследователей указывают, что разорвавшиеся аневризмы имеют неправильную форму. С точки зрения механики, стенка аневризмы с неоднородностями может иметь неоднородное поле напряжений, а структура потока внутри таких аневризм становится нестабильной и неоднородной. Неправильная форма купола аневризмы указывает на высокий риск разрыва независимо от ее размера. Возникновение неровностей на поверхности купола свидетельствует о дегенерации ее стенки и о возможном тромбозе ее просвета.

Касательные напряжения на стенке аневризмы

Существует две противоположные точки зрения на то, какие (высокие или низкие) касательные напряжения на стенке считать опасными и определяющими разрыв аневризмы. С одной стороны, считается, что высокие касательные напряжения могут вызывать механическое повреждение эндотелия, которое может инициировать ремоделирование и дегенерацию стенки. Это может вызвать дальнейшее увеличение размера аневризмы и ее разрыв. С другой стороны, низкие касательные напряжения влияют на застой крови в куполе, вызывающий дисфункцию эндотелия и адгезию тромбоцитов

и лейкоцитов на поверхности стенки, что вызывает повреждение интимы, ее воспаление и дальнейшую деградацию стенки.

По результатам Kaneko [30] и соавторов, низкие касательные напряжения и вихревые потоки в куполе аневризмы меняют ориентацию эндотелиальных клеток и способствуют росту аневризмы и повреждению ее стенки. Данные выводы были сделаны на основе выполнения численного моделирования и натурального эксперимента по наблюдению за потоком жидкости в модели сосуда с аневризмой. В то же время, эндотелиальные клетки в нормальном сосуде с ламинарным потоком крови ориентированы по потоку и имеют регулярно ориентированную структуру. Показано, что низкие касательные напряжения на стенке аневризмы, независимо от других параметров и данных пациента, являются фактором разрыва множественных внутричерепных аневризм. Более того, разорвавшиеся аневризмы, в отличие от неразорвавшихся, имели более сложную структуру потоков и множественные завихрения. Это может быть объяснено тем, что именно разорвавшиеся аневризмы имеют, как правило, неоднородную структуру стенки, поверхность которой предполагает наличие аневризм в аневризме (неправильная форма).

Kojima [31] численно и при помощи натурального эксперимента исследовал аневризму глазной артерии, за которой велось наблюдение в течение 5 лет (с 2006 по 2011 год), и которая разорвалась. Численное моделирование пульсирующего потока крови показало, что аневризма росла в областях с низкими касательными напряжениями на стенке. Результаты расчетов были подтверждены экспериментально. Увеличение соотношения размеров (aspect ratio) с возрастом аневризмы подтверждает клинические исследования и говорит о том, что у разорвавшихся аневризм этот параметр больше, чем у неразорвавшихся.

Краткие выводы по факторам разрыва аневризм

Существует проблема в исследовании морфологических и биомеханических параметров аневризм как предикторов разрыва. Разные авторы приводят разные критерии, которые определяют аневризмы, склонные к разрыву.

Касательные напряжения на стенке – это наиболее удобный для вычисления при помощи биомеханического моделирования параметр. Но его числовые характеристики затруднительно измерить у пациента на этапе диагностики, поэтому пока его применение в медицинской диагностике остается практически невозможным. Развитие вычислительных методов и методов диагностики позволяет предположить, что именно механические факторы, которые могут быть рассчитаны при помощи методов биомеханики и компьютерного моделирования, смогут стать наиболее эффективным и надежным параметром оценки вероятности роста и разрыва.

Необходима разработка адекватного и подтвержденного (теоретически и экспериментально) критерия разрыва аневризм, который мог бы позволить диагностам выявлять аневризмы, склонные к разрыву, и назначать их своевременное лечение. Мы полагаем, что для каждого конкретного пациента необходимо оценивать и механические, и геометрические факторы в совокупности. При таком подходе будут задействованы и методы оценки морфологии аневризм на основе данных КТ и МРТ, и методы компьютерного моделирования. В качестве исходных данных при моделировании должны быть использованы изображения сосудов, полученные при помощи КТ и/или МРТ, а также индивидуальные параметры кровотока, оцененные при помощи ультразвукового исследования.

На сегодняшний день наиболее актуальной задачей биомеханики сосудов головного мозга [27] является задача выявления и математического обоснования критического значения геометрического параметра AR , пригодного для выявления аневризм, склонных к разрыву. Статистический анализ опубликованных значений AR для разорвавшихся и неразорвавшихся аневризм дает возможность вычислить критическое значение AR , позволяющее выявлять аневризмы, склонные к разрыву, а биомеханические численные расчеты направлены на обоснование полученного критического значения AR .

Механическая теория атерогенеза

Атеросклероз – это мультифокальное заболевание, которое связано с биохимическими, иммунологическими и молекулярно-генетическими нарушениями и проявляется в возникновении бляшек на стенках сосудов. В

атерогенезе участвуют сосудистая стенка, форменные элементы крови, находящиеся в ней в растворенном виде активные вещества, а также локальные нарушения кровотока [37]. Сегодня атеросклероз – это основная причина развития ишемической болезни сердца и цереброваскулярной патологии. Он может протекать незаметно в течение длительного времени пока не вызовет инфаркт миокарда, ишемический инсульт, стенокардию, хроническую мозговую недостаточность и др.

Атерогенез – это многофакторный процесс, и сегодня не разработана всеобъемлющая теория, которая смогла бы объяснить и учесть все его аспекты. Одной из доминирующих гипотез считается гипотеза «реакции на повреждение». В соответствии с ней, клетки эндотелия подвергаются постоянным воздействиям, нарушающим их целостность. Повреждения клеток эндотелия ведут к утрате их способности правильно функционировать или соединяться друг с другом и с подлежащей соединительной тканью. К повреждающим факторам можно отнести химические травмы при гиперхолестеринемии или гомоцистинемии, а также механические воздействия (стресс), возникающие вследствие гемодинамических воздействий крови и др. [37, 38, 43].

Механическая теория атерогенеза предполагает, что механические факторы, такие как касательные напряжения на стенке сосуда, давление, эффективные (эквивалентные) напряжения в стенке сосуда и др. играют определяющую роль в развитии атеросклероза [42].

В литературе, в первую очередь, особое внимание уделяется касательным напряжениям на стенке (Wall Shear Stress, WSS) [47, 53]. Авторы [39, 41, 45] также связывают гиперплазию интимы сосудистой стенки с касательными напряжениями. Низкие (менее 1.5 Па) и высокие касательные напряжения одинаково негативно сказываются на поведении стенок сосудов. Высокие значения касательных напряжений связывают с повреждением эндотелия, разрывом бляшки [50], агрегацией тромбоцитов, тромбозом [40, 49]. Низкие касательные напряжения имеют прямую связь с атеросклерозом, что подтверждают многие авторы [48, 50]. В работе Younis H.F. et al. [52] показано, что касательные напряжения величиной менее 1.5 Па могут

стимулировать атерогенный фенотип и, как правило, обнаруживаются в областях, склонных к образованию атеросклеротических бляшек.

Augst A.D. с соавторами [39] считают, что увеличение толщины стенки здоровых артерий – это ответ на гипертензию.

Существует мнение [51], что области с концентрациями высоких механических напряжений в стенке сосуда подвержены возникновению атеросклероза. К таким областям, например, относят участки деления сосудов, когда поток крови разбивается на два и его кинетическая энергия гасится о стенку [44, 48].

Можно полагать, что изучение касательных напряжений на стенке, эквивалентных напряжений в стенке, давления крови, деформаций стенки и других механических параметров позволит более детально изучить процесс атерогенеза и выявить критерии прогнозирования поведения атеросклеротических бляшек.

Стенозы внутренних сонных артерий и гемодинамика артерий виллизиевого круга

В последние годы во многих исследовательских работах, посвященных изучению аневризм сосудов головного мозга, отмечается, что одной из причин образования аневризмы служит атеросклероз внутренней сонной артерии (ВСА). В результате сужения их просвета происходит изменение объемного кровотока на входе в виллизиев³⁰ круг, что влечет за собой перераспределение потоков крови за счет его компенсаторных функций. Именно это может служить отправной точкой к формированию аневризм.

По данным литературы, сочетанная патология, связанная с наличием атеросклеротических отложений ВСА и аневризм сосудов виллизиевого круга, встречается у 1.9-3.2 % населения [58, 59, 61]. Аневризмы и стенозы имеют аналогичные факторы риска [66], что объясняет их наличие у одних и тех же пациентов. Недавние исследования указывают на то, что изменения в

³⁰ Томас Уиллис (27 января 1621, Грейт-Бедвин, графство Уилтшир — 11 ноября 1675, Лондон) — британский учёный-медик. Был одним из лидеров английских ятрохимиков, которые пытались объяснить работу организма с помощью тогдашних знаний о химических взаимодействиях. Он известен своими тщательными исследованиями нервной системы человека и различных заболеваний, сыграл важную роль в развитии представлений об анатомии, неврологии и психиатрии. Был профессором натурфилософии Оксфордского университета (1660-75), открыл врачебную практику в Лондоне в 1666 году и стал одним из самых известных и уважаемых медиков того периода. Является одним из основателей Лондонского королевского общества.

гемодинамике питающих головной мозг артерий ответственны за рост и увеличение размеров аневризм артерий виллизиевого круга [58, 59, 62]. По мнению Немап L.M. и соавторов, стеноз сонных артерий может увеличивать риск развития аневризм артерий виллизиевого круга. Иногда [60, 61, 63, 64] отмечается закупорка аневризм, уменьшение их размеров вследствие изменения гемодинамики питающих головной мозг артерий. Авторы [65] полагают, что именно стеноз ВСА может служить причиной образования аневризм артерий головного мозга: после выполнения операции эндартерэктомии компьютерная томография показала уменьшение размеров аневризмы передней соединительной артерии (ПСА). Аналогичная ситуация была отмечена в [63]: после выполнения эндартерэктомии правой ВСА аневризма ЗСА существенно уменьшилась из-за разворота кровотока по артерии. Более того, авторы [63] утверждают, что именно стеноз правой ВСА послужил причиной возникновения аневризмы задней соединительной артерии (ЗСА), так как через нее возник существенный компенсационный кровоток от вертебро-базиллярного бассейна в передние отделы виллизиевого круга.

Опубликован ряд случаев возникновения аневризм сосудов виллизиевого круга после терапевтической окклюзии ВСА при выполнении стентирования или эндартерэктомии [67, 68]. Этот факт может подтверждать теорию возникновения аневризм, являющихся следствием сужения просвета ВСА.

Патологии строения виллизиевого круга, а также аневризмы его артерий в сочетании со стенозами ВСА в последние годы все чаще анализируют с помощью методов биомеханического моделирования.

В работе [56] исследовался замкнутый круг, а также разомкнутый с отсутствующими (по-отдельности) ПСА и ЗСА. Кроме того, на правой ВСА моделировались различные степени стеноза. На входах в систему задавалось давление 92 мм рт.ст. На выходах задавалось давление в 43.5 мм рт.ст., которое вычислялось авторами из соображений о сопротивлении сосудов, лежащих ниже по течению. В результате расчетов авторы [56] получили объемные кровотоки на выходах из сосудов в различных комбинациях патологически измененной ВСА и виллизиевого круга. По изменению соотношений

выходных объемных кровотоков авторы оценивали наиболее опасные с точки зрения прекращения кровоснабжения головного мозга комбинации патологий сосудистого русла. Показано существенное перераспределение кровотоков при наличии даже небольшого атеросклеротического поражения.

В статье [57] оценивалось влияния геометрии сосудов виллизиевого круга на возможность образования аневризм. Авторы выявили, что повышенные касательные напряжения на стенке возникают в областях, в которых наиболее часто появляются аневризмы.

Авторы работы [55] в ходе анализа данных магнитно-резонансной ангиографии оценивали корреляцию между наличием атеросклеротического поражения сонных артерий и морфологию артерий виллизиевого круга. Выявлено, что при стенозе сонной артерии пациенты часто имели незамкнутый круг.

В работе [54] авторы моделировали виллизиев круг конкретного пациента при 30% и 70% стенозах ВСА. Оценивали влияние вращательных манипуляций на мозговое кровообращение (в ПСА и ЗСА). Выявлено, что вращательные манипуляции не оказывают влияние на мозговое кровообращение и безопасны в применении для пациентов со стенозом сонных артерий до 90%.

Таким образом, в последние несколько лет исследование взаимосвязи патологических изменений виллизиевого круга и атеросклеротического поражения ВСА находится под вниманием исследователей. Тем не менее, не сформулированы наиболее опасные с точки зрения образования аневризм сочетания атеросклеротических поражений ВСА и вариантов строения виллизиевого круга.

Биомеханика опорно-двигательного аппарата

Медицинскую постановку задач биомеханики опорно-двигательного аппарата продемонстрируем на примере спондилолистеза пояснично-крестцового сегмента позвоночника.

Спондилолистез – это смещение вышележащего позвонка относительно нижележащего. Для успешного лечения спондилолистеза на сегодняшний день при оперативных вмешательствах применяют декомпрессию, коррекцию и/или стабилизацию поврежденного сегмента [69, 71, 72]. В последние годы

транспедикулярная фиксация (ТПФ) позвоночника погружными конструкциями широко применяется при заболеваниях и повреждениях позвоночника, при которых необходимо стабилизировать пораженные позвоночно-двигательные сегменты (ПДС).

Возможна установка фиксирующей конструкции без замены поврежденного межпозвонкового диска и с установкой заменителя диска (*кейдж*). Последние могут быть различной формы и производятся из различных материалов. Цель установки фиксаторов состоит в поддержке и/или корректировке анатомического строения позвоночно-двигательных сегментов, распределении нагрузки, действующей на позвоночник, до того, пока не произойдет сращение позвонков и сформируется костный блок. Выбор устройства и метода фиксации зависит от клинической проблемы, анатомического строения позвоночно-двигательного сегмента и от предпочтений хирурга [70]. Более того, на рынке присутствуют различные варианты фиксаторов и кейджей, производимые в России и за рубежом.

Часто хирурги планируют вариант лечения на собственном опыте, не принимая во внимание биомеханику конструкций и биологического объекта. Такой подход может приводить к нежелательным послеоперационным осложнениям, вызванным недостаточным планированием операции.

В связи с этим существует проблема выбора того или иного типа фиксации и/или заменителя межпозвонкового диска. С помощью методов биомеханики можно показать эффективность того или иного способа фиксации и обосновать его применение в каждом индивидуальном случае. Биомеханическое моделирование выступает здесь как математически и механически обоснованный аргумент при выборе варианта лечения и способа фиксации поврежденного сегмента.

При помощи биомеханического моделирования становится возможным обоснование необходимости выполнения коррекции сагиттального профиля и достижения оптимальных параметров сагиттального баланса. На самом деле, биомеханические исследования саратовской научной школы показали, что оптимальные характеристики сагиттального баланса дают наиболее рациональное напряженно-деформированное состояние имплантатов и тканей позвоночника.

Для решения задачи о выборе наиболее оптимального (рационального) варианта лечения необходимо выполнение геометрического планирования операции. Для этого строится персонифицированная 3D модель сегмента позвоночника, а затем она совмещается с имплантатами. Построение 3D модели сегмента позвоночника осуществляется на основе исходных данных КТ конкретного пациента, о чем будет рассказано далее.

Биомеханика интрамедуллярных фиксаторов при остеосинтезе диафизарных переломов бедра

На сегодняшний день остеосинтез блокируемыми интрамедуллярными стержнями является широко распространенным методом лечения диафизарных переломов длинных костей нижней конечности человека [87]. Эта методика позволяет быстро стабилизировать перелом с помощью относительно малоинвазивной процедуры по установке и вернуть поврежденную конечность к полноценному функционированию [73, 79]. Расширяющиеся стержни являются относительно новой технологической разработкой и устанавливаются без помощи проводника и рассверливания канала. По мнению авторов [82, 81], они обеспечивают необходимую стабильность перелома, что позволяет не закреплять стержень при помощи блокирующих винтов.

Ретроспективное сравнительное исследование показало преимущества расширяющегося стержня перед блокируемым при остеосинтезе диафизарных переломов бедренных костей [82]. Несмотря на то, что расширяющиеся стержни на сегодняшний день являются очень перспективными, многие исследования по этой тематике показывают методологические недоработки и требуют дополнительного осмысления [87]. Более того, такие стержни могут не обеспечивать необходимую жесткость системы кость-имплантат [83, 86, 80].

Опубликовано довольно много работ, посвященных клиническим [84, 82, 85, 88, 74] и биомеханическим [86, 83, 75, 80] исследованиям стержня Fixion при его применении для остеосинтеза переломов длинных трубчатых костей. Тем не менее, в современной литературе не найдено ни одной работы, где для стержня Fixion применялось бы компьютерное моделирование и, в

частности, метод конечных элементов (МКЭ). При этом поперечно блокируемым стержням посвящено множество работ [78, 76, 77].

Актуальным видится выполнение численного исследования систем бедренная кость-интрамедуллярный стержень для разных типов имплантатов. В частности, интерес представляет как расширяющийся Fixion, так и поперечно блокируемые стержни. Результаты должны анализироваться с целью сравнения стабильности различных систем фиксации при действии внешних нагрузок в случае остеосинтеза переломов диафизарной части бедра.

Биомеханика в стоматологии

По статистике в России люди старше 40 лет в 90% случаев имеют как минимум 1 утраченный зуб. В связи с этим современная стоматология не может существовать без дентального протезирования. При этом на срок функционирования имплантатов влияет как общее состояние тканей полости рта пациента, так и качество подготовки и проведения хирургической операции.

В 10% случаев из-за ошибок при протезировании возникает необходимость повторного хирургического вмешательства. Кроме того, по существующим на сегодняшний день методикам, дополнительные операции проводятся иногда и на подготовительном этапе протезирования.

Таким образом, существует необходимость [93] комплексной оптимизации процесса имплантации. Избежать большинства неудачных операций позволяют современные методы биомеханики [91, 94], математического и трехмерного моделирования, а также конечно-элементных расчетов.

Основные этапы методики оптимизации имплантации затрагивают весь процесс лечения от первого обращения пациента до завершающей операции. В первую очередь на основе компьютерной томограммы челюсти проводится первичное определение мест установки имплантатов и углов их наклона. Также по данным КТ [89, 90] строится точная трехмерная модель челюсти. Построенная трехмерная модель челюсти позволяет хирургу с высокой степенью точности провести позиционирование моделей имплантатов в местах их предполагаемой установки. После проведения виртуальной имплантации на рассматриваемом участке кости строится модель

стоматологического шаблона. Данный шаблон в дальнейшем выращивается на 3D-принтере и используется стоматологом в процессе операции для установки имплантатов именно в запланированные точки и под определенными углами. Построение 3D модели челюсти проходит аналогично построению моделей сегмента позвоночника. Пример такого моделирования будет приведен ниже.

Глава 6. Создание моделей биологических объектов

Обработка КТ данных в ручном режиме

Геометрическое моделирование покажем на примере сегмента позвоночника L4-L5, транспедикулярных винтов и кейджа. В данном разделе приведем пример ручной обработки компьютерной томограммы (КТ) конкретного пациента.

Создание моделей биологических объектов

Твердотельная 3D модель позвоночно-двигательного сегмента (ПДС) L4-L5 строилась на основе данных КТ пациентки со спондилолистезом на уровне L4 (рисунок 6.1).

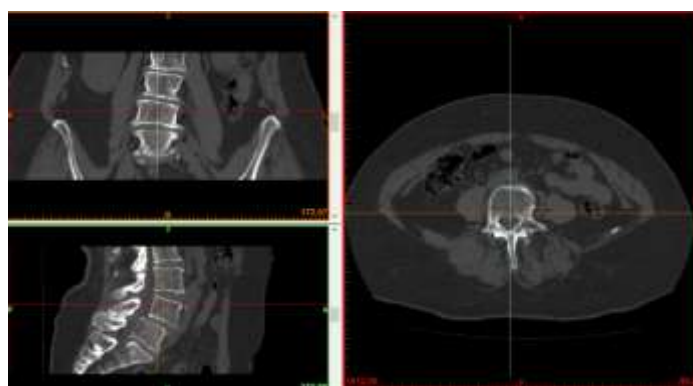


Рисунок 6.1 – Снимки в формате DICOM, импортированные в MIMICS. Срезы в трёх плоскостях (фронтальный, аксиальный и сагиттальный).

Для обработки, анализа изображений и создания единой трёхмерной модели костных структур ПДС L4-L5 использовался программный пакет MIMICS. Серия снимков состояла из 295 изображений. На первом этапе для построения геометрии позвонков костные ткани каждого позвонка (кортикальная и губчатая) на уровне L4-L5 отделялись друг от друга и преобразовывались в 3D модели. К каждому из создаваемых объемов применялась операция сглаживания. В результате обработки КТ были построены твердотельные модели кортикальной и губчатой тканей позвонков L4 и L5 (рисунок 6.2). При совмещении моделей позвонков выполнялась их реклинация, то есть исправление деформации ПДС (рисунок 6.2 справа) в соответствии с рекомендациями лечащего врача данной пациентки.

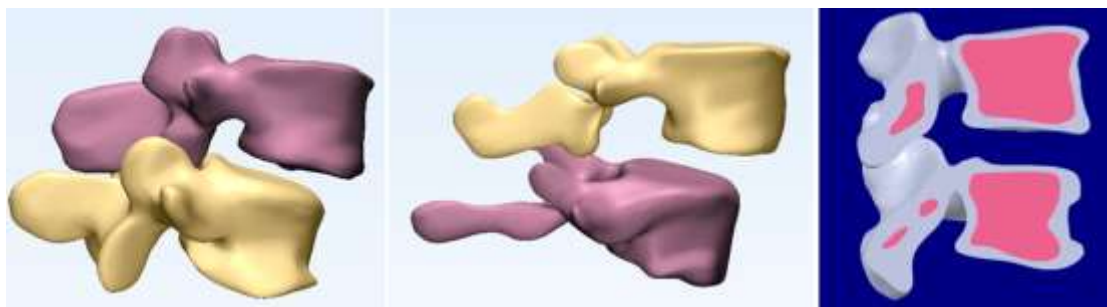


Рисунок 6.2 – 3D модели позвонков: полные объёмы позвонков (слева), объёмы губчатой кости (по центру), ПДС в разрезе после реклинации (справа).

Мягкие ткани были достроены на основе анатомических данных в ручном режиме в созданной ранее модели позвонков L4, L5 в программном пакете SolidWorks.

С учетом построенных моделей межпозвонкового диска и связок итоговая 3D модель ПДС представлена на рисунке 6.3 слева. Была построена модель интактного ПДС (рисунок 6.3 справа), в которой содержались межкостистая, межпоперечные связки и фасеточные суставы. Под нормой (*интактным* ПДС) будем понимать модель ПДС с восстановленным геометрически правильным расположением позвонков и с непатологическим связочным аппаратом. Рассчитанное напряженно-деформированное состояние (НДС) интактного ПДС сравнивалось с результатами расчетов НДС сегментов после хирургического реконструктивного лечения.

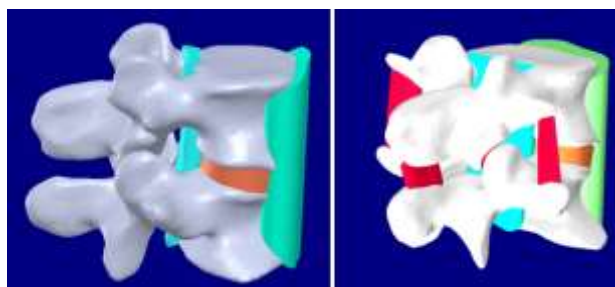


Рисунок 6.3 – 3D модель интактного ПДС (справа) и модель ПДС со связками и диском (слева).

Создание 3D моделей системы фиксации и заменителей диска

В системе SolidWorks на основе данных каталогов медицинского оборудования были построены трёхмерные геометрические модели систем фиксации. Было выбрано три варианта хирургического реконструктивного лечения (рисунок 6.4).

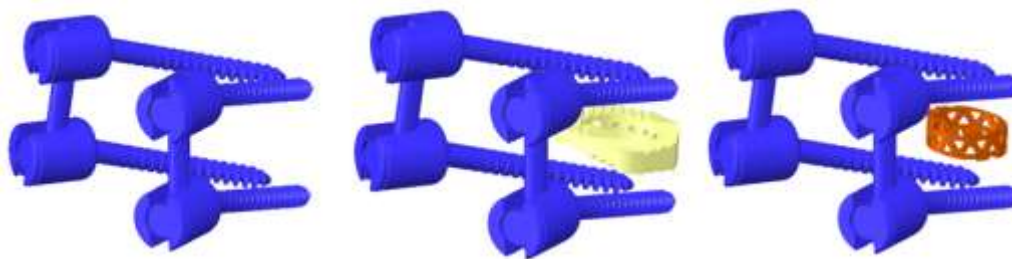


Рисунок 6.4 – Варианты хирургического лечения: транспедикулярные винты (слева), винты и кейдж «Rezo-A» (по центру), винты и кейдж «Mesh» (справа).

Диаметр винтов подбирался таким образом, чтобы винты наружной частью резьбы опирались на прочные кортикальные стенки корня дуги, поскольку фиксация в губчатой кости не обеспечивает надежной основы крепления фиксатора. Диаметр винтов составил 6 мм, длина – 55 мм. Параметры кейджа «Rezo-A» выбирались в соответствии с размерами позвонков и составили: длина 28 мм, ширина 22 мм, высота 8 мм и угол между верхней и нижней гранями 8°. Диаметр кейджа «Mesh» составил 20 мм, длина ребра ячейки – 3 мм.

Построенные модели имплантатов были размещены в созданной ранее модели сегмента позвоночника, в результате чего были получены три модели с различными вариантами хирургического реконструктивного лечения, показанные на рисунке 6.5.

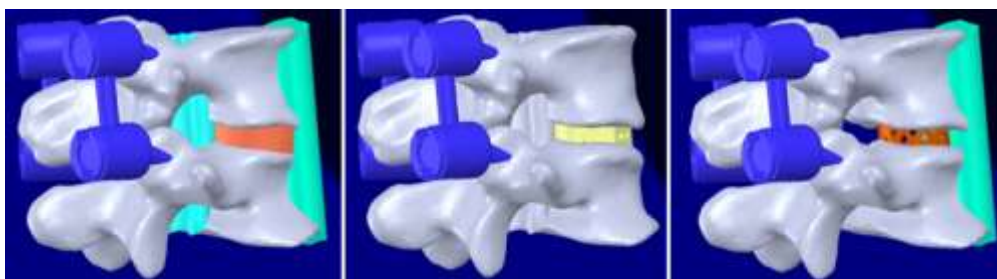


Рисунок 6.5 – 3D модели с различными вариантами лечения: установка транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска (слева), установка винтов в сочетании с кейджем типа «Rezo-A» (по центру), установка винтов в сочетании с кейджем типа «Mesh» (справа).

Полуавтоматический режим обработки КТ данных

Полуавтоматический режим обработки КТ данных и построения на их основе 3D моделей покажем на примере сосудов виллизиевого круга.

Один из наиболее актуальных вопросов современной биомеханики – это создание реалистичных трехмерных геометрических моделей исследуемых биологических объектов на основе данных медицинского диагностического

оборудования (магнитно-резонансная томография (МРТ) и компьютерная томография (КТ)). К таким объектам относятся элементы сердечно-сосудистой системы (сердце, артерии), элементы опорно-двигательного аппарата (кости, суставы, позвонки) и др.

Биомеханическое моделирование требует создания именно твердотельных моделей исследуемых объектов, а не поверхностных, достаточных только для выполнения измерений, исследования геометрии объекта. Поверхностная геометрическая модель определяется с помощью точек, линий и простых поверхностей (как правило, треугольников) и не содержит объемов. Твердотельная модель описывается путем математической передачи данных о каждой точке поверхности модели, а также о каждой точке внутреннего объема. Твердотельное моделирование является единственным средством, которое обеспечивает полное описание трехмерной геометрической формы моделируемого объекта. Задача создания твердотельной модели на основе поверхностной, получаемой при первичной обработке КТ и МРТ данных, является нетривиальной и требует существенных временных затрат, исчисляемых часами, а иногда сутками рабочего времени. Это справедливо для моделей, создаваемых вручную посредством последовательной обработки снимков КТ или МРТ.

Метод рекурсивного двумерного фронтального роста

Алгоритм метода фронтального роста был рассмотрен в работе пермских ученых Матвиенко³¹ и соавторов [95], поэтому мы не будем приводить его математическое описание. Авторы предлагали хранить информацию о множестве активных подобластей границы области роста в виде списка, используя цикл по всем направлениям роста. Алгоритм фронтального роста был реализован нами в виде рекурсивной процедуры. В

³¹ Валерий Павлович Матвеев (род. 9 февраля 1948, г. Кизел Молотовской области) — советский и российский учёный-механик, доктор технических наук (1987), профессор (1992), академик РАН (2003), заведующий кафедрой «Механика сплошных сред и вычислительных технологий» механико-математического факультета Пермского университета (с 2004). Член Президиума РАН и Президиума УрО РАН, заместитель председателя УрО РАН, председатель Пермского научного центра УрО РАН (2000—2016), член Президиума Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Объединённого научного совета по математике, механике и информатике УрО РАН, член Научных советов РАН по механике деформируемого твёрдого тела и по механике конструкций из композиционных материалов, директор Института механики сплошных сред УрО РАН (с 1993 года), главный редактор журналов «Вычислительная механика сплошных сред» и «Вестник Пермского научного центра УрО РАН».

качестве критерия подобия пикселей используется критерий из алгоритма кривой по базовому цвету.

Опишем подробно особенности алгоритма и покажем результаты его применения для обработки МРТ изображений сосудов головного мозга.

Перед началом работы алгоритма пользователь самостоятельно путем наведения курсора мыши указывает на изображении стартовый пиксель, который заведомо принадлежит объекту. Для хранения информации об объекте и о просмотренных пикселях используется массив объекта. В качестве ячеек в нем используется запись, одно поле которой принимает значения 0, 1 или 2 (пиксель лежит снаружи объекта, внутри или на границе соответственно), а второе поле типа boolean принимает значение true, если пиксель был просмотрен, и false – если нет.

Таким образом, отметив стартовый пиксель как просмотренный, а также отметив, что данный пиксель относится к объекту (в соответствующем поле в ячейке массива объекта указывается 1), начинаем просматривать соседей пикселя по ребрам. Если критерий подобия удовлетворен, то переходим в соседний пиксель и из него запускаем метод фронтального роста. Если критерий подобия не срабатывает, то соответствующему полю массива объекта присваиваем значение true (пиксель просмотрен), и переходим к следующему соседу. Выход из рекурсии происходит тогда, когда у текущего пикселя не остается не просмотренных соседей.

При просмотре полученного массива объекта можно определить точки кривой, ограничивающей объект. Для этого пройдем по всем ячейкам массива объекта. Если в текущей ячейке содержится 1 (пиксель объекта), а в одном из соседей по ребрам содержится 0, т.е. у пикселя есть сосед из фона, то меняем значение в ячейке на 2: пиксель лежит на границе. Набор всех пикселей со значениями «2» в соответствующем поле представляет собой границу объекта.

В случае, когда изображение имеет размерность $N \times N$ пикселей, необходимо будет совершить $4 \cdot N \cdot N$ операций проверки, так как у каждого пикселя есть 4 соседа по ребрам. Таким образом, сложность алгоритма составит $O(N^2)$. Следует отметить, что, как правило, на изображении не может находиться только подобласть объекта (то есть объект не заполняет рисунок целиком), а сам метод фронтального роста не подразумевает обязательной

проверки всех пикселей, поэтому указанная сложность алгоритма на практике будет недостижима.

Программа для обработки данных КТ и МРТ

В среде Delphi была разработана программа, реализующая все три описанных выше метода. Интерфейс программы показан на рисунке 6.6.

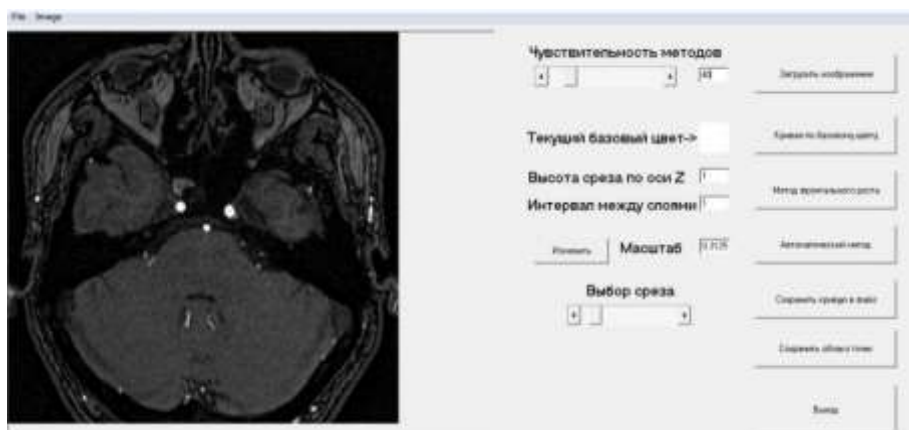


Рисунок 6.6 – Интерфейс разработанной программы.

Программа позволяет пользователю загружать отдельные изображения, а также совокупность срезов КТ или МРТ в формате DICOM. Пользователь имеет возможность просмотреть срезы поочередно и выбрать среди них начальный. Выбор алгоритма сегментации осуществляется пользователем. В программе помимо метода фронтального роста реализован автоматический метод и метод кривой по базовому цвету, подробно описанные в работе [96]. Пользователь может настроить чувствительность каждого метода. Существует возможность масштабирования плоских изображений и задания высоты срезов для экспорта построенных кривых в SolidWorks. Обработка срезов и сегментация серии изображений осуществляется в автоматическом режиме после выполнения настроек.

В случае построения трехмерного объекта такие параметры, как масштаб изображений по трем осям, а также расстояние между срезами, извлекаются из исходных DICOM файлов в автоматическом режиме.

Приведем результаты работы программы на примере создания трехмерной полной модели сосудов виллизиевого круга. Применялся рекурсивный метод фронтального роста.

На самом деле, для более сложно разнесенного в пространстве сосудистого русла необходим еще один этап – создание облака точек. В таком случае, метод рекурсивного фронтального роста реализуется в трехмерной

постановке. В результате работы метода данные о геометрической модели сосудов представляются в виде набора срезов. На рисунке 6.7 показано облако точек, представляющее собой поверхность сосудов виллизиевого круга человека, полученную при обработке КТ.

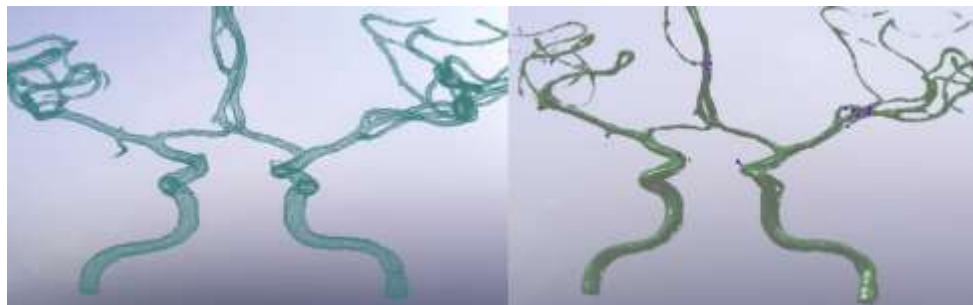


Рисунок 6.7 – Облако точек, соответствующее внешней стенке сосудов виллизиевого круга (слева), построенная поверхностная модель (справа).

На данном этапе модель содержит только те точки, которые лежат на поверхности сосудов. При необходимости можно получить и точки, лежащие внутри сосуда, что позволит построить трехмерную сетку.

Безусловно, при использовании автоматического метода и метода кривой по базовому цвету необходимо учитывать, что данные алгоритмы строились с учетом ряда допущений относительно подобласти, занимаемой объектом. В частности, полагалось, что объект на изображении должен быть один. Для исключения «шума» при работе обоих рассмотренных методов необходимо предварительно редактировать исходные изображения. Другими словами, из исходного изображения на срезе КТ необходимо оставлять только интересующие области изображения, содержащие только одно сечение сосуда (односвязную область). В случае, если имеется набор срезов для построения объемной твердотельной модели сосуда, возникает проблема отнесения полученных кривых к единой системе координат.

Метод рекурсивного двумерного фронтального роста оказывается наиболее предпочтительным из трех рассмотренных выше, так как он не подвержен «зашумлению» результатов, а также позволяет создавать контур именно того объекта, который задан пользователем, а не всех подобных объектов на изображении.

Существенным недостатком данного метода является тот факт, что его практически невозможно использовать для построения трехмерных моделей сосудов в тех случаях, когда срез МРТ оказывается не перпендикулярным оси

кровеносного сосуда. В таком случае даже при успешном построении ограничивающей кривой, невозможно создать твердотельную модель вытягиванием по сечениям. В этом случае, необходимо применять рекурсивный метод фронтального роста в трехмерной постановке, который на выходе позволяет получить облако точек (рисунок 6.7). Облако точек может быть покрыто треугольниками в автоматическом режиме, которые затем будут преобразованы в поверхность твердотельной трехмерной модели (рисунок 6.7 справа).

Построение стоматологических шаблонов

В первую очередь на основе компьютерной томограммы челюсти необходимо провести первичное определение мест установки имплантатов и углов их наклона (рисунок 6.8 а). Также по данным КТ в программном пакете Mimics строится точная трехмерная модель челюсти (рисунок 6.8 б). Следует отметить, что при построении модели необходимо очень точно выбрать диапазон оттенков серого на томограмме. Ошибка в выборе диапазона может привести к «потере» отдельных участков кости или же, напротив, к появлению лишних элементов, в дальнейшем оказывающих негативное влияние на качество расчетов.

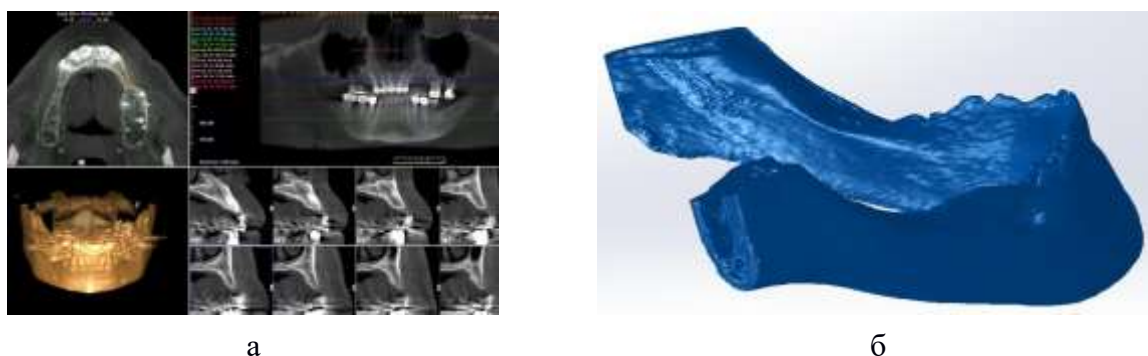


Рисунок 6.8 – Обработка компьютерной томограммы челюсти и построение ее трехмерной модели: а – КТ челюсти пациента, б – построенная трехмерная модель челюсти.

Построенная трехмерная модель челюсти позволяет хирургу с высокой степенью точности провести позиционирование моделей имплантатов в местах их предполагаемой установки (рисунок 6.9 а). После проведения виртуальной имплантации на рассматриваемом участке кости в САD системе SolidWorks строится модель стоматологического шаблона (рисунок 6.9 а, 6.9 б). Данный шаблон в дальнейшем выращивается на 3D-принтере и

используется стоматологом в процессе операции для установки имплантатов именно в запланированные точки и под определенными углами.

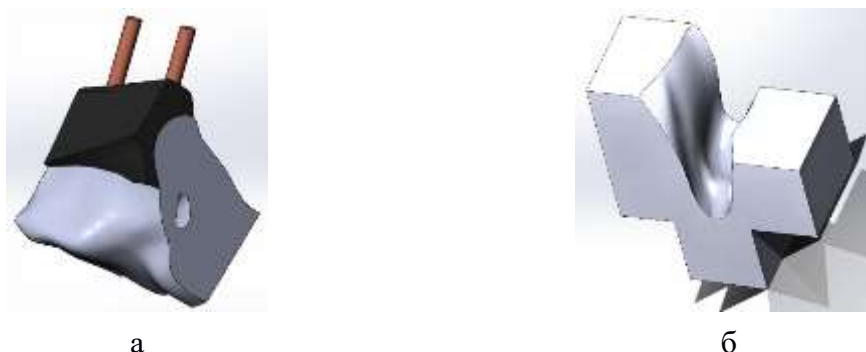


Рисунок 6.9 – Трехмерные модели участка челюсти, шаблона и имплантатов: а – шаблон и имплантаты на участке челюсти; б – модель шаблона для выращивания на 3D-принтере.

Построение модели сонной артерии по данным УЗИ

Разные авторы и научные школы используют различные методы оценки морфометрических параметров сосудистой стенки сонных артерий. Используются данные магнитно-резонансной томографии для построения и дальнейшего анализа моделей сонных артерий человека (и плоских, и трехмерных). Опубликованы статьи с результатами сегментации изображений ультразвукового исследования для построения моделей сонных артерий.

Разработаны методы обработки изображений КТ-ангиографии для создания 3D моделей артерий. Созданы программные средства для автоматизации данного процесса.

Сегодня на базе сосудистых клиник в России обычно доступны и высококлассные современные УЗ-аппараты, и компьютерные томографы. Комбинация этих устройств позволяет подробно изучить морфометрические характеристики сонных артерий и сосудов головного мозга и построить их реалистичные трехмерные и плоские модели, пригодные для биомеханического моделирования. И если для сонных артерий может быть достаточно УЗ-аппарата, то для изучения артерий виллизиевого круга в общем случае необходимо выполнять КТ исследование с контрастированием. Если говорить об артериях виллизиевого круга, то чаще такие сосуды моделируют в постановке с жесткими стенками.

Опишем процесс построения модели сонной артерии на основе данных УЗИ конкретного пациента. Геометрическая модель бифуркации сонной артерии строилась в системе автоматизированного проектирования

SolidWorks на основе данных УЗИ. Исследование выполнялось линейным датчиком 2-4 Mhz на аппарате экспертного уровня Mindray Resona 7 в Университетской клинике №1 Саратовского ГМУ им. В.И. Разумовского. В ходе исследования были получены величины просвета сосуда в различных сечениях, а также толщины стенки на разных участках сосудистого русла. На основе этих данных в SolidWorks были построены сечения сосуда, после чего на их базе строилась итоговая модель объемов крови и стенки артерии. Модель строилась в предположении о том, что каждое сечение имеет форму круга.



Рисунок 6.10 – Изображение УЗИ сонной артерии конкретного пациента: слева показаны размеры в разных сечениях; справа приведено изображение полученной модели на фоне данных УЗИ.

Методику построения модели можно описать в несколько этапов.

1. Получение данных УЗИ с плоским боковым изображением сонной артерии и нанесенными на нем метками, позволяющими оценить масштаб изображения (рисунок 6.10 слева). Изображение может быть снимком экрана УЗИ аппарата.
2. Масштабирование изображения сосуда в системе автоматизированного проектирования. Для этого используется описанная в п.1 метка.
3. Использование масштабированного изображения для дальнейшего создания эскиза. В плоскости изображения сосуда строятся осевые линии (общей, наружной и внутренней сонной артерий). В перпендикулярных осевым линиям плоскостях строятся сечения сосуда. Количество и расстановка сечений вдоль осевых линий зависит от сложности модели сосуда. Как правило, для каждой ветви сонной артерии таких сечений может быть от 3 до 5 штук. Аналогичным образом строят и эскизы для стенки сонной артерии.

4. Создание трехмерных моделей ветвей сонной артерии на основе построенных в п.3 эскизов. Используется инструмент «бобышка по сечениям». При создании бобышек также используют созданные ранее осевые линии ветвей артерии. Так же поступают и при построении стенки сонной артерии.
5. Экспорт построенной модели сонной артерии в формате Parasolid или step.

Глава 7. Испытания на одноосное растяжение образцов артерий

Одноосное растяжение образцов артерий виллизиевого круга

Проведена серия экспериментов на одноосное растяжение артерий головного мозга. В экспериментах использовалась разрывная машина Tiratest 28005 (зарегистрированная под номером 23512-02 в Государственном Реестре Российской Федерации) с нагрузочной ячейкой 100 Н. Данная машина позволяет испытывать образцы на растяжение и сжатие в одном направлении.

Экспериментальным материалом для исследования в продольном направлении служили сегменты сосудов 97 виллизиевых кругов и 12 в поперечном. Сосуды были изъяты у трупов людей обоего пола в возрасте от 21 до 90 лет, поступивших в Саратовское городское бюро судебно-медицинской экспертизы. Препарирование образцов проводилось на кафедре анатомии человека Саратовского государственного медицинского университета имени В.И. Разумовского не позднее 12 часов с момента смерти. До начала экспериментов образцы сохранялись в физиологическом растворе при температуре 20 ± 1 С°, что, как известно, не влияет на их механические свойства. Эксперименты проводили при температуре 20 ± 1 С°. На рисунке 7.1 показан извлеченный мозг, на поверхности которого хорошо виден виллизиев круг.



Рисунок 7.1 – Извлеченный мозг человека.

Поведение биологического материала при механическом эксперименте на растяжение имеет следующие особенности.

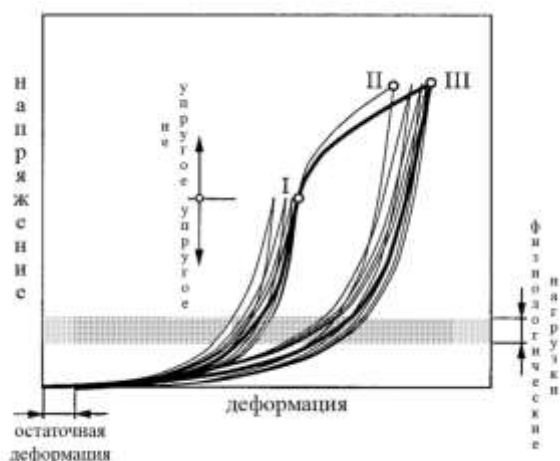


Рисунок 7.2 – Типичное поведение сосудистой ткани при одноосном циклическом нагружении.

При циклической нагрузке-разгрузке материала до точки I (рисунок 7.2), являющейся границей, за которой сосуд перестает демонстрировать упругое поведение, в течение первых нескольких циклов наблюдается так называемый эффект «смягчения напряжений», заключающийся в увеличении значения деформаций, соответствующих одним и тем же напряжениям в точке I, с увеличением количества циклов. По истечении определенного количества нагрузок-разгрузок (так называемое время «предподготовки»), материал начинает демонстрировать практически одинаковое поведение от одного цикла к другому. Именно этот график (до точки I) будет использован при получении данных для моделирования. Если в дальнейшем продолжить нагружать образец большими нагрузками, то сосуд начнет демонстрировать неупругое поведение. Циклическое нагружение образца до точки II снова проявит эффект «смягчения напряжений», который, как и в предыдущем случае, исчезнет через несколько циклов нагрузки-разгрузки. Если же разгрузить материал из точки III, то в разгруженном образце обнаружатся остаточные деформации, свидетельствующие об изменении формы. В литературе встречаются модели, учитывающие перечисленные эффекты для перегруженных образцов. В описанных экспериментах на одноосное растяжение использовалось 5 циклов «предподготовки». Длина исследуемых образцов определялась длиной артерий и минимально возможной длиной образца, который позволяли закрепить зажимы траверс разрывной машины. На рисунке 7.3 показаны траверсы разрывной машины с закрепленным образцом растягиваемой артерии.

Введем обозначения:

ОКН – острый коронарный синдром;

ДТП – дорожно-транспортное происшествие;

ПМА – передняя мозговая артерия;

СМА – средняя мозговая артерия;

ЗМА – задняя мозговая артерия;

ЗСА – задняя соединительная артерия;

ПСА – передняя соединительная артерия;

ПА – позвоночная артерия.



Рисунок 7.3 – Разрывная машина с закрепленным образцом растягиваемой артерии.

Все образцы были поделены на две группы по половому признаку и на четыре возрастные группы (таблица 7.1, возраст на момент смерти 21-90 лет соответствует возрастным группам с 1 по 4).

Таблица 7.1 – Возрастные и половые группы

Номер, наименование возрастной группы	Возраст, лет	
	Мужчины	Женщины
1) первый период зрелого возраста	22-35	21-35
2) второй период зрелого возраста	36-60	36-55
3) пожилой возраст	61-74	56-74
4) старческий возраст	75-90	75-90

В следующих двух таблицах представлены данные о годе рождения, возрасте на момент смерти, половой принадлежности и причине смерти людей, чьи образцы артерий были использованы в экспериментах на

растяжение в продольном (таблица 7.2) и поперечном (таблица 7.3) направлениях.

Таблица 7.2 – Данные о трупном материале (растяжение в продольном направлении)

№	Год рождения	Возраст, лет	Пол	Предварительная причина смерти	Возрастная группа
3	1954	53	м	острая коронарная недостаточность (ОКН)	2
4	1985	22	ж	отравление	1
5	1983	24	м	наркотики	1
6	1957	50	м	скоропост смерть	2
7	1963	44	м	скоропост смерть	2
8	1935	72	м	скоропост смерть	3
9	1958	49	м	скоропост смерть	2
10	1949	58	ж	гиперт болезнь	3
11	1977	30	м	злоупотребление алкоголем	1
12	1953	54	м	скоропост смерть	2
13	1958	49	м	скоропост смерть	2
14	1946	61	м	скоропост смерть	3
2	1963	44	м	скоропост смерть	2
15	1963	44	м	скоропост смерть	2
16	1953	54	м	жд травма	2
17	1933	74	ж	скоропост смерть	3
18	1956	51	ж	падение с высоты	2
19	1936	71	м	скоропост смерть	3
20	1976	31	м	скоропост смерть	1
21	1948	59	м	желтуха	2
22	1978	29	ж	повешение	1
23	1952	55	м	злоупотребление алкоголем	2
24	1983	24	м	повешение	1
25	1982	25	ж	скоропост смерть	1
26	1976	31	ж	ДТП	1
27	1965	42	м	скоропост смерть	2
28	1930	77	ж	ОКН	4
29	1940	67	м	ОКН	3
30	1940	67	м	злоупотребление алкоголем	3
31	1954	53	м	ОКН	2
32	1963	44	м	ОКН	2
33	1947	60	ж	отравление	3
34	1960	47	м	ОКН	2
35	1974	33	м	травма головы	1

36	1937	70	м	ОКН	3
37	1976	31	м	утопление	1
38	1940	67	ж	ОКН	3
39	1934	73	м	ОКН	3
40	1948	59	м	пневмония	2
41	1931	76	ж	ОКН	4
42	1947	60	м	производственная травма	2
43	1967	40	м	скоропост смерть	2
44	1922	85	ж	ОКН	4
45	1947	60	ж	ОКН	3
46	1950	57	ж	ОКН	3
47	1958	49	м	скоропост смерть	2
48	1947	60	м	скоропост смерть	2
49	1972	35	ж	утопление	1
50	1948	59	м	ОКН	2
51	1953	54	м	злоупотребление алкоголем	2
52	1938	69	м	ОКН	3
53	1959	48	м	отравление суррогатом	2
54	1974	33	м	отравление суррогатом	1
55	1954	53	м	скоропост смерть	2
56	1986	21	ж	ДТП	1
57	1968	39	ж	ОКН	2
58	1956	51	ж	ОКН	2
59	1922	85	ж	ОКН	4
60	1929	78	ж	закрытая чм травма	4
61	1950	57	ж	ОКН	3
62	1927	80	м	повешение	4
63	1940	67	м	ОКН	3
64	1948	59	ж	ОКН	3
65	1927	80	м	тупая травма	4
66	1973	34	м	скоропост смерть	1
67	1949	58	ж	скоропост смерть	3
68	1920	87	ж	скоропост смерть	4
69	1927	80	м	атеросклеротич поражение кардиосклероз	4
70	1938	69	м	скоропост смерть	3
71	1939	68	м	ДТП	3
72				скоропост смерть	
73	1961	46	м	повешение	2
74	1958	49	м	скоропост смерть	2
75	1942	65	м	скоропост смерть	3
76	1986	21	м	Закрытая чм травма	1
77	1978	29	м	суицид	1

78	1939	68	м	ОКН	3
79	1988	19	м	передозировка	1
80	1954	53	ж	ОКН	2
81	1969	38	м	повешение	2
82	1960	47	м	злоупотребление алкоголем	2
83	1966	41	м	ОКН	2
84	1951	56	м	отравление суррогатом	2
85	1945	62	м	ОКН	3
86	1952	55	м	ОКН	2
87	1951	56	м	ОКН	2
88	1961	46	м	ДТП	2
89	1939	68	м	ОКН	3
90	1948	59	ж	ОКН	3
91	1950	57	м	ОКН	2
92	1958	49	м	скорост смерть	2
93	1940	67	м	скорост смерть	3
94	1940	67	м	скорост смерть	3
95	1957	50	м	ОКН	2
96	1961	46	ж	отравление	2
97	1939	68	м	перелом бедра	3

Таблица 7.3 – Данные о трупном материале (растяжение в поперечном направлении)

№	Год рождения	Возраст, лет	Пол	Предварительная причина смерти	Возрастная группа
98	1950	58	ж	самоубийство	3
99	1954	54	м	цирроз печени	2
100	1973	35	ж	пневмония	1
101	1950	58	ж	кахексия	3
102	1928	80	ж	цирроз печени	4
103	1943	65	ж	злоупотребление алкоголем	3
104	1941	67	м	эпилепсия	3
105	1959	49	м	ОКН	2
106	1964	44	м	кровотечение	2
107	1973	35	м	пневмония	1
108	1933	75	м	повешение	3
109	1934	74	ж	ОКН	3
110	1982	26	м	цирроз печени	1
111	1959	49	ж	ОКН	2

Обработка результатов экспериментов показала возрастные изменения, а также половые различия материала стенок артерий.

Ввиду того, что эксперименты на растяжение проводились для большого количества образцов (в продольном направлении – 97 виллизиевых кругов, в

каждом из которых порядка 5–12 артерий), все диаграммы ($\sigma - \lambda$) (σ – напряжение, λ – степень удлинения) здесь приводиться не будут. В качестве примера на рисунке 7.4 представлены диаграммы растяжения артерий одного виллизиевого круга (мужчина 1963 года рождения, скоропостижно скончался) в продольном и поперечном направлениях.

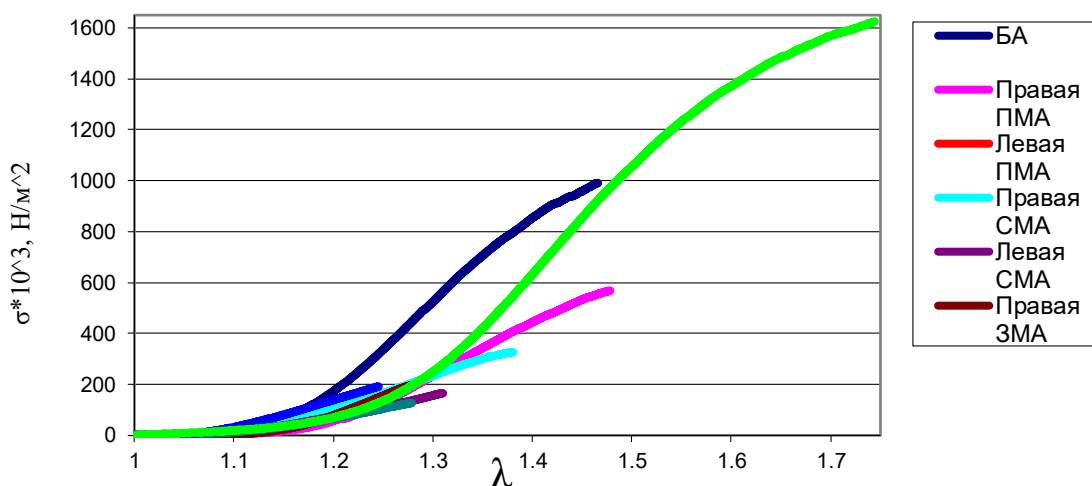


Рисунок 7.4 – Диаграммы растяжения в продольном направлении артерий одного виллизиевого круга.

Из рисунка 7.4 видно, что диаграммы ($\sigma - \lambda$) имеют нелинейный характер при растяжении как в продольном направлении, так и в поперечном. Можно отметить, что на диаграммах растяжения в продольном направлении присутствует точка перегиба.

В порядке убывания прочности изученные артерии распределились следующим образом: базилярная, позвоночная, задняя мозговая и передняя мозговая и средняя мозговая артерии. С возрастом предел прочности артерий в продольном направлении уменьшается. Наибольшая разница между пределами прочности для 1 и 4 возрастных групп выявлена у базилярной артерии, она составляет порядка 50%. Для остальных артерий эта разница не более 30-40%. Возрастные изменения в значениях биомеханических свойств артерий человека свидетельствуют о высокой значимости процессов старения артерий, питающих головной мозг. Это указывает на необходимость более раннего проведения мероприятий по профилактике цереброваскулярных заболеваний.

Влияние полового признака существенно сказывается на прочностных характеристиках артерий. Пределы прочности всех исследованных артерий,

взятых у женщин, меньше в 1.1-1.3 раза, чем у мужчин. Наибольшие половые различия предела прочности в продольном направлении были выявлены у позвоночных артерий, этот же предел прочности у позвоночных артерий является максимальным как у женщин, так и у мужчин.

Графики возрастных изменений среднего по возрастным группам предела прочности артерий виллизиевого круга показаны на рисунке 7.5 (мужчины), рисунке 7.6 (женщины).

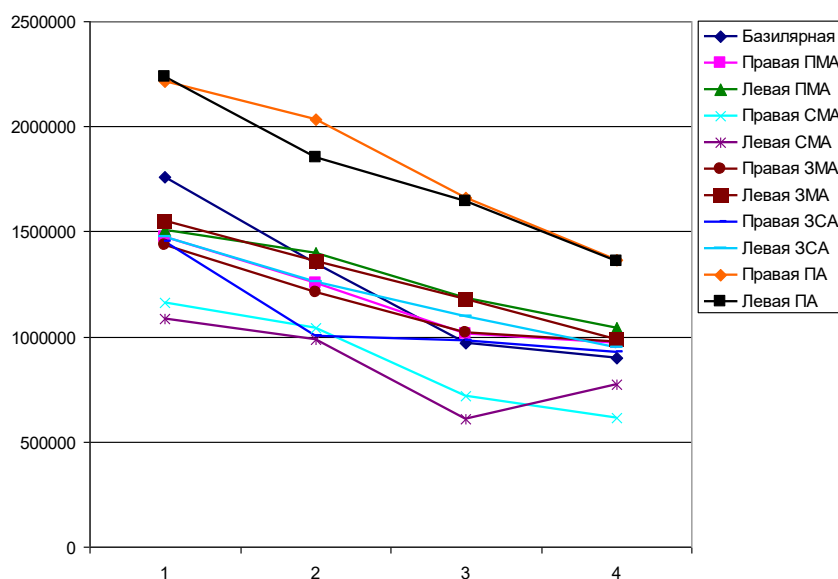


Рисунок 7.5 – Средние по возрастным группам пределы прочности в продольном направлении (мужчины). По горизонтальной оси – возрастные группы, по вертикальной оси – предел прочности в Н/м².

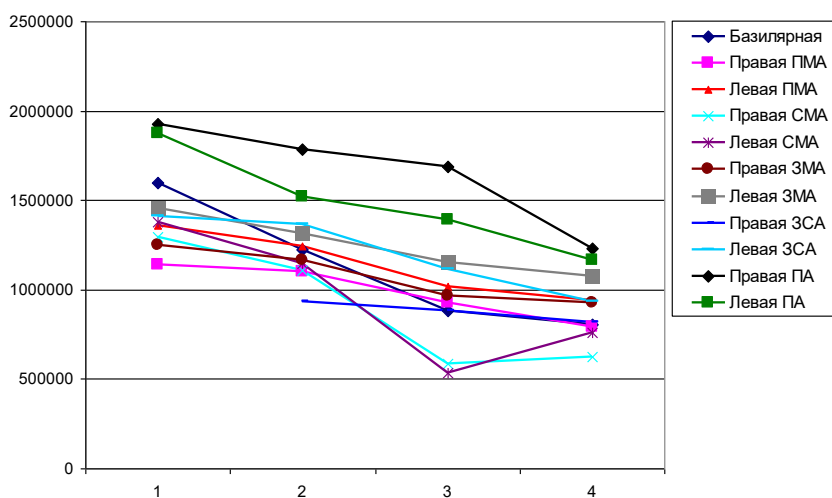


Рисунок 7.6 – Средние по возрастным группам пределы прочности в продольном направлении (женщины). По горизонтальной оси – возрастные группы, по вертикальной оси – предел прочности в Н/м².

Графики возрастных изменений среднего по возрастным группам максимального относительного удлинения артерий виллизиевого круга показаны на рисунке 7.7 (мужчины), рисунке. 7.8 (женщины).

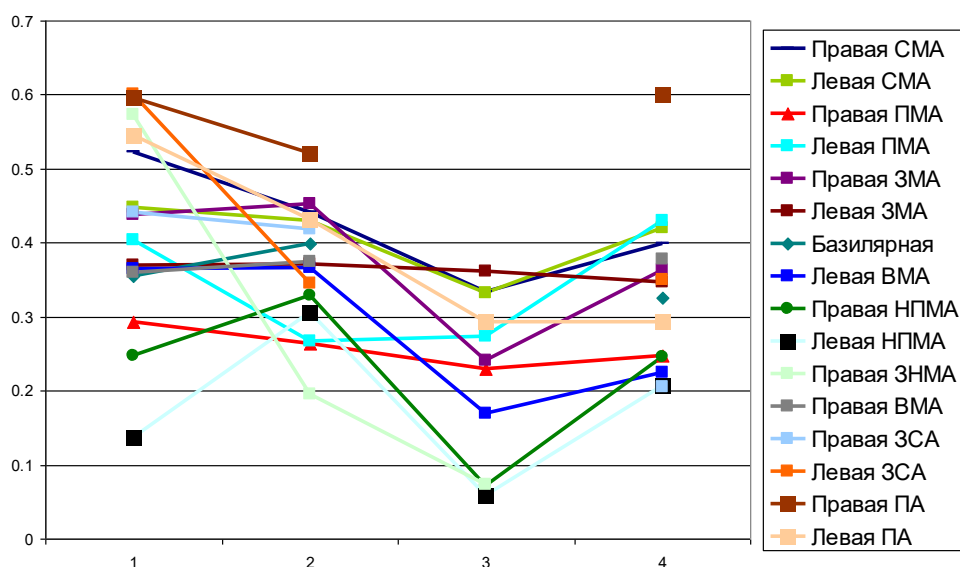


Рисунок 7.7 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении (мужчины). По горизонтальной оси – возрастные группы, по вертикальной оси – максимальные относительные удлинения.

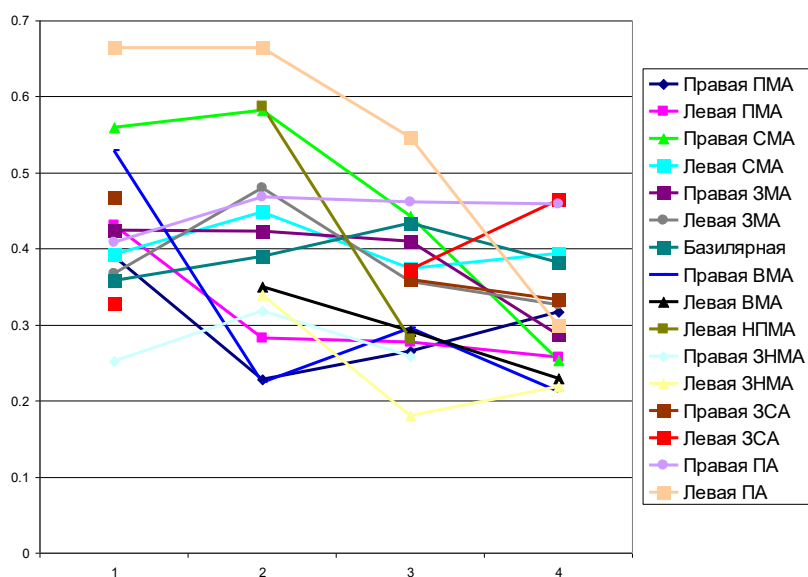


Рисунок 7.8 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении (женщины). По горизонтальной оси – возрастные группы, по вертикальной оси – максимальные относительные удлинения.

Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении представлены в таблицах 7.4-7.19.

Таблица 7.4 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для базилярной артерии

	Возр. гр	Базилярная	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.35	0.36
	2	0.40	0.39
	3		0.43
	4	0.33	0.38
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1758224.0	1597866.6
	2	1348227.0	1223590.7
	3	972947.7	885947.9
	4	899275.8	805779.8

Таблица 7.5 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении правой ПМА

	Возр. гр	Правая ПМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.29	0.39
	2	0.26	0.23
	3	0.23	0.26
	4	0.25	0.32
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1475350	1138318
	2	1256850	1099101
	3	1012711	930758
	4	968469	794504

Таблица 7.6 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении левой ПМА

	Возр. гр	Левая ПМА	
		м	м
Максимальное относительное удлинение	1	0.40	0.43
	2	0.27	0.28
	3	0.27	0.28
	4	0.43	0.26
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1509083	1357831
	2	1395462	1246725
	3	1182577	1017473
	4	1040428	940692

Таблица 7.7 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для правой СМА

	Возр. гр	Правая СМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.52	0.556
	2	0.44	0.58
	3	0.33	0.442
	4	0.40	0.25
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1161567	1293715
	2	1040935	1109067
	3	819732	587348
	4	700015	627796

Таблица 7.8 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для левой СМА

	Возр. гр	Левая СМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.45	0.39
	2	0.43	0.45
	3	0.33	0.37
	4	0.42	0.39
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1086425	1376564
	2	988578	1146644
	3	606547	536211
	4	773466.25	760126.4

Таблица 7.9 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для правой ЗМА

	Возр. гр	Правая ЗМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.44	0.42
	2	0.45	0.42
	3	0.24	0.41
	4	0.36	0.29
	Возр. гр		
Предел прочности, Н/м ²	1	1435424	1247285
	2	1212252	1163018
	3	1018398	969069
	4	974973	929904

Таблица 7.10 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для левой ЗМА

	Возр. гр	Левая ЗМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.37	0.37
	2	0.37	0.48
	3	0.36	0.36
	4	0.35	0.33
	Возр. гр		
		м	ж
Предел прочности, Н/м ²	1	1551830	1453036
	2	1361353	1315161
	3	1176629	1150656
	4	986824	1076164

Таблица 7.11 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для правой ЗСА

	Возр. гр	Правая ЗСА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.44	0.47
	2	0.42	
	3		0.36
	4	0.20	0.33
	Возр. гр		
		м	ж
Предел прочности, Н/м ²	1	1452880	
	2	1002289	937500
	3	982095	879911
	4	926371	816082

Таблица 7.12 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения, пределы прочности в продольном направлении для левой ЗСА

	Возр. гр	Левая ЗСА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.6	0.33
	2	0.35	
	3		0.37
	4	0.35	0.46
	Возр. гр		
		м	ж
Предел прочности, Н/м ²	1	1475600	1410373
	2	1260705	1365657
	3	1095045	1114649
	4	947831	935659

Таблица 7.13 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для правой НПМА

	Возр. гр	Правая НПМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.25	
	2	0.33	
	3	0.07	0.45
	4	0.26	

Таблица 7.14 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для левой НПМА

	Возр. гр	Левая НПМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.14	
	2	0.31	0.59
	3	0.06	0.28
	4	0.21	

Таблица 7.15 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для правой ЗНМА

	Возр. гр	Правая ЗНМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.57	0.25
	2	0.19	0.32
	3	0.07	0.26
	4		

Таблица 7.16 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для левой ЗНМА

	Возр. гр	Левая ЗНМА	
		м	м
Максимальное относительное удлинение	1		
	2	0.29	0.34
	3		0.18
	4		0.22

Таблица 7.17 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для правой ВМА

	Возр. гр	Правая ВМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.36	0.53
	2	0.37	0.22
	3		0.29
	4	0.38	0.21

Таблица 7.18 – Средние по возрастным группам максимальные относительные удлинения в продольном направлении для левой ВМА

	Возр. гр	Левая ВМА	
		м	ж
Максимальное относительное удлинение	1	0.36	
	2	0.37	0.35
	3	0.17	0.29
	4	0.22	0.23

Таблица 7.19 – Средние по возрастным группам пределы прочности в продольном направлении для правой ПА, левой ПА

	Возр. гр	Правая ПА		Левая ПА	
		м	ж	м	ж
Предел прочности, Н/м ²	1	2212413	1926885	2239164	1874850
	2	2036295	1787910	1852482	1519517
	3	1661464	1690917	1642029	1393312
	4	1363620	1229619	1360584	1165427

Вследствие того, что для испытаний на растяжение в поперечном направлении было всего 12 образцов виллизиевых кругов, говорить о каких-то средних значениях по возрастным и половым группам не приходится, поэтому отметим лишь некоторые особенности.

Практически для всех артерий характерно снижение деформативности с возрастом. Для некоторых артерий у женщин и мужчин 1 и 4 возрастных групп деформативность возрастает по сравнению со 2-ой и 3-ей группами соответственно. В продольном направлении стенки позвоночных и средних мозговых артерий обладают наибольшей деформативностью по сравнению с другими артериями виллизиевого круга. Наименьшей деформативностью обладают стенки мозжечковых артерий.

Предел прочности в поперечном направлении так же, как и в продольном направлении, снижается с возрастом. Наибольшие по величине возрастные изменения предела прочности характерны для базилярной артерии.

Одноосное растяжение образцов плечевой артерии

Проведен ряд механических испытаний по растяжению кровеносных сосудов для определения механических характеристик стенок. Данные, полученные в ходе экспериментов, необходимы для дальнейшего численного моделирования гемодинамики в плечевой артерии человека.

В ходе эксперимента были *in vitro* исследованы механические свойства плечевых артерий (левых и правых) троих мужчин среднего возраста. Плечевые артерии без патологий для исследования были предоставлены кафедрой оперативной хирургии и топографической анатомии Саратовского государственного медицинского университета имени В.И. Разумовского.

Из каждого образца выделялась средняя часть для растяжения в продольном направлении, а также небольшой участок для растяжения в поперечном направлении. В разрывной машине каждый образец крепился к траверсам с помощью пневматических зажимов, препятствующих выскальзыванию концов артерии (рисунок 7.9). Исследования проводились на испытательной машине Instron.



Рисунок 7.9 – Крепление образца в разрывной машине.

В результате экспериментов были получены диаграммы напряжений для каждого образца, а также автоматически (посредством программного комплекса Bluehill) получены модули Юнга для каждого образца.

Первый набор плечевых артерий принадлежал мужчине 1978 года рождения (33 года на момент смерти). Были проведены испытания на разрыв средних частей левой и правой плечевых артерий в продольном направлении, а также сегмента артерии в поперечном направлении. Полученные результаты представлены на рисунках 7.10 и 7.11.

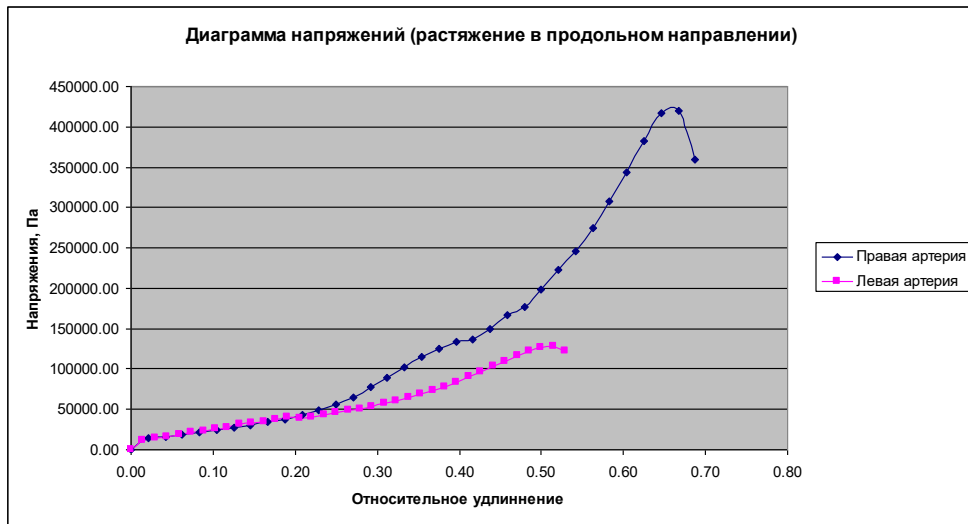


Рисунок 7.10 – Растяжение в продольном направлении первой пары сосудов.

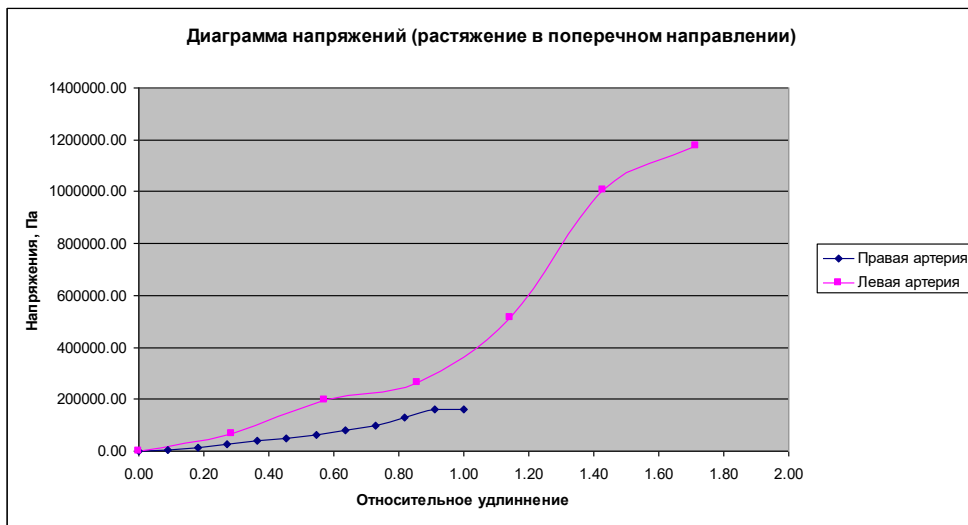


Рисунок 7.11 – Растяжение в поперечном направлении первой пары сосудов.

Среднее значение автоматически посчитанного модуля Юнга в случае продольного растяжения составило 1.08 МПа, а в случае поперечного 1.14 МПа.

Для следующей пары плечевых артерий, изъятых у мужчины 1972 г.р. (38 лет на момент смерти) были получены следующие диаграммы напряжений (графики 7.12 и 7.13):

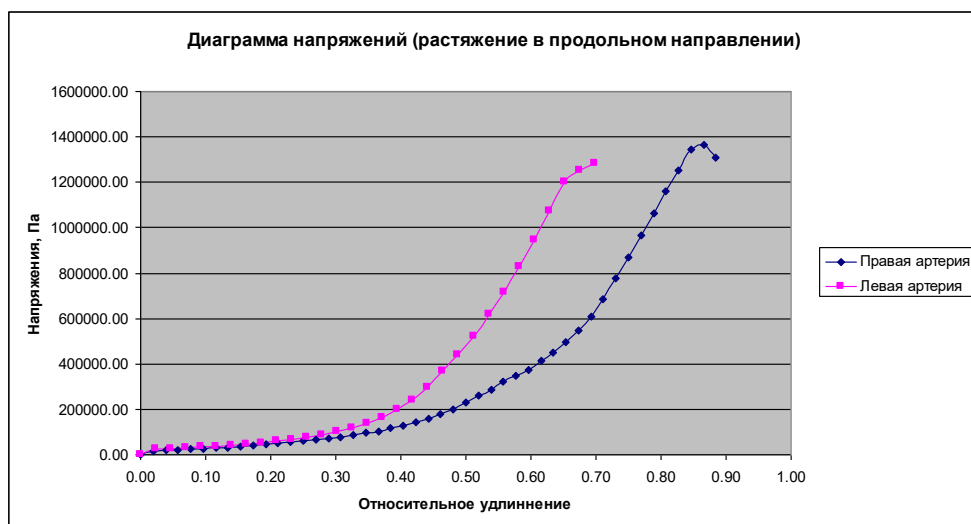


Рисунок 7.12 – Растяжение в продольном направлении второй пары сосудов.

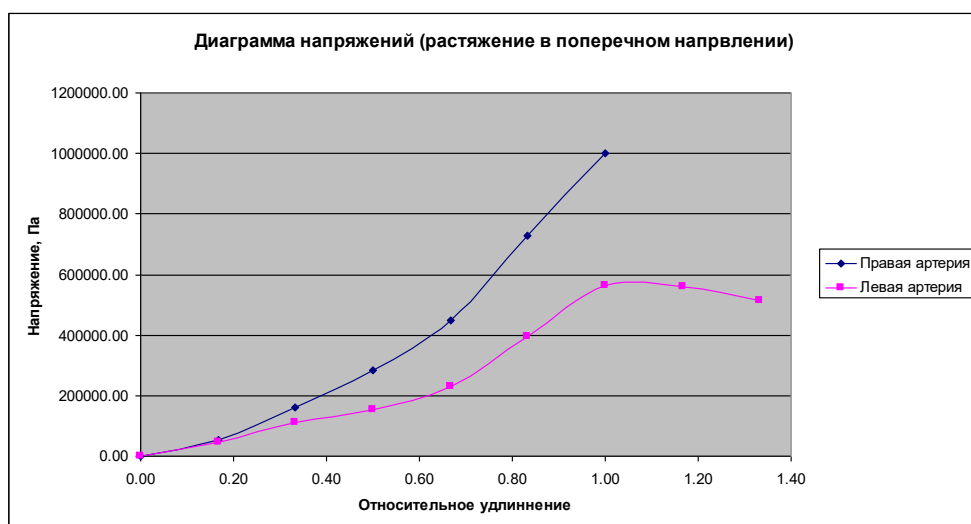


Рисунок 7.13 – Растяжение в поперечном направлении второй пары сосудов.

В этом случае среднее значение модуля Юнга при растяжении в продольном направлении составило 5.21 МПа, а в поперечном 1.55 МПа.

И, наконец, для третьей пары сосудов, изъятых у мужчины среднего возраста (точная дата рождения неизвестна), были получены диаграммы напряжений, представленные на рисунках 7.14 и 7.15.

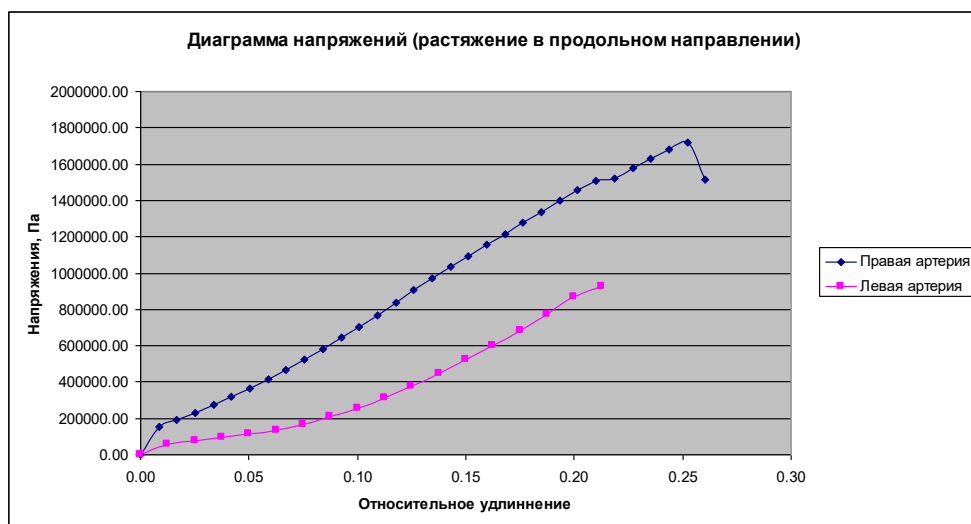


Рисунок 7.14 – Растяжение в продольном направлении третьей пары сосудов.

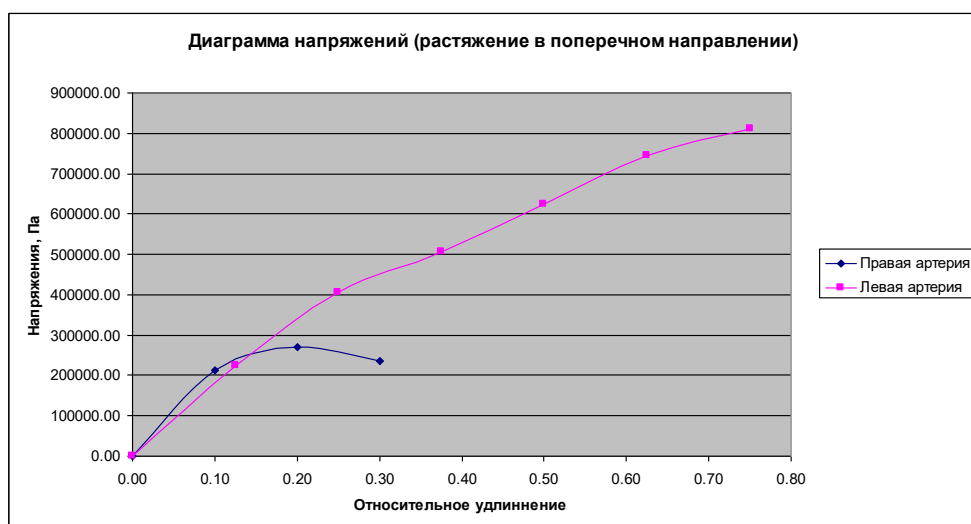


Рисунок 7.15 – Растяжение в поперечном направлении третьей пары сосудов.

Среднее значение модуля Юнга в этом случае для продольного растяжения составило 7.57 МПа, в поперечном 4.51 МПа.

Таким образом, в трех случаях были получены модули упругости, совпадающие по порядкам, но различные по величине в несколько раз. Для дальнейших расчетов было принято решение использовать средние значения модулей упругости: для продольного направления 4.62 МПа, для поперечного 2.40 МПа.

Получение параметров гиперупругой модели

В качестве модели материала стенки используем модель Муни³²-Ривлина³³

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (7.1)$$

где W – функция энергии деформации материала, I_1, I_2 – инварианты тензора деформаций Коши-Грина, C_1, C_2 – неизвестные параметры материала, подлежащие определению.

Этот вид функции энергии деформации W (7.1) был получен Rivlin из экспериментов по деформации тонкого листа.

Проведем расчет параметров модели сверхупругого резиноподобного материала Муни-Ривлина.

Для этого выведем зависимость «напряжение–степень удлинения» для одноосного растяжения с использованием функций энергии деформации данного материала.

Рассмотрим правый $C = F^T F$ и левый $B = F F^T$ тензоры деформаций Коши-Грина, где F – тензор градиента деформации. Инварианты правого тензора C (аналогично для левого тензора) определяются соотношениями $I_1 = \text{tr}(C)$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C^2))$, $I_3 = \det(C)$. Так как материал стенки артерии считается несжимаемым, третий инвариант I_3 тензора деформаций Коши-Грина, характеризующий относительное изменение объема среды, равен единице: $I_3 = 1$. Тензор градиента деформации в матричной форме

записывается в виде $F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – степени удлинения. В

этом случае правый и левый тензоры деформаций Коши-Грина совпадают.

$$C = B = F^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

³² Мелвин Муни (Melvin Mooney, 1893-1968) - американский физик и реолог. Разработал вискозиметр Муни, применяемый для измерения вязкости резиновых смесей при отверждении, и другое испытательное оборудование, используемое в промышленности при производстве резины. Он также предложил закон твердого состояния тела Муни-Ривлина, описывающий гиперупругое напряженно–деформированное поведение резины.

³³ Рональд Сэмюэл Ривлин (Ronald Samuel Rivlin, 6 мая 1915 года – 4 октября 2005 года) - британско-американский физик, математик, реолог и известный специалист по каучуку.

Инварианты тензора C определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C^2)) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}, \\ I_3 &= \det(C) = \det(F^2) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = 1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Выражения для напряжений σ_{ii} , возникающих в растягиваемом образце, через функцию энергии деформации W записываются следующим образом:

$$\sigma_{ii} = \lambda_i^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_i^2} \Psi + p, \quad (7.3)$$

где $W = W(I_1, I_2)$ – функция энергии деформации, $\Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}$, $\Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$.

В случае одноосного растяжения напряжение σ_{11} отлично от нуля, а $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.

Так как $\sigma_{33} = 0$, то $\lambda_3^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi + p = 0$, $p = \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi$.

Полученное выражение для p подставим в σ_{11} , σ_{22}

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_1^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_1^2} \Psi + \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi = (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \Psi, \\ \sigma_{22} &= \lambda_2^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_2^2} \Psi + \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi = (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (7.4)$$

С учетом несжимаемости ($\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right) \Psi, \\ \sigma_{22} &= \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right) \Psi = \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) (\Phi + \lambda_1^2 \Psi). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Учитывая, что $\sigma_{22} = 0$, имеем $\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1}$.

Обозначив $\lambda_1 = \lambda$, $\sigma_{11} = \sigma$, запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \frac{1}{\lambda}} \right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda^2 \frac{1}{\lambda} \right) \Psi = \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) \Psi = \\ &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\Phi + \frac{1}{\lambda} \Psi \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Инварианты тензора примут вид $I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$, $I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda$. Окончательно получаем зависимость напряжения от степени удлинения в случае одноосного

растяжения $\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$, где $\lambda = \frac{l}{l_0}$ – отношение длины образца к начальной длине образца.

С учетом выбора функции энергии деформации Муни-Ривлина получим

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_1 + 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) C_2. \quad (7.7)$$

Таким образом, имея данную зависимость и результаты эксперимента на одноосное растяжение, можно получить коэффициенты функции энергии деформации с помощью метода наименьших квадратов. Этот метод широко распространен и имеет ряд практических применений, особенно при подборе модельной функции для некоего набора данных. Функция $f(x)$, подлежащая минимизации, представляет собой сумму квадратов

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_i F_i(x)^2. \quad (7.8)$$

В задачах такого типа невязка $F(x)$ должна быть наименьшей в точке оптимума, поскольку необходимо приближаться как можно ближе к реальной траектории.

Для расчета констант C_1, C_2 использовались данные диаграммы одноосного растяжения образца базилярной артерии. Количество точек выбиралось экспериментально таким образом, чтобы функция с найденными константами наилучшим образом приближала имеющуюся кривую. Интерполяционным методом из диаграммы было выбрано 7 точек.

На рисунке 7.16 представлены следующие кривые: пунктирная линия – зависимость $(\sigma - \lambda)$, построенная по интерполированным точкам экспериментальных данных, сплошная линия – зависимость $(\sigma - \lambda)$, полученная по формуле (7.7) с найденными константами $C_1 = 5.2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2, C_2 = -5.54 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

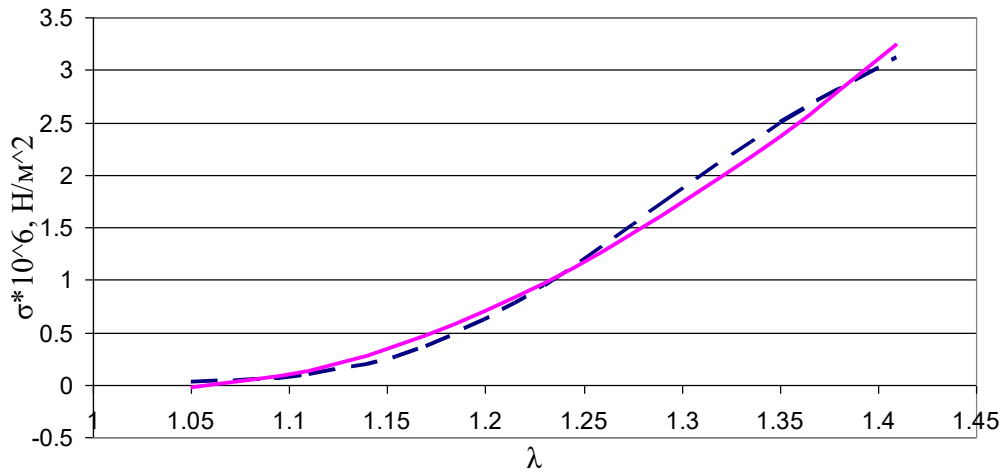


Рисунок 7.16 – Диаграмма ($\sigma - \lambda$). Сплошная линия получена по формуле (7.7), пунктирная – экспериментальная кривая.

Как видно из рисунка 7.16, теоретическая кривая (сплошная линия) достаточно хорошо приближает экспериментальную (пунктирная линия).

Полученные константы функции энергии деформации $W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$ могут быть использованы при конечно-элементном моделировании поведения мозговых артерий в норме и при наличии аневризм.

Алгоритм получения констант модели Муни-Ривлина с использованием системы компьютерной алгебры Matlab

Приведем пошаговый алгоритм получения констант функции энергии деформации $W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$ с помощью системы Matlab.

Для этого потребуются следующие функции языка Matlab:

Interpl. Функция $y_i = \text{interp1}(x, y, x_i)$ строит интерполирующую кривую для одномерного массива y , заданного на сетке x ; выходной массив y_i будет определен на более мелкой сетке x_i .

Lsqcurvefit. Функция $x = \text{lsqcurvefit}(\text{fun}, x_0, xdata, ydata)$ начинает с точки x_0 и находит коэффициенты x , которые наилучшим образом подбирают нелинейную функцию $\text{fun}(x, xdata)$ по данным $ydata$ (с помощью метода наименьших квадратов). $ydata$ должно иметь тот же самый размер, что и возвращаемый в функции fun вектор F (или матрица).

Алгоритм выглядит следующим образом.

1. В Matlab импортируются данные эксперимента на одноосное растяжение. Создаются две переменные, содержащие импортированные значения. Общее число точек более тысячи.

Например,

x, y.

2. Задаются значения xdata, которые будут применяться при интерполяции. С помощью функции interp1 из значений y выбираются несколько точек, которые будут использоваться при подборе искомого констант.

Например,

ydata= interp1(x, y, xdata).

3. Объявляется функция fun, которая определяет зависимость между напряжением и деформацией через функцию энергии деформации с искомыми константами.

Например,

function f=fun (c, xdata)

f=2*c(1)*(xdata.^2-xdata.^(-1))+2*c(2)*(xdata.^1-xdata.^(-2)).

4. Задается начальное приближение констант c=[c1, c2].

Например,

c0=[0,0].

5. Искомые константы c=[c1, c2] определяются вызовом функции lsqcurvefit.

Например,

c=lsqcurvefit(fun, c0,xdata,ydata).

Глава 8. Постановка и решение задач биомеханики

Возможности биомеханического моделирования

В данном разделе тезисно опишем возможности и преимущества биомеханического моделирования.

- Разработка и виртуальная апробация компьютерной модели имплантата.
- Виртуальная установка имплантата в кость, изучение вопросов совмещения кости и имплантата.
- Анализ механических характеристик имплантата.
- Исследование взаимодействия имплантата и кости с учетом прикладываемых внешних нагрузок.
- Доработка и оптимизация конструкции (форма, геометрия, материал) имплантата.
- Сравнение биомеханики системы кость-имплантат для разрабатываемого имплантата и «стандартных» (уже применяемых) конструкций.
- Возможность воссоздания условий применения имплантата в теле человека.
- Учет индивидуальных геометрических и механических характеристик тканей человека.
- Возможность оценки стабильности фиксирующих конструкций с точки зрения биомеханики.
- Возможность оценки срока жизни имплантатов и нагрузок, приводящих к их поломке.
- Возможность оценки нагрузок, приводящих к повреждению костных и мягких тканей.
- Малая стоимость исследований по сравнению с механическими (натурными) экспериментами.

Этапы биомеханического моделирования

Выполнение биомеханического моделирования осуществляется в несколько этапов, которые приведены ниже списком.

- Выбор или разработка математической модели исследуемого процесса/объекта на основе медицинской постановки задачи.
- Создание геометрической модели исследуемого объекта на основе медицинских диагностических данных.

- Постановка задачи – задание граничных, начальных, контактных условий, назначение моделей и свойств материалов.
- Выполнение численных биомеханических расчетов.
- Анализ результатов биомеханических расчетов, сравнение с клиническими данными, формирование выводов, рекомендаций.

Одномерная теория динамики кровотока

Построим математическую модель течения крови по гибким цилиндрическим сосудам в одномерной постановке.

Рассмотрим осесимметричное движение крови, которая принимается вязкой несжимаемой жидкостью, в круглом сосуде постоянного радиуса R . Движение происходит в цилиндрической системе координат (x, r, θ) , причем ось x совпадает с осью симметрии потока. Материал стенки считаем идеально упругим, изотропным. Помимо упругих перемещений стенки (u – в продольном направлении и w – в поперечном) будем учитывать перемещения в продольном и поперечном направлениях, вызванные работой окружающих сосудов мышц. Функция $u_0(x, t)$ описывает дополнительное продольное смещение стенки сосуда, вызываемое воздействием на нее окружающих тканей, и должна определяться экспериментальным путем. Аналогично функция $w_0(x, t)$ описывает дополнительное поперечное смещение стенки сосуда, вызываемое воздействием на нее окружающих тканей. Эта функция также должна определяться экспериментальным путем. Таким образом, суммарные перемещения стенок будут представляться суммой упругих и «внешних» смещений:

$$u_{\text{общ}}(x, t) = u(x, t) + u_0(x, t), \quad w_{\text{общ}}(x, t) = w(x, t) + w_0(x, t).$$

Основная система уравнений динамики кровотока в гибких цилиндрических сосудах в таком случае будет иметь вид [97, 98]:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial x}(r v_x) = 0, \quad (8.3)$$

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \tau, \quad (8.4)$$

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T_0}{R^2} w + \frac{T_0}{R^2} w_0 - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \rho_0 h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sigma, \quad (8.5)$$

$$S' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right), \quad (8.6)$$

$$T' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right), \quad (8.7)$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \Big|_{r=R} \right),$$

$$\sigma = -p|_{r=R} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{r=R},$$

где p – давление; ρ – плотность крови; μ – вязкость крови; v_x – осевая компонента скорости крови; v_r – радиальная компонента скорости крови; R – радиус сосуда; t – время; u, w – перемещения стенки в продольном и поперечном направлениях; S', T' – силы натяжения в окружном и продольном направлениях соответственно; S_0, T_0 – начальные значения сил натяжения в окружном и продольном направлениях; E – модуль Юнга стенки; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина стенки сосуда; ρ_0 – массовая плотность материала стенки сосуда. Здесь уравнения (8.1), (8.2) представляют собой уравнения Навье-Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости; (8.3) – уравнение неразрывности; (8.4) и (8.5) – уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки. Выражения (8.6) и (8.7) представляют собой соотношения идеальной упругости стенок сосуда для обобщенного плоского напряженного состояния.

На стенке записываем условия кинематического контакта стенки сосуда с жидкостью:

$$v_x|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t}, v_r|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t}. \quad (8.8)$$

В случае моделирования гемодинамики крупных кровеносных сосудов в большинстве современных работ кровь полагается ньютоновской жидкостью. При этом в [99] показано, что разница значений (в случае крупных кровеносных сосудов), которые получаются для ньютоновской и неньютоновской жидкостей при численном моделировании гемодинамики, не превышает 10%.

Уравнения (8.4) – (8.7) позволяют учесть податливость сосудистой стенки [100], а контактные условия (8.8) позволяют учесть влияние стенки сосуда на кровоток, то есть работу окружающих сосуд тканей.

Осредним уравнения движения по радиусу сосуда, в результате чего получим одномерную систему течения вязкой несжимаемой жидкости [101]:

$$\rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2}{\pi R^2} Q \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\pi R^2 \frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} Q + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial w_{общ}}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (8.10)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_{общ}}{\partial t^2} = \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w_{общ}}{\partial x} + \tau, \quad (8.11)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w_{общ}}{\partial t^2} = p + \frac{T_0}{R^2} w_{общ} - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w_{общ}}{\partial x^2}, \quad (8.12)$$

$$S' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right], \quad (8.13)$$

$$T' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (8.14)$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{r=R} = -\frac{4Q}{\pi R^3}, \quad (8.15)$$

$$\tau = \mu \gamma_{rz} \Big|_{r=R} = -\frac{4\mu Q}{\pi R^3}, \quad (8.16)$$

где $Q = \int_0^R 2\pi r v_x dr$ – объемный расход крови.

Пренебрегая инерционными силами, действующими на элемент оболочки, а также конвективной составляющей ускорения частиц жидкости, из замкнутой системы уравнений (8.9) – (8.16) получаем более простую систему уравнений динамики кровотока:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} Q, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p + \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T'}{R} = 0, \quad T' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{w}{R}. \quad (8.17)$$

Для математического моделирования работы окружающих сосудов тканей будем использовать решение Пуазейля³⁴ для задачи об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса R , когда труба также движется поступательно со скоростью v_0 и увлекает вязкую жидкость за собой.

³⁴ Жан Луи Мари Пуазейль, в отечественной научной литературе и устной речи часто Пуазейль, иногда Пуазей (фр. J. L. Poiseuille) — французский врач и физик. В 1842 году стал членом Французской медицинской академии.

Пуазейль занимался вопросами кровообращения и дыхания животных и людей. В 1828 году впервые применил для измерения артериального давления животных ртутный манометр. Исследование проблем кровообращения привело Пуазейля к гидравлическим исследованиям. В 1840—41 году экспериментально установил закон истечения жидкости через тонкую цилиндрическую трубку, который впервые был сформулирован в 1839 году Готтхильфом Хагеном. Впоследствии данный тип ламинарного течения стал называться его именем. Именем Пуазейля названа также единица динамической вязкости (пуаз).

Получаем краевую задачу:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} = \text{const},$$

$$[v]_{r=R} = v_0, [v]_{r=0} < \infty.$$

Здесь p – давление, μ – вязкость жидкости.

Решение будет иметь вид:

$$v = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot (r^2 - R^2) + v_0, \text{ где } \frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu}{\pi R^4} \cdot (Q - \pi R^2 v_0).$$

Тогда можем посчитать скорость деформации сдвига на стенке трубы:

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{4}{\pi R^3} \cdot (Q - \pi R^2 v_0). \quad (8.18)$$

Первое уравнение системы (8.17) можно представить в виде:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\pi R \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Тогда, используя формулу (8.18), получим уравнение для объемного кровотока, учитывающее перемещение стенок сосуда, возникающее за счет влияния окружающих сосудов тканей:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} \cdot (Q - \pi R^2 \cdot v_0). \quad (8.19)$$

Уравнение (8.19) можно также записать в виде:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} \cdot \left(Q - \pi R^2 \cdot \frac{\partial u_{\text{общ}}}{\partial t} \right),$$

где $u_{\text{общ}}$ – продольные перемещения стенки сосуда.

Запишем уравнения равновесия элемента оболочки в цилиндрических координатах:

$$p + \frac{T_0}{R^2} \cdot w_{\text{общ}} - \frac{T'}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w_{\text{общ}}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \cdot \frac{\partial w_{\text{общ}}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_{\text{общ}}}{\partial t^2},$$

а также уравнения закона Гука:

$$S' = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{w}{R} \right],$$

$$T' = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[\nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right].$$

Осредненное уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial w_{\text{общ}}}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В первом приближении будем пренебрегать в силу малости продольными упругими перемещениями по сравнению с продольными

перемещениями, вызванными внешними тканями. Пренебрегаем также в силу их малости инерционными силами, действующими на элемент оболочки, и конвективной составляющей ускорения частиц жидкости. Тогда получим упрощенный вид основной системы уравнений динамики кровотока с учетом работы внешних тканей:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} \cdot \left(Q - \pi R^2 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), \frac{\partial w_{общ}}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$p + \frac{T_0}{R^2} w_{общ} - \frac{T'}{R} = 0, T' = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{w}{R}. \quad (8.20)$$

Получим теперь разрешающее уравнение для объемного кровотока.

Из трех последних уравнений системы получим (с учетом представления $w_{общ}(x, t) = w(x, t) + w_0(x, t)$):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{D} \frac{\partial w_0}{\partial t}, \quad (8.21)$$

где $\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi R^3} \cdot \left(\frac{E}{1-\nu^2} - T_0 \right)$, $\frac{1}{D} = \frac{1}{R^2} \cdot \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu^2} \right)$.

Далее продифференцируем уравнение (8.21) по x , а первое уравнение системы (8.20) по t , после чего исключим из него давление:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{B}{L} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \pi R^2 \frac{B}{L} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{1}{LD} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x}. \quad (8.22)$$

Здесь $B = \frac{8\pi\mu}{\pi^2 R^4}$, $L = \frac{\rho}{\pi R^2}$.

Построение частных периодических решений уравнения для объемного кровотока

Чтобы построить общее решение задачи по определению кровотока в системе кровеносных сосудов, необходимо сначала построить частные периодические решения уравнения (8.22). Для этого в первую очередь рассмотрим функции перемещения сосудистой стенки, вызванного внешними тканями.

Как было описано выше, функции $u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ определяются экспериментально. В простейшем случае, когда предполагается, что внешние ткани (или сама стена сосуда) реагируют на прохождение по сосуду волны давления, эти функции могут быть представлены в виде:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right) \right), & \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0, & \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases}, \quad (8.23)$$

$$w_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right)\right) & , \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0 & , \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases} \quad (8.24)$$

где $\gamma_{1,2}$ – параметр, характеризующий степень мышечной активности, $0 < q \leq 1$, T – период пульсации крови, $c_{mk} = \sqrt{\frac{hE}{2R\rho}}$ – скорость пульсовой волны давления Моэнса³⁵-Кортевега³⁶.

Дважды дифференцируя функцию (8.23) по времени, получим линейное ускорение мышечной активности:

$$\frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2} = \begin{cases} \gamma_1 \frac{\pi^2}{q^2 T^2} \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right) & , \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT \\ 0 & , \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T \end{cases}. \quad (8.25)$$

Ускорение мышечной активности стенок сосуда (8.25) представим комплексным рядом Фурье³⁷:

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = \operatorname{Re} \left[\sum_1^\infty c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i\frac{2\pi k}{T}(t - \frac{x}{c_{mk}})} \right],$$

$$c_k = \frac{2\gamma_1\pi}{T^2 q} \int_0^{qT} \sin\left(\frac{\pi t}{qT}\right) e^{-i\frac{2\pi k t}{T}} dt.$$

Продифференцируем по времени и по продольной координате функцию (8.24):

$$\frac{\partial^2 w_0(t, x)}{\partial t \partial x} = \begin{cases} -\gamma_2 \frac{\pi^2}{q^2 T^2} \frac{1}{c_{mk}} \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right) & , \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT \\ 0 & , \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T \end{cases}. \quad (8.26)$$

³⁵ Адриан Исебри Моэнс (15 ноября 1846 - 24 июня 1891) – голландский врач и физиолог. Известен своими работами по артериальной жесткости и распространению волн в эластичных трубках.

³⁶ Дидерик Йоханнес Кортевег (31 марта 1848 - 10 мая 1941) – голландский математик. Сейчас его больше всего помнят за его работу над уравнением Кортевега – де Фриза, вместе с Густавом де Фризом.

³⁷ Барон (1809) Жан-Батист Жозеф Фурье (фр. Jean-Baptiste Joseph Fourier; 21 марта 1768, Осер, Франция — 16 мая 1830, Париж) — французский математик и физик.

Член Парижской академии наук (1817), Французской академии (1826), иностранный член Лондонского королевского общества (1823), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1829). Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Автор монографии «Аналитическая теория тепла», в которой был дан вывод уравнения теплопроводности в твёрдом теле, и разработка методов его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоит в представлении неизвестной функции нескольких переменных в виде произведения нескольких функций одной переменной, в результате чего уравнение в частных производных удается свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Данный метод привел к новой форме представления функций — в виде тригонометрических рядов, названных рядами Фурье.

Представим теперь полученную функцию (8.26) комплексным рядом Фурье:

$$\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t \partial x} = \operatorname{Re} \left[\sum_1^\infty f_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-\frac{x}{c_{mk}})} \right],$$

$$f_k = -\frac{2\gamma_2\pi}{T^2 q c_{mk}} \int_0^{qT} \sin\left(\frac{\pi t}{qT}\right) e^{-i\frac{2\pi k t}{T}} dt.$$

Тогда уравнение (8.22) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{B}{L} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \pi R^2 \frac{B}{L} \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_0^\infty c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-\frac{x}{c_{mk}})} \right] - \\ - \frac{1}{LD} \operatorname{Re} \left[\sum_1^\infty f_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-\frac{x}{c_{mk}})} \right]. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде комплексного ряда Фурье:

$$Q = q_0 + \sum_{k=1}^\infty q_k(x) e^{i\omega_k t}, \text{ где } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Подставим этот ряд в уравнение (8.27) и получим дифференциальные уравнения для определения амплитуд объемного кровотока:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_k}{dx^2} - \lambda_k^2 q_k &= 0, \quad k = 0 \\ \frac{d^2 q_k}{dx^2} - \lambda_k^2 q_k &= \left(\frac{C_k f_k}{D_k} - \pi R^2 B_k C_k c_k \right) \frac{2\pi i k}{T} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}} x}, \\ \lambda_k^2 &= -\varpi_k^2 L_k C_k + i\varpi_k B_k C_k. \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8.28)$$

Общее решение уравнения (8.28) имеет вид:

$$q_k = A_{1k} e^{\lambda_{1k} x} + B_{1k} e^{\lambda_{2k} x} + \frac{2\pi i k}{T} \frac{-\frac{C_k f_k}{D_k} + \pi R^2 B_k C_k c_k}{\lambda_k^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}} x}. \quad (8.29)$$

Рассмотрим далее участок артериальной системы, состоящий из пяти участков, в которых происходит периодическая пульсация крови (рисунок 8.1). Каждый участок моделируется гибкой трубкой. Кроме того, отдельный участок обладает своей пространственно одномерной системой координат, начало которой лежит на входе, а ось x направлена в сторону выходного отверстия.

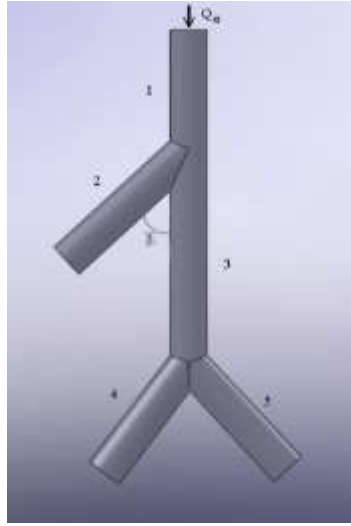


Рисунок 8.1 – Участок артериального дерева.

Примем следующие обозначения для параметров каждого i -го сосуда:

h_i – толщина стенки сосуда; l_i – длина участка; d_i – диаметр; γ_i – углы отклонения; E_i – модуль Юнга; ν_i – коэффициент Пуассона. Также для всего участка в целом: T_0, S_0 – силы предварительного натяжения; μ – коэффициент вязкости крови; ρ – массовая плотность крови. На входном участке задается объемный кровоток $Q_0(t)$.

На выходных участках 2, 4, 5 могут быть заданы различные граничные условия. Будем считать, что пульсационная составляющая объемного кровотока затухает по мере удаления от начала соответствующих участков. Таким образом, необходимо найти периодическое по времени решение уравнения динамики кровотока

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2} + \frac{B_i}{L_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{1}{L_i C_i} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_i^2} + \pi R_i^2 \frac{B_i}{L_i} \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_0^{\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right] -$$

$$- \frac{1}{L_i D_i} \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} f_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right], \quad (8.30)$$

где $i = \overline{1,5}$. Для уравнения (8.30) задаются граничные и контактные условия.

Граничные условия:

$$\text{при } x = 0, Q_1 = Q_0(t); \text{ при } x \rightarrow \infty: Q_2, Q_4, Q_5 \rightarrow 0. \quad (8.31)$$

Последние условия объясняются затуханием пульсации кровотока по мере удаления от выбранного участка.

Простые контактные условия представляют собой условия сохранения расходов и непрерывности давления в узлах разветвления:

$$Q_1|_{x=l_1} = Q_2|_{x=0} + Q_3|_{x=0}, P_1|_{x=l_1} = P_2|_{x=0} = P_3|_{x=0}, \quad (8.32)$$

$$Q_3|_{x=l_3} = Q_4|_{x=0} + Q_5|_{x=0}, P_3|_{x=l_3} = P_4|_{x=0} = P_5|_{x=0}. \quad (8.33)$$

Представим объемный расход на входе $Q_0(t)$ в виде разложения в ряд Фурье:

$$Q_0(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}. \quad (8.34)$$

Коэффициенты ряда ищутся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T Q_0(t) dt - \text{средний объемный кровоток за период};$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q_0(t) \cos(\omega_k t) dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q_0(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

В комплексной форме ряд (8.34) может быть записан в виде:

$$Q_0(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{i\omega_k t}, \quad \text{где } a_k - ib_k = \frac{2}{T} \int_0^T Q_0(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

С учетом скоростей продольного и поперечного мышечного сокращения ряд (8.27) может быть представлен в виде:

$$Q_0(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) + \left[\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{i\omega_k t}) \right] + v_{\text{прод}} \right] \pi R_1^2 + \int_0^{c_{mk} q T} 2\pi R_1 w_0(x, t) dx, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

или в комплексной форме

$$Q_0(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{i\omega_k t} + \left[\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{i\omega_k t}) \right] + v_{\text{прод}} \right] \pi R_1^2 + \int_0^{c_{mk} q T} \pi R_1^2 w_0(x, t) dx,$$

где $v_{\text{прод}} = \frac{\gamma_1 \pi}{T^2 q} \int_0^{qT} \sin\left(\frac{\pi t}{qT}\right) dt$ – дополнительная средняя за период продольная скорость стенок сосуда, возникающая за счет мышечной реакции на прохождение пульсовой волны,

$\int_0^{c_{mk} q T} \pi R_1^2 w_0(x, t) dx = \pi R_1^2 T q c_{mk} \gamma_2 \left(2 \sin\left(\frac{\pi t}{Tq}\right) - \pi \right)$ – дополнительный объемный кровоток за счет поперечных сокращений стенки.

Объемный кровоток на каждом участке будем искать в виде:

$$Q_i(t, x) = Q_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{ki}(x) e^{i\omega_k t}, \quad (8.35)$$

где Q_{0i} – средний объемный кровоток на i -том участке, $q_{ki}(x)$ – комплексная амплитуда.

Подставляя ряд (8.35) в уравнение (8.30), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для комплексных амплитуд объемного кровотока, общее решение которого имеет вид (8.29):

$$q_{ki} = A_{ki}e^{\lambda_{1ki}x} + B_{ki}e^{\lambda_{2ki}x} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_i f_k}{D_i} + \pi R_i^2 B_i C_i C_k}{\lambda_{ki}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}}x}$$

Тогда для i -го объемного расхода будем иметь:

$$Q_i(t, x) = q_{oi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ki}e^{\lambda_{1ki}x} + B_{ki}e^{\lambda_{2ki}x} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_i f_k}{D_i} + \pi R_i^2 B_i C_i C_k}{\lambda_{ki}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}}x} \right) e^{i\omega_n t}. \quad (8.36)$$

Используя граничные условия (8.31) и контактные условия (8.32), (8.33), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & A_{n1} + B_{n1} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_1 f_k}{D_1} + \pi R_1^2 B_1 C_1 C_k}{\lambda_{k1}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} = \\ & = a_n - ib_n + [c_n + v_{npod}] \pi R_1^2 + \pi R_1^2 T q c_{mk} \gamma_2 \left(2 \sin\left(\frac{\pi t}{T q}\right) - \pi \right), \\ & A_{n1} e^{\lambda_{1n1} l_1} + B_{n1} e^{\lambda_{2n1} l_1} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_1 f_k}{D_1} + \pi R_1^2 B_1 C_1 C_k}{\lambda_{k1}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}} l_1} = \\ & = A_{n2} + B_{n2} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_2 f_k}{D_2} + \pi R_2^2 B_2 C_2 C_k}{\lambda_{k2}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} + \\ & + A_{n3} + B_{n3} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_3 f_k}{D_3} + \pi R_3^2 B_3 C_3 C_k}{\lambda_{k3}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2}, \quad (8.37) \\ & A_{n3} e^{\lambda_{1n3} l_3} + B_{n3} e^{\lambda_{2n3} l_3} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_3 f_k}{D_3} + \pi R_3^2 B_3 C_3 C_k}{\lambda_{k3}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi k}{T c_{mk}} l_3} = \\ & = A_{n4} + B_{n4} + \frac{2\pi ik}{T} \frac{-\frac{C_4 f_k}{D_4} + \pi R_4^2 B_4 C_4 C_k}{\lambda_{k4}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} + \end{aligned}$$

$$+A_{n5} + B_{n5} + \frac{2\pi ik - \frac{C_5 f_k}{D_5} + \pi R_5^2 B_5 C_5 c_k}{T \left(\lambda_{k5}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}} \right)^2 \right)}.$$

Из граничных условий (8.24) следует, что $B_{n2} = B_{n4} = B_{n5} = 0$. Таким образом, неизвестными являются $A_{n1}, B_{n1}, A_{n2}, B_{n3}, A_{n3}, A_{n4}, A_{n5}$. Для их определения систему трех уравнений (8.30) необходимо дополнить еще 4-мя уравнениями.

Из уравнений равновесия оболочки и уравнений закона Гука получим выражение для давления:

$$p = \frac{1}{R^2} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} - T_0 \right) w = \frac{2\rho}{RCL} w. \quad (8.38)$$

Для давления в любой момент времени выполняется условие:

$$p_1 = p_2.$$

Тогда:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} |_{x=l_1} = \frac{\partial p_2}{\partial t} |_{x=0} = \frac{\partial p_3}{\partial t} |_{x=0} = 0.$$

Продифференцируем теперь выражение (8.38) по времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{2\rho}{R} \frac{1}{LC} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Используя уравнение неразрывности (8.10), выразим скорость изменения давления через объемный расход:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{D} \frac{\partial w_0}{\partial t}.$$

Представим давление в виде комплексного ряда Фурье:

$$p'_i(x, t) = p_0 + K_i x + p_i = K_i x + p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ni}(x) e^{i\omega_n t}.$$

Из условия $\frac{\partial p'_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t}$ следует: $\sum_{n=1}^{\infty} i\omega_n p_{ni}(x) e^{i\omega_n t} = -\frac{1}{c_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dq_{ni}(x)}{dx} e^{i\omega_n t},$

$$p_{ni}(x) = \frac{1}{i\omega_n c_i} \frac{dq_{ni}(x)}{dx}.$$

Из выражения (8.35) получим:

$$\frac{dq_{ni}(x)}{dx} = \lambda_{1ni} A_{ni} e^{\lambda_{1ni} x} + \lambda_{2ni} B_{ni} e^{\lambda_{2ni} x} + \frac{(2\pi n)^2 \frac{C_i f_k + \pi R_i^2 B_i C_i c_n}{D_i}}{T^2 c_{mn} \left(\lambda_{ni}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mn}} \right)^2 \right)} e^{-i \frac{2\pi n}{T c_{mn}} x}.$$

Выполним контактные условия $P_{n1}(l_1) = P_{n2}(0) = P_{n3}(0)$ для первого узла:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i\omega_n C_1} \left(\lambda_{1n1} A_{n1} e^{\lambda_{1n1} l_1} + \lambda_{2n1} B_{n1} e^{\lambda_{2n1} l_1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_1 f_n}{D_1} + \pi R_1^2 B_1 C_1 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n1}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi n}{T c_{mn}} l_1} \right) = \\
& = \frac{1}{i\omega_n C_2} \left(\lambda_{1n2} A_{n2} + \lambda_{2n2} B_{n2} + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_2 f_n}{D_2} + \pi R_2^2 B_2 C_2 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n2}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{i\omega_n C_3} \left(\lambda_{1n3} A_{n3} + \lambda_{2n3} B_{n3} + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_3 f_n}{D_3} + \pi R_3^2 B_3 C_3 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n3}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} \right). \tag{8.39}
\end{aligned}$$

Аналогично для второго узла:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i\omega_n C_3} \left(\lambda_{1n3} A_{n3} e^{\lambda_{1n3} l_3} + \lambda_{2n3} B_{n3} e^{\lambda_{2n3} l_3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_3 f_n}{D_3} + \pi R_3^2 B_3 C_3 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n3}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i\frac{2\pi n}{T c_{mn}} l_3} \right) = \\
& = \frac{1}{i\omega_n C_4} \left(\lambda_{1n4} A_{n4} + \lambda_{2n4} B_{n4} + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_4 f_n}{D_4} + \pi R_4^2 B_4 C_4 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n4}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{i\omega_n C_5} \left(\lambda_{1n5} A_{n5} + \lambda_{2n5} B_{n5} + \frac{(2\pi n)^2 - \frac{C_5 f_n}{D_5} + \pi R_5^2 B_5 C_5 c_n}{T^2 c_{mn} \lambda_{n5}^2 + \left(\frac{2\pi n}{T c_{mk}}\right)^2} \right). \tag{8.40}
\end{aligned}$$

Таким образом, для определения семи неизвестных $A_{n1}, B_{n1}, A_{n2}, B_{n2}, A_{n3}, A_{n4}, A_{n5}$ получили систему линейных неоднородных уравнений: три уравнения (8.37), два уравнения (8.39) и два уравнения (8.40). Полученную систему можно решить аналитически в общем виде.

Чтобы определить объемный расход крови на каждом участке $Q_i(t, x)$, необходимо определить средний за период пульсации объемный кровоток по

всем участкам артериальной системы $Q_{i0}(t, x)$. Он соответствует случаю установившегося движения крови.

Из условия сохранения расходов получаем:

$$Q_{10} = Q_{20} + Q_{30},$$

$$Q_{30} = Q_{50} + Q_{40}.$$

Объемный кровоток Q_{10} определим из условия на входе в систему:

$$Q_{10} = a_0 + \pi v_{прод} R_1^2 + Q_{0w},$$

где $Q_{0w} = \frac{2\pi R_1}{qT} \int_0^{qT} \int_0^{c_{mk} qT} w_0(x, t) dx dt = \frac{2R_1 qT c_{mk} \gamma_2 (\pi^2 - 4)}{\pi}$ – дополнительный средний расход, возникающий за счет продольных сокращений стенки.

Найдем теперь средний объемный расход крови на остальных участках.

Из уравнения (8.19):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\pi R^2}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2 \rho} \cdot \left(Q - \pi R^2 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial t} \right).$$

В случае установившегося движения $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$. Тогда:

$$\frac{dp}{dx} = -B \left(Q_0 - \pi R^2 \frac{du_0}{dt} \right), \text{ где } B = \frac{8\pi\mu}{\pi^2 R^4}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$P = -B \left(Q_0 - \pi R^2 \frac{du_0}{dt} \right) x + P_0.$$

Тогда для первого узла бифуркации (участки 1, 2, 3) получим условия:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -B_1 \left(Q_{10} - \pi R_1^2 \frac{du_0}{dt} \right) x + P_{10} \\ P_2 &= -B_2 \left(Q_{20} - \pi R_2^2 \frac{du_0}{dt} \right) x + P_{20} \\ P_3 &= -B_3 \left(Q_{30} - \pi R_3^2 \frac{du_0}{dt} \right) x + P_{30} \end{aligned} \right\},$$

откуда следует: $P_1 = -B_1 \left(Q_{10} - \pi R_1^2 \frac{du_0}{dt} \right) l_1 + P_{10}$, $P_2 = P_{20}$, $P_3 = P_{30}$.

Условия непрерывности давлений в первом узле примут вид:

$$-B_1 \left(Q_{10} - \pi R_1^2 \frac{du_0}{dt} \right) l_1 + P_{10} = P_{20} = P_{30}.$$

На выходе из второго и третьего участков получаем:

$$P_2 = -B_2 \left(Q_{20} - \pi R_2^2 \frac{du_0}{dt} \right) l_2 + P_{20},$$

$$P_3 = -B_3 \left(Q_{30} - \pi R_3^2 \frac{du_0}{dt} \right) l_3 + P_{30}.$$

Предполагая, что перепад давления $\Delta P_{23} = P_2 - P_3$ известен, получим:

$$\begin{cases} \Delta P_{23} = -B_2(Q_{20} - \pi R_2^2 \frac{du_0}{dt})l_2 + B_3(Q_{30} - \pi R_3^2 \frac{du_0}{dt})l_3 \\ Q_{10} = Q_{20} + Q_{30} \end{cases}. \quad (8.41)$$

Таким образом:

$$\Delta P_{23} = -B_2 Q_{10} l_2 + (B_3 l_3 + B_2 l_2) Q_{30} + \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2).$$

Для среднего объемного кровотока на 3-м участке тогда получим:

$$Q_{30} = \frac{\Delta P_{23} + B_2 Q_{10} l_2 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2}.$$

Тогда из второго уравнения системы (7.33) получаем:

$$Q_{20} = Q_{10} - Q_{30} = \frac{-\Delta P_{23} + B_3 Q_{10} l_3 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2}.$$

Аналогично во втором узле разветвления получаем:

$$Q_{50} = \frac{\Delta P_{45} + B_4 Q_{30} l_4 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5},$$

$$Q_{40} = \frac{-\Delta P_{45} + B_5 Q_{30} l_5 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5}.$$

Можно предположить, что перепады давления $\Delta P_{23} \approx 0$, $\Delta P_{45} \approx 0$. Тогда для определения Q_{20} , Q_{30} , Q_{40} , Q_{50} получим более простые формулы:

$$Q_{20} = \frac{B_3 Q_{10} l_3 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2},$$

$$Q_{30} = \frac{B_2 Q_{10} l_2 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2},$$

$$Q_{40} = \frac{B_5 Q_{30} l_5 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5},$$

$$Q_{50} = \frac{B_4 Q_{30} l_4 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5}.$$

Таким образом, чтобы найти кровотоки на каждом участке, необходимо коэффициенты A_{in} , B_{in} подставить в (8.36) и взять действительную часть от $Q_i(t, x)$.

Построена одномерная математическая модель периодического течения крови, которая учитывает работу окружающих сосудов тканей. Важнейшим преимуществом данной модели является то, что основная система уравнений допускает аналитическое решение. При этом модель может применяться для сосудистых деревьев любой конфигурации.

Возможность построения аналитического решения существенно сокращает время для расчетов по сравнению с трехмерной моделью.

Связанные задачи биомеханики сердечно-сосудистой системы

Материальная система может быть дискретной, состоящей из отдельных материальных точек, или сплошной, то есть представляющей непрерывные распределения вещества и физические характеристики его состояния и движения в пространстве. Такую систему называют *сплошной средой*.

Самый простой пример сплошной среды – недеформируемая среда или абсолютно твердое тело. У сплошной среды есть несколько свойств. Первое – ее сплошность, то есть непрерывность распределения массы и физико-механических характеристик среды. Это свойство лежит в основе кинематики жидкости и газа. Второе основное свойство жидкой или газообразной среды – текучесть, выражающееся в том, что касательные напряжения в среде не равны нулю только при наличии относительного движения между слоями среды. В случае относительного покоя внутреннее трение отсутствует. В этом и заключается отличие жидких или газообразных сред от упругих. В последних касательные напряжения обуславливаются наличием деформаций (но не скоростей деформаций) сдвига и не равны нулю даже при относительном покое сплошной среды. Связь между касательными напряжениями и скоростями сдвига изучается *реологией*. Как правило, все газы и многие жидкости являются вязкими.

Кровь считают вязкой однородной несжимаемой жидкостью, подчиняющейся закону вязкого трения Ньютона. Это предположение справедливо только в случае крупных сосудов. В малых сосудах (например, капилляры) кровь считается неоднородной средой. Далее приведем постановку задачи биомеханики о течении крови по сосудам с упругими стенками. В такой постановке движение крови описывается системой уравнений Навье-Стокса, а движение стенки – системой уравнений Навье-Ламе.

Кровь моделируется как ньютоновская жидкость с заданными плотностью $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ и коэффициентом динамической вязкости $\eta = 0,004 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Течение крови описывается системой уравнений Навье-Стокса.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i, \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа³⁸ в декартовой системе координат, ∂ – знак частной производной, v_i – компоненты вектора скорости крови, x_j – пространственные координаты, p – давление крови, μ – коэффициент динамической вязкости крови, индексы i, j пробегает значения от 1 до 3.

Движение стенки сосуда описывается уравнениями Навье-Ламе:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \bar{F} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{u},$$

где ρ_1 – плотность стенки, $\bar{u}(u, v, w)$ – вектор перемещений, \bar{F} – вектор внешних сил, λ, μ – коэффициенты Ламе, характеризующие механические свойства материала среды, θ – объемное расширение.

На границе крови и стенки ставятся условия прилипания, которые выражаются следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial u_1}{\partial t}, v = \frac{\partial v_1}{\partial t}, w = \frac{\partial w_1}{\partial t},$$

где \vec{u} – скорость крови, $\vec{u} = (u, v, w)$; \vec{u}_1 – перемещение стенки, $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$.

На стенку со стороны крови действует сила, представляющая собой силы вязкости и давление $\vec{F} = \vec{F}_0$.

$$\vec{F}_0 = -\vec{n}(-pI + \mu(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)),$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали к границе; μ – коэффициент динамической вязкости крови; p – давление крови; I – единичная матрица; T – символ транспонирования.

Для узлов вычислительной сетки на границе «кровь – стенка» ставятся условия равенства перемещений вычислительной сетки и перемещений стенки артерии:

$$dx = u_1, dy = v_1, dz = w_1.$$

³⁸ Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (фр. Pierre-Simon de Laplace; 23 марта 1749 — 5 марта 1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук. Лаплас состоял членом шести академий наук и королевских обществ, в том числе Петербургской Академии (1802), и членом Французского Географического общества. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

На торцах сосуда ставятся ограничения на перемещения по всем трем направлениям:

$$u = 0, v = 0, w = 0.$$

На внешней стенке артерии принимается давление, равное нулю, так как воздействие окружающих тканей считается незначительным.

Что касается начальных условий, то если нет данных о начальном поле скоростей и давлений, то ставятся нулевые начальные условия для скорости и давления крови. Наилучший вариант начальных условий при решении нестационарной задачи – учет стационарного решения и его использование в качестве начальных условий.

Что касается входов и выходов из сосудов, то здесь могут быть различные варианты граничных условий. Продемонстрируем возможные варианты граничных условий на входе и выходе из сосудов на примере моделирования плоских сосудов виллизиевого круга с аневризмами. В случае трехмерных моделей варианты граничных условий остаются теми же.

И в плоском, и в пространственном случаях можно варьировать профиль скорости крови на входе в сосуд. Наиболее реалистичный вариант – использование объемного профиля скорости, полученного при помощи медицинского диагностического оборудования. Если же такой вариант недоступен, то либо ограничиваются прямоугольным профилем скорости, либо моделируют с параболическим профилем скорости на входе в сосуд.

Рассмотрим плоскую задачу о течении крови по сосудам виллизиевого круга с асимметричными и симметричными аневризмами (рисунок 8.2 и 8.3).

Для асимметричных моделей (рисунок 8.2 слева) на входе в базилярную артерию задавали прямоугольный профиль скорости, изменяющийся во времени в соответствии с графиком, показанным на рисунке 8.2. На выходах задних мозговых артерий задавали нулевое давление.

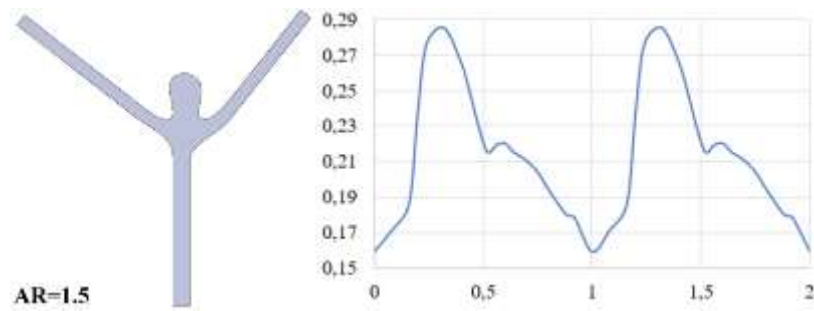


Рисунок 8.2 – График зависимости скорости (м/с) крови от времени (с) на входе в базилярную артерию (асимметричные модели).

Время менялось от 0 до 2 с. В интервал попали 2 сердечных цикла, соответствующие частоте сердечного ритма 60 ударов в минуту.

Для симметричных моделей (рисунок 8.3 слева) на входе в базилярную артерию и выходах (правая и левая задние мозговые артерии) задавали зависящий от времени график давления, показанный на рисунке 8.3.

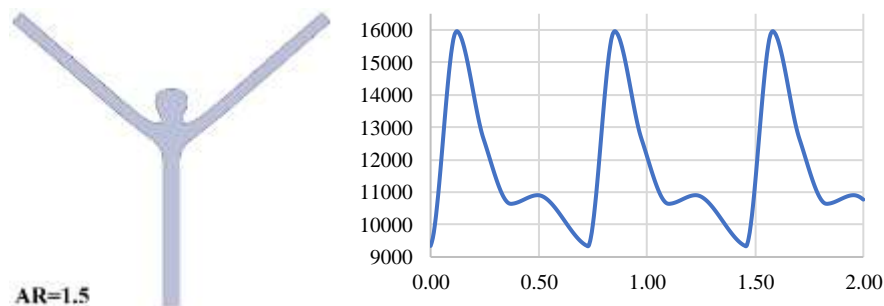


Рисунок 8.3 – Зависимость давления (Па) от времени (с) на входе в базилярную артерию (симметричные модели).

При задании давления на выходе учитывалось запаздывание, равное 0.01 с, выходного графика относительно входного из-за конечной скорости пульсовой волны давления, которая принималась равной 8 м/с. Время менялось от 0 до 2 с. В интервал попали почти полных 3 сердечных цикла, соответствующие частоте сердечного ритма в 70 ударов в минуту.

Ветви базилярной и задних мозговых артерий намеренно строились довольно протяженными, чтобы минимизировать влияние прямоугольного профиля скорости на входе и выходах на решение задачи в области аневризмы.

Статические задачи биомеханики опорно-двигательного аппарата

При моделировании опорно-двигательного аппарата наиболее часто решают задачу статики упругого тела. Приведем постановку такой задачи применительно к сегменту пояснично-крестцового отдела позвоночника.

С математической точки зрения в каждой из локально однородных подобластей неоднородного функционального элемента позвоночника решается статическая задача теории упругости о действии на него компрессионной (осевой) нагрузки. В рассматриваемой задаче должны выполняться следующие уравнения:

$\sigma_{ij,j} = 0$ – уравнения равновесия (полагаем, что объёмные силы отсутствуют);

$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ – уравнения закона Гука, связывающие компоненты тензора напряжений и деформаций;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – соотношения Коши, связывающие тензор деформаций и вектор перемещения, где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений, λ, μ – упругие константы Ламе, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объёмное расширение, δ_{ij} – символ Кронекера³⁹, индексы i и j принимают значения от 1 до 3, знак “,” в нижнем индексе обозначает частную производную по соответствующей координате.

В каждой точке смежных границ соседних подобластей (диск-позвонок, позвонок-винт и т.п.) принимаются условия полного контакта для функций перемещения: $u'_i(x_j) = u''_i(x_j)$, которые обеспечивают жесткое соединение как элементов позвоночно-двигательного сегмента, так и имплантатов с костными тканями, и непрерывность поля деформаций при приложении нагрузки к моделируемому сегменту позвоночника. При моделировании учитывались конечные деформации.

К основным уравнениям, определяющим состояние линейно-упругого тела в его внутренних точках, и условиям контакта необходимо добавить граничные условия на его поверхности. В поставленной задаче граничные условия имеют смешанный вид. Граница сегмента позвоночника может быть разбита на 2 части:

³⁹ Леопольд Кронеcker (нем. Leopold Kronecker; 7 декабря 1823, Лигниц, Германия, ныне Легница, Польша — 29 декабря 1891, Берлин, Германия) — немецкий математик. Брат известного физиолога Гуго Кронекера (1830—1914). Родился в состоятельной еврейской семье, за год до смерти принял христианство. Профессор университета в Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел, где он продолжил работы своего учителя Э. Куммера по теории квадратичных форм и теории групп. Большое значение имеют его исследования по арифметической теории алгебраических величин.

$$S = S_{\sigma} \cup S_u.$$

На части границы S_{σ} действуют поверхностные силы:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)n_j|_{S_{\sigma}} = P_i(x_1, x_2, x_3),$$

где P_i – компоненты вектора заданных на S_{σ} поверхностных сил, n_j – компоненты вектора внешней нормали к поверхности S_{σ} .

На части границы S_u заданы перемещения:

$$u_i(x_1, x_2, x_3)|_{S_u} = u_i^*(x_1, x_2, x_3),$$

где u_i^* – компоненты вектора заданных на S_u перемещений.

К верхним концевым пластинам $L4$ и $L5$ прикладывается компрессионная распределенная нагрузка в 200 Н, действующая в направлении осей тел позвонков. Нижняя концевая пластина позвонка $L5$ жестко закрепляется. Данный способ нагружения называется сопутствующей нагрузкой и позволяет моделировать действие на позвоночник распределенного веса тела человека.

Для всех материалов используется модель линейно упругого изотропного материала. Механические характеристики могут быть взяты из литературы или рассчитаны по данным КТ (таблица 8.1).

Таблица 8.1 – Свойства материалов сегмента позвоночника

Материал	Кортикальная кость	Губчатая кость	Межпозвонковый диск	Связки	Титановый сплав	Керамика
Е, МПа	12000	100	2	7	110000	3600
ν	0,3	0,2	0,49	0,39	0,3	0,25

Моделирование бедренной кости

При моделировании нагружения бедренной кости материалы костных тканей также могут приниматься изотропными, линейно-упругими с постоянными модулями Юнга и коэффициентами Пуассона. Материал костных отломков – однородный, идеально-упругий, изотропный с модулем Юнга $1.8 \cdot 10^9$ Па и коэффициентом Пуассона 0.33. Материал, из которого изготавливались стержни, – изотропная идеально-упругая сталь с модулем Юнга $2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона 0.33.

При решении задачи о статическом нагружении системы «кость-фиксатор» исследователи нагружают модель осевыми, скручивающими и

поперечными нагрузками. Нижний конец кости жестко или шарнирно закрепляют. Величина осевых нагрузок колеблется в пределах от 450 до 1000 Н, редко больше. Величина скручивающих моментов составляет порядка 10 Н*м (рисунок .8.4).

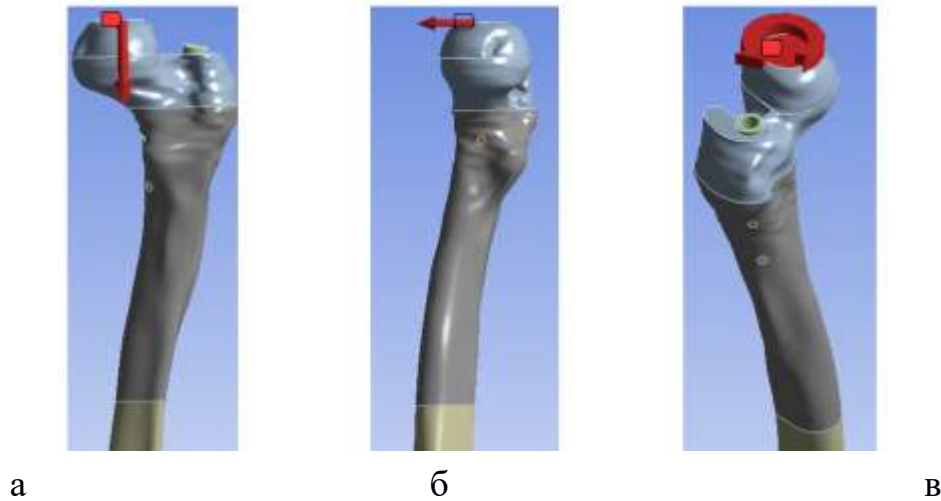


Рисунок 8.4 – Способы приложения нагрузок и закрепления: а – осевая нагрузка, б – поперечная сила, в – скручивающий момент.

Вид и величины нагрузок сведены в таблицу 8.2.

Таблица 8.2 – Виды и величины нагрузок для бедренной кости

	Вид нагрузки	Величина нагрузки
1	Осевая	600 Н
		800 Н
		1000 Н
2	Поперечная сила	100 Н
3	Скручивающий момент	10 Н·м

Очевидно, что при моделировании ходьбы или других динамических нагрузок статические постановки не всегда могут быть применены. В такой ситуации решаются нестационарные уравнения движения с учетом динамических условий нагружения.

Далее продемонстрируем возможные способы анализа результатов численного биомеханического моделирования.

Глава 9. Анализ результатов численного моделирования

Задачи статики опорно-двигательного аппарата

При анализе результатов биомеханического моделирования сравнивают характеристики напряженно-деформированного состояния биологических систем при различных вариантах лечения или установленных имплантатах. С этой целью разрабатывают биомеханические критерии успешности. Критерии применяют для оценки стабильности фиксации, а также для оценки срока службы имплантатов и возможности повреждения костных, мягких тканей.

Выделим два критерия успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений позвоночника. Сюда отнесем только биомеханические критерии, не принимая во внимание геометрические, связанные с сагиттальным и фронтальным балансами. Именно биомеханические критерии могут быть использованы при биомеханическом анализе результатов численного моделирования нагружения ПДС.

Отечественные и зарубежные ученые, в первую очередь, выделяют критерий, связанный с нестабильностью ПДС [102]. По данным Байкова Е.С. и Американской академии хирургов ортопедов, нестабильность определена как патологический ответ на приложенную нагрузку, характеризующийся движениями в ПДС сверх нормальных границ. Нормальной сегментарной подвижностью считают смещение позвонков не более 3 мм.

При анализе напряжений, возникающих в ПДС, авторы полагают, что поле напряжений с учетом фиксирующих конструкций должно быть максимально приближено к таковому для модели ПДС в норме. Именно поэтому многие авторы сравнивают результаты расчетов с учетом имплантатов с результатами расчетов для интактных моделей костей, позвонков [103].

Сначала приведем поля перемещений для трех рассмотренных в главе 6 моделей с фиксаторами. На рисунке 9.1 показаны поля перемещений в мм.

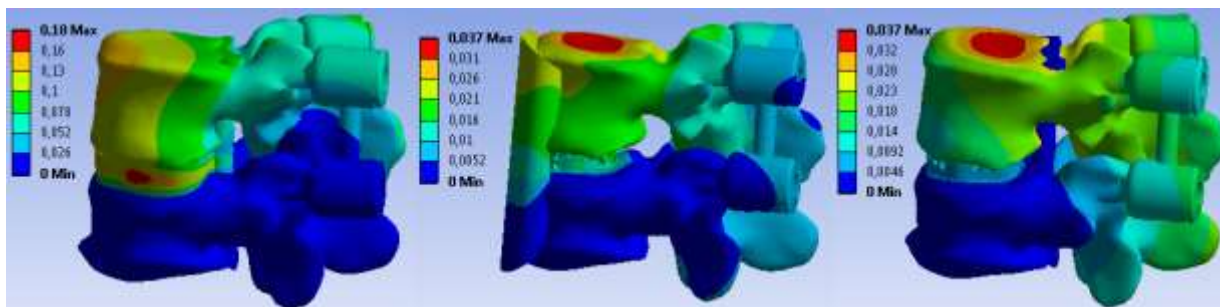


Рисунок 9.1 – Поля перемещений в мм: модель с установкой винтов без удаления межпозвонкового диска (слева), модель с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Mesh» (по центру), модель с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Rezo-A» (справа).

Максимальные перемещения для модели с установкой транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска не превысили 0.2 мм. Для двух других моделей максимальные перемещения составили менее 0.04 мм. При этом максимальные перемещения в первом случае наблюдались в межпозвонковом диске, а в двух других – в центре верхней замыкательной пластины позвонка L4.

Для выбора наиболее рационального варианта хирургического лечения на основе второго критерия успешности сравнивались поля напряжений (в МПа), возникающие в ПДС L4-L5 без патологии, с полями напряжений, возникающих в каждом из рассмотренных вариантов. Рассматривались эквивалентные напряжения (напряжения по Мизесу⁴⁰). При сравнительном анализе полей напряжений трех вариантов операций и интактного ПДС будут рассматриваться только тела позвонков, а именно, кортикальная и губчатая кости тел позвонков.

На рисунке 9.2 показано поле напряжений, возникающее в интактных позвонках в норме, которое было взято за исходное («эталонное»).

⁴⁰ Рихард Эдлер фон Мизес (нем. Richard Edler von Mises, 19 апреля 1883, Лемберг, Австро-Венгрия (ныне Львов, Украина) — 14 июля 1953, Бостон, США) — математик и механик австрийского происхождения; работы посвящены аэродинамике, прикладной механике, механике жидкостей, аэронавтике, статистике и теории вероятностей. В теории вероятностей предложил и отстаивал частотную концепцию понятия вероятности, ввёл в общее употребление интегралы Стильтьеса и первым разъяснил роль теории марковских цепей в физике; был невероятно динамичным человеком и в то же самое время удивительно универсальным, особенно хорошо сведущим в области технологии; признанный эксперт в поэзии Райнера Марии Рильке.

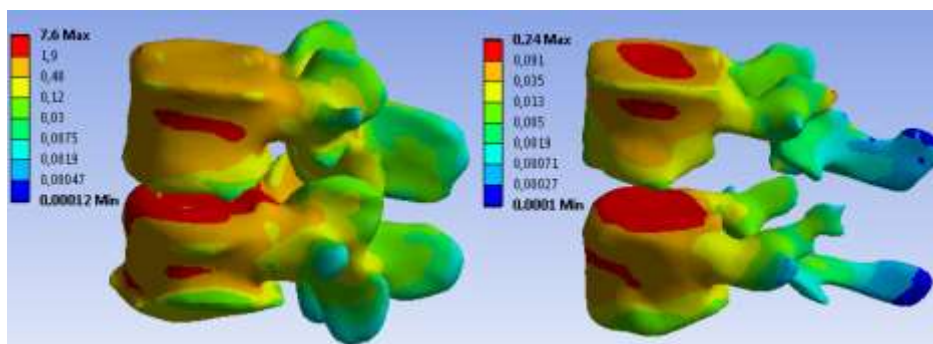


Рисунок 9.2 – Поле напряжений (в МПа) в позвонках в норме: кортикальная кость (слева), губчатая кость (справа).

Максимальное напряжение в кортикальном слое кости составило 7.6 МПа, в губчатом - 0.24 МПа. При этом наблюдались максимумы для обоих типов костной ткани в области верхней замыкательной пластины позвонка L5. Области наиболее высоких напряжений (порядка 3-4 МПа для кортикальной и 0.15 МПа для губчатой кости) наблюдались также в районе так называемой «тали» тел позвонков, то есть на боковых поверхностях примерно на одинаковом расстоянии от замыкательных пластин.

Приведем результаты расчетов для полей напряжений для каждого из трех вариантов хирургического реконструктивного лечения.

На рисунке 9.3 представлены поля напряжений, возникающие в позвонках в модели с установкой транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска.

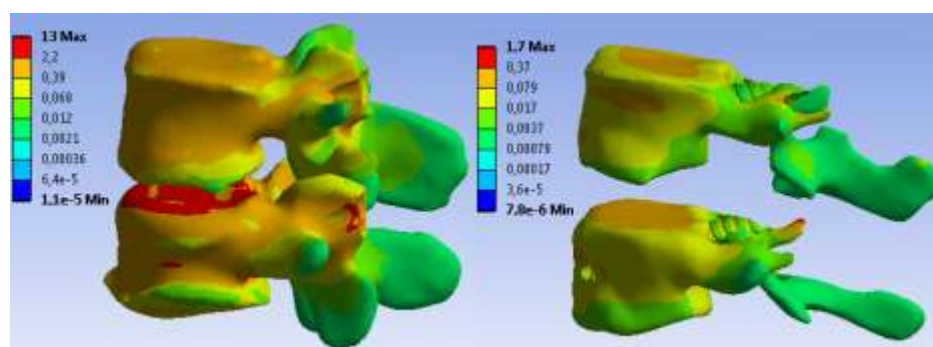


Рисунок 9.3 – Поле напряжений (в МПа) в позвонках в модели с установкой транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска: кортикальная кость (слева), губчатая кость (справа).

Максимальное напряжение в кортикальном слое кости составило 13 МПа, в губчатом - 1.7 МПа. Качественная картина распределения напряжений в кортикальном слое в целом похожа на поле напряжений, возникающее в позвонках в норме, однако на ножках позвонка L5 возникают зоны максимальных напряжений, что показано на рисунке 9.4.

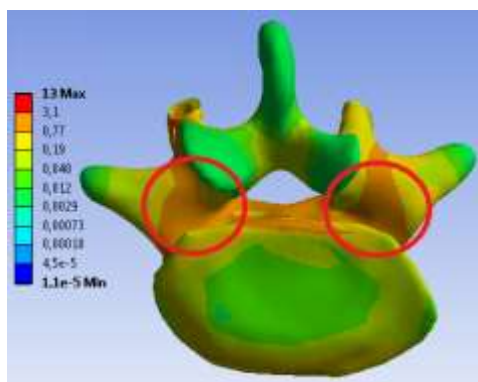


Рисунок 9.4 – Зоны высоких напряжений (в МПа) в области ножек L5.

При росте компрессионной нагрузки такое распределение напряжений может приводить к перелому в этой области [104].

Картина распределения напряжений в губчатом слое кости, несмотря на отличие цветовой гаммы, качественно также похожа на поле напряжений в случае нормы. На рисунке 9.5 представлены поля напряжений, возникающие в позвонках в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Mesh».

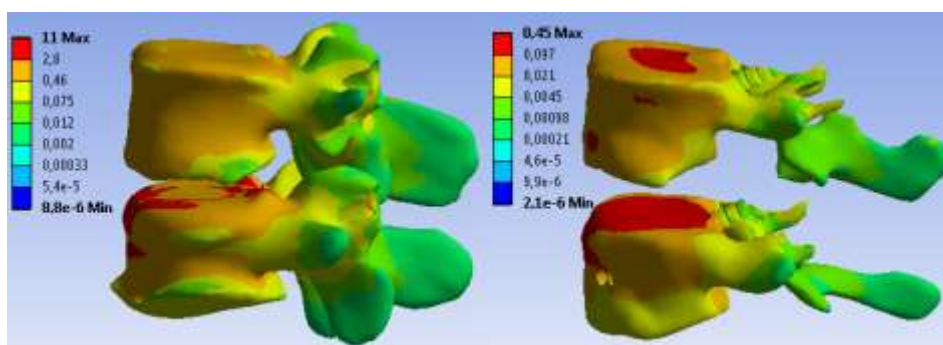


Рисунок 9.5 – Поле напряжений (в МПа) в позвонках в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Mesh»:

кортикальная кость (слева), губчатая кость (справа).

Максимальное напряжение в кортикальном слое кости составило 11 МПа, в губчатом 0.45 МПа. Качественная картина распределения напряжений как в кортикальном, так и в губчатом слое в целом похожа на поля напряжений, возникающие в позвонках в норме.

На дужках позвонка L5 при этом не наблюдаются зоны максимальных напряжений как в предыдущем случае. Зоны повышенных напряжений возникают на замыкательных пластинах позвонков в месте их контакта с установленным кейджем.

Однако высокие напряжения в этой области (пусть и более равномерно распределенные по поверхностям замыкательных пластин) характерны и для не патологического ПДС (рисунок 9.2).

Не обнаружены скачки напряжений и в зонах установки транспедикулярных винтов. Стоит отметить участки повышенных напряжений в губчатом слое позвонка L4, появляющиеся вследствие того, что там находятся концы установленных винтов (рисунок 9.6 слева).

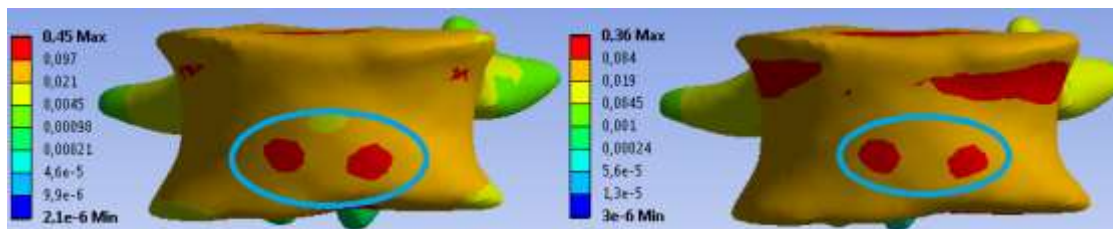


Рисунок 9.6 – Зоны повышенных напряжений (в МПа) в местах концов винтов: в сочетании с кейджем типа «Mesh» (слева), с кейджем типа «Rezo-A» (справа).

При этом величина максимальных напряжений более чем в 4 раза меньше максимума в предыдущем варианте хирургического лечения, что свидетельствует о гораздо меньшем риске разрушения кости в данном случае.

На рисунке 9.7 представлены поля напряжений, возникающие в позвонках в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Rezo-A».

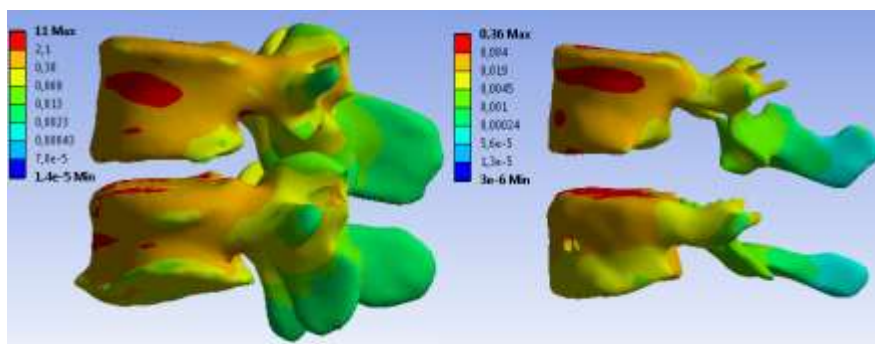


Рисунок 9.7 – Поле напряжений (в МПа) в позвонках в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Rezo-A»: кортикальная кость (слева), губчатая кость (справа).

Максимальное напряжение в кортикальном слое кости составило 11 МПа, в губчатом 0.36 МПа. Качественная картина распределения напряжений как в кортикальном, так и в губчатом слое в целом похожа на поле напряжений, возникающее в позвонках в норме. Более того, картина распределения напряжений похожа на картину, полученную при моделировании варианта хирургического лечения с установкой кейджа типа «Mesh»: здесь наблюдаются аналогичные зоны повышенных напряжений на замыкательных пластинах позвонков, контактирующих с кейджем, а также в области концов транспедикулярных винтов (рисунок 9.6 справа). При этом

величины максимальных напряжений для обоих типов костной ткани также оказались довольно близкими.

Таким образом, на основании второго критерия успешности хирургического лечения можно сделать вывод о том, что варианты с установкой транспедикулярных винтов и заменителей межпозвонкового диска являются наиболее рациональными, в то время как вариант с установкой транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска является менее предпочтительным вследствие наличия нескольких зон повышенных напряжений, в которых могут происходить разрушения костной ткани.

Как было отмечено выше, анализ напряженно-деформированного состояния имплантатов проводился с целью определения максимумов напряжений и сравнения их с пределом прочности. Все моделируемые имплантаты, за исключением кейджа «Rezo-A», были изготовлены из титанового сплава, предел текучести которого составляет более 550 МПа [105]. Кейдж «Rezo-A» изготавливается из РЕЕК-керамики, предел прочности при сжатии которой составляет не менее 125 МПа [106]. На рисунке 9.8 представлены поля напряжений, возникающие в транспедикулярных винтах и соединительных штангах в каждом из рассмотренных вариантов хирургического лечения.

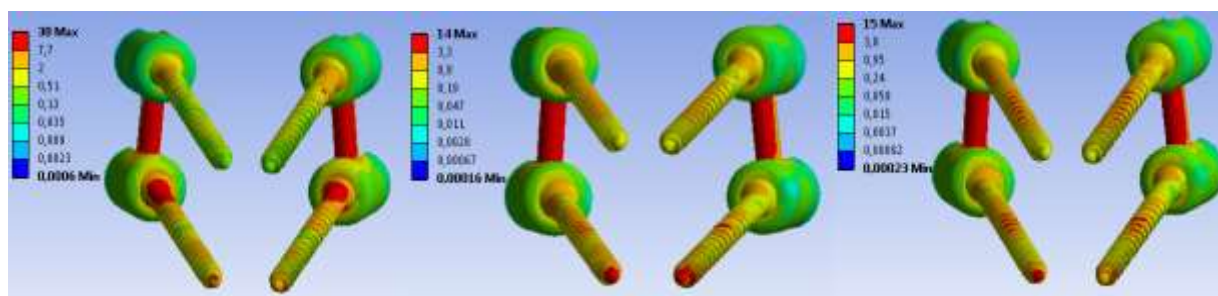


Рисунок 9.8 – Поле напряжений (в МПа) в транспедикулярных винтах: в модели с установкой транспедикулярных винтов без удаления межпозвонкового диска (слева), в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Mesh» (по центру), в модели с установкой винтов в сочетании с кейджем типа «Rezo-A» (справа).

Максимальные напряжения составили для каждого из вариантов хирургического лечения соответственно 30 МПа, 14 МПа и 15 МПа, что существенно ниже предела текучести материала, из которого они изготовлены. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в процессе эксплуатации имплантаты даже при существенном увеличении нагрузки не сломаются.

На рисунке 9.9 показаны поля напряжений в установленных заменителях межпозвонковых дисков.

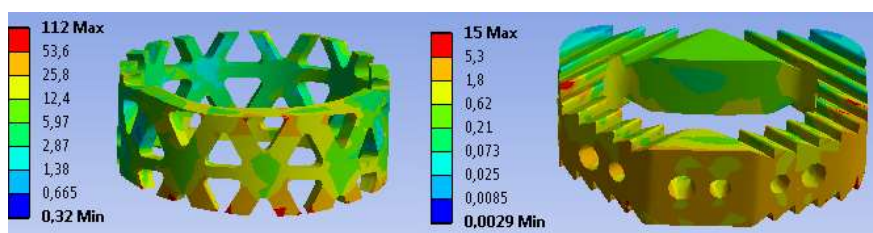


Рисунок 9.9 – Поле напряжений (в МПа): в кейдже типа «Mesh» (слева), в кейдже типа «Rezo-A» (справа).

Максимальное напряжение в кейдже типа «Mesh» составило 112 МПа, что более чем в пять раз ниже предела текучести титанового сплава. Максимальное значение напряжений в кейдже типа «Rezo-A» составило 15 МПа, что также меньше указанного выше предела прочности РЕЕК-керамики.

Таким образом, в установленных имплантатах в результате действия на ПДС компрессионной нагрузки не возникают напряжения, способные привести к разрушению их конструкции.

Предел прочности трабекулярной костной ткани позвонков взрослых людей достигает 6 МПа, а среднее значение составило немногим более 2 МПа. Предел прочности кортикальной кости для позвонков составляет более 20 МПа.

Несмотря на то, что вариант без установки кейджа удовлетворяет биомеханическим критериям успешности, эквивалентные напряжения в трабекулярной костной ткани достигают 1.7 МПа и оказываются близки к предельным значениям в 2 МПа. Оба варианта с кейджами в этом аспекте более предпочтительны, так как напряжения и в кортикальной, и в трабекулярной кости оказываются существенно ниже предельных значений. Максимальные напряжения в интактной трабекулярной кости (0.24 МПа) и в трабекулярной кости в случае установки кейджей (0.45 и 0.36 МПа для кейджа типа «Mesh» и кейджа типа «Rezo-A», соответственно) оказываются наиболее близкими.

Более того, максимальные эквивалентные напряжения в винтах в первом случае без установки кейджа почти в два раза выше напряжений для двух других вариантов с кейджами (рисунок 9.7). Все эти выводы показывают, что

варианты с кейджами типа «Mesh» и «Rezo-A» оказываются более предпочтительными с точки зрения биомеханики.

Анализ результатов биомеханического моделирования показал, что наиболее рациональными с точки зрения биомеханики являются два варианта лечения, подразумевающие установку транспедикулярных винтов и заменителей межпозвонкового диска типа «Mesh» и «Rezo-A». При этом ни один из вариантов, исходя из рассмотренных биомеханических критериев успешности хирургического лечения, не имеет существенных преимуществ, поэтому окончательный выбор в пользу того или иного подхода необходимо делать исходя из медицинских показателей конкретного пациента и личного опыта врача.

Численный расчет динамики кровотока в плечевой артерии

В данном разделе приведены результаты оценки влияния окружающих сосудов тканей на ускорение крови при моделировании гемодинамики плечевой артерии. Моделирование выполнено методом конечных элементов и по одномерной теории.

Для проведения численного эксперимента по моделированию гемодинамики плечевой артерии помимо механических характеристик материала требуются также геометрические параметры отдельных участков сосудистого русла, а также углы ветвления дочерних сосудов. В качестве модели для численного эксперимента было принято решение использовать плечевую артерию с двумя узлами бифуркации: в верхней трети от основного ствола отделяется глубокая артерия плеча, а в нижней трети сосуд разделяется на локтевую и лучевую артерии.

Радиусы сосудов, толщины стенок, а также протяженности отдельных участков были получены путем осреднения геометрических характеристик артерий и их значения приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 Геометрические параметры участков сосудистого русла.

Участок	Радиус (мм)	Протяженность (мм)	Толщина стенки (мм)
Верхняя треть плечевой артерии	2	44,6	0,5
Глубокая артерия плеча	0,5	27,9	0,2
Средняя треть плечевой артерии	2	51,4	0,5
Локтевая артерия	0,8	25,3	0,3
Лучевая артерия	1,5	24,8	0,2

Угол ветвления в первом узле бифуркации был принят равным 41° , во втором 45° . На основе приведенных данных, а также информации из анатомического атласа [107] в программном комплексе SolidWorks были построены модели стенки плечевой артерии (рисунок 9.10), а также объема крови, находящегося в ней (рисунок 9.11). Модель крови будет необходима для дальнейшего расчета в конечно-элементном программном комплексе.



Рисунок 9.10 – Модель стенки плечевой артерии.



Рисунок 9.11 – Модель объема крови.

Полученные трехмерные модели были импортированы в конечно-элементный программный комплекс ANSYS для дальнейших расчетов. Для использования построенных твердотельных моделей в ANSYS они были сохранены в формате Parasolid, который позволяет полностью сохранить геометрию без потери качества [108].

Для дальнейших расчетов импортированные модели были разбиты тетраэдрической сеткой с размером ребра элемента 0.0003 м (Рисунки 9.12, 9.13). Тетраэдры были выбраны в качестве элементов для разбиения потому,

что разбить модель регулярной сеткой из гексаэдров не представлялось возможным в силу кривизны геометрии.

Размер ребра элемента выбирался в ходе исследования сеточной сходимости. То есть сетка подбиралась таким образом, чтобы размеры элементов не оказывали влияния на результаты расчетов.



Рисунок 9.12 – Модель стенки сосуда, разбитой конечно-элементной сеткой.

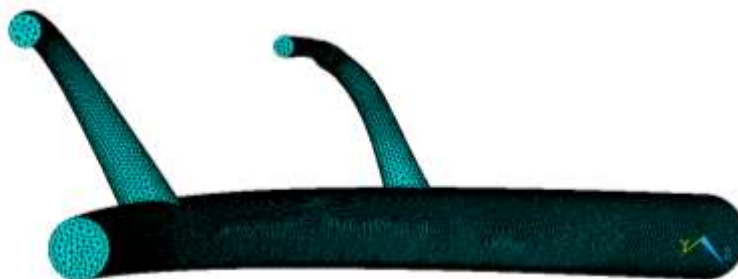


Рисунок 9.13 – Модель объема крови в сосуде, разбитая конечно-элементной сеткой.

Кровь в ходе расчетов принималась ньютоновской жидкостью с динамической вязкостью $0.004 \text{ Па}\cdot\text{с}$ и плотностью 1050 кг/м^3 . Использование модели ньютоновской жидкости возможно, так как данный сосуд считается крупным [109, 110].

Материал стенки сосуда считался ортотропным, несжимаемым [111, 112]. Модули упругости для данного материала приведены ниже:

$$E_x = 4621000 \text{ Па},$$

$$E_y = 2401000 \text{ Па},$$

$$E_z = 2401000 \text{ Па},$$

$$\nu_{xy} = 0.4,$$

$$\nu_{yz} = 0.4,$$

$$\nu_{xz} = 0.4,$$

$$G_{xy} = 857500,$$

$$G_{yz} = 1650357,$$

$$G_{xz} = 857500.$$

Плотность материала стенки принималась равной 1378 кг/м^3 [113].

На входе в сосуд задавалось давление, график которого представлен на рисунке 9.14 [114, 115]. На выходах из ответвлений задавалось нулевое давление. Такая ситуация соответствует эксперименту на испытательном стенде, когда в сосуд на входе с помощью специального насоса подается давление, а выходы закреплены и давление на них не задается (см. главу 10).



Рисунок 9.14 – Давление на входе в сосуд.

Время расчетов составило 2 секунды, при этом период пульсации принимался равным 0,85 с, что приблизительно соответствует пульсу в 70 ударов в минуту.

Расчет проводился как с учетом воздействия на сосуд внешних тканей, так и без него. В случае, когда работа внешних тканей не учитывалась, на стенке сосуда никаких дополнительных перемещений не задавалось. Когда же моделировалась работа окружающих тканей, на стенке задавалось перемещение в направлении оси сосуда по закону, представленному на рисунке 9.15.

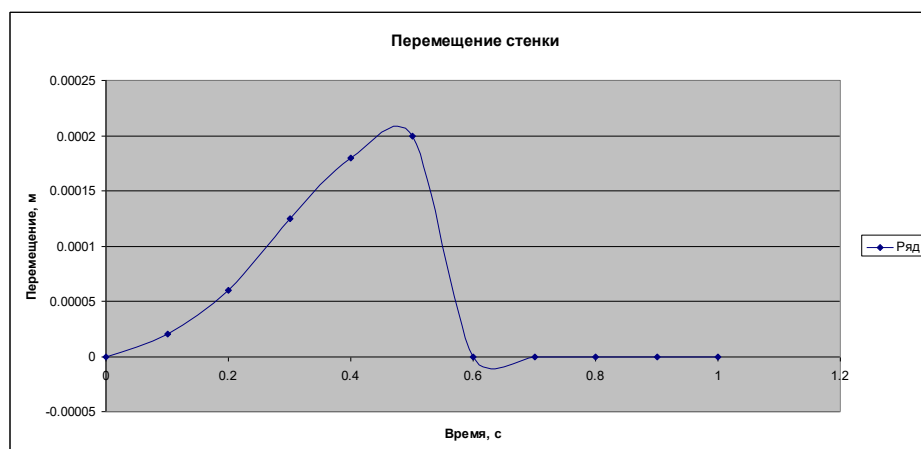


Рисунок 9.15 – Перемещение стенки сосуда.

Данный вид перемещения был взят исходя из предположения, что в продольном направлении функция реактивного смещения стенки имеет вид

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right)\right) & , \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0 & , \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases}$$

где $\gamma_1 = 0.001$, $q = 0.5$.

Поскольку значения коэффициента мышечной активности неизвестны, коэффициент $\gamma_1 = 0.001$ подбирался таким образом, чтобы максимальное перемещение стенки составляло 0.0002 м, что соответствует средней толщине стенок на выбранном участке сосудистого русла.

Следует отметить, что для упрощения расчетов реактивные перемещения стенки в радиальном направлении не задавались.

После окончания расчетов были построены диаграммы распределения линий тока крови, представленные на рисунках 9.16 – 9.17, а также графики зависимости объемного кровотока на выходах из сосуда от времени.

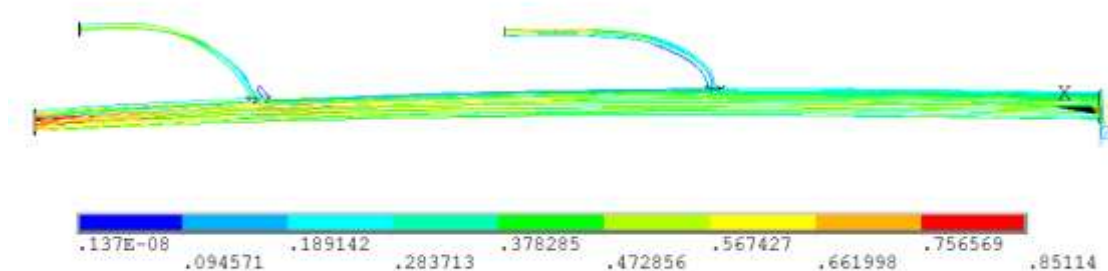


Рисунок 4.1.5 Линии тока в плечевой артерии.

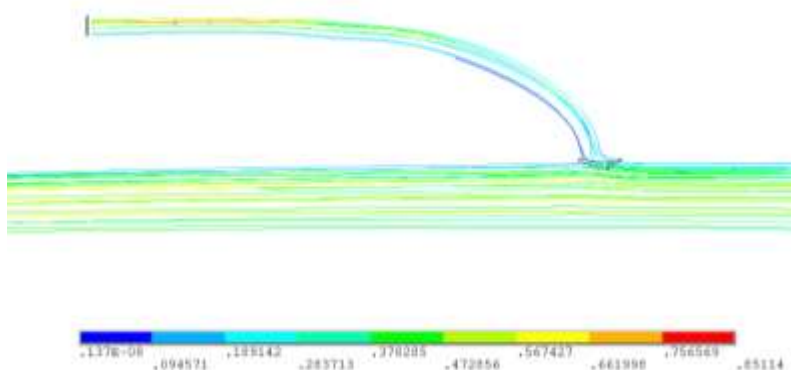


Рисунок 9.16 – Линии тока в окрестности первой бифуркации.

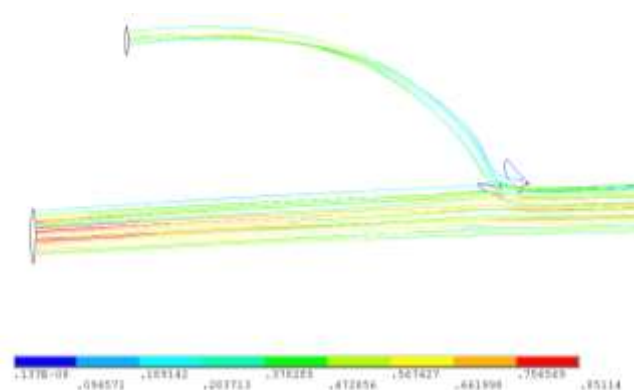


Рисунок 9.17 – Линии тока в окрестности второй бифуркации.

Ниже, на рисунках 9.18, 9.19 и 9.20 приведены графики для объемных кровотоков на выходах из сосудов как для случая с учетом работы внешних тканей, так и для случая без учета реактивного смещения стенок.

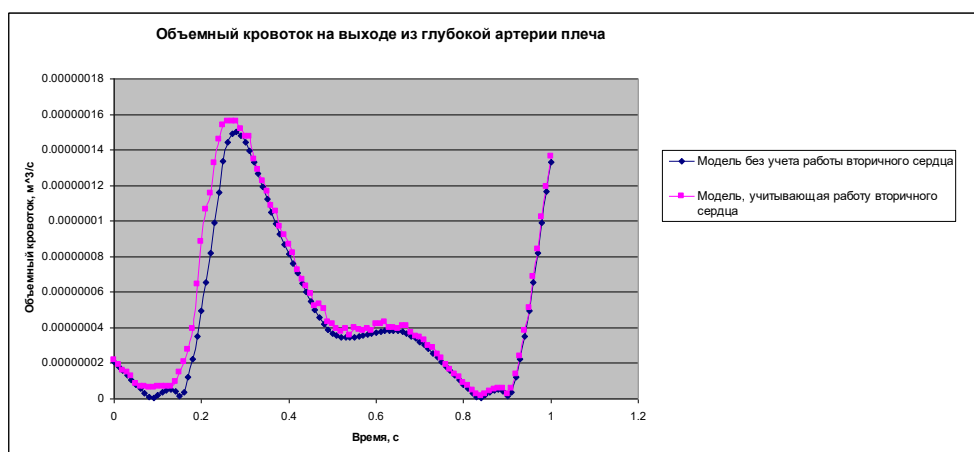


Рисунок 9.18 – Объемный кровоток на выходе из глубокой артерии плеча с учетом и без учета работы внешних тканей.

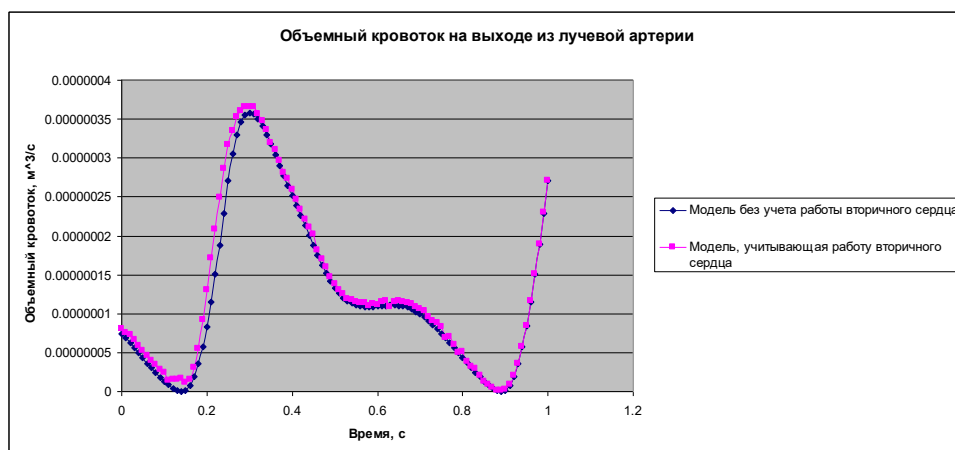


Рисунок 9.19 – Объемный кровоток на выходе из лучевой артерии с учетом и без учета работы внешних тканей.

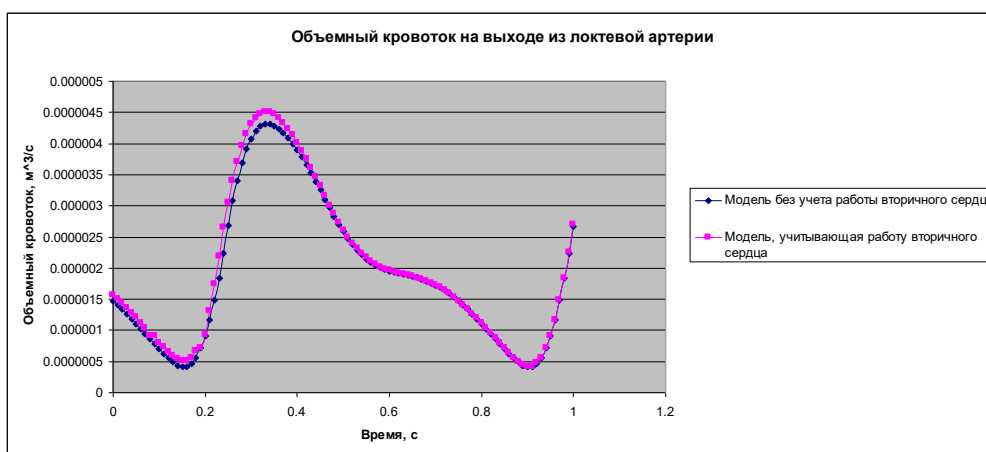


Рисунок 9.20 – Объемный кровото́к на выходе из локтевой артерии с учетом и без учета работы внешних тканей.

Значения на пике систолы для каждого приведенного сечения различаются в среднем на 5%. Это увеличение как раз и обусловлено работой внешних тканей, то есть при выбранном коэффициенте мышечной активности $\gamma_1 = 0.001$ объемный кровоток в сосуде увеличивается на 5%. Так как γ_1 выбиралась без привязки к клиническим исследованиям, можно утверждать, что в действительности вклад работы окружающих тканей в процесс ускорения крови в зависимости от состояния сосудистых стенок может быть гораздо большим и, кроме того, отличаться как на различных участках сосудистого русла, так и для каждого конкретного пациента.

Расчет гемодинамики плечевой артерии по одномерной теории

В программном комплексе Mathcad было получено решение одномерной системы уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости для части артериальной системы плеча. Это позволило сравнить результаты конечно-элементного моделирования с результатами, которые дает одномерная модель.

Решение строилось для системы разветвляющихся сосудов, схема которой приведена на рисунке 9.21.

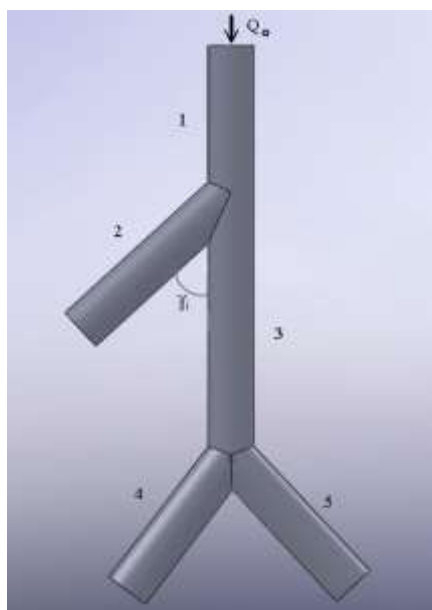


Рисунок 9.21 – Схема системы разветвляющихся сосудов.

В качестве входных параметров для расчетов брались геометрические параметры сосудов, приведенные в таблице 9.2, рассматривалась модель сосудистого русла с теми же характеристиками, что и в конечно-элементном расчете.

Таблица 9.2 – Параметры участков сосудистого русла.

Участок	Радиус (мм)	Протяженность (мм)	Толщина стенки (мм)
1	2	44,6	0,5
2	0,5	27,9	0,2
3	2	51,4	0,5
4	0,8	25,3	0,3
5	1,5	24,8	0,2

Угол ветвления в первом узле бифуркации так же, как и для трехмерной модели, был принят равным 41° , во втором 45° .

На входе в систему задавалось такое же давление, как и в трехмерном случае (рисунок 9.22). На выходах из ответвлений задавалось такое же давление, но с запаздыванием в 0.01 с. Время запаздывания определялось путем деления длины сосуда на скорость волны давления. Эта ситуация соответствует случаю, когда участок рассматривается как часть целой системы сосудов.

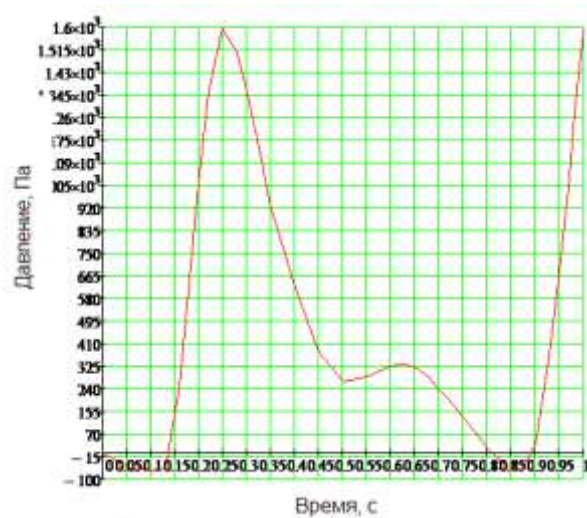


Рисунок 9.22 – Давление на входе в систему (для одномерной модели).

Вязкость крови принималась равной 0.004 Па*с, плотность 1050 кг/м³. Материал стенки считался изотропным с модулем Юнга E=4621000 Па и коэффициентом Пуассона $\nu=0.4$. Период пульсации принимался равным 0.85 с.

Учет работы окружающих тканей производился посредством задания функции для реактивного продольного перемещения стенок. Как и в случае конечно-элементного расчета, данная функция имела вид

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right)\right) & , \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0 & , \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases}$$

где $\gamma_1 = 0.001$, $q = 0.5$.

В результате были получены графики для объемных кровотоков на выходе из системы.

На рисунках 9.22-9.24 приведены сравнения графиков объемных кровотоков в случае конечно-элементного расчета и в случае расчета по одномерной модели. Следует отметить, что так как в одномерной модели использовалась модель изотропного материала стенки, то для сравнения результатов методом конечных элементов был произведен расчет трехмерной модели также с изотропными стенками (с теми же механическими характеристиками). Кроме того, новые расчеты трехмерной модели проводились с граничным условием в виде давления с запаздыванием на выходах, как и в одномерном случае.

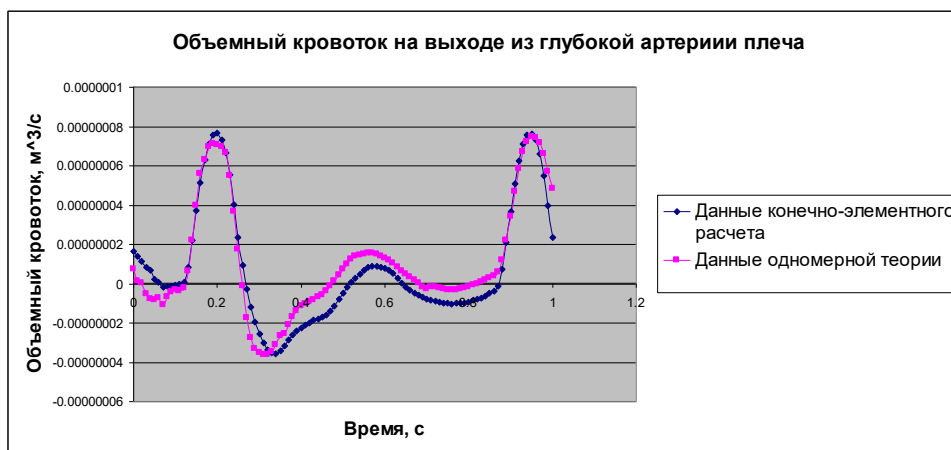


Рисунок 9.22 – Объемный кровоток на выходе из глубокой артерии плеча.

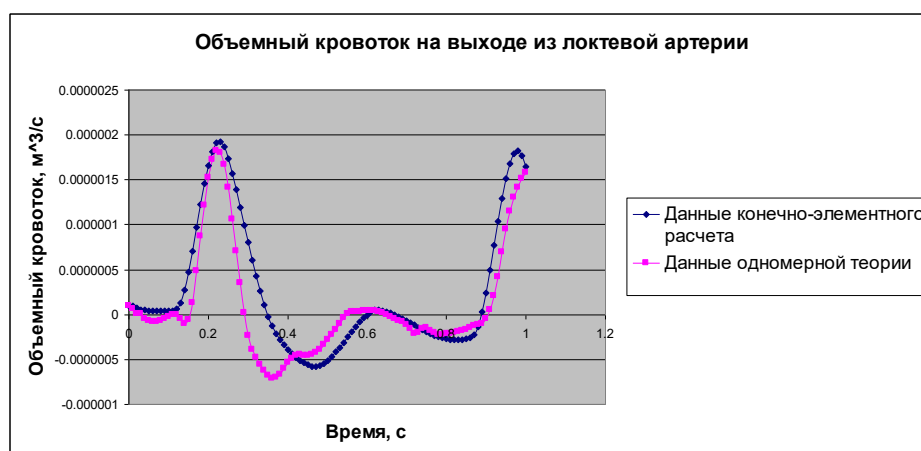


Рисунок 9.23 – Объемный кровоток на выходе из локтевой артерии.

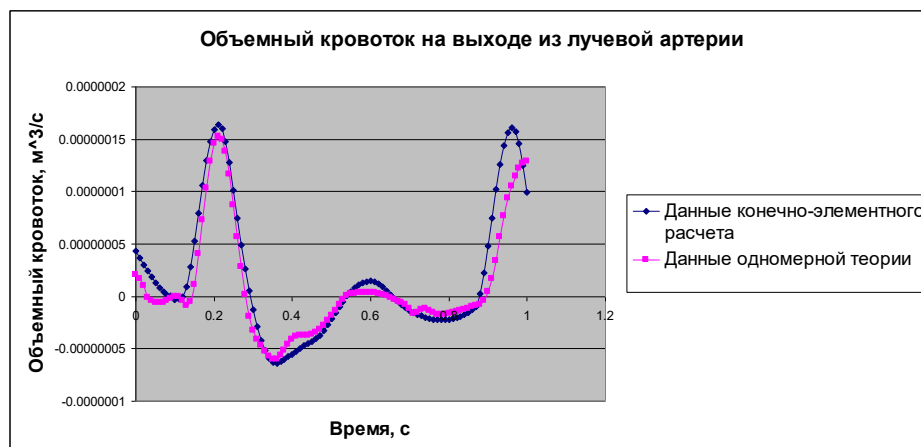


Рисунок 9.24 – Объемный кровоток на выходе из лучевой артерии.

Как видно из приведенных графиков, порядки значений для случая конечно-элементного расчета и для одномерного случая совпадают на каждом выходном сечении.

Различия в значениях для объемных кровотоков на пиках систолы для всех выходных сечений не превышает 10%, что является вполне приемлемой

погрешностью для практических приложений одномерной теории. В целом же результаты, полученные с помощью конечно-элементных расчетов и посредством математической модели, довольно близки, а значит, предложенная одномерная система уравнений позволяет с высокой степенью точности рассчитывать характеристики движения крови. Таким образом, построенная модель дает возможность исследовать глобальную картину периодического течения крови в сосудах с упругими движущимися стенками.

Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза

В этом разделе приведем результаты биомеханического моделирования течения крови по сонной артерии (СА) в присутствии атеросклеротического поражения в постановке с упругими стенками.

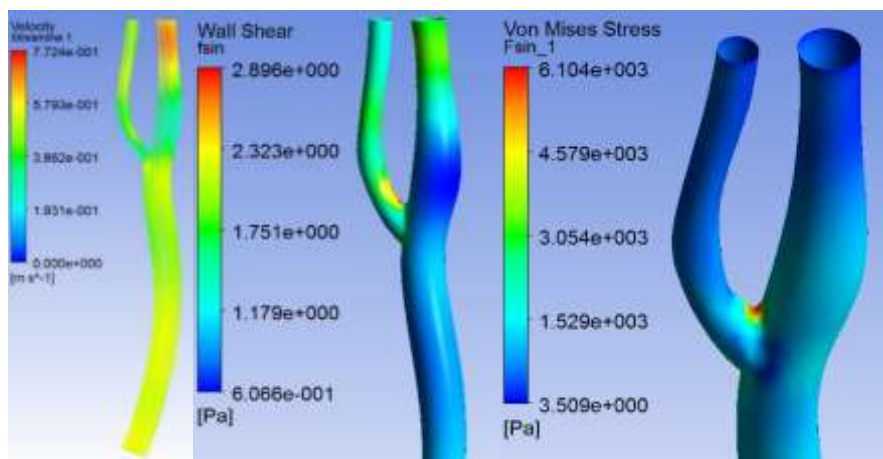
Анализировалась сонная артерия в норме и с цилиндрической бляшкой в районе узла бифуркации (рисунок 9.25). Сужение просвета сосуда составило 50 % от изначального диаметра. Средняя толщина бляшки составила 2.5 мм, протяженность пораженного бляшкой участка (наибольший продольный размер бляшки) составила 36 мм. Такая модель была выбрана ввиду самой частой локализации каротидного атеросклероза именно в этой области по данным литературы [116]. Коэффициент Пуассона для обоих типов бляшек принимался равным 0.4. Модуль Юнга для более мягкой бляшки брался равным половине величины модуля Юнга стенки (0,275 МПа), для более жесткой бляшки эта величина бралась в два раза большей, чем для стенки (1.1 МПа).



Рисунок 9.25 – Модель сосуда с бляшкой в зоне бифуркации (в разрезе).

При моделировании на входе в общую сонную артерию задавалась скорость потока крови, зависящая от времени [117]. На выходах из наружной и внутренней сонных артерий задавалось нулевое давление.

Картина линий тока здоровой сонной артерии показана на рисунке 9.26 а. Из рисунка 9.26 а видно, что течение на протяжении всего сердечного цикла в здоровом сосуде ламинарное, без завихрений.



а б в

Рисунок 9.26 – Характеристики течения крови и напряженно-деформированного состояния в здоровой СА (а - линии тока, б – касательные напряжения на стенке, в – эффективные напряжения в стенке).

На рисунке 9.26 б показано поле касательных напряжений на стенке в систолическую фазу. Касательные напряжения, по мнению многих авторов, являются одним из механических факторов, влияющих на возникновение атеросклероза. Так, считается [118], что зоны с касательными напряжениями менее 1.5 Па являются наиболее подверженными появлению атеросклеротических бляшек. Рисунок 9.26 б показывает, что наименьшие касательные напряжения в течение всего сердечного цикла обнаруживаются в ампуле внутренней сонной артерии. Именно в ампуле поток крови несколько замедляется, что и показывают низкие касательные напряжения на стенке.

Рисунок 9.26 в дает возможность оценить эффективные напряжения (напряжения по Мизесу) в систолу в стенке здорового сосуда. Видно, что наибольшие значения эффективных напряжений обнаруживаются в области бифуркации. Именно в этой области разбивается и делится поток крови, что и вызывает такое напряженное состояние. Эффективные напряжения в стенке – еще один механический фактор, влияющий на стенку сосуда. Повышенные напряжения ослабляют стенку и влекут возникновение атеросклеротических отложений.

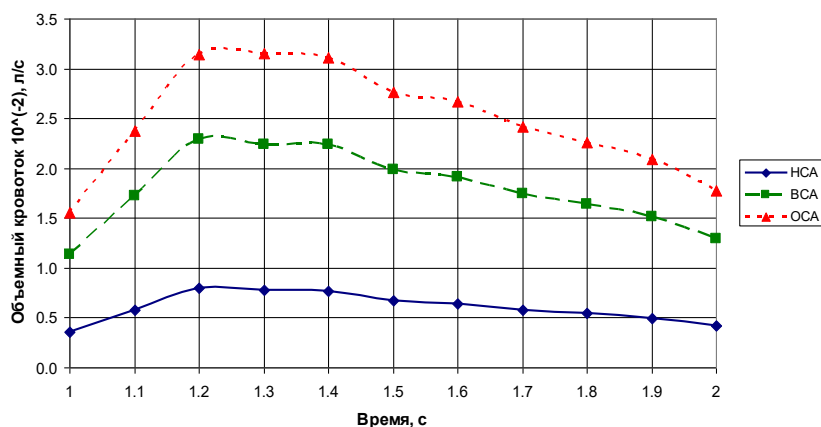


Рисунок 9.27 – Объемные кровотоки (НСА – наружная сонная артерия, ВСА – внутренняя сонная артерия, ОСА – общая сонная артерия).

На рисунке 9.27 показаны графики объемных кровотоков по здоровому сосуду. Объемные кровотоки на выходах из ВСА и НСА в сумме дают кровотоков на входе в ОСА.

Из графиков видно, что кровотоков через ВСА оказывается существенно выше, чем через НСА. Это можно объяснить разницей в диаметрах этих ветвей сонной артерии.

Далее приведем результаты моделирования сонной артерии с бляшкой в области бифуркации. На рисунке 9.25 бляшка отмечена черным цветом. Сужение просвета сосуда составило 50 % от изначального диаметра. Проводился расчет движения крови по пораженной сонной артерии с граничными условиями, аналогичными рассчитанной модели здорового сосуда.

На рисунке 9.28 показано векторное поле скоростей движения крови в систолу в моделях с жесткой бляшкой. Для мягкой бляшки картина была аналогичной. Как видно из рисунка, форма атеросклеротической бляшки значительно снижает скорость течения крови в наружной сонной артерии (НСА). После бифуркации в НСА поток крови практически останавливается. То есть бляшка такой конфигурации ведет к почти полной блокировке сосуда. Аналогичная картина наблюдается и в диастолу.

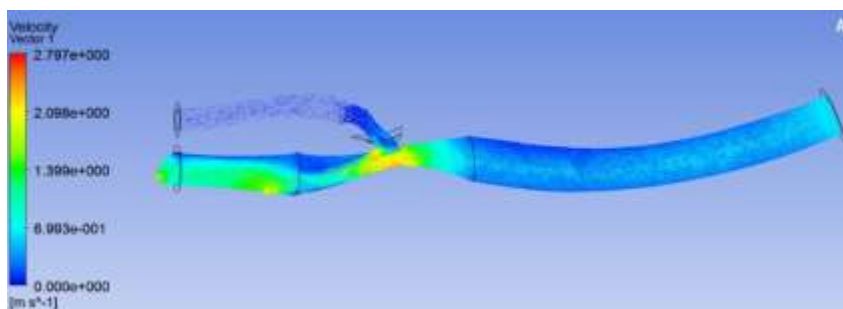


Рисунок 9.28 – Поле скоростей в систолу. Жесткая бляшка.

Картина линий тока также хорошо иллюстрирует «выключение» НСА из работы: в сосуде не наблюдается существенного движения крови как в случае мягкой, так и в случае жесткой бляшки (рисунок 9.29). Кроме того, в ампуле ВСА для обеих моделей наблюдается существенное закручивание потока и образование зоны застоя (существенное снижение скорости движения по сравнению с основным потоком). В этом месте возможно дальнейшее образование атеросклеротических отложений.

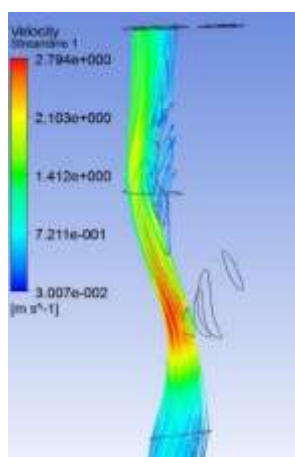


Рисунок 9.29 – Линии тока (систола). Жесткая бляшка.

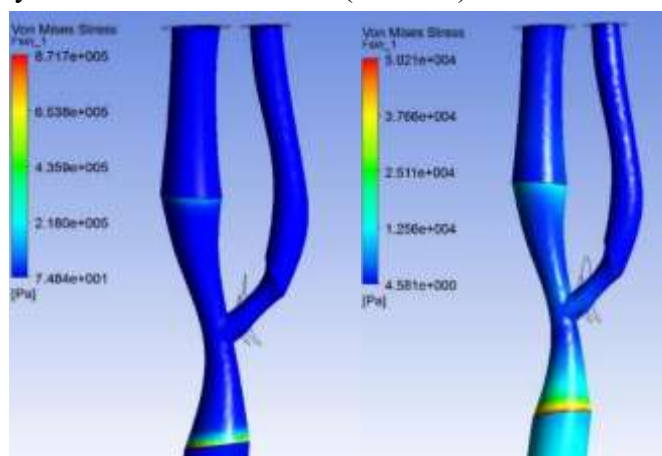


Рисунок 9.30 – Эффективные напряжения в стенке в районе узла бифуркации.

Слева – мягкая бляшка, справа – жесткая.

Если обратить внимание на величину скорости крови в области стеноза (рисунок 9.29), то можно отметить, что максимальные значения скорости достигают 2.8 м/с. По данным работы [116], такие патологии являются гемодинамически значимыми.

Рисунок 9.30 иллюстрирует распределение эффективных напряжений в стенке для мягкой (слева) и жесткой (справа) бляшек. Максимальные значения эффективных напряжений наблюдаются на стыке здорового участка ОСА и участка, пораженного атеросклерозом. При этом в случае мягкой бляшки максимальные значения на порядок выше, чем в случае жесткой бляшки. Это может быть причиной отрыва мягких бляшек и дальнейшего тромбообразования.

В случае мягкой бляшки на самой бляшке напряжения минимальны, в то время как на жесткой бляшке порядок напряжений совпадает с максимальным.

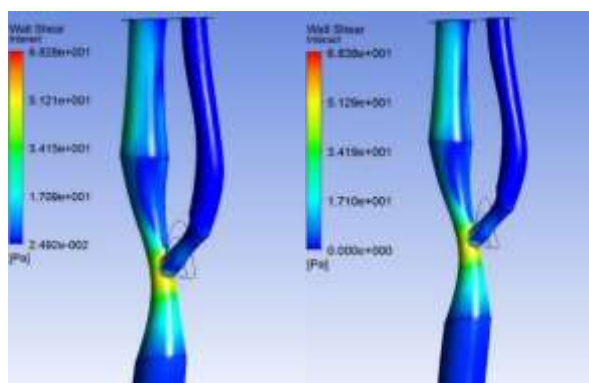


Рисунок 9.31 – Касательные напряжения на стенке. Жесткая бляшка.

На рисунке 9.31 видно, что наименьшие касательные напряжения в случае с жесткой бляшкой (с мягкой бляшкой картина аналогичная) возникают на внутренней стенке ВСА на участке после узла бифуркации (в ампуле). Ветвь НСА в этом случае также подвержена минимальным касательным напряжениям, но это в данном случае вызвано особенностями гемодинамической картины, другими словами, отсутствием активного течения крови в сосуде.

Наибольшие касательные напряжения возникают на бляшках в районе апекса бифуркации. Это объясняется существенным сужением просвета артерии в этой области и значительным увеличением скорости потока. Аналогичная картина наблюдается на протяжении всего сердечного цикла и для обоих типов бляшек.

Таким образом, для обоих типов бляшек напряженно-деформированное состояние сосуда в целом совпадает. Наибольшие напряжения возникают на участке стыка здорового участка ОСА с участком, пораженным атеросклерозом. Наименьшие касательные напряжения наблюдаются в ампуле ВСА. Основные отличия заключаются в распределении эффективных напряжений на бляшке в узле бифуркации, что объясняется различием механических характеристик материала бляшек.

На рисунке 9.32 приведены графики объемных кровотоков на выходе из внутренней сонной артерии для здорового сосуда и для модели с бляшкой.

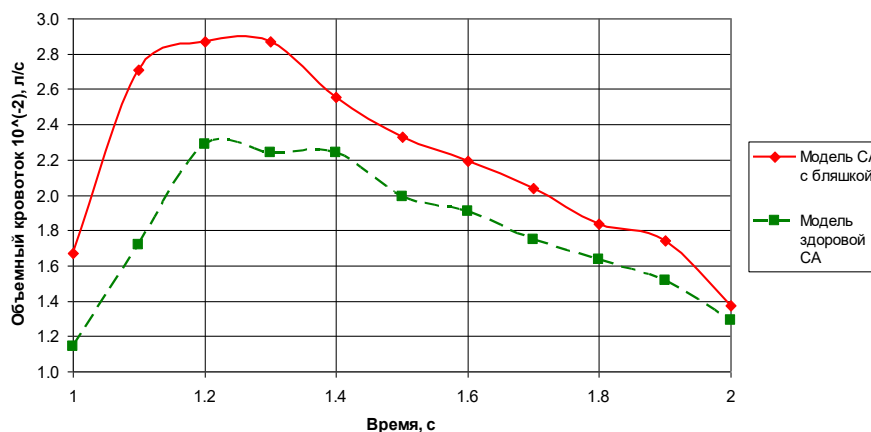


Рисунок 9.32 – Объемные кровотоки на выходе из ВСА.

На выходе из НСА в случае пораженного сосуда объемный кровоток пренебрежимо мал. Таким образом, рисунок 9.32 позволяет увидеть, что в случае пораженного сосуда объемный кровоток из ВСА возрастает почти на 30%, что, безусловно, негативно влияет на общую картину гемодинамики и состояние сосуда.

Таким образом, было исследовано напряженно-деформированное состояние атеросклеротических бляшек: мягкая бляшка по своим механическим характеристикам существенно отличается от жесткой, что создает условия для разрыва бляшки под воздействием давления крови и напряжения сдвига. Разница напряжений между жесткой бляшкой и здоровым сосудом при каротидном стенозе создает дополнительные потоки и завихрения, нарастающие пропорционально к увеличению размеров бляшки. Кроме этого, такое состояние может иметь прямое отношение к развитию пристеночных тромбозов. Анализ векторного поля скоростей движения крови и картины линий тока во внешней сонной артерии демонстрирует практически

полную блокировку сосуда. Возрастание объёмного кровотока во внутренних сонных артериях почти на 30% приводит к негативным изменениям гемодинамики и усилению проявлений недостаточности мозгового кровообращения. Завихрения потоков и образование участка застоя в ампуле внутренней сонной артерии создает условия для дальнейшего прогрессирования бляшек. Повышенный уровень эффективных напряжений на стыке участков здорового сосуда и пораженного атеросклерозом в случае мягкой бляшки создает условия для отрыва бляшек и дальнейшего тромбообразования.

Анализ распределения гемодинамических сил указывает на слабые места в ампуле и узле бифуркации сонных артерий, что должно учитываться при наложении анастомозов во время реконструктивных хирургических вмешательств.

Течение крови по сосудам виллизиевого круга при наличии аневризм

Приведем пример анализа результатов биомеханического моделирования, выполненного для задачи о течении крови по сосудам с аневризмами. Цель данного исследования состояла в выявлении и обосновании критериев разрыва аневризм сосудов головного мозга. С этой целью были выполнены численные биомеханические расчеты для плоских моделей аневризм с различными значениями геометрического параметра aspect ratio (AR).

Анализировались средние касательные напряжения на стенке аневризмы (рисунок 9.33) в интервале времени от 1 до 2 с, чтобы минимизировать влияние нулевых начальных условий на поток.

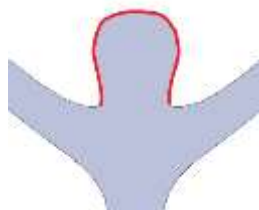


Рисунок 9.33 – Симметричная аневризма с AR=1.3. Жирной линией показан купол аневризмы, на котором анализировали касательные напряжения.

Анализ результатов биомеханического моделирования движения крови по моделям сосудов с аневризмой для разных AR проводился в системе

ANSYS CFD Post 19.2 и в офисном пакете MS Excel 2019. Строились графики изменения средних касательных напряжений (WSS) на стенке аневризмы в зависимости от времени. На рисунке 9.34 показан график средних WSS на стенке асимметричных аневризм. На рисунке 9.35 показан график средних WSS на стенке симметричных аневризм.

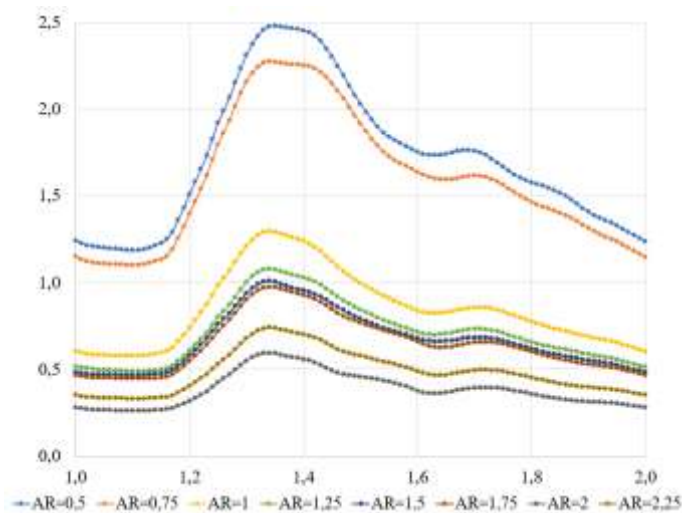


Рисунок 9.34 – Зависимость средних WSS (Па) на стенке аневризмы от времени (с) для разных AR (асимметричные модели).

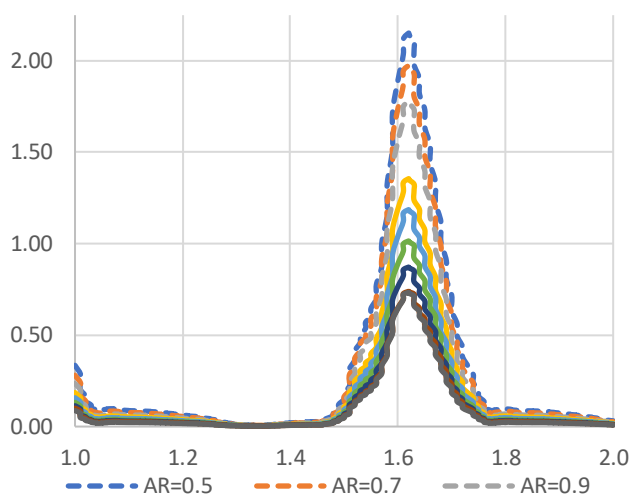


Рисунок 9.35 – Зависимость средних WSS (Па) на стенке аневризмы от времени (с) для разных AR (симметричные модели).

Рисунки 9.34 и 9.35 показывают снижение средних WSS на стенке аневризмы с ростом AR. Изображенные на рисунках 9.34 и 9.35 значения WSS были просуммированы по времени для каждого AR соответственно. Далее была рассчитана разница между просуммированными WSS для каждого AR. Другими словами, рассчитали, на сколько процентов изменяются средние WSS на стенке аневризмы при увеличении AR (рисунки 9.36, 9.37).

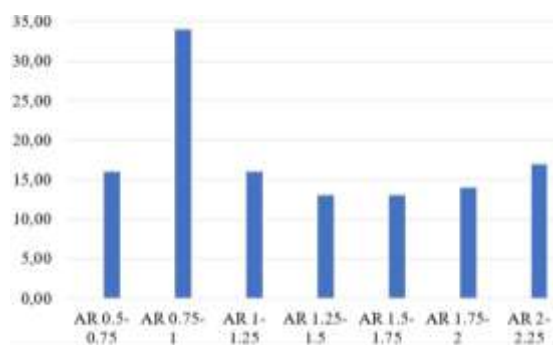


Рисунок 9.36 – Изменение средних WSS на стенке аневризмы при увеличении AR (асимметричные модели).

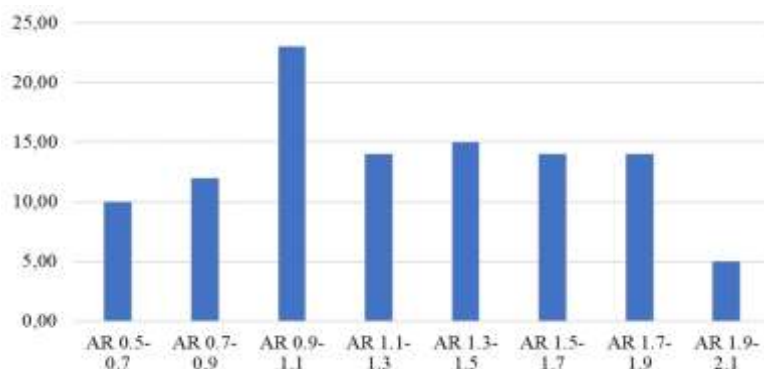


Рисунок 9.37 – Изменение средних WSS на стенке аневризмы при увеличении AR (симметричные модели).

Анализ результатов биомеханического конечно-элементного моделирования показал существенные различия в средних WSS на стенке аневризм для разных AR. Так, для асимметричных моделей при $AR < 1$ и для симметричных моделей при $AR < 1.1$ выявлено, что происходит скачкообразное изменение средних WSS на стенке аневризм. Это продемонстрировано на рисунках 9.34 и 9.35. Более того, из рисунков 9.34 и 9.35 видно, что при $AR \geq 1$ для асимметричных моделей и при $AR \geq 1.1$ для симметричных моделей средние WSS на стенке аневризмы не превышали значения 1.5 Па в течение всего сердечного цикла. Низкие $WSS < 1.5$ Па на стенках сосудов и аневризм ассоциируются с повреждением и дальнейшим разрушением стенки, возникновением атеросклеротических бляшек.

Из рисунка 9.35 мы видим, что для асимметричных моделей наибольшее скачкообразное изменение в процентном соотношении средних WSS на стенке аневризмы AR было получено при увеличении AR с 0.75 до 1. Аналогичные выводы получены для симметричных моделей при увеличении AR с 0.9 до 1.1 (рисунок 9.37). Для асимметричных моделей наибольший скачок средних WSS при увеличении AR с 0.75 до 1 составил 34%, а для симметричных моделей

скачок средних WSS при увеличении AR с 0.9 до 1.1 достиг 23%. В других случаях увеличение AR приводило к существенно меньшим изменениям средних WSS, что показано на рисунках 9.36 и 9.37. Эти выводы свидетельствуют о том, что значение AR, находящееся в интервале от 1 до 1.1, является неким пределом, при переходе через который существенно меняются характеристики потока внутри аневризмы. Можно полагать, что аневризмы с $AR \geq 1$ (1.1 в случае симметричных аневризм) становятся склонными к разрыву. Важно подчеркнуть, что эти выводы были получены для разных моделей, отличающихся и граничными условиями, и геометрическими особенностями, что показывает воспроизводимость результатов моделирования.

Течение крови по сосудам виллизиевого круга при наличии стенозов сонных артерий

Приведем пример выполненного численного моделирования движения крови в 45 трехмерных моделях виллизиевого круга и ВСА с различными степенями стеноза и локализацией атеросклеротических бляшек.

Рассмотренные варианты строения виллизиевого круга и стенозированного поражения ВСА приведены в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Варианты строения виллизиевого круга и стенозов ВСА.

Варианты строения виллизиевого круга		Варианты стенозов ВСА	
1	Замкнутый	1	Обе артерии в норме («норма»)
2	Отсутствует правая ЗСА	2	Стеноз правой 30%
3	Отсутствует левая ЗСА	3	Стеноз правой 70%
4	Отсутствуют обе ЗСА	4	Стеноз левой 30%
5	Отсутствует ПСА	5	Стеноз левой 70%
		6	Стеноз правой 30%, стеноз левой 30%
		7	Стеноз правой 30%, стеноз левой 70%
		8	Стеноз правой 70%, стеноз левой 30%
		9	Стеноз правой 70%, стеноз левой 70%

Построение трехмерных моделей виллизиевого круга и ВСА осуществлялось на основе данных компьютерной томографии (КТ) с контрастированием. Первичная обработка данных КТ осуществлялась в разработанной ранее программе [119], в основе которой лежит модифицированный алгоритм фронтального роста (см. главу 6). С помощью

программы создавался набор плоских кривых, описывающих сечения сосудов, которые были импортированы в систему автоматизированного проектирования SolidWorks для создания трехмерных моделей сосудов на их основе. Также в SolidWorks были построены стенозы ВСА. Примеры результирующих моделей показаны на рисунке 9.38.

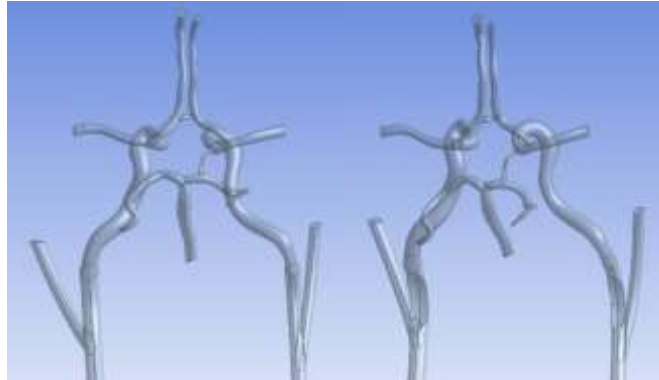


Рисунок 9.38 – Модели виллизиевых кругов и ВСА:
виллизиев круг в отсутствии левой ЗСА – слева;

виллизиев круг в отсутствии левой ЗСА и 70% стенозом правой и левой ВСА – справа.

Моделирование движения крови по сосудам выполнено численно в программном комплексе ANSYS. Решалась пространственная нестационарная система уравнений Навье-Стокса [120]. Кровь предполагалась однородной вязкой несжимаемой жидкостью с постоянной плотностью 1050 кг/м^3 и динамической вязкостью $0.004 \text{ Па}\cdot\text{с}$. На входах в общие сонные и позвоночные артерии задавались объемные кровотоки, рассчитанные на основе данных ультразвукового исследования [121]. На выходах из передних, средних и задних мозговых артерий ставили условия Windkessel [122]. Стенки сосудов предполагались жесткими.

Вычислительная сетка состояла из тетраэдрических и призматических элементов. Призматические элементы создавались в пристеночных областях. Проводился анализ сеточной сходимости. Для каждой модели число узлов в среднем составило 1 млн.

Валидация численных расчетов проводилась на испытательном стенде, включающем пульсационный насос Harvard apparatus, расходомеры, соединительные трубки, краны, расширительный бак. Расходомеры были предварительно калиброваны. Информация о массовых расходах на входе и выходах из исследуемого сосуда собиралась с помощью аппаратной платформы Arduino (см. главу 10).

Для каждой рассчитанной модели анализировали средние касательные напряжения на стенках соединительных артерий (WSS) в систолическую фазу сердечного цикла, а также массовые кровотоки в соединительных артериях в систолическую и диастолическую фазы сердечного цикла по следующему алгоритму.

Для каждого варианта строения ВСА (таблица 9.3) составляли выборки из значений WSS (в Па) в передней соединительной артерии (ПСА) для замкнутого виллизиевого круга и виллизиевых кругов без правой ЗСА, без левой ЗСА и без обеих ЗСА. В результате получили 9 выборок со значениями WSS в систолическую фазу сердечного цикла. Выполняли их статистический анализ, при котором считали выборку «норма» (обе ВСА без стенозов) эталонной, а другие выборки сравнивали с ней с помощью критерия Манна⁴¹-Уитни [123]. Уровень статистической значимости принимался равным 5%. Другими словами, пытались выяснить, какие патологические изменения в ВСА оказывают влияние на гемодинамику ПСА. Аналогичные действия выполняли и для массовых кровотоков в ПСА, вычисленных в систолическую фазу сердечного цикла. Статистический анализ выполнялся в офисном пакете Microsoft Excel 2019.

Анализ WSS на стенках ПСА и массовых кровотоков в ПСА

Средние значения WSS (в Па) на стенке ПСА в систолическую фазу сердечного цикла представлены в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Средние WSS (в Па) на стенке ПСА в систолу.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	22.1	22.3	23.6	21.8	14.7	21.9	14.8	24	16.6
Без правой ЗСА	22.2	23.1	24.7	21.7	15.1	22.1	15.3	26.7	18
Без левой ЗСА	19.6	18.9	20.7	19.2	11.3	19.5	11.4	21	13.1
Без обеих ЗСА	19.8	19.5	22.3	19.7	11.6	20.5	11.9	22.7	11.1

⁴¹ Генри Бертольд Манн (27 октября 1905, Вена - 1 февраля 2000, Тусон) был профессором математики и статистики в Государственном университете Огайо. Манн доказал гипотезу Шнирельмана-Ландау в теории чисел и в результате получил премию Коула 1946 года. Он и его ученик разработали статистический критерий, используемый для оценки различий между двумя независимыми выборками по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Манн опубликовал первую математическую книгу по планированию экспериментов.

Были выявлены статистически достоверные различия между следующими парами выборок из таблицы 9.3:

- «норма» и «левая 70%»,
- «норма» и «правая 30%, левая 70%»,
- «норма» и «правая 70%, левая 70%».

Далее были рассчитаны массовые кровотоки (в $\text{кг/с} \cdot 10^{-6}$) через ПСА в систолическую и диастолическую фазы сердечного цикла. Значения массовых кровотоков были занесены в таблицы 9.4 и 9.5.

Таблица 9.4 – Массовые кровотоки (в $\text{кг/с} \cdot 10^{-6}$) через ПСА в систолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	5.96	5.91	6.78	5.25	4.02	5.98	4.07	6.47	4.56
Без правой ЗСА	6.21	6.35	7.42	6.43	4.62	6.24	4.75	7.72	5.4
Без левой ЗСА	4.73	4.88	5.17	4.95	2.98	4.93	3	5.5	3.83
Без обеих ЗСА	5.38	5.29	6.35	5.82	3.39	5.79	3.53	6.42	6.42

Таблица 9.5 – Массовые кровотоки (в $\text{кг/с} \cdot 10^{-6}$) через ПСА в диастолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	4.95	4.88	5.65	4.79	3.27	4.99	3.29	5.43	3.74
Без правой ЗСА	5.32	5.24	6.17	5.29	3.72	5.14	3.83	6.42	4.41
Без левой ЗСА	4	4.07	4.32	4.14	2.4	4.14	2.48	4.6	3.16
Без обеих ЗСА	4.5	4.41	5.42	4.87	2.71	4.85	2.84	5.41	5.41

Были выявлены статистически достоверные различия между следующими парами выборок из таблиц 9.4 и 9.5:

- «норма» и «левая 70%»,
- «норма» и «правая 30%, левая 70%»,
- «норма» и «правая 70%»,
- «норма» и «правая 70%, левая 30%».

В таблицах 9.3-9.5 столбцы с «эталонными» значениями (при отсутствии патологий ВСА) окрашены синим цветом. В столбцах, окрашенных зеленым цветом, значения WSS или массовых кровотоков оказались существенно ниже (до 40%) «нормы». В столбцах, окрашенных оранжевым цветом, значения

WSS или массовых кровотоков оказались существенно выше (до 24%) «нормы».

Анализ WSS на стенках ЗСА и массовых кровотоков в ЗСА

Средние значения WSS (в Па) на стенке правой и левой ЗСА в систолическую фазу сердечного цикла представлены в таблицах 9.6 и 9.7.

Таблица 9.6 – Средние WSS (в Па) на стенке правой ЗСА в систолу.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	28.0	28.9	35.3	26.6	27.1	26.6	28.5	35.3	34.9
Без левой ЗСА	30.3	29.8	39.0	28.9	29.4	28.9	29.1	39.5	37.2
Без ПСА	28.5	30.1	37.2	28.5	28.9	28.5	28.9	28.9	36.3

Таблица 9.7 – Средние WSS (в Па) на стенке левой ЗСА в систолу.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	27.6	28.2	30.2	27.6	37.2	29.5	37.2	28.2	37.9
Без правой ЗСА	32.7	31.5	31.5	31.5	39.2	31.5	37.9	30.8	39.2
Без ПСА	26.3	28.2	29.5	26.3	35.9	28.9	35.9	35.9	34.7

Были выявлены статистически достоверные различия между следующими парами выборок из таблицы 9.6 и 9.7:

для правой ЗСА (таблица 9.6):

«норма» и «правая 70%»,

«норма» и «правая 70%, левая 70%»,

для левой ЗСА (таблица 9.7):

«норма» и «левая 70%»,

«норма» и «правая 30%, левая 70%»,

«норма» и «правая 70%, левая 70%».

Далее были проанализированы массовые кровотоки (в $\text{кг/с} \cdot 10^{-6}$) через правую и левую ЗСА в систолическую и диастолическую фазы сердечного цикла. Значения массовых кровотоков были занесены в таблицы 9.8-9.11.

Таблица 9.8 – Массовые кровотоки (в кг/с*10⁶) через правую ЗСА в систолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	6.1	6.3	7.7	5.8	5.9	5.8	6.2	7.7	7.6
Без левой ЗСА	6.6	6.6	8.5	6.3	6.4	6.3	6.3	8.6	8.1
Без ПСА	6.2	6.3	8.1	6.2	6.3	6.2	6.3	6.3	7.9

Таблица 9.9 – Массовые кровотоки (в кг/с*10⁶) через правую ЗСА в диастолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	5.1	5.3	6.4	4.8	4.9	4.8	5.2	6.4	6.3
Без левой ЗСА	5.5	5.5	7.1	5.3	5.3	5.3	5.3	7.2	6.8
Без ПСА	5.2	5.3	6.8	5.2	5.3	5.2	5.3	5.3	6.6

Таблица 9.10 – Массовые кровотоки (в кг/с*10⁶) через левую ЗСА в систолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	4.3	4.4	4.7	4.3	5.8	4.6	5.8	4.4	5.9
Без правой ЗСА	5.1	4.9	4.9	4.9	6.1	4.9	5.9	4.8	6.1
Без ПСА	4.1	4.4	4.6	4.1	5.6	4.5	5.6	5.6	5.4

Таблица 9.11 – Массовые кровотоки (в кг/с*10⁶) через левую ЗСА в диастолическую фазу сердечного цикла.

	Норма	Правая 30%	Правая 70%	Левая 30%	Левая 70%	Правая 30%, левая 30%	Правая 30%, левая 70%	Правая 70%, левая 30%	Правая 70%, левая 70%
Замкнутый круг	3.6	3.7	3.9	3.6	4.8	3.8	4.8	3.7	4.9
Без правой ЗСА	4.3	4.1	4.1	4.1	5.1	4.1	4.9	4.0	5.1
Без ПСА	3.4	3.7	3.8	3.4	4.7	3.8	4.7	4.7	4.5

Были выявлены статистически достоверные различия между следующими парами выборок из таблиц 6-9:

для правой ЗСА (таблицы 9.8 и 9.9):

«норма» и «правая 70%»,

«норма» и «правая 70%, левая 70%»,

для левой ЗСА (таблицы 9.10 и 9.11):

«норма» и «левая 70%»,

«норма» и «правая 30%, левая 70%»,

«норма» и «правая 70%, левая 70%».

В таблицах 9.8-9.11 столбцы с «эталонными» значениями (при отсутствии патологий ВСА) окрашены синим цветом. В столбцах, окрашенных оранжевым цветом, значения WSS или массовых кровотоков оказались существенно (до 37%) выше «нормы».

В ЗСА при наличии патологий сонных артерии кровотоки и, соответственно, WSS не были ниже, чем при нормальном строении сонных артерий. При этом в ПСА кровотоки и, соответственно, WSS при определенных сочетаниях патологий сонных артерий могли снижаться по сравнению с ситуацией с нормальным строением сонных артерий.

Статистический анализ данных из таблицы 9.3 позволил выявить, что WSS на стенке ПСА существенно снижаются (в среднем на 30-35%) при стенозе 70% левой ВСА, стенозе 30 % правой в сочетании со стенозом 70% левой ВСА, а также в случае сочетания стеноза 70% правой и стеноза 70% левой ВСА.

Статистический анализ данных из таблицы 9.6 позволил выявить, что WSS на стенке правой ЗСА существенно возрастают (в среднем на 30-35%) при: стенозе 70% левой ВСА, а также при сочетании стеноза 30% правой ВСА и стеноза 70% левой ВСА и при сочетании стеноза 70% правой ВСА и стеноза 70% левой ВСА.

Статистический анализ данных из таблицы 9.7 позволил выявить, что WSS на стенке задней левой соединительной артерии существенно возрастают (в среднем на 30-35%) при: стенозе 70% правой ВСА, а также при сочетании стеноза 70% правой ВСА и стеноза 70% левой ВСА.

Другие сочетания стенозов ВСА практически не оказали влияния на WSS в соединительных артериях.

Показано, что наибольшее возрастание кровотоков (таблицы 9.4 и 9.5) через ПСА было выявлено при наличии стеноза 70% правой ВСА и сочетания стеноза 70% правой и стеноза 30% левой ВСА. Рост кровотока по сравнению с нормальным состоянием (без стеноза) ВСА составил от 15 до 17 %. В то же время, наибольшее падение кровотоков (до 35%) через ПСА было выявлено при наличии 70% стеноза левой ВСА и сочетания стеноза 30% правой и стеноза 70% левой ВСА.

Отмечено и статистически подтверждено возрастание кровотока (в среднем на 20-25 %) по правой ЗСА (таблицы 9.8 и 9.9) при стенозе 70% правой ВСА, а также при сочетании стеноза 70% правой и стеноза 70% левой ВСА. Для левой ЗСА (таблицы 9.10 и 9.11) ситуация следующая: при стенозе 70% левой, а также при сочетании стеноза 30% правой и стеноза 70% левой ВСА и при сочетании стеноза 70% правой и стеноза 70% левой ВСА отмечено возрастание кровотока на 25 %.

Из данного анализа можно сделать выводы о наиболее опасных сочетаниях стенозов ВСА, повышающих риск развития аневризм соединительных артерий виллизиевого круга. К таким сочетаниям относятся:

для ПСА:

стеноз 70% правой ВСА,

стеноз 70% правой ВСА и стеноз 30% левой ВСА,

для правой ЗСА:

стеноз 70% правой ВСА,

стеноз 70% правой ВСА и стеноз 70% левой ВСА,

для левой ЗСА:

стеноз 70% левой ВСА,

стеноз 30% правой ВСА и стеноз 70% левой ВСА,

стеноз 70% правой ВСА и стеноз 70% левой ВСА.

Течение крови в бифуркации сонной артерии при разных типах граничных условий

Геометрическая модель бифуркации сонной артерии строилась в системе автоматизированного проектирования SolidWorks на основе данных УЗИ (рисунок 9.39).

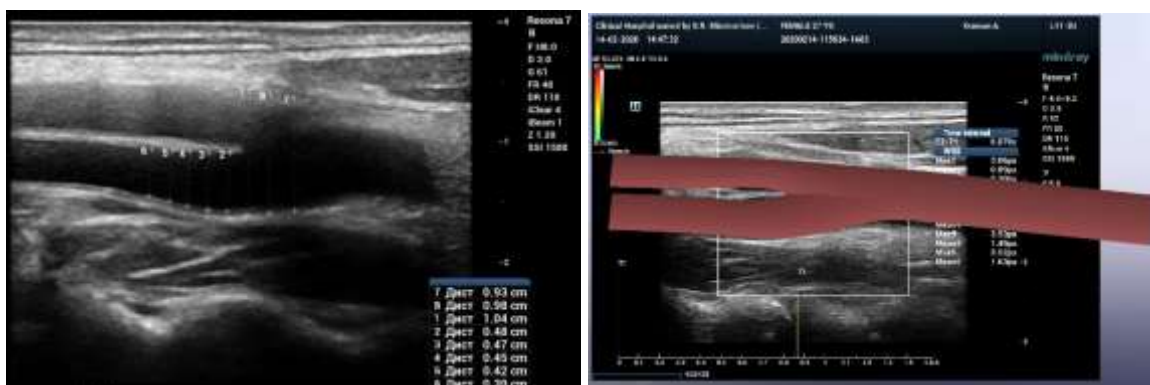


Рисунок 9.39 – Изображение УЗИ сонной артерии конкретного пациента: слева показаны размеры в разных сечениях; справа приведено изображение полученной модели на фоне данных УЗИ.

Для расчета гемодинамики сонной артерии применялся программный комплекс ANSYS, реализующий метод конечных элементов. При моделировании в системе ANSYS Workbench решалась связанная нестационарная задача. Сосудистая стенка предполагалась однородной линейно-упругой и изотропной. Кровь считалась вязкой несжимаемой жидкостью с постоянной плотностью и вязкостью [126].

При моделировании сравнивали три типа граничных условий (таблица 9.12) на входе в общую сонную артерию (ОСА) и на выходах внутренней сонной (ВСА) и наружной сонной артерии (НСА).

Таблица 9.12 – Типы граничных условий

Тип 1	Тип 2	Тип 3
Скорость крови на входе в ОСА	Давление на входе в ОСА	Скорость крови на входе в ОСА
Нулевое давление на выходе ВСА и НСА	Давление на выходах ВСА и НСА с запаздыванием относительно входного	Условия Windkessel на выходах ВСА и НСА

Графики скоростей и давлений на входе в сосуд были получены по данным УЗИ. В ходе исследования на срезе сосуда в средней части сечения ставилась метка, и в отмеченной точке аппаратом УЗИ автоматически строился график, который в дальнейшем обрабатывался и задавался в виде входных значений (рисунок 9.40).

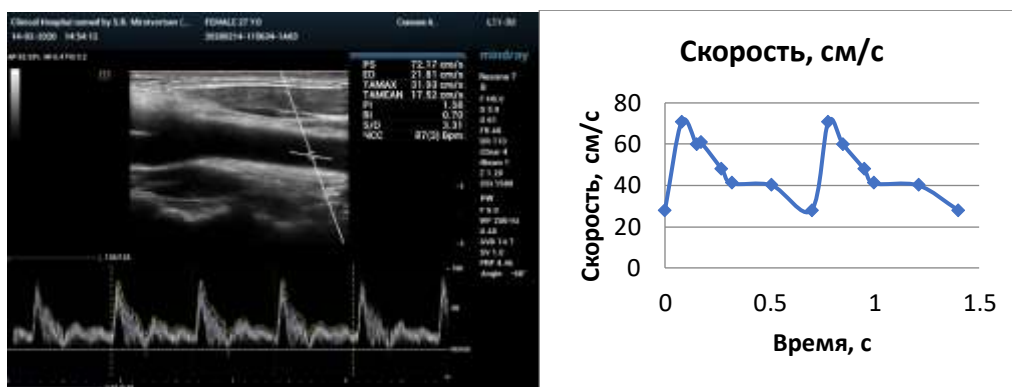


Рисунок 9.40 – График скорости в общей сонной артерии по данным УЗИ (слева); заданный в качестве граничных условий график скорости (справа).

Граничное условие типа Windkessel на выходных сечениях ВСА и НСА представляло собой заданные на этих поверхностях объемные кровотоки, зависящие от давления и периферического сопротивления, определяемого через величину сердечного выброса (так называемая двухэлементная модель Windkessel).

Торцы сосудистой стенки жестко закреплялись, внешняя стенка артерии была свободна от закреплений.

Модуль Юнга сосудистой стенки брался равным 50 кПа. Такое значение модуля упругости было получено на основе анализа данных по эластографии сонной артерии пациента (рисунок 9.41).

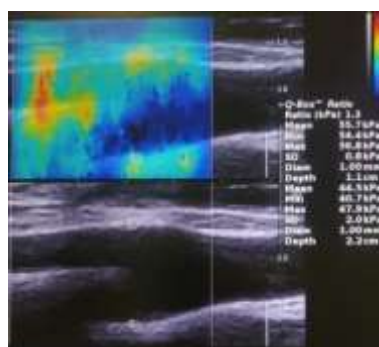


Рисунок 9.41 – Определение модулей упругости стенки по эластографии.

Эластография выполнялась на оборудовании Mindray Resona 7. Было взято осредненное значение модуля Юнга по нескольким точкам, в которых проводились измерения.

Таким образом, среднее значение модуля Юнга оказалось равным 50 кПа. Коэффициент Пуассона принимался равным 0.4 [124].

Для анализа полученных в ходе моделирования значений использовались графики скорости в различных точках ВСА и НСА (рисунок 9.42). Данные графики, а также пиковые значения скоростей были

получены по данным УЗИ (условиям на входе). Для ВСА и НСА в ходе УЗИ подобные графики скоростей были получены в нескольких точках, для каждой из которых после моделирования проводился анализ полученных при моделировании графиков скорости.



Рисунок 9.42 – Визуализация скорости кровотока в точке на аппарате УЗИ.

Полученные таким образом данные оцифровывались, в результате чего были получены графики скоростей. Пример графика для указанной на рисунке 9.42 точки приведен на рисунке 9.43.

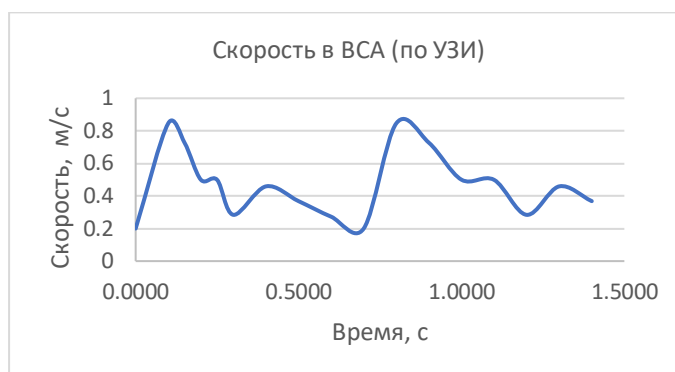


Рисунок 9.43 – График скорости в точке, полученный после оцифровки данных УЗИ.

В результате была смоделирована гемодинамика сонной артерии с тремя типами граничных условий (таблица 9.12).

Построены векторные поля скоростей в сечении артерии, содержащие оси ОСА, ВСА и НСА (рисунки 9.44-9.46).

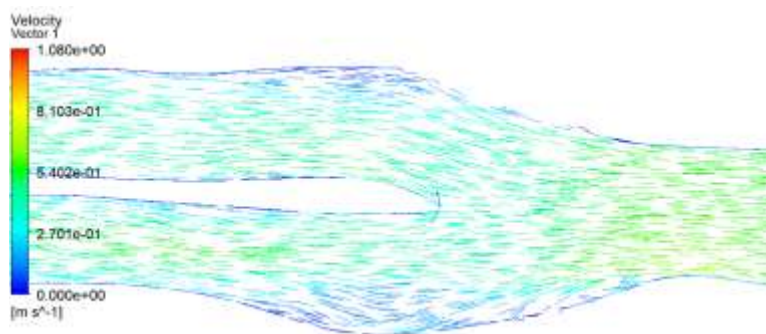


Рисунок 9.44 – Поле скоростей в систолу в модели с 1 типом граничных условий.

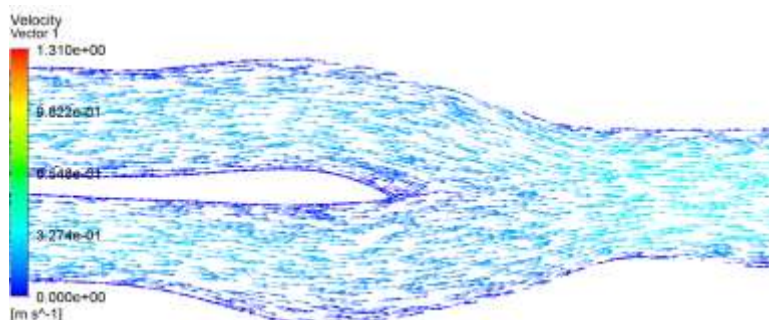


Рисунок 9.45 – Поле скоростей в систолу в модели со 2 типом граничных условий.

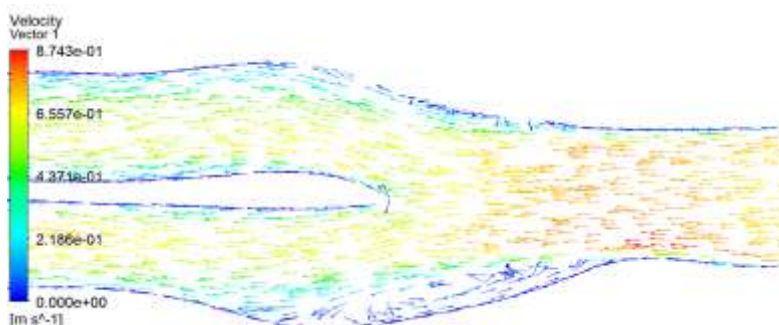


Рисунок 9.46 – Поле скоростей в систолу в модели с 3 типом граничных условий.

В точках, в которых исследование кровотока проводилось в ходе УЗИ, были построены графики скоростей для каждой из рассчитанных моделей. На рисунках 9.47-9.49 приведены графики скоростей для точки, соответствующей рисунку 9.42.

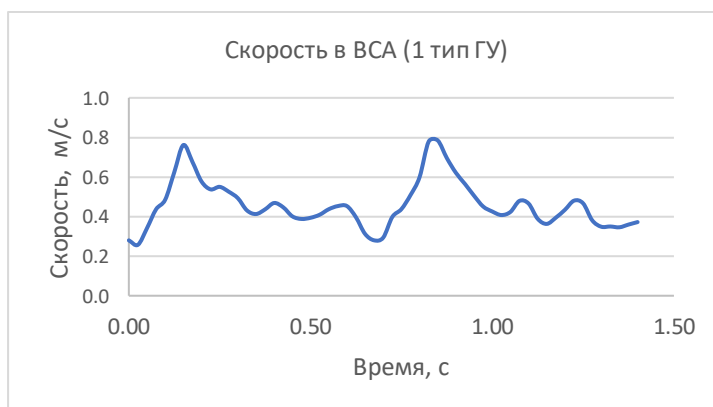


Рисунок 9.47 – График скорости в точке в модели с 1 типом граничных условий.

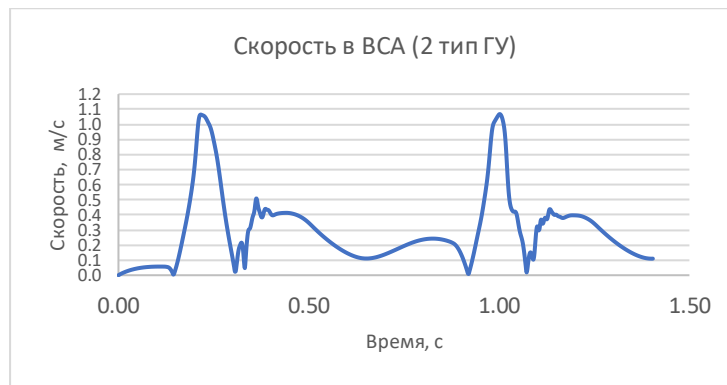


Рисунок 9.48 – График скорости в точке в модели со 2 типом граничных условий.

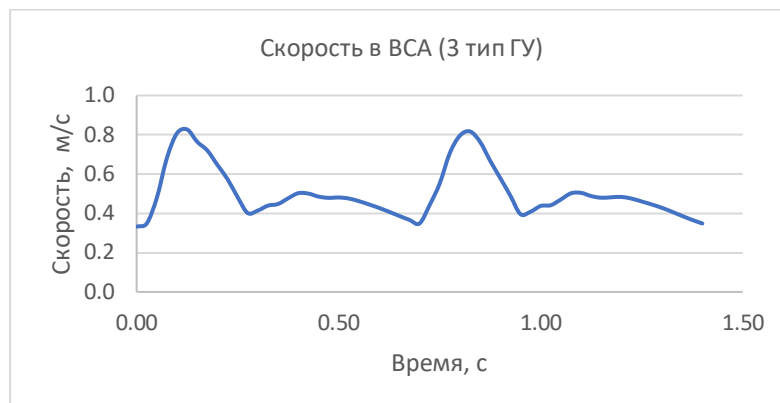


Рисунок 9.49 – График скорости в точке в модели с 3 типом граничных условий.

Полученные в результате моделирования поля скоростей крови, а также максимальные абсолютные значения скоростей и графики скоростей в точках сравнивались со значениями, графиками и векторными полями, полученными при исследовании данной артерии на аппарате УЗИ Mindray Resona 7. Наиболее близким по характеру движения и количественной оценке кровотока оказался вариант с граничными условиями 3 типа.

Аппарат УЗИ Mindray Resona 7 является на сегодняшний день единственным УЗ-сканером, зарегистрированным на территории Российской Федерации, позволяющим проводить векторное картирование (режим Vector Flow Imaging – VFI) кровотока на различных участках сосудистого русла [125]. Именно эта особенность позволяет детально изучить движение крови в бифуркации сонной артерии и качественно сравнить с «оригиналом» векторные поля скоростей, полученные в ходе численного моделирования. При сравнении полученные в ходе УЗИ векторные поля считались эталонными.

В результате проведенного сравнительного анализа было выявлено, что максимально приближенным к эталонной картине движения крови оказался

вариант с заданными граничными условиями типа Windkessel. В этом случае в модели в момент систолы наблюдался характерный вихрь в ампуле сонной артерии, по форме и характеру движения точно повторяющий картину эталона (рисунок 9.50). Кроме того, величины модулей векторов скорости в этом случае также были близки к эталонным.

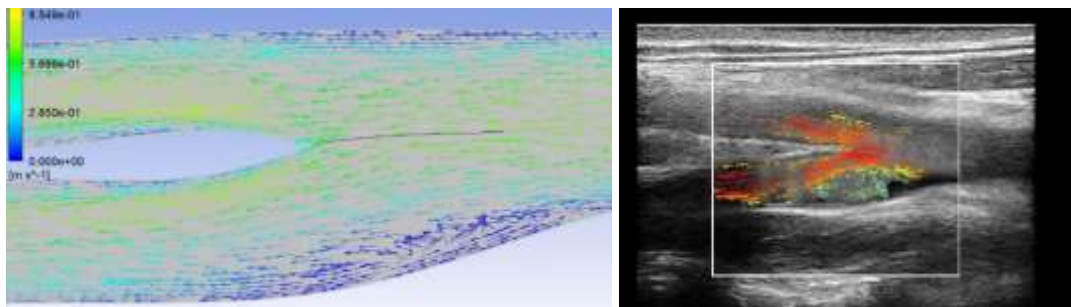


Рисунок 9.50 – Поле скоростей в систолу в модели с граничными условиями типа Windkessel (слева) и векторное поле скоростей, полученное на аппарате УЗИ с помощью функции векторного картирования (справа).

Качественно схожими с эталонными оказались и графики скоростей в точках, расположенных в ВСА и НСА. На рисунке 9.51 приведено сравнение графиков в точке, соответствующей рисунку 9.42.

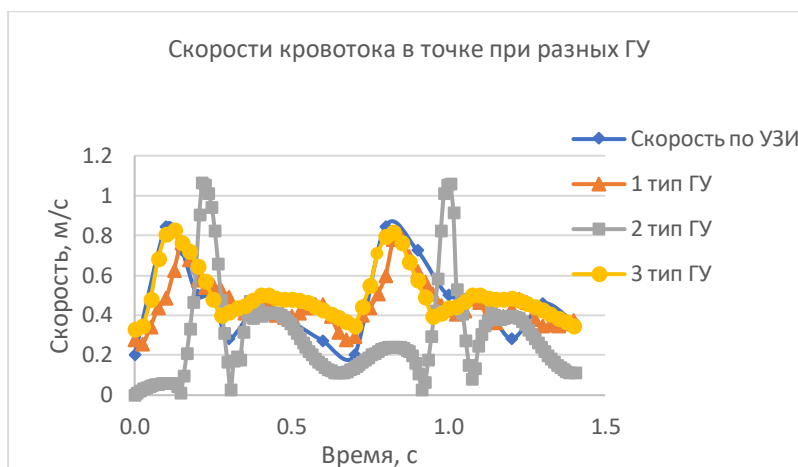


Рисунок 9.51 – Скорости кровотока в моделях с разными граничными условиями.

Разница в значениях скорости в других точках, рассмотренных в рамках УЗИ, в случае модели с граничными условиями типа Windkessel не превышала 10%, в то время как для двух других типов граничных условий наблюдалось существенное расхождение значений скорости на всем протяжении сердечного цикла.

Таким образом, для наиболее приближенного к реальности численного моделирования гемодинамики в системе кровеносных сосудов целесообразным видится использование граничных условий типа Windkessel.

Сравнение систем фиксации диафизарных переломов бедра

Исследованы геометрические характеристики расширяющегося интрамедуллярного фиксатора Fixion. Численно исследованы системы кость-фиксатор под действием трех типов нагрузок (осевая, поперечная и скручивающая). Изучено два вида перелома диафиза бедра (тип А и В в соответствии с классификацией АО/ASIF). Проведено сравнение со стержнем ChM. Цель исследования заключалась в сравнении стабильности двух систем при действии внешних нагрузок в случае остеосинтеза переломов диафизарной части бедра. Интрамедуллярный фиксатор Fixion показал высокую устойчивость ко всем трем исследованным нагрузкам.

Результаты численных расчетов (рисунок 9.52) для стержня ChM показывают, что наибольшие напряжения достигаются на блокирующих винтах, удерживающих интрамедуллярный гвоздь во всех трех случаях нагружения, а также в области контакта винтов и стержня. Высокие (по сравнению с другими участками) напряжения возникают и в самом стержне в области перелома кости. Это вполне объяснимо: два отломка удерживаются за счет стержня, который при такой постановке задачи работает на излом. При этом в кости в местах установки блокирующих винтов также обнаруживаются концентрации высоких напряжений.

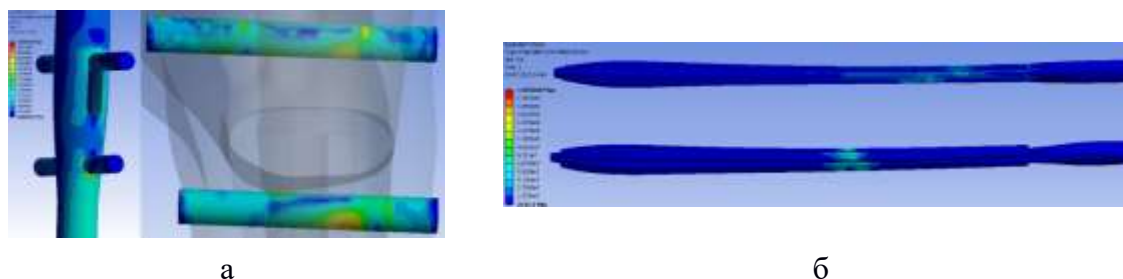


Рисунок 9.52 – Эквивалентные напряжения в стержнях при осевой нагрузке: а – блокируемый стержень ChM; б – стержень Fixion.

Что касается величины напряжений, то при нагружении осевой силой максимальные эффективные напряжения (напряжения по Мизесу) превышают предел упругости нержавеющей стали. В случае скручивающей нагрузки напряжения принимают максимальные значения до 400 МПа, что практически

в два раза выше предела упругости нержавеющей стали. Такие напряжения могут привести к критическому деформированию и возможному разрушению стержня и блокирующих винтов.

Если анализировать эффективные напряжения, возникающие в расширяющемся стержне, то можно отметить, что их величина превысила модуль упругости материала только в случае поперечной нагрузки и составила 260 МПа. Для остальных вариантов нагружения эффективные напряжения составили не более 205 МПа. Наибольшие напряжения были сосредоточены в области перелома. Рисунок 9.52 показывает типичную картину распределения напряжений для трех рассмотренных нагрузок.

Сведем эффективные напряжения в МПа, возникающие в исследованных стержнях, в таблицу 9.13.

Таблица 9.13 – Эффективные напряжения в стержнях

№	Вид и величина нагрузки	Стержень (ChM)		Стержень Fixion	
		Тип перелома (по АО\ASIF)			
		A1	B2	A1	B2
1	Осевая 700 Н	340	250	170	180
2	Поперечная 100 Н	220	200	260	250
3	Скручивающая 10 Нм	400	380	205	200

Результаты расчетов для расширяющегося стержня показали его достаточную стабильность при всех трех исследованных нагрузках. Величины перемещений головки бедра оказались несколько большими, чем перемещения в случае установки блокируемого стержня (1.53 и 1.43 мм против 1.10 и 1.05 мм для переломов A1 и B2). Более того, в случае приложения скручивающего момента расширяющийся стержень показал более чем вдвое меньшие перемещения по сравнению с блокируемым стержнем (0.44 и 0.5 мм против 1.10 и 0.99 мм для переломов A1 и B2). Последний факт свидетельствует о высокой стабильности системы кость-расширяющийся стержень при скручивающих нагрузках. В таблице 9.14 приведены величины перемещений головки бедра для обоих исследованных стержней, трех видов нагрузок и двух типов переломов бедренной кости.

Таблица 9.14 – Величины перемещений головки бедра

№	Вид и величина нагрузки	Стержень ChM		Стержень Fixion	
		Тип перелома (по АО\ASIF)			
		A1	B2	A1	B2
1	Осевая 700 Н	1.10	1.05	1.53	1.43
2	Поперечная 100 Н	3.30	2.89	2.48	2.40
3	Скручивающая 10Нм	1.10	0.99	0.44	0.5

Таким образом, осевая жесткость системы с установленным стержнем Fixion оказалась в 1.4 раза ниже осевой жесткости в случае установки блокируемого стержня ChM.

Было проанализировано распределение контактного давления между костными отломками (рисунок 9.53). Расчеты показали существенную неравномерность контактного давления для стержня ChM, обоих переломов и трех исследованных нагрузок. В случае стержня Fixion ситуация оказалась несколько лучше.

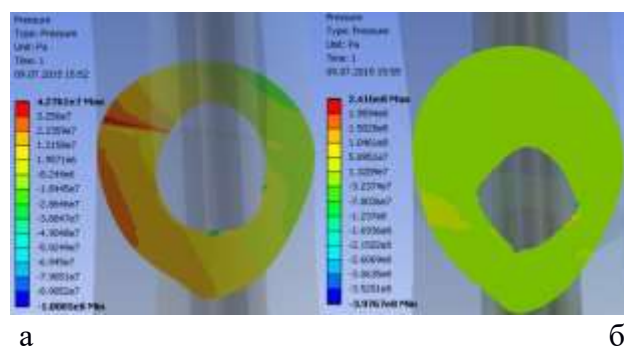


Рисунок 9.53 – Контактное давление между костными отломками: а – блокируемый стержень ChM; б – стержень Fixion.

Давление распределено более равномерно, при этом значения давления имеют одинаковый знак на всей поверхности перелома. В большинстве случаев при установке стержня Fixion контактное давление оказывается выше, чем в случае установки стержня ChM (таблица 9.15).

Таблица 9.15 – Наибольшие значения контактного давления в МПа

№	Вид и величина нагрузки	Стержень (ChM)		Стержень Fixion	
		Тип перелома (по АО\ASIF)			
		A1	B2	A1	B2
1	Осевая 700 Н	250	43	270	130
2	Поперечная 100 Н	60	115	50	350
3	Скручивающая 10 Нм	20	45	12	90

Результаты моделирования показали, что осевая жесткость (до 489 Н/мм) системы кость-имплантат в случае фиксатора Fixion оказалась в 1.4 раза меньшей, чем для поперечно блокируемого стержня (до 667 Н/мм). Эти результаты кажутся нам предсказуемыми.

В случае скручивающих нагрузок Fixion оказался стабильным и показал практически вдвое большую жесткость по сравнению со стержнем ChM. Эти данные несколько расходятся с результатами других работ [129, 130],

показывающими, что расширяющиеся стержни хуже поперечно блокируемых сопротивляются скручивающим нагрузкам.

Что касается напряжений, возникающих в фиксаторах, то здесь необходимо отметить следующее. Наибольшие напряжения в стержне ChM были обнаружены на винтах и на отверстиях в стержне, а также в теле стержня в месте перелома. Аналогичные выводы делают и другие авторы [127, 128]. При скручивающих нагрузках напряжения в винтах и стержне оказались наибольшими и достигали 400 МПа. В реальности напряжения на винтах за счет наличия резьбы, которая в данной работе не моделировалась, могут быть еще выше [127].

В случае стержня Fixion напряжения были распределены более равномерно, а наибольшие значения сосредоточены в области перелома. Их величина не превышала 260 МПа.

Стоит уделить особое внимание анализу усталостной прочности стержней. Предел выносливости нержавеющей стали, из которой изготавливаются стержни, составляет до половины предела прочности и достигает значений порядка 240-270 МПа, что оказывается выше максимальных эффективных напряжений, возникающих в стержне Fixion, и ниже наибольших эффективных напряжений в стержне ChM. Это означает, что при циклическом нагружении исследованными силами стержень Fixion не будет разрушаться в течение 10^7 циклов нагружения, а, следовательно, и не разрушится при более длительных испытаниях [127]. Возникает проблема усталостного разрушения блокирующих винтов и/или стержня ChM [128].

Поля контактных давлений между костными отломками для двух стержней оказались существенно различными. Было выявлено наиболее неравномерное давление с наличием областей разнонаправленного давления, наличие которых говорит о том, что на части поверхности контакта давление направлено по нормали, а на другой части поверхности – против нормали. Следовательно, можно предположить, что при установке стержня ChM между осколками не создается компрессии на всей поверхности перелома [128]. Это объясняется способом его крепления в кости, наличием проксимальных и дистальных блокирующих винтов.

Следует отметить, что при распиливании стержня Fixion на внутренней поверхности были обнаружены следы ржавчины. Видимо, это свидетельствует о его относительно невысокой сопротивляемости соляному раствору. Учитывая, что срок рабочего состояния стержня Fixion составил 10 месяцев, возможно, это была проблема конкретного экземпляра.

Задачи статики в стоматологии

Хирургическую операцию по установке имплантата необходимо планировать не только с медицинской, но и с механической точки зрения, то есть установленные конструкции должны располагаться таким образом, чтобы при всех типах жевательных нагрузок в них не возникали зоны скопления высоких напряжений (что при длительной эксплуатации приводит к усталости металла и выходу имплантата из строя), или же не достигались критические значения напряжений. Решить этот вопрос позволяют расчеты методом конечных элементов.

Для оптимального с точки зрения механики позиционирования имплантатов в кости предлагается проводить серию конечно-элементных расчетов, позволяющих разместить конструкцию так, чтобы ни в ней, ни в костной ткани не возникало критических напряжений (рисунок 9.54).

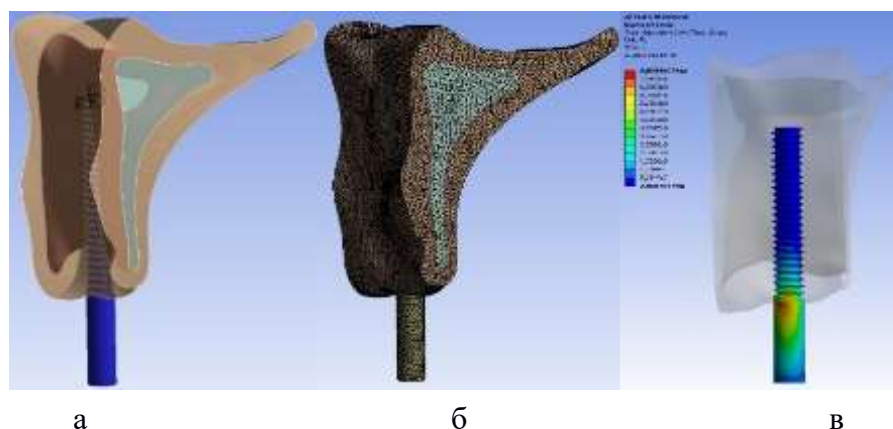


Рисунок 9.54 – Основные этапы конечно-элементного расчета: а - создание геометрии, б - создание конечно-элементной сетки, в - анализ результатов.

На сегодняшний день уже проведен ряд численных расчетов, позволяющих оптимизировать форму абатмента (стержня, вставляемого в имплантат для непосредственной установки коронки), а также подобрать длину самого имплантата.

Расчеты показали, что лучшие с точки зрения механики результаты показывают абатменты овальной формы (рисунок 9.55 б). В таких

конструкциях, в отличие от шестигранников (рисунок 9.55 а) или же шестигранников со скругленными углами, не наблюдается зон скопления высоких напряжений, которые могут привести к усталости металла в процессе эксплуатации. При этом овальный абатмент, в отличие от круглого, благодаря своей форме не подвержен прокручиванию при действии скручивающей нагрузки.

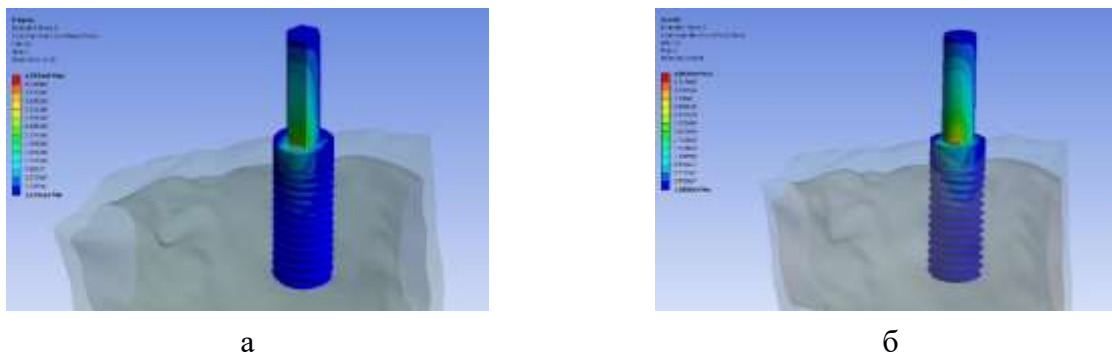


Рисунок 9.55 – Распределение напряжений в различных типах абатментов: а – абатмент в виде шестигранника, б – овальный абатмент.

Применение длинных или коротких имплантатов обусловлено во многом состоянием костной ткани пациента. Определение механических характеристик челюсти конкретного пациента проводится с помощью анализа томограммы и вычислений по шкале Хаунсфилда⁴². При этом численные расчеты позволяют заранее определить, целесообразно ли в данном конкретном случае использовать короткий имплантат (менее травматичный и часто более дешевый), или же необходима установка длинного.

⁴² Сэр Годфри Ньюболд Хаунсфилд (англ. Sir Godfrey Newbold Hounsfield; 28 августа 1919, Ноттингемшир, Великобритания — 12 августа 2004, Кингстон-апон-Темс, Великобритания) — британский инженер-электрик, лауреат Нобелевской премии по физиологии или медицине 1979 года «за разработку компьютерной томографии», которую он получил совместно с теоретиком Алланом Кормаком. Член Лондонского королевского общества (1975). Именем учёного названа шкала измерения плотности среды для рентгеновских лучей, используемая в томографии — шкала Хаунсфилда. Диапазон единиц шкалы, соответствующих коэффициенту поглощения рентгеновского излучения нормальными анатомическими структурами организма, составляет от —1024 до +1024. Средний показатель в шкале Хаунсфилда (0 HU) соответствует плотности воды, отрицательные величины шкалы соответствуют воздуху и жировой ткани, положительные — мягким тканям, костной ткани и более плотному веществу (металл).

Глава 10. Использование платформы Arduino для проведения натуральных экспериментов

Платформа Arduino

Ардуино (Arduino [131]) – это платформа, представляющая собой печатную плату с размещенным на ней микроконтроллером, программатором и так называемой «обвязкой» – кварцевым генератором, задающим частоту работы процессора, а также конденсаторами и резисторами, выполняющими вспомогательные фильтрующие функции. Кроме того, помимо «железной» части платформа Ардуино включает в себя и программное обеспечение Arduino IDE (Integrated Development Environment – интегрированная среда разработки), включающее в себя редактор кода, компилятор и скрипты, необходимые для загрузки прошивки в плату.

Формально следует также отметить, что Arduino – это торговая марка, под которой изначально выпускались отладочные платы. На сегодняшний день существуют десятки совместимых аналогов, которые в большинстве своем не уступают оригиналу по эффективности и качеству работы.

Семейство Ардуино объединяет несколько моделей так называемых отладочных плат, отличающихся габаритами и наличием/отсутствием некоторых разъемов. Однако у всех моделей основным и неизменным ядром печатной платы является *микроконтроллер* – микросхема, содержащая в себе микропроцессор, интерфейсы ввода-вывода, память (оперативную и постоянную), таймеры и т.д. Не стоит путать микроконтроллер с микропроцессором. Микропроцессор может лишь выполнять вычисления (как и, собственно, процессор в компьютере), а микроконтроллер – это практически полноценный компьютер, размещенный в одном кристалле микросхемы. В большинстве плат Arduino используются микроконтроллеры серии ATmega от производителя AVR.

Чтобы собрать какой-либо проект на микроконтроллере, нужно подключить к его выходам необходимые устройства, загрузить на микроконтроллер прошивку, которая будет управлять этими устройствами, и обеспечить все устройства стабильным питанием. Для реализации этого процесса помимо микроконтроллера на плате Ардуино размещены: программатор, позволяющий загружать в микроконтроллер управляющую

программу; USB-порт для соединения с компьютером; стабилизатор питания, позволяющий питать плату от широкого диапазона постоянных напряжений от 5 до 19 вольт (микроконтроллер питается от 5 вольт, стабилизатор именно это напряжение выдает на выходе).

Загрузка *прошивки* (то есть исполняемой программы) в микроконтроллер осуществляется, как правило, посредством программатора ISP (in-system programming), который загружает прошивку напрямую в память микроконтроллера. В Ардуино вместо ISP программатора на плате стоит USB-TTL преобразователь, который позволяет платформе (на её стороне TTL – транзистор-транзистор логика) буквально общаться с компьютером (на его стороне – USB) и обмениваться данными. Этот способ прошивки более прост и универсален. Но просто общаясь с компьютером загрузить прошивку не получится, поэтому в памяти микроконтроллера «прошит» загрузчик (bootloader), который принимает данные, поступающие с компьютера, и загружает их во Flash-память микроконтроллера. При каждом запуске микроконтроллера загрузчик ждёт команду от компьютера на загрузку новой прошивки. Если в течение какого-то времени такой команды не поступает, запускается на исполнение имеющаяся в памяти микроконтроллера прошивка.

USB-TTL преобразователь был выбран разработчиками Ардуино по нескольким причинам. Во-первых, такой преобразователь дешевле ISP. А во-вторых (и это, пожалуй, самое главное), использование USB-TTL преобразователя позволяет общаться с платой при помощи компьютера (смартфона, планшета) без использования дополнительных устройств. То есть можно как управлять какими-то устройствами (если это заложено в коде прошивки), так и получать от Ардуино данные: например, считывать показания с различных датчиков, в том числе – датчиков расхода жидкости. И, в-третьих, это позволяет отлаживать код программы, загружаемой в микроконтроллер.

Для написания кода прошивки и загрузки его в микроконтроллер для платформы Ардуино разработана специальная интегрированная среда разработки Arduino IDE. Прошивки для Ардуино в Arduino IDE пишутся на языке программирования C/C++ с соответствующим ему синтаксисом. Встроенный сборщик, препроцессор и компилятор (avr-gcc или Win-AVR)

делает многое за пользователя автоматически, что позволяет избежать многих затратных по времени процедур. Базовые функции для управления выводами и интерфейсами микроконтроллера, математика и некоторые другие функции/макросы взяты из открытого фреймворка для работы с микроконтроллерами под названием Wiring. Именно из него состоит базовый набор инструментов Ардуино. В связи с этим сами разработчики Ардуино называют язык «Упрощённым C++», и даже дали ему отдельное название – Arduino Wiring. Сами прошивки для платформы принято называть *скетчами*.

Если отойти от технических подробностей, сосредоточившись на области применения Ардуино, то, в первую очередь, следует отметить широкие возможности использования платформы в роботостроении, системах «Умный дом», а также всевозможных исследовательских проектах и экспериментальных установках. Благодаря широчайшему спектру всевозможных датчиков и устройств ввода-вывода, совместимых с Ардуино, платформа, несмотря на свою кажущуюся простоту, стала мощным инструментом исследователей в различных областях науки и техники. В частности, датчики расхода воды, информация с которых может быть считана посредством обработки входящих сигналов на цифровой пин Ардуино с помощью стандартной функции Arduino Wiring, позволили создать экспериментальный стенд для исследования движения жидкости в системе разветвляющихся кровеносных сосудов.

Разработка скетча

Для удобства обработки данных, полученных при проведении экспериментов на стенде, было необходимо как визуализировать показания расходомеров в режиме реального времени, так и записывать полученные данные в файл, чтобы в дальнейшем строить на их основе графики. Визуализировать показания расходомеров в Arduino IDE возможно с помощью так называемого монитора COM-порта, который для пользователя представляет собой, по сути, рабочее окно, где визуализируется текстовая информация, полученная от микроконтроллера. Запись в файл, созданный непосредственно на жестком диске компьютера, реализовать на платформе Ардуино затруднительно, и, кроме того, стенд планировалось сделать мобильным и не зависящим от компьютера, поэтому было принято решение

использовать для хранения информации SD-карту памяти. Запись данных на карту осуществляется посредством модуля SD Card Module Slot Socket Reader. В качестве расходомеров были выбраны датчики Water Flow Sensor YF-S401. Схема подключения датчиков и SD-ридера к Ардуино представлена на рисунке 10.1.

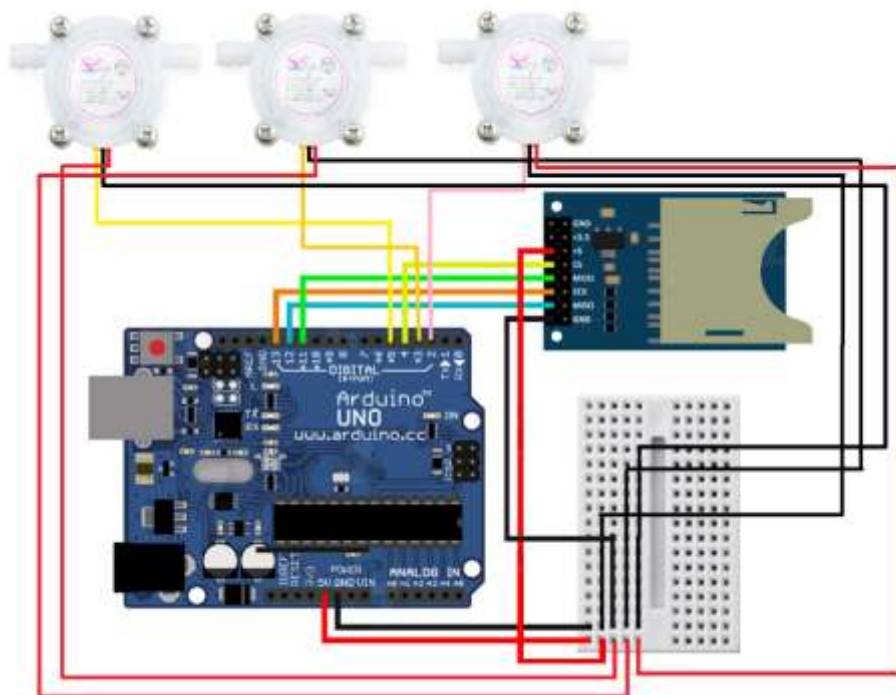


Рисунок 10.1 – Схема подключения расходомеров и SD-ридера.

Принцип работы расходомера основан на определении скорости вращения крыльчатки, которая вращается от движения воды, проходящей через счетчик. Скорость определяется с помощью датчика Холла⁴³, который регистрирует импульсы от прохождения мимо него магнита, закрепленного на крыльчатке. Зная частоту вращения крыльчатки в единицу времени, можно определить скорость движения жидкости и, соответственно, объемный расход (так как диаметры крыльчатки, входного и выходного патрубков нам известны). В итоге формула для определения объемного расхода будет выглядеть следующим образом:

$$Q=K/T,$$

⁴³ Эдвин Герберт Холл (англ. Edwin Herbert Hall; 7 ноября 1855 — 20 ноября 1938) — американский физик, открывший эффект, названный его именем (эффект Холла). Он проводил термоэлектрические исследования в Гарварде, где написал много учебников и прикладных методических материалов.

где Q – объемный расход в мл/с; T – частота пульсации в Гц; K – некий поправочный коэффициент, который можно вычислить, проведя простейший эксперимент.

Суть эксперимента для определения коэффициента K заключается в следующем.

Для начала коэффициент K принимается равным 1. Расходомер подключается к источнику жидкости, обеспечивающему постоянный объемный расход (простейший вариант – обычный водопроводный кран). Далее засекается время начала эксперимента и в мерную емкость набирается 1 литр жидкости. При этом в результирующий файл записываются данные, полученные с помощью расходомера. Реальная скорость течения жидкости определяется как отношение набранного объема (в нашем случае 1 л) к времени, за которое данный объем был набран. Полученное значение сравнивается со средним значением скорости, которая была посчитана расходомером в предположении, что $K=1$. Таким образом, найдя отношение реальной скорости и скорости, полученной расходомером, определим поправочный коэффициент K для данного счетчика.

Для считывания информации с расходомеров, ее интерпретации и записи в файл необходимо загрузить в Ардуино скетч, приведенный ниже.

```
// Подключаем библиотеки для работы с датчиками и SD-картой
#include <SPI.h>
#include <SD.h>
// Определяем № выводов Arduino, к которым подключены датчики расхода воды
const uint8_t pinSensor1 = 2;
    uint8_t pinSensor2 = 3;
    uint8_t pinSensor3 = 5;
// Объявляем переменные для хранения длительности импульсов с датчиков
uint32_t varPulse1;
uint32_t varPulse2;
uint32_t varPulse3;
// Объявляем переменные для хранения рассчитанной скорости потока воды
float varResult1;
float varResult2;
float varResult3;
// Объявляем переменную для хранения названия файла
char filename[] = "velocity.txt";
// Объявляем переменные для работы со счетчиком времени
unsigned long timelaps;
float timelapsf = 0.00;
// Объявляем переменную для работы с файлом результатов
File myFile;
//Блок настроек
void setup(){
// Инициуруем передачу данных в монитор последовательного порта
Serial.begin(9600);
```

```

// Конфигурируем выводы, к которым подключены датчики, как входы
pinMode(pinSensor1, INPUT);
pinMode(pinSensor2, INPUT);
pinMode(pinSensor3, INPUT);
// Ждем открытие порта
Serial.begin(9600);
while (!Serial) {
    ;
}
// Далее следует блок инициализации карты памяти
Serial.print("Initializing SD card...");
if (!SD.begin(4)) {
    Serial.println("initialization failed!");
    while (1);
}
Serial.println("initialization done.");
// Конец блока инициализации карты памяти
// Далее следует блок инициализации файла результатов на карте памяти
// Если файл существует, он будет перезаписан
// Если файл не существует, он будет создан
if (SD.exists((String)filename)) {
    Serial.println((String)filename+" exists. It will be removed.");
    SD.remove(filename);
} else {
    Serial.println((String)filename+" doesn't exist.");
}
myFile = SD.open((String)filename, FILE_WRITE);
if (!myFile) {
    Serial.print("error opening ");
    Serial.println(filename);
    while (1);
}
// Создание в файле заголовков столбцов
myFile.println((String) "ВРЕМЯ\tСКОРОСТЬ 1\tСКОРОСТЬ 2\tСКОРОСТЬ 3");

myFile.close();
// Конец блока инициализации файла
}
// Конец блока настроек

// Основной цикл работы
void loop(){
//Каждые 100 миллисекунд будем проводить опрос расходомеров
if (millis()-timelaps>100){
    timelaps=millis();
// Считываем длительность импульса, но не дольше 0,2 сек
    varPulse1=pulseIn(pinSensor1, HIGH, 200000);
// Если длительность импульса считана, то рассчитываем скорость потока воды в мл/с
    if(varPulse1){varResult1=float(103806.0/(float(varPulse1)));}
// Коэффициенты для расчета скорости потока воды получены при калибровке расходомеров
// Если длительность импульса не считана, то считаем, что скорость потока воды = 0 мл/с
    else {varResult1=0;}
// Аналогично работаем с двумя оставшимися датчиками
    varPulse2=pulseIn(pinSensor2, HIGH, 200000);
    if(varPulse2){varResult2=float(103806.0/(float(varPulse2)));}
    else {varResult2=0;}
    varPulse3=pulseIn(pinSensor3, HIGH, 200000);
    if(varPulse3){varResult3=float(103806.0/(float(varPulse3)));}
    else {varResult3=0;}
    timelapsf = (float)timelaps/1000.0;
// Выводим в монитор порта скорость потока воды на данном шаге
}
}

```

```

Serial.println((String)timelapsf+" сек "+"СКОРОСТЬ 1 = "+varResult1+" СКОРОСТЬ 2 = "+varResult2+"
СКОРОСТЬ 3 = "+varResult3);
// Блок записи результатов в файл
myFile = SD.open(filename, FILE_WRITE);
if (!myFile) {
Serial.print("error opening ");
Serial.println((String)filename);
while (1);
}
// Запись результатов в файл
myFile.println((String)timelapsf+"\t"+varResult1+"\t"+varResult2+"\t"+varResult3);
myFile.close();
// Конец блока записи результатов в файл
}
}
// Конец основного цикла работы

```

Эксперимент о течении крови по сосудам

Эксперимент направлен на исследование пульсирующего течения крови (или подобной жидкости) в моделях крупных сосудов человека.

Экспериментальная установка состоит из нескольких компонентов, центральным из которых является пульсационный насос Harvard Apparatus Pulsatile Blood Pump [132] (рисунок 10.2). Насос имитирует работу сердца и позволяет вручную задавать такие параметры, как число сердечных сокращений в минуту, размер сердечного выброса и соотношение между продолжительностью систолы и диастолы. Он оснащен шаровыми клапанами сердечного типа, покрытыми силиконом. В установке также присутствуют турбинные расходомеры, которые используются для оценки кровотока по ветвям исследуемых сосудов.

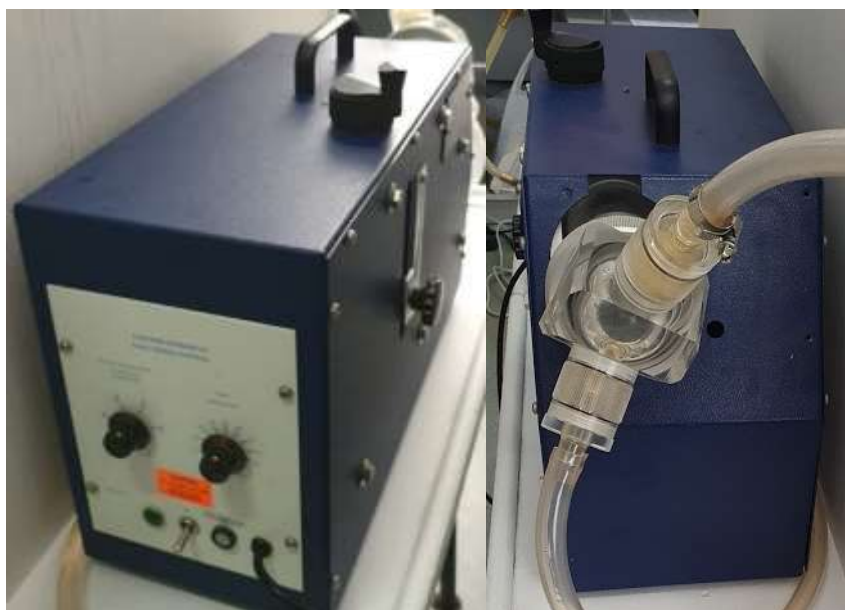


Рисунок 10.2 – Пульсационный насос Harvard Apparatus Pulsatile Blood Pump.

Расходомеры (рисунок 10.3) подключаются к платформе Arduino, которая обрабатывает их сигналы и формирует текстовый файл, содержащий числовые значения расходов. В результате в системе Microsoft Excel строятся и анализируются расходы в зависимости от фазы сердечного цикла, а также формы, размеров и сечений исследуемых сосудов.



Рисунок 10.3 – Турбинный расходомер.

Схематично экспериментальная установка изображена на рисунке 10.4.

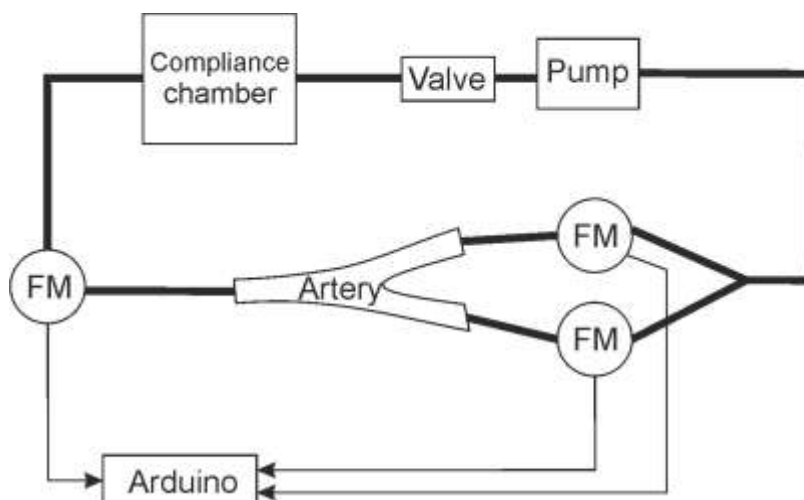


Рисунок 10.4 – Схема экспериментальной установки.

Фотография элементов установки показана на рисунке 10.5.

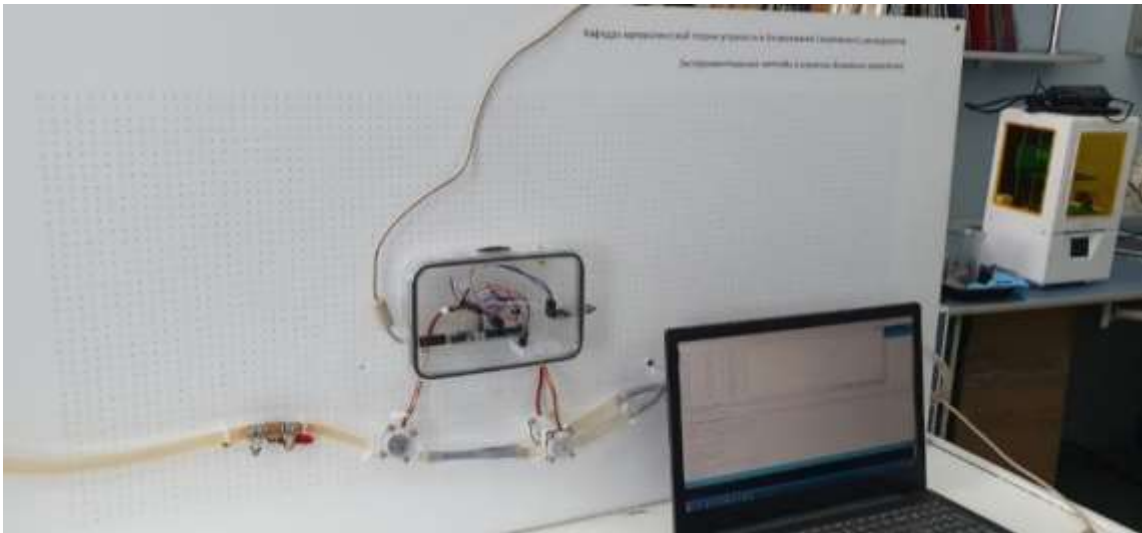


Рисунок 10.5 – Фотография элементов экспериментальной установки: исследуемый сосуд, расходомеры, платформа Arduino, компьютер.

Основная цель создания данной установки – образовательная, поэтому ее устройство позволяет менять ее компоненты в рамках образовательных практических занятий со студентами. Компоненты, из которых состоит установка, могут быть куплены в сантехническом магазине (шланги, запорная арматура) и в сети Интернет на сайте [AliExpress.com](https://www.aliexpress.com) (расходомеры, платформа Arduino). Модели сосудов (рисунок 10.6) могут быть произведены методом фотополимерной печати на базе моделей, построенных на основе данных УЗИ или КТ. Наиболее дорогой компонент установки – насос. Остальные компоненты стоят не дороже 5000 руб. Себестоимость одной модели сосуда составляет порядка 200 рублей (цены указаны по состоянию на 2021 год).

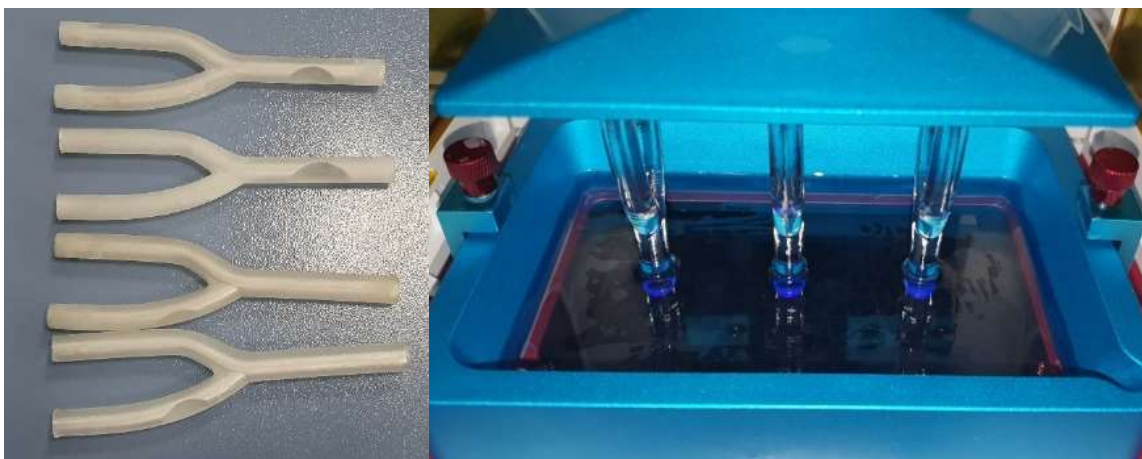


Рисунок 10.6 – Фотография готовых полимерных моделей сосудов с сужениями разной конфигурации и местоположения (слева) и моделей в 3D принтере в процессе «выращивания» (справа).

На рисунке 10.7 приведены графики расходов для модели сонной артерии конкретного пациента.

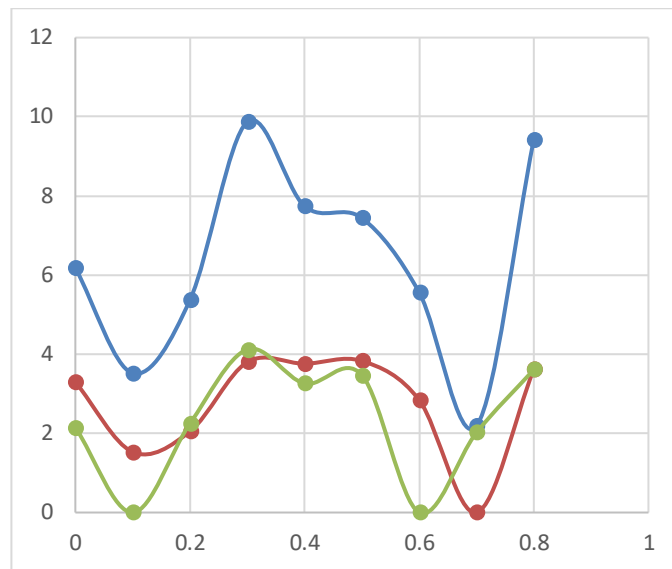


Рисунок 10.7 – Объемные расходы в условных единицах на входе в общую и на выходах из наружной и внутренней сонных артерий.

Предварительно было выяснено, что датчики показывают одни и те же расходы при установке последовательно. Средняя ошибка в показаниях расхода от датчика к датчику не превысила 3%.

Датчики были калиброваны, что позволило в каждом эксперименте получать расходы в мл/с. Для калибровки датчики подключали к водопроводной сети и на различных расходах воды засекали время наполнения емкости с известным объемом, а также записывали показания расходомеров. Для каждого такого эксперимента были получены калибровочные коэффициенты. Разница коэффициентов составила не более 5%.

Результаты экспериментов на испытательном стенде могут быть использованы при валидации численных экспериментов при моделировании течения крови по моделям сосудов.

Список литературы

Литература к главе 5

1. Lou Z., Yang J., Tang L., et al. Shear Wave Elastography Imaging for the Features of Symptomatic Carotid Plaques: A Feasibility Study // *J Ultrasound Med.* – 2017. – Vol. 36(6). – P. 1213–1223.
2. Ramnarine K.V., Garrard J.W., Kanber B., Nduwayo S., Hartshorne T.C., Robinson T.G. Shear wave elastography imaging of carotid plaques: feasible, reproducible and of clinical potential // *Cardiovasc Ultrasound.* – 2014. – Vol. 12, №49.
3. Terminology and Diagnostic Criteria Committee, Japan Society of Ultrasonics in Medicine. Standard method for ultrasound evaluation of carotid artery lesions // *J Med Ultrason.* – 2009. – Vol. 36(4). – P. 219–226.
4. Yang S., Wang Q., Shi W. et al. Numerical study of biomechanical characteristics of plaque rupture at stenosed carotid bifurcation: a stenosis mechanical property-specific guide for blood pressure control in daily activities // *Acta Mech. Sin.* – 2019. – Vol. 35. – P. 1279–1289.
5. Tang D., Kamm R.D., Yang C. et al. Image-based modeling for better understanding and assessment of atherosclerotic plaque progression and vulnerability: data, modeling, validation, uncertainty and predictions // *J. Biomech.* – 2014. – Vol.47(4). – P. 834–846.
6. Yang X., Jin J., Xu M. et al. Ultrasound common carotid artery segmentation based on active shape model // *Comput Math Methods Med.* – 2013. – № 345968.
7. Govsa F., Yagdi T., Ozer M.A., Eraslan C., Alagoz A.K. Building 3D anatomical model of coiling of the internal carotid artery derived from CT angiographic data // *Eur Arch Otorhinolaryngol.* – 2017. – Vol. 274(2). – P. 1097–1102.
8. Доль А.В., Иванов Д.В. Разработка программы полуавтоматической сегментации изображений для создания трехмерных моделей сосудов головного мозга // *Российский журнал биомеханики.* – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 449–461.
9. Li X., Sun B., Zhao H. et al. Retrospective Study of Hemodynamic Changes Before and After Carotid Stenosis Formation by Vessel Surface Repairing // *Sci Rep.* – 2018. – Vol. 8. – P. 5493.
10. Xu P., Liu X., Zhang H., Ghista D., Zhang D., Shi C., Huang W. Assessment of boundary conditions for CFD simulation in human carotid artery // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology.* – 2018. – Vol. 17. – P. 1581–1597.
11. Lee C.J., Uemiya N., Ishihara S., Zhang Y., Qian Y. A comparison of estimation methods for computational fluid dynamics outflow boundary conditions using patient-specific carotid artery // *Proc Inst Mech Eng H.* – 2013. – Vol. 227(6). – P. 663-71.
12. Westerhof N., Lankhaar J.W., Westerhof B.E. The arterial Windkessel // *Med Biol Eng Comput.* – 2009. – Vol. 47(2). – P. 131–141.
13. Onaizah O., Poepping T.L., Zamir M. A model of blood supply to the brain via the carotid arteries: Effects of obstructive vs. sclerotic changes // *Med Eng Phys.* – 2017. – Vol. 49. – P. 121–130.
14. Zierler R.E., Leotta D.F., Sansom K., Aliseda A., Anderson M.D., Sheehan F.H. Development of a Duplex Ultrasound Simulator and Preliminary Validation of Velocity Measurements in Carotid Artery Models // *Vasc Endovascular Surg.* – 2016. – Vol. 50(5). – P. 309–316.
15. Xu P., Liu X., Zhang H. et al. Assessment of boundary conditions for CFD simulation in human carotid artery // *Biomech Model Mechanobiol.* – 2018. – Vol. 17(6). – P. 1581–1597.
16. Hoi Y., Wasserman B.A., Lakatta E.G., Steinman D.A. Effect of common carotid artery inlet length on normal carotid bifurcation hemodynamics // *J Biomech Eng.* – 2010. – Vol. 132(12). – P. 121008.
17. Gharahi H., Zambrano B.A., Zhu D.C., DeMarco J.K., Baek S. Computational fluid dynamic simulation of human carotid artery bifurcation based on anatomy and volumetric blood

flow rate measured with magnetic resonance imaging // *Int J Adv Eng Sci Appl Math.* – 2016. – Vol. 8(1). – P. 40–60.

18. Choudhry F.A., Grantham J.T., Rai A.T., Hogg J.P. Vascular geometry of the extracranial carotid arteries: an analysis of length, diameter, and tortuosity // *J. Neurointerv Surg.* – 2016. – Vol. 8(5). – P. 536–540.

19. Garrard J.; Ramnarine K. Shear-Wave Elastography in Carotid Plaques: Comparison with Grayscale Median and Histological Assessment in an Interesting Case *Ultraschall in der Medizin* // *European Journal of Ultrasound.* – 2014. – Vol. 35(01). – P. 3 – 4.

20. Иванов Д.В., Доль А.В., Кузык Ю.И. Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза // *Российский журнал биомеханики.* – 2017. – Т. 21. – № 1. – С. 29-40.

21. КОМПАНИЯ Mindray: [сайт]. URL: https://www.mindray.com/ru/product/Resona_7_GI.html

22. Westerhof N., Lankhaar J.-W., Westerhof B.E. The arterial Windkessel // *Med Biol Eng Comput.* – 2009. – Vol. 47. – P. 131–141.

23. Ivanov D., Dol A., Polienko A. Patient-specific hemodynamics and stress-strain state of cerebral aneurysms // *Acta of Bioengineering and Biomechanics.* – 2016. – Vol. 18. – № 2. – P. 10-17.

24. Backes D., Vergouwen M.D., Velthuis B.K., van der Schaaf I.C., Bor A.S., Algra A., Rinkel G.J. Difference in aneurysm characteristics between ruptured and unruptured aneurysms in patients with multiple intracranial aneurysms // *Stroke.* – 2014. – Vol. 45, № 5. – P. 1299–1303.

25. Futami K., Nambu I., Kitabayashi T., Sano H., Misaki K., Uchiyama N., Nakada M. Inflow hemodynamics evaluated by using four-dimensional flow magnetic resonance imaging and the size ratio of unruptured cerebral aneurysms // *Neuroradiology.* – 2017. – Vol. 59, № 4. – P. 411–418.

26. Huang Z.Q., Meng Z.H., Hou Z.J., Huang S.Q., Chen J.N., Yu H., Feng L.J., Wang Q.J., Li P.A., Wen Z.B. Geometric parameter analysis of ruptured and unruptured aneurysms in patients with symmetric bilateral intracranial aneurysms: a multicenter ct angiography study // *AJNR Am. J. Neuroradiol.* – 2016. – Vol. 37, № 8. – P. 1413–1417.

27. Ivanov D., Dol A., Polienko A. Patient-specific hemodynamics and stress-strain state of cerebral aneurysms // *Acta Bioeng Biomech.* – 2016. – Vol. 18, № 2. – P. 9–17.

28. Jiang H., Weng Y.X., Zhu Y., Shen J., Pan J.W., Zhan R.Y. Patient and aneurysm characteristics associated with rupture risk of multiple intracranial aneurysms in the anterior circulation system // *Acta Neurochir. (Wien).* – 2016. – Vol. 158, № 7. – P. 1367–1375.

29. Jing L., Fan J., Wang Y., Li H., Wang S., Yang X., Zhang Y. Morphologic and hemodynamic analysis in the patients with multiple intracranial aneurysms: ruptured versus unruptured // *PLoS One.* – 2015. – Vol. 10, № 7. – e0132494.

30. Kaneko N., Mashiko T., Namba K., Tateshima S., Watanabe E., Kawai K. A patient-specific intracranial aneurysm model with endothelial lining: a novel in vitro approach to bridge the gap between biology and flow dynamics // *J. Neurointerv. Surg.* – 2017. DOI: 10.1136/neurintsurg-2017-013087.

31. Kojima M., Irie K., Ikeda S., Fukuda T., Arai F., Hirose Y., Negoro M. The hemodynamic study for growth factor evaluation of rupture cerebral aneurysm followed up for five years // *Journal of Biomedical Science and Engineering.* – 2012. – Vol. 5, № 12A. DOI: 10.4236/jbise.2012.512A112

32. Lv N., Feng Z., Wang C., Cao W., Fang Y., Karmonik C., Liu J., Huang Q. Morphological risk factors for rupture of small (<7 mm) posterior communicating artery aneurysms // *World Neurosurg.* – 2016. – Vol. 87. – P. 311–315.

33. Tremmel M., Dhar S., Levy E.I., Mocco J., Meng H. Influence of intracranial aneurysm-to-parent vessel size ratio on hemodynamics and implication for rupture: results from a virtual experimental study // *Neurosurgery.* – 2009. – Vol. 64, № 4. – P. 622–630.

34. Ujiie H., Tachibana H., Hiramatsu O., Hazel A.L., Matsumoto T., Ogasawara Y.,

Nakajima H., Hori T., Takakura K., Kajiya F. Effects of size and shape (aspect ratio) on the hemodynamics of saccular aneurysms: a possible index for surgical treatment of intracranial aneurysms // *Neurosurgery*. – 1999. – Vol. 45, № 1. – P. 119–129.

35. Weir B. *Aneurysms affecting the nervous system*. – Baltimore: Williams & Wilkins, 1987. – 671 p.

36. Weir B., Amidei C., Kongable G., Findlay J.M., Kassell N.F., Kelly J., Dai L., Karrison T.G. The aspect ratio (dome/neck) of ruptured and unruptured aneurysms // *J. Neurosurg.* – 2003. – Vol. 99, № 3. – P. 447–451.

37. Аронов Д.М., Лупанов В.П. Некоторые аспекты патогенеза атеросклероза. // *Атеросклероз и дислипидемии*. 2011. № 1. С. 48-56.

38. Доль А.В., Гуляев Ю.П. Трехмерная математическая модель гемодинамики с учетом работы распределенного сердца // *Известия саратовского университета. Серия математика. Механика. Информатика*. – 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 62-66.

39. Augst A.D., Ariff B., Thom S. A. G. McG., Xu X.Y. Hughes A.D. Analysis of complex flow and the relationship between blood pressure, wall shear stress, and intima-media thickness in the human carotid artery // *J. Physiol Heart Circ Physiol*. – 2007. – Vol. 293. – P. 1031-1037.

40. Birchall D., Zaman A., Hacker J., Davies G., Mendelow D. Analysis of haemodynamic disturbance in the atherosclerotic carotid artery using computational fluid dynamics // *Eur Radiol*. – 2006. – Vol. 16. – P. 1074-1083.

41. Bonert M., Leask R.L., Butany J., Ethier C.R., Myers J.G., Johnston K.W., Ojha M. The relationship between wall shear stress distributions and intimal thickening in the human abdominal aorta [Электронный ресурс] // *Biomed Eng Online*. – 2003. – Vol. 2 – Режим доступа: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/2/1/18>.

42. Delfino A., Stergiopoulos N., Moore J.E., Meister J.J. Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite-element model of the human carotid bifurcation // *J. Biomech.* – 1997. – Vol. 30(8). – P. 777-786.

43. Filipovic N., Kojic M. м // *Theoret. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 31(1). – P. 1-33.

44. Hyun S., Kleinstreuer C., Archie J.P. Computational analysis of effects of external carotid artery flow and occlusion on adverse carotid bifurcation hemodynamics // *J. Vascular Surgery*. – 2003. – Vol. 37(6). – P. 1248-1254.

45. Joshi A.K., Leask R.L., Ojha M., Myers J.G., Butany J., Ethier C.R. Correlation of wall shear stress and intimal thickening in the right coronary artery // *Summer Bioengineering Conference*. – 2003. – P. 1031-1032.

46. Khamdaeng T., Luo J, Vappou J, Terdtoon P, Konofagou E.E. Arterial stiffness identification of the human carotid artery using the stress-strain relationship in vivo // *Ultrasonics*. – 2012. – Vol. 52(3). – P.402-411.

47. Malek A.M., Alper S.L., Izumo S. Hemodynamic shear stress and its role in atherosclerosis. // *JAMA*. – 1999. – Vol. 282(21). – P. 2035-2042.

48. Martin D., Zaman A., Hacker J., Mendelow D., Birchall D. Analysis of haemodynamic factors involved in carotid atherosclerosis using computational fluid dynamics // *The British Journal of Radiology*. – 2009. – Vol. 82. – P. 33-38.

49. Tan F.P.P., Soloperto G., Wood N.B., Thom S., Hughes A., Xu X.Y. Advanced Computational Models for Disturbed and Turbulent Flow in Stenosed Human Carotid Artery Bifurcation // *Biomed.* – 2008. – Vol. 21. – P. 390-394.

50. Tang D., Yang C., Ku D.N. A 3-D thin-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with symmetric and asymmetric stenoses // *Computers and Structures*. – 1999. – Vol. 72. – P. 357-377.

51. Thubrikar M. *J. Vascular mechanics and pathology*. NY: Springer Science+Business Media, 2007. – 494 p.

52. Younis H.F., Kaazempur-Mofrad M.R., Chung C., Chan R.C., Kamm R.D. Computational analysis of the effects of exercise on hemodynamics in the carotid bifurcation // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2003. – Vol. 31. – P. 995-1006.

53. Toloui M., Firoozabadi B., Saidi M.S. A numerical study of the effects of blood rheology and vessel deformability on the hemodynamics of carotid bifurcation // *Scientia Iranica B*. – 2012. – Vol. 19 (1). – P. 119–126.
54. Lin W., Ma X., Deng D., Li Y. Hemodynamics in the Circle of Willis with Internal Carotid Artery Stenosis under Cervical Rotatory Manipulation: A Finite Element Analysis // *Medical Science Monitor*, 2015. – Vol. 21. – P.1820-1826.
55. Kwak H.S., Hwang S.B., Chung G.H., Lee S.Y. Pattern of circle of Willis between normal subject and patients with carotid atherosclerotic plaque // *Neurology Asia*, 2015. – Vol. 20(1). – P. 7 – 14.
56. Zhu G., Yuan Q., Yang J., Yeo J.H. The role of the circle of Willis in internal carotid artery stenosis and anatomical variations: a computational study based on a patient-specific three-dimensional model // *BioMed Eng OnLine*, 2015. – P. 14-107.
57. Alnaes M.S., Isaksen J., Mardal K.A. Computation of hemodynamics in the circle of Willis // *Stroke*. – 2007. – Vol.38(9). – P. 2500–5.
58. Ballotta E, Da Giau G, Manara R, Baracchini C. Extracranial severe carotid stenosis and incidental intracranial aneurysms. *Ann Vasc Surg*. 2006;20:5–8.
59. Andrews BT, Edwards MS, Gannon P. Acutely thrombosed aneurysm of the middle cerebral artery presenting as intracranial hemorrhage in a 3-year-old child. Case report. *J Neurosurg*. 1984;60:1303–7.
60. Cantore G, Santoro A, Da Pian R. Spontaneous occlusion of supraclinoid aneurysms after the creation of extra-intracranial bypasses using long grafts: Report of two cases. *Neurosurgery*. 1999;44:216–9.discussion 219-20.
61. Haque R, Kellner C, Solomon RA. Spontaneous thrombosis of a giant fusiform aneurysm following extracranial-intracranial bypass surgery. *J Neurosurg*. 2009;110:469–74.
62. Housepian EM, Pool JL. A systematic analysis of intracranial aneurysms from the autopsy file of the Presbyterian Hospital, 1914 to 1956. *J Neuropathol Exp Neurol*. 1958;17:409–23.
63. Senn P, Krauss JK, Remonda L, Godoy N, Schroth G. The formation and regression of a flow-related cerebral artery aneurysm. *Clin Neurol Neurosurg*. 2000;102:168–72.
64. Suh BY, Yun WS, Kwun WH. Carotid artery revascularization in patients with concomitant carotid artery stenosis and asymptomatic unruptured intracranial artery aneurysm. *Ann Vasc Surg*. 2011;25:651–5.
65. Li Y, Payner TD, Cohen-Gadol AA. Spontaneous regression of an intracranial aneurysm after carotid endarterectomy. *Surg Neurol Int* 2012;3:66 doi:10.4103/2152-7806.97168
66. Feigin VL, Rinkel GJ, Lawes CM, Algra A, Bennett DA, van GJ, Anderson CS. Risk factors for subarachnoid hemorrhage: an updated systematic review of epidemiological studies. *Stroke*. 2005; 36: 2773–2780.
67. Arambepola PK, McEvoy SD, Bulsara KR. De novo aneurysm formation after carotid artery occlusion for cerebral aneurysms. *Skull Base*. 2010;20:405–8.
68. Shin HP, Lee SH, Koh JS. Asymptomatic Penetration of the Oculomotor Nerve by a De Novo Aneurysm Associated with Severe Atherosclerotic Stenosis of the Supraclinoid Internal Carotid Artery. *J Korean Neurosurg Soc*. 2014 Jul; 56(1): 48–50.
69. Labelle H., Roussouly P., Berthonnaud E., Transfeldt E., O'Brien M., Chopin D., Hresko T., Dimnet J. Spondylolisthesis, pelvic incidence, and spinopelvic balance: a correlation study // *Spine*. – 2004. – Vol. 29. – P. 2049–2054.
70. Nouh M.R. Spinal fusion-hardware construct: Basic concepts and imaging review // *World J. Radiol*. – 2012. – Vol. 4, № 5. – P. 193–207.
71. Sevrain A., Aubin C.-A., Gharbi H., Wang X., Labelle H. Biomechanical evaluation of predictive parameters of progression in adolescent isthmic spondylolisthesis: a computer modeling and simulation study // *Scoliosis*. – 2012. – Vol. 7. – 2.

72. Wang W., Aubin C.E., Cahill P., Baran G., Arnoux P.J., Parent S., Labelle H. Biomechanics of high-grade spondylolisthesis with and without reduction // *Med. Biol. Eng. Comput.* – 2016. – Vol. 54, № 4. – P. 619–628.
73. Alho A., Benterud J.G., Høgevold H.E., Ekeland A., Strømsøe K., Comparison of functional bracing and locked intramedullary nailing in the treatment of displaced tibial shaft fractures, *Clin Orthop Relat Res*, 1992, 277:243–250
74. Barabash A.P., Barabash Yu.A., Fixion intramedullary fixation system in treatment of fractures, pseudoarthroses of long bones, *Genius of orthopedics*, 2010, 2:44-49. In Russian.
75. Blomquist J., Lundberg O.J., Gjerdet N.R., Mølster A., Are Inflatable Nails an Alternative to Interlocked Nails in Tibial Fractures?, *Clin Orthop Relat Res*, 2008, 466:1225–1231.
76. Bougherara H., Zdero R., Miric M., Shah S., Hardisty M., Zalzal P., Schemitsch E.H., The biomechanics of the T2 femoral nailing system: a comparison of synthetic femurs with finite element analysis, *Proc Inst Mech Eng H*, 2009, 223(3):303-314.
77. Cheung G., Zalzal P., Bhandari M., Spelt J.K., Papini M., Finite element analysis of a femoral retrograde intramedullary nail subject to gait loading, *Med Eng Phys*, 2004, 26(2):93-108.
78. Efsthathopoulos N., Nikolaou V.S., Xypnitos F.N., Korres D., Lazaretos I., Panousis K., Kasselouris E.N., Venetsanos D.T., Provatidis C.G., Investigation on the distal screw of a trochanteric intramedullary implant (Fi-nail) using a simplified finite element model, *Injury*, 2010, 41(3):259-265.
79. Hooper G.J., Keddell R.G., Penny I.D., Conservative management or closed nailing for tibial shaft fractures. A randomized prospective trial, *J Bone Joint Surg (Br)*, 1991, 73(1):83–85.
80. Kajzer A., Kajzer W., Marciniak J., Expandable intramedullary nail – experimental biomechanical evaluation, *Archives of Materials Science and Engineering*, 2010, 41(1):45-52.
81. Kapoor S.K., Kataria H., Boruah T., Patra S.R., Chaudhry A., Kapoor S., Expandable self-locking nail in the management of closed diaphyseal fractures of femur and tibia, *Indian J Orthop*, 2009, 43:264-270.
82. Lepore L., Lepore S., Maffuli N., Intramedullary nailing of the femur with an inflatable self-locking nail: comparison with locked nailing, *J Orthop Sci*, 2003, 8(6):796–801.
83. Maher S.A., Meyers K., Borens O., Suk M., Grose A., Wright T.M., Helfet D., Biomechanical evaluation of an expandable nail for the fixation of midshaft fractures, *J Trauma*, 2007, 63(1):103–107.
84. Mallick E., Hazarika S., Assad S., Scott M., The Fixion nailing system for stabilising diaphyseal fractures of the humerus: A two-year clinical experience, *Acta Orthop Belg*, 2008, 74:308-316.
85. Narain S., Dave P.K., Shah S.N., Ganai M., Singh S., Singh A., A Comparative Study of Intramedullary Expandable Nail and Interlocking Nail in Tibial, Femoral & Humeral Shaft Fractures: A Prospective and Retrospective Study, *JIMSA*, 2011, 24(1):15-16.
86. Oliveira M.L., Lemon M.A., Mears S.C., Dinah A.F., Waites M.D., Knight T.A., Belkoff S.M., Biomechanical comparison of expandable and locked intramedullary femoral nails, *J Orthop Trauma*, 2008, 22(7):446-450.
87. Rose D.M., Smith T.O., Nielsen D., Hing C.B., Expandable intramedullary nails in lower limb trauma: a systematic review of clinical and radiological outcomes, *Strat Traum Limb Recon*, 2013, 8:1–12.
88. Siegel H.J., Sessions W., Mark A., Casillas Jr., Stabilization of Pathologic Long Bone Fractures With the Fixion Expandable Nail, *Orthopedics*, 2008, 31(2):143-148.
89. Чуйко А.Н., Калиновский Д.К., Левандовский Р.А., Грибов Д.А. Компьютерная томография и биомеханическое сопровождение в челюстно-лицевой хирургии с использованием комплекса Mimics-ANSYS // *Дентал Юг*. 2012. № 5. С. 8–12.
90. Mimics [Электронный ресурс]. Belgium: Materialise, 2009. URL: <http://www.materialise.com/materialise/view/en/2408037>

91. Hasan I, Bourauel C, Mundt T, Heinemann F. Biomechanics and load resistance of short dental implants: a review of the literature. *ISRN Dent* 2013; 8: 424592. (doi: 10.1155/2013/424592) (PMID: 23738085)
92. 54(5): 384-389. (doi: 10.3340/jkns.2013.54.5.384) (PMID: 24379944)
93. Ivanov DV, Lepilin AV, Smirnov DA, Dol AV. The possibility of different CAD systems in the construction of mathematical model of bone tissue. *Saratov Journal of Medical Scientific Research* 2013; 9(3): 403–405. Russian
94. Smirnov DA, Lomakin MV, Lepilin AV, Ivanov DV, Dol AV. Biomechanical study of the stress-strain state of the bone-implantabatement system in the region of short dental implants. *Russian Stomatology* 2013; 6(1): 21-24. Russian.

Литература к главе 6

95. Матвеевко В.П., Шардаков И.Н., Шестаков А.П. Алгоритм создания трехмерных образов органов человека по томографическим данным // *Российский журнал биомеханики*. – 2011. – Т. 15, № 4. – С. 20–32.
96. Dol A.V., Ivanov D.V. Development of the semi-automatic segmentation software for 3d modeling of cerebral vessels // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2017. – V. 21. – № 4. – P. 383.

Литература к главе 8

97. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий – М.: Наука, 1977. 416 с.
98. Доль, А.В. Трехмерная математическая модель гемодинамики с учетом работы распределенного сердца / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // *Известия саратовского университета. Серия математика. Механика. Информатика*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 62-66.
99. Chen, J. Numerical Investigation of the non-Newtonian Pulsatile Blood Flow in a Bifurcation Model With a Non-Planar Branch / J. Chen, X.-Y. Lu // *Journal of Biomechanics*. 2006. V. 39. P. 818-832.
100. Rutten, M. Fluid-Solid Interaction in Large Arteries / M. Rutten. Netherlands: Eindhoven University of Technology, 1998.
101. Гуляев, Ю.П. Математические модели биомеханики в медицине / Ю.П. Гуляев, Л.Ю. Коссович Саратов: Изд. Саратовского университета, 2001.

Литература к главе 9

102. Крутько А.В., Байков Е.С. Анализ критериев прогнозирования результатов хирургического лечения грыж межпозвоночных дисков: обзор современной литературы // *Гений ортопедии*. – 2012. – № 1. – С. 140–145.
103. Wu W., Chen C., Ning J., Sun P., Zhang J., Wu C., Bi Z., Fan J., Lai X., Ouyang J. A novel anterior transpedicular screw artificial vertebral body system for lower cervical spine fixation: a finite element study // *J. Biomech. Eng.* – 2017. – Vol. 139, № 6. – 061003.
104. Lattig F., Fekete T.F., Jeszenszky D. Management of fractures of the pedicle after instrumentation with transpedicular screws // *J. Bone Joint Surg. (Br.)*. – 2010. – Vol. 92-B, № 1. – P. 98–102.
105. Niinomi M. Mechanical biocompatibilities of titanium alloys for biomedical applications // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2008. – Vol. 1, № 1. – P. 30–42.
106. VICTREX [Электронный ресурс]: – URL: https://www.victrex.com/~media/datasheets/victrex_tds_450g.pdf (дата обращения: 20.07.2017).
107. Синельников, Р.Д. Атлас анатомии человека / Р.Д. Синельников, Я.Р. Синельников. – 2-е издание. – М: Медицина, 1996. – Т. 3. – 138 с.

108. Кириллова, И. В. Биомеханика бифуркаций сонных артерий / И. В. Кириллова, К. М. Морозов, А. В. Каменский // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. СПб., 2007. - Т. 1. №21. С. 156.
109. Berger, S.A. Flows in Stenotic Vessels /S.A. Berger, L.D. Jou // Annu Rev Fluid Mechanics. 2000. - V. 32. - P. 347-384.
110. Tambasco, M. Path-Dependent Hemodynamics of the Stenosed Carotid Bifurcation / M. Tambasco, D.A. Steinman // Annals of Biomedical Engineering. 2003. V. 31. P. 1054-1065.
111. Carew, T. E. Compressibility and Constitutive Equation for Arterial Wall / T.E. Carew, R.N. Vaishnav, D.J. Pater // Circulation Research. 1968. - V. 23. - P. 61-68.
112. Patel, D.J. Basic Hemodynamics and its Role on Disease Processes / D.J. Patel, R.N. Vaishnav. – Baltimore: University Park Press, 1980. 504 p.
113. Каменский, А. В. Практическое применение конечно-элементного пакета ANSYS к задачам биомеханики кровеносных сосудов./ / А.В. Каменский, Сальковский Ю.Е. – Саратов: Изд. Саратовского университета, 2005. 100 с.
114. Богаченко, С.Е. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии / С.Е. Богаченко, Ю.А. Устинов // Российский журнал биомеханики. 2009. Т. 13. № 1. С. 29-42.
115. Иванов, Д. В. Численное исследование движения крови в стенозированных артериях / Д.В. Иванов, С.А. Алексейчук //Сборник научных трудов. Математика. Механика. 2006. Выпуск 8. С. 183-187.
116. Казанчян П.О., Валиков Е.А., Дерзанов А.В. Хирургическое лечение патологических деформаций внутренних сонных артерий // Альманах клинической медицины. – 2007. – Вып. 16. – С. 73–76.
117. . Ivanov D., Dol A., Pavlova O., Aristambekova A. Modeling of human circle of Willis with and without aneurisms // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2014. – Vol. 16, № 2. – P. 121–129.
118. Martin D., Zaman A., Hacker J., Mendelow D., Birchall D. Analysis of haemodynamic factors involved in carotid atherosclerosis using computational fluid dynamics // The British Journal of Radiology. – 2009. – Vol. 82. – P. 33–38. DOI:10.1259/bjr/59367266
119. Доль А.В., Иванов Д.В. Разработка программы полуавтоматической сегментации изображений для создания трехмерных моделей сосудов головного мозга. Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21. № 4. С. 448-460.
120. Иванов Д.В., Доль А.В., Кузык Ю.И. Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза. Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21. № 1. С. 29-40.
121. Ivanov D., Dol A., Pavlova O., Aristambekova A. Modeling of human circle of willis with and without aneurisms. Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2014. Т. 16. № 2. С. 121-129.
122. Westerhof N, Lankhaar JW, Westerhof BE. The arterial Windkessel. Med Biol Eng Comput. 2009 Feb;47(2):131-41. doi: 10.1007/s11517-008-0359-2. Epub 2008 Jun 10. PMID: 18543011.
123. Milton R.C. An Extended Table of Critical Values for the Mann-Whitney (Wilcoxon) Two-Sample Statistic // Journal of the American Statistical Association. 1964. Vol. 59, No. 307. P. 925-934.
124. Иванов Д.В., Доль А.В., Кузык Ю.И. Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза // Российский журнал биомеханики. – 2017. – Т. 21. – № 1. – С. 29-40.
125. Компания Mindray: [сайт]. URL: https://www.mindray.com/ru/product/Resona_7_GI.html

126. Ivanov D., Dol A., Polienko A. Patient-specific hemodynamics and stress-strain state of cerebral aneurysms // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2016. – Vol. 18. – № 2. – P. 10-17.

127. Cheung G., Zalzal P., Bhandari M., Spelt J.K., Papini M., Finite element analysis of a femoral retrograde intramedullary nail subject to gait loading, Med Eng Phys, 2004, 26(2):93-108.

128. Efstathopoulos N., Nikolaou V.S., Xypnitos F.N., Korres D., Lazarettos I., Panousis K., Kasselouris E.N., Venetsanos D.T., Provatidis C.G., Investigation on the distal screw of a trochanteric intramedullary implant (Fi-nail) using a simplified finite element model, Injury, 2010, 41(3):259-265.

129. Kajzer A., Kajzer W., Marciniak J., Expandable intramedullary nail – experimental biomechanical evaluation, Archives of Materials Science and Engineering, 2010, 41(1):45-52.

130. Oliveira M.L., Lemon M.A., Mears S.C., Dinah A.F., Waites M.D., Knight T.A., Belkoff S.M., Biomechanical comparison of expandable and locked intramedullary femoral nails, J Orthop Trauma, 2008, 22(7):446-450.

Литература к главе 10

131. Компания Arduino: [сайт]. URL: <https://www.arduino.cc/>

132. Компания Harvard Apparatus: [сайт]. URL: <https://www.harvardapparatus.com/pumps-liquid-handling/pulsatile-blood-pumps.html>

Список рекомендуемой литературы

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация, Мир, 1986, 312 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов, Мир, М., 1979, 392 с.
3. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве: Учебное пособие. – СПб.: СПбГПУ. – 274 с.
4. Демидов С.П. Теория упругости. Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
5. Лурье Т.И. теория упругости, Наука, 1970. – 939 с.
6. Кнетс И.В., Пфафрод Г.О., Саулгозис Ю.Ж. деформирование и разрушение твердых биологических тканей, Рига: Зинатне, 1980. – 319 с.
7. Герман И. Физика организма человека, Издательский дом «интеллект», 2011. – 992 с.
8. Гланц С. Медико-биологическая статистика. McGraw-Hill, 1994; М.: Практика, 1998. — 459 с.
9. Жидков А.В., Шабаров В.В. Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра. Электронное учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. - 80 с.

ИВАНОВ ДМИТРИЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ
ДОЛЬ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Издание второе,
переработанное и дополненное

Монография

Работа выполнена при поддержке
Грантового конкурса Стипендиальной программы В. Потанина (проект ГК200000431)

ISBN 978-5-00140-752-2