

А.В.Хохлов

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ В $RC$ -ЦЕПЯХ (Активные $RC$ -фильтры)

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу  
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование особенностей частотной фильтрации радиосигналов в  $RC$ -цепях и принципов создания активных  $RC$ -фильтров нижних и верхних частот, полосовых и заграждающих (режективных).

## Литература

1. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. М.: Высш.шк., 1983.
3. Хохлов А.В. Полупроводниковые усилители и автогенераторы. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 1997.
4. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники. М.: Высш.шк., 2000.
5. Фолкенберри Л. Примененне операционных усилителей и линейных ИС. М.: Мир, 1985.
6. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники/Под ред. Б.К.Криницкого. Т.2. М.: Энергия, 1977.
7. Каяцкас А.А. Основы радиоэлектроники. М.: Высш.шк., 1988.

## Контрольные вопросы:

1. Дайте определение электрического частотного фильтра, ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ.
2. Как получить условия пропускания в пассивных  $RC$ -фильтрах? Как определить полосу пропускания фильтра графически?
3. Как зависит крутизна АЧХ активных фильтров нижних и верхних частот в окрестности частот среза от коэффициента усиления ОУ? Почему АЧХ АРСФ Саллена и Ки при  $K = 1$  совпадает с АЧХ двухзвенного пассивного фильтра?
- 4\*. Поясните, почему избирательность ФНЧ четвертого порядка существенно превышает избирательность ФНЧ, собранного по схеме Саллена и Ки.

## Задания для самостоятельной работы

1. Вывести формулы (7), (8), (10) и (11), для коэффициентов передачи ARCF.
2. Используя номиналы резисторов и конденсаторов, приведенные в таблице 1, вывести формулы (13) - (16) для расчета АЧХ фильтров.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Электрическим частотным фильтром (или сокращенно просто *Фильтром*) называется устройство, предназначенное для частотного разделения электрических сигналов и представляющее четырехполюсник, ослабление которого в некоторой полосе частот мало по сравнению с остальными частотами (рис. 1). Частотные свойства фильтра определяются амплитудно-частотной  $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$  и фазо-частотной  $\arg \dot{K}(\omega)$  характеристиками (АЧХ и ФЧХ). Вместо АЧХ обычно используется функция ослабления  $\alpha(\omega) = -20 \lg K(\omega)$ .

Диапазон частот, в котором ослабление меньше заданного значения  $\alpha_n$ , называется *полосой пропускания*, а область или области спектра, в которых ослабление больше заданного значения  $\alpha_z$ , называется *полосой задерживания*. По расположению полос пропускания и задерживания различают *фильтры нижних* (а не низких!) *частот* (ФНЧ), *верхних* (а не высоких!) *частот* (ФВЧ), *полосовые* (ПФ) и *режективные* или *заграждающие* (РФ или ЗФ).

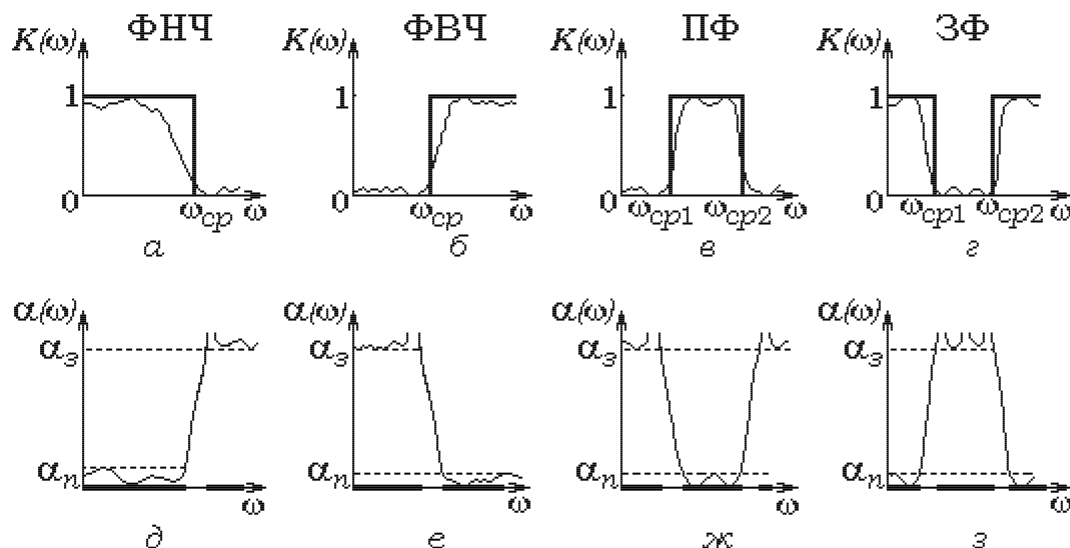


Рис. 1. Зависимости  $K(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$  для ФНЧ (а, д), ФВЧ (б, е), ПФ (в, ж) и ЗФ (г, з)

На рис. 1, а-г показаны частотные зависимости коэффициентов передачи (жирные линии – для идеальных фильтров, тонкие – для реальных), а на рис. 1, д-з – ослабления  $\alpha$  различных фильтров. Для идеальных фильтров в полосе пропускания  $K = 1$  (ослабление  $\alpha_n = 0$ ), а в полосе задерживания

$K=0$  (ослабление  $\alpha_z = \infty$ ). Частоты, разделяющие полосы пропускания и задерживания, соответствуют точкам разрыва  $K(\omega)$  и называются *частотами среза*.

Реальные фильтры могут быть пассивными, состоящими из индуктивностей и емкостей (пассивные  $LC$ -фильтры) или из сопротивлений и емкостей (пассивные  $RC$ -фильтры), активными ( $ARC$ -фильтры), с переключающими конденсаторами ( $AC$ -фильтры), электромеханическими (кварцевыми), магнитострикционными, пьезоэлектрическими и другими. Они обладают конечными ослаблениями  $\alpha_n \neq 0$  в полосе прозрачности и  $\alpha_z \neq \infty$  в полосе задерживания (рис. 1,  $a-z$ ), а  $K(\omega)$  соединяет  $\alpha_n$  и  $\alpha_z$  плавной кривой (рис. 1,  $d-z$ ). Поэтому между полосами пропускания и задерживания (подчеркнуты) вводятся *переходные* (не подчеркнуты) *полосы* (или *зоны*).

## Основы теории $RC$ -фильтров

Главными задачами теории являются:

- 1) определение условий пропускания и задерживания;
- 2) определение границ полос пропускания (частот среза);
- 3) вывод уравнений частотных характеристик.

При построении теории фильтров используются методы и основные выводы теории четырехполюсников [2, с.154-163], а сами фильтры представляются эквивалентными схемами четырехполюсников. Теоретические модели  $RC$ -фильтров используют как симметричные Т- или П-звенья, так и несимметричные Г-звенья.

### Пассивные $RC$ -фильтры

**Условия пропускания и задерживания. Частоты среза.** Если электрический фильтр согласован на входе и выходе, то его можно описать уравнениями четырехполюсника с  $\mathbf{A}$ -матрицей [2, с.156]

$$\dot{U}_{1m} = \dot{A}_{11}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{12}\dot{I}_{2m} = \dot{U}_{2m}\operatorname{ch}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\dot{Z}_0\operatorname{sh}\dot{\gamma},$$

$$\dot{I}_{1m} = \dot{A}_{21}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{22}\dot{I}_{2m} = \frac{\dot{U}_{2m}}{\dot{Z}_0}\operatorname{sh}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\operatorname{ch}\dot{\gamma},$$

и выразить коэффициенты последней через характеристические параметры: сопротивление  $\dot{Z}_0$  и постоянную передачи  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$  [2, с.158-160]:

$$A_{11} = \operatorname{ch}\dot{\gamma} = \operatorname{ch}(\alpha + j\beta) = \operatorname{ch}\alpha \cos \beta + j\operatorname{sh}\alpha \sin \beta = 1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{2}. \quad (1)$$

$RC$ -фильтры являются безындукционными и содержат резисторы и реактивные элементы только емкостного типа. Поэтому коэффициент передачи  $RC$ -цепи имеет вид

$$A_{11} = \operatorname{ch}\dot{\gamma} = \operatorname{ch}\alpha \cos \beta + j\operatorname{sh}\alpha \sin \beta = 1 \pm jT/2.$$

Знак (+) соответствует резистивному сопротивлению и реактивной проводимости  $jT = j\omega CR$ , а знак (-) – реактивному сопротивлению и резистивной проводимости  $-jT = 1/(j\omega CR)$ . Отсюда

$$\operatorname{ch}\alpha \cos \beta = 1, \quad \operatorname{sh}\alpha \sin \beta = \pm T/2. \quad (2)$$

Поскольку гиперболический косинус ( $\text{ch}\alpha$ ) больше или равен единице, не существует такой области частот, в которой  $\alpha=0$ , т.е., строго говоря,  $RC$ -цепи не обладают свойствами частотной фильтрации. Однако для  $\alpha_n \neq 0$  можно указать область частот, в которой  $\alpha \leq \alpha_n$  (полоса пропускания), и область частот, в которой  $\alpha \geq \alpha_z$  (полоса задерживания). Разделяющая их область частот составляет широкую *переходную зону*. Для сокращения ее протяженности используются многозвенные фильтры, элементарные ячейки которых разделяют активные элементы (транзисторы или операционные усилители).

**Уравнения частотных характеристик** Для построения функции ослабления фильтра  $\alpha(\omega)$  и ФЧХ  $\beta(\omega)$  воспользуемся соотношениями (2) и примем во внимание, что  $T$  зависит от  $\omega$ . Используя  $\text{ch}^2\alpha - \text{sh}^2\alpha = 1$  и  $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ , получим:

$$(1 + \text{sh}^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) = 1, \quad \sin^2\beta = \left( \frac{T}{2\text{sh}\alpha} \right)^2.$$

Откуда

$$(1 + \text{sh}^2\alpha) \left( 1 - \frac{T^2}{4\text{sh}^2\alpha} \right) = 1, \quad \text{где } T = \omega CR \text{ или } T = 1/(\omega CR),$$

или

$$\text{sh}^4\alpha - \frac{T^2}{4}\text{sh}^2\alpha - \frac{T^2}{4} = 0. \quad (3)$$

Разрешая это биквадратное относительно  $\text{sh}\alpha$  уравнение, получим:

$$\text{sh}\alpha = \sqrt{\frac{T^2}{8} \pm \frac{T}{2} \sqrt{\frac{T^2}{16} + 1}}, \quad \sin\beta = \frac{T}{2} / \sqrt{\frac{T^2}{8} \pm \frac{T}{2} \sqrt{\frac{T^2}{16} + 1}}.$$

Согласно (2) в полосе пропускания фильтра  $|T| \leq 4$ , и физический смысл имеют решения только со знаком (+). Тогда

$$\alpha(\omega) = \text{Arsh} \left( \sqrt{\frac{T^2(\omega)}{8} + \frac{T(\omega)}{2} \sqrt{\frac{T^2(\omega)}{16} + 1}} \right), \quad (4)$$

$$\beta(\omega) = \arcsin \left( \frac{T(\omega)}{\sqrt{\frac{T^2(\omega)}{2} + 2T(\omega) \sqrt{\frac{T^2(\omega)}{16} + 1}}} \right). \quad (5)$$

Таким образом, функции ослабления  $\alpha(\omega)$  и ФЧХ  $\beta(\omega)$  для  $RC$ -фильтров представляют непрерывные функции, заданные во всем частотном диапазоне от 0 до  $\infty$ , а полосы пропускания и задерживания определяются из условий  $\alpha(\omega) \leq \alpha_n$  и  $\alpha(\omega) \geq \alpha_z$  соответственно.

Сопrotivления рассматриваемых фильтров представляют характеристические сопротивления согласованных четырехполюсников - симметричных Т- или П-образных звеньев. Согласно общей теории четырехполюсников [2, с.161-163] они удовлетворяют соотношениям

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 \pm \frac{jT}{4}}, \quad \dot{Z}_0^\Pi = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 \pm \frac{jT}{4}} \quad (6)$$

и являются функциями частоты сигналов.

Характеристические сопротивления  $RC$ -фильтров для любых частот носят комплексный характер. Например, для  $\dot{Z} = R$ ,  $\dot{Y} = j\omega C$  имеем  $\dot{Z}_0^T = \sqrt{R/j\omega C + R^2}$ . Если  $k$ -фильтр можно согласовать с сопротивлением нагрузки  $R_H$  в очень узкой области частот, то согласовать  $RC$ -фильтр даже в узкой полосе частот не представляется возможным.

### Активные $RC$ -фильтры (ARCF)

Любой четырехполюсник, в том числе и ARCF, можно описать комплексной передаточной  $\dot{K}(j\omega)$  или системной функцией  $K(s)$ , где  $s$  - комплексная (лапласовская) частота [2, с.68-69, 147-152]:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0},$$

$$K(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}.$$

Поведение этих функций полностью определяется совокупностями корней многочленов в числителе (нули передаточной или системной функции) и в знаменателе (полюсы). Корни многочленов могут быть вещественными или комплексно-сопряженными. Число полюсов передаточной функции соответствует порядку фильтра.

ARCF, как правило, строятся на основе операционных усилителей (ОУ) [2, с.124-125, 6, с.181-212], позволяющих использовать положительную и отрицательную обратную связь (ОС). Наиболее распространены так называемая "базовая схема" ARCF (рис.2) и схема Саллена и Ки (рис. 3). Обе схемы содержат два звена  $RC$ -фильтра, но в базовой схеме используется отрицательная ОС, а в схеме Саллена и Ки - положительная и отрицательная ОС одновременно, Резисторы  $R_0$  и  $R_\beta$  составляют цепь отрицательной обратной связи, регулирующей коэффициент усиления ОУ  $K = 1 + R_\beta/R_0$

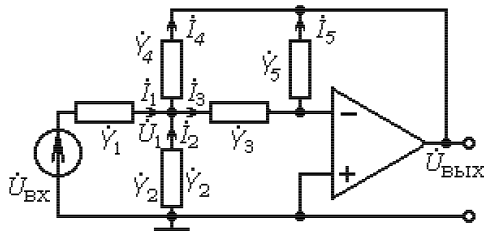


Рис. 2

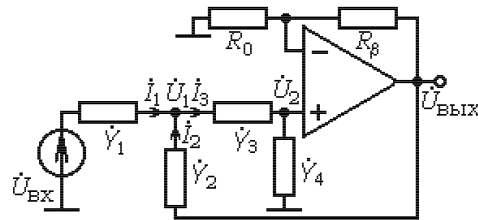


Рис. 3

Рассмотрим комплексные коэффициенты передачи этих устройств  $\dot{K}(j\omega) = \dot{U}_{\text{ВЫХ}}/\dot{U}_{\text{ВХ}}$ . Считая ОУ линейными и предполагая, что входные токи отсутствуют, а потенциалы инвертирующего (-) и неинвертирующего (+) входов одинаковы, для базовой схемы получим:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4, \quad \dot{I}_1 = (\dot{U}_{\text{ВХ}} - \dot{U}_1)\dot{Y}_1, \quad \dot{I}_2 = -\dot{U}_1\dot{Y}_2, \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_1\dot{Y}_3, \quad \dot{I}_4 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_{\text{ВЫХ}})\dot{Y}_4,$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_5 = -\dot{U}_{\text{ВЫХ}} \dot{Y}_5, \quad \dot{U}_{\text{ВЫХ}} = -\frac{\dot{Y}_3}{\dot{Y}_5} \dot{U}_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{ВХ}} \dot{Y}_1 &= \dot{U}_1(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) - \dot{U}_{\text{ВЫХ}} \dot{Y}_4, & \dot{U}_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_3 \dot{U}_1}{(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{Y}_5 + \dot{Y}_3 \dot{Y}_4}, \\ \dot{K}(j\omega) &= -\frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_3}{(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) \dot{Y}_5 + \dot{Y}_3 \dot{Y}_4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично для схемы Саллена и Ки имеем:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \quad \dot{I}_1 = (\dot{U}_{\text{ВХ}} - \dot{U}_1) \dot{Y}_1, \quad \dot{I}_2 = (\dot{U}_{\text{ВЫХ}} - \dot{U}_1) \dot{Y}_2, \quad \dot{I}_3 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \dot{Y}_3 = \dot{U}_2 \dot{Y}_4.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{ВХ}} \dot{Y}_1 &= \dot{U}_1(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 - \frac{K \dot{Y}_2 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4} - \frac{\dot{Y}_3^2}{\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4}), & \dot{U}_{\text{ВЫХ}} &= K \dot{U}_2 = \frac{K(\dot{Y}_3)}{\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4} \dot{U}_1 \\ \dot{K}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{K \dot{Y}_1 \dot{Y}_3}{(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2)(\dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) + \dot{Y}_3(\dot{Y}_4 - K \dot{Y}_2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) следуют частотные характеристики АРСФ: зависимости  $|\dot{K}(j\omega)|$  представляет АЧХ,  $\arg \dot{K}(j\omega)$  - ФЧХ фильтров. Поскольку выходные сопротивления ОУ ничтожно малы, согласования АРСФ с нагрузкой не требуется. Нагрузкой АРСФ может быть любое резистивное сопротивление, соответствующее паспорту ОУ.

Неравномерности частотных характеристик АРСФ в областях пропускания и задерживания, а также крутизну спада АЧХ в окрестностях частот среза, в фильтрах Саллена и Ки можно регулировать в больших пределах, изменяя величину коэффициента усиления  $K$ . Когда достичь нужных параметров не удастся, используются каскадные соединения фильтров с одинаковыми или чуть-чуть расстроенными частотами среза.

### RC-фильтры нижних частот

Фильтром нижних частот (ФНЧ) называется четырехполюсник, у которого ослабление сигналов в полосе частот от  $\omega = 0$  (постоянный ток) до некоторой частоты среза  $\omega_{\text{ср}}$  не превышает заданного значения  $\alpha_{\text{п}}$ , а колебания с более высокими частотами существенно ослабляются. Идеализированная и реальная АЧХ ФНЧ представлены на рис. 1, а и 1, д.

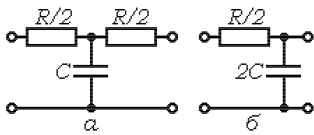


Рис. 4

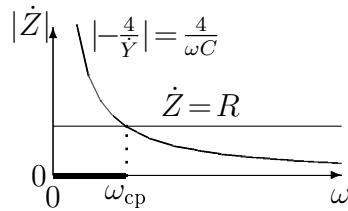


Рис. 5

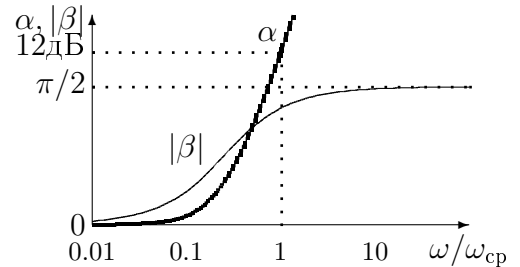


Рис. 6

Электрические схемы Т- и Г-звеньев RC-фильтра нижних частот изображены на рис. 4. Проводимости поперечных ветвей ФНЧ частотах малы

( $|\dot{Y}| = \omega C$ ) и сигналы ослабляются тем сильнее, чем выше их частоты, а сопротивления продольных ветвей (резисторов) не зависят от частоты ( $T = \omega CR$ ). Полосу пропускания и частоту среза  $RC$ -фильтра можно определить графически (рис. 5). Тогда  $\omega_{cp} = 4/RC$ .

Функция ослабления фильтра  $\alpha(\omega)$  и ФЧХ  $\beta(\omega)$  рассчитываются по формулам (4) и (5) и могут быть представлены в виде функций от  $\omega/\omega_{cp}$ :

$$\alpha = \text{Arsh} \left( \sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{8} + \frac{\omega CR}{2} \sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{16} + 1}} \right) = \text{Arsh} \left( \sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} + 2 \frac{\omega}{\omega_{cp}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} + 1}} \right),$$

$$\beta = \arcsin \left( \frac{\omega CR}{\sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{2} + 2\omega CR \sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{16} + 1}}} \right) = \arcsin \left( \frac{4\omega/\omega_{cp}}{\sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} + 2 \frac{\omega}{\omega_{cp}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} + 1}}} \right).$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 6 в логарифмическом масштабе. По сравнению с аналогичными зависимостями для  $LC$ -фильтров [2, с.243-244] характеристики  $RC$ -фильтров не содержат точек разрыва, а полосы пропускания плавно переходят в полосы задерживания. В области частот от 0 до  $\omega_{cp}$  коэффициент передачи фильтра изменяется в 6 раз, а ослабление на  $\omega = \omega_{cp}$  составляет 12 дБ. Частотой среза ФНЧ в литературе иногда называют  $\omega'_{cp} = 1/RC$ , так как в этой полосе частот мощность сигнала ослабляется не более, чем в два раза (-3дБ). Основным недостатком  $RC$ -фильтров по-видимому следует считать широкие переходные зоны и как следствие низкую частотную избирательность.

Так как в лабораторной работе измеряются зависимости  $K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)|$ , а не  $\alpha(\omega)$ , в дальнейшем будут использоваться обе зависимости. График функции  $K(\omega)$  для однозвенного Г-образного ФНЧ представлен линией 1 на рис. 8.

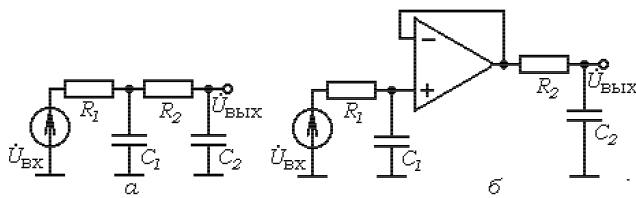


Рис. 7

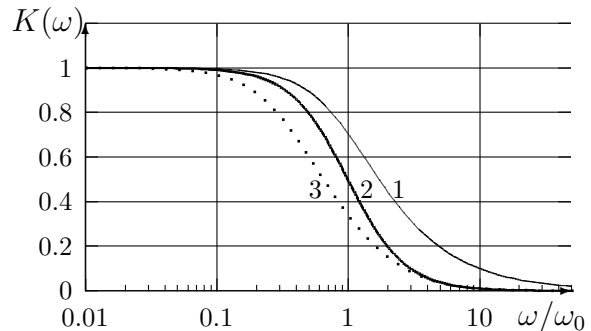


Рис. 8

Крутизну АЧХ  $RC$ -фильтра в области среза можно попытаться увеличить, используя каскадное соединение 2-х или большего числа одинаковых звеньев ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ). Для двухзвенного ФНЧ имеем (линия 2 на рис. 8):

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2}, \quad K(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (9)$$

Эти формулы предлагается вывести самостоятельно.

Коэффициент передачи (9) имеет место, когда звенья фильтра развязаны (рис. 7,б), например, с помощью повторителя напряжений на ОУ. Как известно, такие повторители напряжения обладают большим входным и малым выходным сопротивлениями (см. Приложение 1). Если же развязка звеньев отсутствует (рис. 7,а), то "двухзвенный" ФНЧ превращается в однозвенный со смещенной частотой среза (линия 3 на рис. 8), а

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 7\omega^2 R^2 C^2 + \omega^4 R^4 C^4}}.$$

Крутизна АЧХ в области среза резко возрастает, если двухзвенный фильтр и ОУ включить в ARCF.

В современной радиоэлектронике используются обе схемы построения ARCF. На рис. 9 представлен ФНЧ, имеющий схему Саллена и Ки. Методика расчета ARCF высокого порядка на основе базовой схемы подробно описана в работе [7, с.317-319, 376-380].

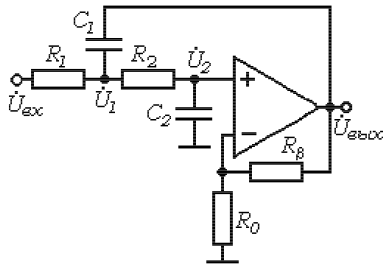


Рис. 9

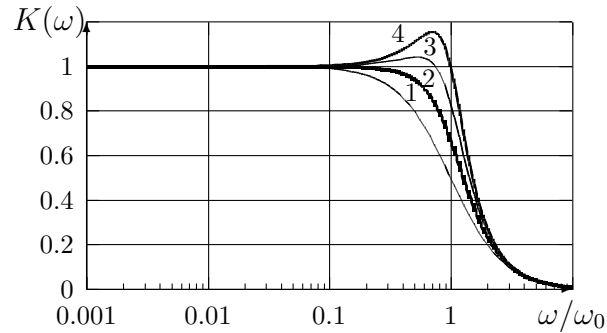


Рис. 10

В соответствии с (8) при  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$  АЧХ фильтра описывается соотношением

$$K_{ARCF}(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\omega CR)^2)^2 + (3 - K)^2 (\omega CR)^2}} \quad (10)$$

и для четырех значений коэффициента усиления  $K = 1, 1.5, 1.8, 2$  принимает вид, показанный на рис. 10 (линии 1 - 4 соответственно).

При  $K = 1$  АЧХ ARCF совпадает с характеристикой пассивного двухзвенного фильтра (линия 2 на рис. 8). В этом легко убедиться, полагая  $K = 1$  в (10) и получая (9). С ростом  $K$  крутизна АЧХ в области среза увеличивается, но возрастает ее неравномерность в области пропускания. При  $K = 3$  крутизна АЧХ неограниченно возрастает, но на частоте  $\omega'_{cp} = 1/RC$  возникает полюс, что крайне нежелательно.

### RC-фильтры верхних частот

*Фильтром верхних частот (ФВЧ)* называется четырехполюсник, у которого ослабление сигналов в полосе частот от некоторой частоты среза  $\omega_{cp}$  до сколь угодно больших частот ( $\omega \rightarrow \infty$ ) не превышает заданного значения  $\alpha_{\Pi}$ , а колебания более низких частот существенно ослабляются. Идеализированная и реальная АЧХ ФВЧ представлены на рис. 1,б и 1,е.



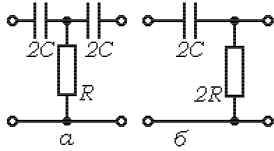


Рис. 11

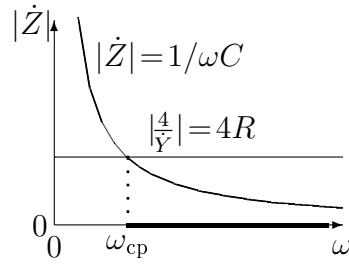


Рис. 12

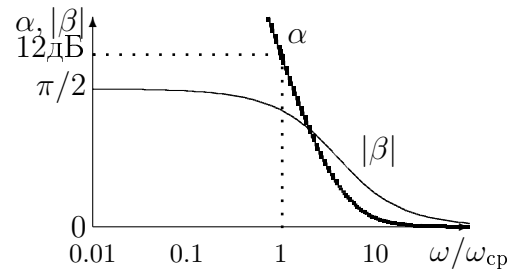


Рис. 13

Электрические схемы Т- и Г-звеньев  $RC$ -фильтра верхних частот изображены на рис. 11. Проводимости поперечных ветвей (резисторов) не зависят от частоты сигналов, а сопротивления продольных ветвей фильтров на низких частотах велики ( $|\dot{Z}| = 1/\omega C$ ), и выходные сигналы имеют тем меньшую величину, чем ниже их частоты, т.е. нижние частоты ослабляются сильнее, чем верхние и  $T = 1/(\omega CR)$ . Полосу пропускания и частоту среза  $RC$ -фильтра можно определить графически (рис. 12). Тогда  $\omega_{cp} = 1/4RC$ .

Основные частотные характеристики фильтра – функция ослабления  $\alpha(\omega)$  и ФЧХ  $\beta(\omega)$  рассчитываются по формулам (4) и (5) для  $X = \omega C$ . Учитывая полученное выражение для  $\omega_{cp}$  и рассматривая отношение  $\omega/\omega_{cp}$  в качестве текущей переменной, получим:

$$\alpha = \text{Arsh} \left( \sqrt{\frac{1}{8(\omega CR)^2} + \frac{1}{2\omega CR} \sqrt{\frac{1}{4(\omega CR)^2} + 1}} \right) = \text{Arsh} \left( \sqrt{\frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{cp}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2} + 1}} \right),$$

$$\beta = \arcsin \left( \frac{1/2\omega CR}{\sqrt{\frac{1}{8(\omega CR)^2} + \frac{1}{2\omega CR} \sqrt{\frac{1}{4(\omega CR)^2} + 1}}} \right) = \arcsin \left( \frac{2\omega_{cp}/\omega}{\sqrt{\frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{cp}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2} + 1}}} \right).$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 13 в логарифмическом масштабе. Как и частотные характеристики  $RC$ -фильтров низких частот, они не содержат точек, где производные терпят разрывы. В области частот от  $\omega_{cp}$  до  $\omega \rightarrow \infty$  коэффициент передачи фильтра изменяется в 4.12 раза, а ослабление на  $\omega = \omega_{cp}$  составляет  $\cong 12$  дБ. Частотой среза ФВЧ в литературе иногда называют  $\omega'_{cp} = 1/RC$ .  $RC$ -фильтры верхних частот, как и ФНЧ, имеют широкие переходные зоны и, как следствие, низкую частотную избирательность.

Крутизна АЧХ в области среза резко возрастает в ARCF Саллена и Ки (рис. 14). В соответствии с (8) при  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$  АЧХ фильтра описывается соотношением

$$K_{ARCF}(\omega) = \frac{K\omega^2 R^2 C^2}{\sqrt{(1 - (\omega CR)^2)^2 + (3 - K)^2 (\omega CR)^2}} \quad (11)$$

и для четырех значений коэффициента усиления  $K = 1, 1.5, 1.8, 2$  принимает вид, показанный на рис. 15 (линии 1 - 4 соответственно).

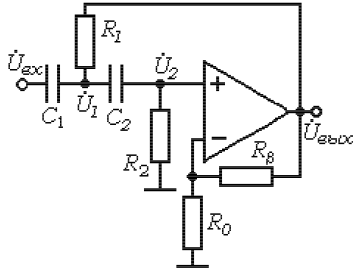


Рис. 14

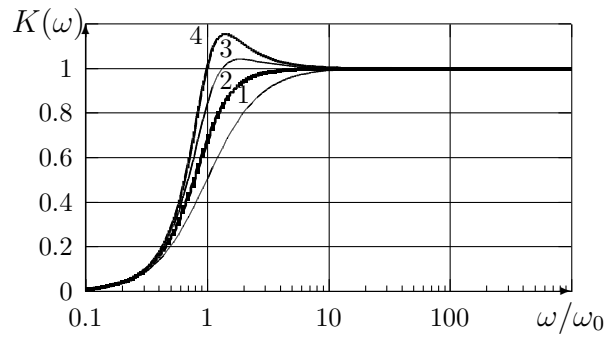


Рис. 15

## Полосовые и заграждающие RC-фильтры

*Полосовым фильтром* (ПФ) называется четырехполюсник, у которого ослабление в диапазоне частот от  $\omega_{cp1}$  до  $\omega_{cp2}$  не превышает заданного значения  $\alpha_{п}$ , а на всех других частотах – велико. Идеализированная и реальная АЧХ ПФ представлены на рис. 1,в и 1,ж.

*Заграждающим (режективным) фильтром* (ЗФ или РФ) называется четырехполюсник, у которого ослабление в диапазоне частот от 0 до  $\omega_{cp1}$  и от  $\omega_{cp2}$  до  $\infty$  не превышает заданного значения  $\alpha_{п}$ , а в полосе частот от  $\omega_{cp1}$  до  $\omega_{cp2}$  – велико. Идеализированная и реальная АЧХ ЗФ представлены на рис. 1,г и 1,з. Полосовые и заграждающие RC-фильтры создаются в виде соединений ФНЧ и ФВЧ.

Полосовые RC-фильтры, как правило, представляют каскадные соединения ФВЧ и ФНЧ (Рис. 16), а их частоты среза могут быть одинаковыми или различными. Комплексный коэффициент передачи  $\dot{K}(j\omega)$  имеет вид:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 - \omega^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2)}. \quad (12)$$

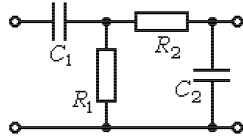


Рис. 16

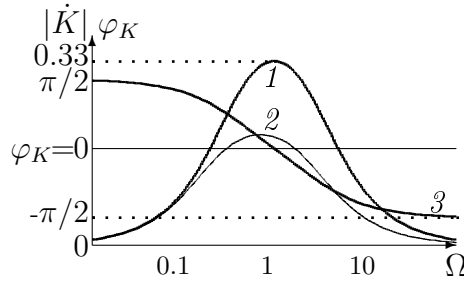


Рис. 17

Если ввести относительную частоту среза ФВЧ  $\Omega = \omega/(1/R_1 C_1) = \omega R_1 C_1$  и расстройку частот среза ФНЧ и ФВЧ  $q = R_2 C_2 / R_1 C_1$ , то уравнение (12) принимает вид

$$\dot{K}(j\Omega) = j\Omega / [1 - q\Omega^2 + j\Omega(1 + 2q)],$$

а модуль и аргумент  $\dot{K}(j\Omega)$  удовлетворяют соотношениям

$$|\dot{K}(\Omega)| = \frac{\Omega}{\sqrt{(1 - q\Omega^2)^2 + \Omega^2(1 + 2q)^2}},$$

$$\varphi_K(\Omega) = \arg \dot{K}(j\omega) = \frac{1 - q\Omega^2}{\Omega(1 + 2q)}.$$

Графики зависимостей  $|\dot{K}(\Omega)|$  и  $\varphi_K(\Omega)$  для  $q = 1$  и  $q = 2$  представлены на рис. 17. Как показывает анализ, модуль коэффициента передачи принимает максимальное значение, равное 0.33, при  $q = 1$  ( $R_1C_1 = R_2C_2$ ) на частоте  $\omega = 1/R_1C_1$  и быстро уменьшается с ростом расстройки (0.29 при  $q=1.2$  и 0.196 при  $q=2$ ). Полоса пропускания на уровне  $-3$  дБ простирается от 0.3 до 3.3  $\Omega$ , а эквивалентная добротность составляет 0.33. Полосовые  $RC$ -фильтры по своим параметрам значительно уступают  $LC$ -фильтрам и в радиоэлектронике обычно не используются, но в ARCF с помощью таких  $RC$ -цепей удастся создать резонансные системы с добротностью 25 и выше. Простые и легко настраиваемые резонансные ARCF (рис. 18) имеют базовую структуру. Резонансная частота может изменяться в небольших пределах резистором  $R_3$ .

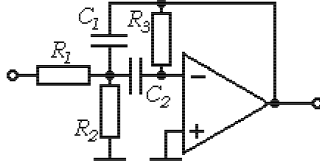


Рис. 18

Заграждающие  $RC$ -фильтры (рис. 19) тоже являются резонансными и представляют *двойные Т-мосты* – параллельные соединения Т-образных звеньев ФНЧ и ФВЧ (см. рис. 4, *a* и 11, *a*). В реальных устройствах принимается  $R_2 = R_1/2$ ,  $C_2 = 2C_1$ .

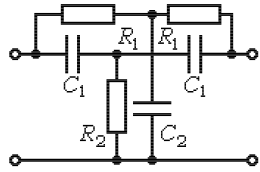


Рис. 19

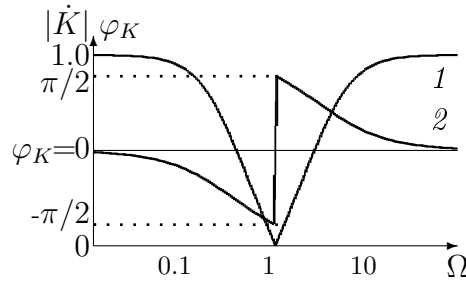


Рис. 20

Комплексный коэффициент передачи ЗФ проще всего получить методом топологических графов [2, с.127-129, 254-255]. Тогда

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1 - (\omega C_1 R_1)^2}{1 - (\omega C_1 R_1)^2 + 4j\omega C_1 R_1}.$$

На частоте  $\omega_0 = 1/R_1C_1$  коэффициент передачи фильтра обращается в нуль, т.е. составляющая с этой частотой полностью подавляется (вырезается). Вводя относительную частоту  $\Omega = \omega/\omega_0$ , получим выражения для модуля и аргумента  $\dot{K}$

$$|\dot{K}(\Omega)| = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}},$$

$$\varphi_K = \arg \dot{K}(\Omega) = -\arctg(4\Omega/(1 - \Omega^2)).$$

Результаты расчета АЧХ и ФЧХ заграждающего  $RC$ -фильтра представлены на рис. 20. Отметим, что, как и в случае заграждающего  $LC$ -фильтра, ФЧХ терпит разрыв на частоте  $\omega_0$ .

На основе двойного Т-образного моста можно изготовить ARCF по одной из рассмотренных выше схем. На рис. 21 представлен ЗФ, собранный по схеме Саллена и Ки.

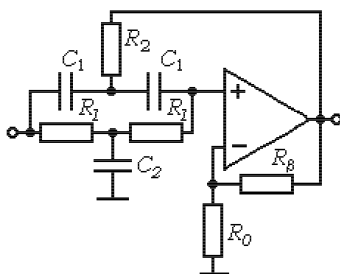


Рис. 21.

## Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой автономный блок, в котором смонтированы 3-звенный LC-фильтр 7-го порядка, 5 ARCF и блок питания усилителей активных фильтров. ФНЧ 2-го порядка собран по схеме рис. 9 ( $R_0=5.1$  кОм,  $R_\beta=R1$ , кОм). ФВЧ 2-го порядка собран по схеме рис. 14. ( $R_0=5.1$  кОм,  $R_\beta=R2$ , кОм). ПФ 2-го порядка собран по схеме рис. 18 ( $R_3=R3$ , кОм).

Электрические принципиальные схемы ФНЧ 4-го порядка и ЗФ приведены на рис. 22 и 23 соответственно. ФНЧ 4-го порядка состоит из двух расстроенных ФНЧ 2-го порядка, составленных по базовой схеме рис. 2. Частота среза 1-го ФНЧ 2.6425 кГц, а 2-го - 4.966 кГц. ЗФ для регулировки избирательности использует дополнительный ОУ, напряжение на входе которого задается потенциометром  $R_4=R4$ , кОм.

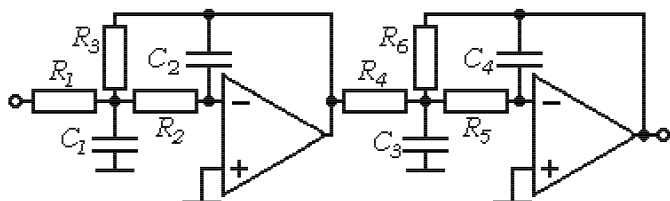


Рис. 22

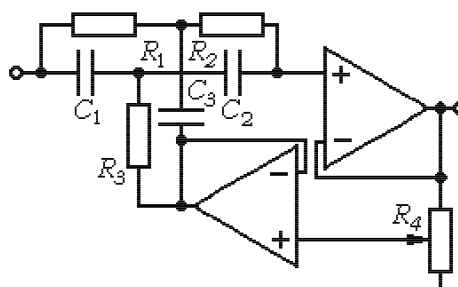


Рис. 23.

Номиналы элементов ARCF соответствуют следующей таблице:

Таблица 1

Элементы ARC-фильтров

ФНЧ	ФНЧ - 4	ФВЧ	ПФ	ЗФ
$R_1=24.5$ кОм $R_2=24.5$ кОм $C_1=1.22$ нФ $C_2=1.22$ нФ	$R_1=R_3=R_4=R_6=20$ кОм $R_2=R_5=10$ кОм $C_1=10, C_2=2$ нФ $C_3=24.3$ нФ $C_4=240$ пФ	$R_1=24.5$ кОм $R_2=24.5$ кОм $C_1=1.22$ нФ $C_2=1.22$ нФ	$R_1=3.25$ кОм $R_2=70.86$ Ом $R_3=24 \div 82$ кОм $C_1=C_2=17$ нФ	$R_1=R_2=24.5$ кОм $R_3=12.25$ кОм $C_1=C_2=1.23$ нФ $C_3=2.46$ нФ

В качестве контрольно-измерительных приборов в лабораторной рабо-

те используются функциональный генератор сигналов GFG-8210, двухканальный осциллограф GOS-6031 и два милливольтметра ВЗ-38.

На передней панели прибора расположены ручки управления кнопка "СЕТЬ" для подключения прибора к сети переменного тока, "РЕЖИМ РАБОТЫ" – кнопочный переключатель режимов работы, позволяющий выбирать

- 1 – исследование LC-фильтра,
  - 2 – исследование ФНЧ 2-го порядка (схема Саллена и Ки),
  - 3 – исследование ФНЧ 4-го порядка (базовая схема),
  - 4 – исследование ФВЧ 2-го порядка (схема Саллена и Ки),
  - 5 – исследование ПФ 2-го порядка (базовая схема),
  - 6 – исследование ЗФ 2-го порядка (схема Саллена и Ки),
- переменные сопротивления:

**R1, кОм** для регулировки коэффициента усиления ОУ в ФНЧ 2-го порядка,

**R2, кОм** для регулировки коэффициента усиления ОУ в ФВЧ 2-го порядка,

**R3, кОм** для регулировки резонансной частоты ПФ 2-го порядка,

**R4, кОм** для регулировки коэффициента усиления ОУ в ЗФ 2-го порядка, и коаксиальные разъемы:

"ВХОД: ГЕН" для подключения источника сигналов GFG-8216,

"ВХОД: МВ - ОСЦ" для подключения 1-го электронного милливольтметра ВЗ-38 или 1-го канала осциллографа GOS-6031 на вход фильтра,

"ВЫХОД: МВ" для подключения 2-го электронного милливольтметра ВЗ-38 на выход фильтра,

"ВЫХОД: ОСЦ" для подключения 2-го канала осциллографа GOS-6031 на выход фильтра.

## Порядок выполнения работы

Учитывая, что частота генератора сигналов проградуирована в герцах и килогерцах, во всех теоретических формулах следует перейти от  $\omega$  к частоте  $f = \omega/2\pi$ .

1. Для одного из ФНЧ и ФВЧ или ПФ по указанию преподавателя рассчитать при  $f = 100 \div 10000$  Гц амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтров по следующим формулам, которые предлагается вывести самостоятельно:

$$K_{\text{ФНЧ-2}}(f) = \frac{K_{\text{ОУ}}}{\left(\frac{\sqrt{1 - (0.1878f)^2}}{5}\right)^2 + \left(\frac{0.1878(3 - K_{\text{ОУ}})f}{5}\right)^2}, \quad (13)$$

$$K_{\text{ФНЧ-4}}(f) = \frac{K_{\text{ОУ}}}{\sqrt{(5 - 0.79f^2)^2 + (2.514f)^2} \sqrt{(5 - 0.23f^2)^2 + (3.016f)^2}}, \quad (14)$$

$$K_{\text{ФВЧ}}(f) = \frac{K_{\text{ОУ}}}{\sqrt{1 - (5.325/f)^2}^2 + (5.325(3 - K_{\text{ОУ}})/f)^2}, \quad (15)$$

$$K_{\text{ПФ}}(f) = \frac{32.76f}{\sqrt{(14.307/R_3 - 11.41f^2)^2 + (0.2136f/R_3)^2}}, \quad (16)$$

где  $f$  в кГц.  $K_{\text{ОУ}}=1, 1.6, 2$  или  $2.4$ , а  $R_3=24, 36$  или  $56$  кОм задаются преподавателем. Изобразить АЧХ в виде графиков  $K(f)$ .

2. Снять и построить на тех же графиках АЧХ соответствующих АРСФ. Для этого выбрать частоту, на которой рассчитанное значение  $K(f)$  достигает наибольшей величины и, изменяя выходное напряжение генератора сигналов, установить наибольшее значение выходного напряжения фильтра на этой частоте равным рассчитанному значению  $K(f)$ . Зафиксировать на первом милливольтметре соответствующее значение входного сигнала и, поддерживая его постоянным при перестройке частоты генератора сигналов, снять АЧХ фильтра. Частоту сигналов вблизи частот среза и экстремумов изменять с меньшим интервалом дискретизации.

Объяснить расхождение экспериментально снятых и рассчитанных АЧХ.

3. Провести сопоставление избирательности трех различных ФНЧ: 3-звенного  $LC$ -фильтра 7-го порядка, АРС-фильтра 4-го порядка и АРС-фильтра 2-го порядка при  $K_{ОУ} = 2$ . Для этого установить на выходе  $LC$ -фильтра напряжение  $U_{\text{ВЫХ}} = 1$  В в области пропускания ( $f = 0.1 \div 1$  кГц) и, изменяя частоту генератора сигналов, снять АЧХ фильтра. Зафиксировать частоту  $f_1$ , на которой  $U_{\text{ВЫХ}} = 0.5$  В. Построить АЧХ фильтра в виде зависимости  $U_{\text{ВЫХ}}(f/f_1)$ .

Выполнить аналогичные измерения для двух других ФНЧ и построить все три АЧХ на одном графике. Объяснить полученные результаты.

4. Установить переключатель "РЕЖИМ РАБОТЫ" в положение 4 – исследование ПФ, потенциометр **Р3, кОм** в положение 65 кОм и подключить каналы осциллографа ко входу и выходу ПФ. Настроить генератор сигналов на резонансную частоту ПФ и перевести его из режима гармонического в режим прямоугольного напряжения. Зарисовать и объяснить полученные осциллограммы.

Приложение 1

## Инвертирующие и неинвертирующие ОУ. Повторители напряжения

Стандартный ОУ имеет два входа: инвертирующий и неинвертирующий. Входной сигнал может быть подан на оба одновременно (дифференциальное включение) или только на один из них (недифференциальное включение). ООС подается только на инвертирующий вход, и возможны две схемы недифференциального включения ОУ (рис. П1:

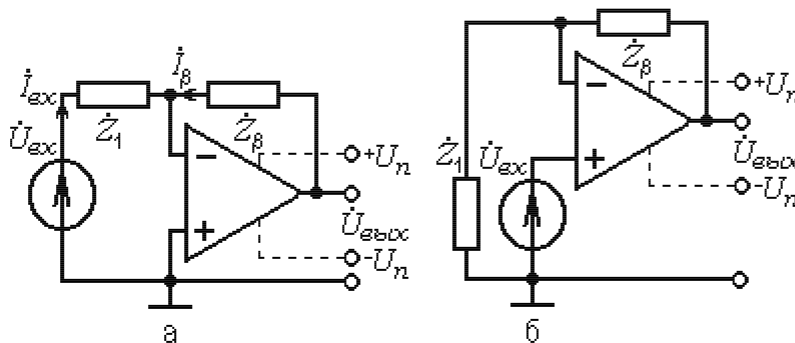


Рис. П1

1) на инвертирующий вход поступают и входной сигнал, и напряжение ОС, а неинвертирующий вход заземляется (*инвертирующее включение ОУ, рис. П1, а*);

2) на неинвертирующий вход ОУ поступает сигнал, а на инвертирующий вход - напряжение ОС (*неинвертирующее включение ОУ*, рис. П1,б).

Все стандартные ОУ без ОС обладает двумя важными свойствами, позволяющими рассчитывать их коэффициенты усиления при введении цепи ООС.

1. Входные токи ОУ ничтожно малы и при расчетах ими пренебрегают.

2. Из-за большого коэффициента усиления по напряжению даже малая разность потенциалов между входами ОУ вызывает насыщение выходного напряжения. Поэтому нормальному режиму функционирования ОУ соответствует нулевая разность потенциалов между его входами.

Совокупность этих свойств получила название *принципа виртуального замыкания* входов ОУ ("виртуальный нуль" [5]). Виртуальное замыкание в отличие от обычного объединяет короткое замыкание входов для напряжения и разомкнутость входов для тока.

**Инвертирующее включение ОУ.** Пусть неинвертирующий вход ОУ заземлен, а инвертирующий соединен с источником напряжения  $\dot{U}_{\text{вх}}$  через  $\dot{Z}_1$  и с выходом ОУ - через  $\dot{Z}_\beta$  (рис. 13,а). При этом вследствие нулевой величины входного тока незаземленного входа ОУ (виртуальное замыкание) ток источника сигнала  $\dot{I}_{\text{вх}}$  и ток цепи ОС  $\dot{I}_\beta$  равны по величине и противоположны по направлению, т.е.  $\dot{I}_{\text{вх}} = -\dot{I}_\beta$ . Выражая эти токи через напряжения  $\dot{U}_{\text{вх}}$  и  $\dot{U}_{\text{вых}}$ , получим 
$$\frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{Z}_1} = -\frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{Z}_\beta}.$$

Отсюда

$$\dot{K}_\beta = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = -\frac{\dot{Z}_\beta}{\dot{Z}_1} \quad (17)$$

Входное сопротивление инвертирующего усилителя равно  $\dot{Z}_1$ , а выходное сопротивление близко к нулю. Таким образом, ОУ в инвертирующем включении эквивалентен источнику напряжения, управляемому током. Поскольку ток  $\dot{I}_{\text{вх}}$  пропорционален входному напряжению, его можно также считать источником напряжения, управляемым напряжением.

**Неинвертирующее включение ОУ.** Пусть на неинвертирующий вход ОУ включен источник сигнала  $\dot{U}_{\text{вх}}$ , а инвертирующий вход соединен с цепью ОС, состоящей из комплексных сопротивлений  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_\beta$ . На инвертирующем входе ОУ в силу виртуальности заземления входов имеем  $\dot{U}_{\text{инв}} = \dot{U}_{\text{вх}}$ , а токи протекающие через  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_\beta$  равны по величине и совпадают по направлению. Выражая эти токи через напряжения и приравнивая друг другу, получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{Z}_1} = \dot{I}_\beta = \frac{\dot{U}_{\text{вых}} - \dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{Z}_\beta}.$$

Отсюда

$$\dot{K}_\beta = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = 1 + \frac{\dot{Z}_\beta}{\dot{Z}_1} \quad (18)$$

Входное сопротивление неинвертирующего ОУ велико, а его выходное сопротивление стремится к нулю. Неинвертирующий ОУ управляется входным напряжением и потому эквивалентен источнику напряжения, т.е. неин-

вертирующий ОУ является источником напряжения, управляемым напряжением (ИНУН).

*Повторители напряжения* являются частным случаем неинвертирующих усилителей. При  $\dot{Z}_\beta = 0$  выходной сигнал полностью поступает на инвертирующий вход ОУ, т.е. имеет место 100%-ная ООС. Коэффициент передачи усилителя в соответствии с (18) обращается в 1, и выходное напряжение повторяет входной сигнал. Глубокая параллельная ООС по напряжению обеспечивает высокое входное и низкое выходное сопротивления, и повторители напряжения на ОУ являются идеальными согласователями высокоомных источников сигнала с низкоомными нагрузками. Кроме того, отчетливо проявляются достоинства усилителей с глубокой ООС: широкая полоса пропускания, минимальный уровень нелинейных искажений и шумов.