Профессиональная подготовка педагогических кадров

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

Сборник научных трудов

Выпуск 5

Саратов: ИЦ «Наука»
2007

ББК 22.1 Р
У 92

Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научно-методических трудов: Выпуск 5. – Саратов: ИЦ «Наука», 2007. – 100 с.

ISBN 978-5-91272-223-3

Составители: С.В. Лебедева, Т.А. Капитонова

Рецензент доктор пед. наук, профессор В.И. Игошин

В сборнике представлены результаты научно-методических исследований молодых ученых, проведенные как самостоятельно, так и совместно с научными руководителями. Сборник адресован преподавателям средних и профессиональных учебных заведений, аспирантам, студентам педвузов.

ISBN 978-5-91272-223-3

ББК 22.1 р
У 92

К.В. МОХНАТКИНА

О РАЗВИТИИ ТВОРЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ СРЕДСТВАМИ ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Сейчас, как никогда ранее, в полной мере проявилась фундаментальная зависимость нашей цивилизации от тех способностей и качеств личности, которые закладываются, прежде всего, в образовании. При современных темпах обновления техники, форм организации труда, технологий нужны специалисты которые могли бы переводить получаемые знания в инновационные технологии, знать, как обеспечить доступ к глобальным источникам знаний, иметь мотивацию к обучению на протяжении всей жизни, владели бы навыками самостоятельного получения знаний и повышения квалификации, то есть специалисты, способные проявлять творческую активность в меняющихся условиях.

В то же время, анализ состояния практики обучения в средних общеобразовательных и высших учебных заведениях показывает, что целенаправленному развитию творческой активности обучаемых педагоги не уделяют достаточного внимания. Это связано, прежде всего, с тем, что как бы ни декларировались развивающие цели обучения, приоритетными являются все же дидактические цели, и именно на их достижение ориентировано большинство педагогов. Бытует мнение, что развитие творческой активности происходит параллельно получению обучаемыми определенных (предметных) знаний и умений и в отдельном стимулировании не нуждается, тем более, что характерной особенностью творческой активности, по мнению многих исследователей, является познавательная деятельность. Овладение новыми способами познавательной деятельности, открытость всему новому позволяет творческим людям более полно использовать имеющуюся в их распоряжении информацию, расширяя область поиска решения. Творческая активность связана также с гибкостью мышления, обеспечивающей свободу в переносе опыта и знаний в новые ситуации.

Среди дополнительных возможностей, которые приобретает обучаемый, участвуя в системе различных форм творческого обучения, чаще всего выделяются следующие: умение выходить за рамки содержания и форм стандартного представления учебного материала; дополнительная возможность профессиональной экспертизы своих творческих способностей и умений; возможность сравнивать свой творческий продукт с другими работами; поиск адекватной для себя творческой среды, образовательного пространства для реализации своих возможностей; возможность иметь несколько планов изучения предлагаемых или выбираемых самостоятельно курсов и методик, помогающих выстраивать свою индивидуальную образовательную траекторию.

Для развития творческой активности обучаемых необходимо организовать их познавательную деятельность таким образом, чтобы ориентировать на самостоятельное или частично-самостоятельное получение новой для них информации, самостоятельную ее обработку, презентацию и экспертизу. Основы творческого отношения к информации закладываются ещё в средней школе. Проанализируем с этой точки зрения математическое содержание среднего образования.

В содержании курса «Математика» можно выделить три основных вида информации, предлагаемых школьникам: собственно математическая информация (основы математических теорий); приложения математики в других отраслях знания (математическое моделирование) и историко-математический материал. Результаты анализа видов информации указывают на историко-математический материал как наиболее целесообразный для развития творческой активности учащихся средних школ. Результаты представлены в следующей таблице.

Характеристические особенности информации	**Виды информации (содержание)**		
	Математика	**Приложение математики**	**Историко-математический материал**
Мотивация к изучению	$\mp$	$\pm$	+
Соответствие учебному материалу	+	+	+
Наличие научно-популярной информации	+	+	+
Степень доступности к информации	$\mp$	$\pm$	+
Объем предлагаемой информации	$\pm$	$\pm$	+
Соответствие возрасту учащихся	$\pm$	$\pm$	+

Посредством включения историко-математического материала в процесс обучения математике будем формировать и целенаправленно развивать такие творческие качества школьников как 1) самостоятельное получение новой информации, 2) обработка полученной информации в соответствии с требованиями действительности (возможно, в условиях неопределенности), 3) оформление результатов (создание творческого продукта) и их презентация, 4) сравнение своего творческого продукта с работами других учащихся, 5) рефлексия.

С целью изучения мотивов и способов включения историко-математического материала в учебный процесс был проведён анализ методических материалов, размещённых на сайте [3] издательского дома «Первое сентября», и по результатам проведенного анализа сформулированы следующие выводы: 1) учителя и методисты стали чаще использовать историко-математический материал в разработках уроков и внеклассных мероприятий, что указывает на перспективность данного материала в целях обучения и развития; 2) в основном включение историко-математического материала в образовательный процесс носит фрагментарный характер и принимает форму сообщений некоторых сведений из истории математики;

3) целенаправленность работы учителей с историко-математическим материалом не наблюдается; 4) основная цель включения историко-математического материала – расширение кругозора учащихся; развивающие цели не ставятся и не решаются; 5) проблема развития творческой активности учащихся посредством использования историко-математического материала не формулируется и не решается.

Включение историко-математического материала в содержание учебных предметов образовательной области «математика» преследует различные цели: от создания непринужденной атмосферы урока до глубокого изучения истории открытия математических фактов, осознания теорий и пр. Достижению каждой цели служит специальным образом отобранный математический материал. Для достижения цели, определяемой как развитие творческой активности, необходим историко-математический материал, соответствующий основной дидактической (познавательной) цели, характеризующей тот или иной этап изучения математики в средней школе. Следующая таблица дает представление о соответствии историко-математического материала учебному материалу первостепенной важности для каждого этапа (года) обучения.

Этап (год) обучения	**Учебный материал**	**Соответствующий историко-математический материал**
5 класс	Десятичные дроби	Становление понятия числа
6 класс	Рациональные числа	Рациональные числа
7 класс	Многочлены, преобразование многочленов	Становление классической алгебры
	Функции	Декарт: геометрические кривые и алгебраические функции.
	Планиметрия	Становление геометрии: от Евклида до наших дней
8 класс	Квадратные уравнения	Геометры-алгебраисты. Великие алгебраисты
	Планиметрия	Изучение свойств плоских фигур
9 класс	Последовательности	Последовательности.
	Планиметрия	Вписанные и описанные фигуры
10 класс	Дифференцирование	Предел: становление понятия
	Тригонометрия	Становление и развитие тригонометрии
	Стереометрия	Становление и развитие аналитической геометрии
11 класс	Интегрирование	Интегральный подход и развитие анализа
	Стереометрия	Методы и приемы измерения длин, углов, площадей и объемов.

Темы, которые заявлены в третьем столбце таблицы тем или иным образом пересекаются (включают в себя) с остальными темами соответствующей математической дисциплины того или иного этапа (года) обучения. Так, например, историко-математический материал по теме «Методы и приемы измерения длин, углов, площадей и объемов» естественным образом связан с историей исследования многогранников и тел вращения, их сечений. Здесь же уместно рассматривать различные конфигурации тел, в том числе, вписанные и описанные тела. Одновременно с этим полезно изучить биографии ученых и основные этапы их творческой деятельности; таким образом, учащиеся узнают много интересного из жизни ученых.

Принимая во внимание роль историко-математического материала в формировании и развитии творческой активности учащихся средних школ, необходимо рассмотреть возможности историко-математического материла в развитии творческой активности студентов механико-математического факультета, приобретающих в ходе обучения в вузе квалификацию учителя математики.

Проводить исследование этого вопроса надлежит по двум направлениям. Первое связано со специфическими особенностями собственно историко-математического материла и подобно исследованию аналогичной проблемы в условиях средней школы, результаты которого были кратко описаны выше. Второе направление определяется необходимостью обучения будущих учителей математики методике организации изучения историко-математического материала в средней школе. Здесь на первый план выступает проблема научно-исследовательской деятельности студентов по вопросам связи историко-математических фактов и соответствующего учебного материала математического содержания общеобразовательного курса средней школы. Эта проблема формулируется следующим образом: как организовать исследовательскую деятельность студентов по обозначенной тематике при условии, что курс «История математики» читается в последнем 10 семестре [2], когда приоритетной для каждого студента становится проблема дипломного исследования?

Одно из возможных решений проблемы мы видим в обязательном освещении в историческом аспекте темы курсовой работы (2 семестр) по элементарной математике [1], а также проведение соответствующего исследования с последующей апробацией выдвигаемых гипотез в ходе производственной (педагогической) практики по основной (8 семестр) и дополнительной (9 семестр) специальностям (с обязательным включением полученных результатов в отчёт по педагогической практике).

В целом организацию изучения историко-математического материала в контексте развития творческой активности обучаемых необходимо выстраивать на основе принципов структуризации историко-математического материала, планируемости, включенности обучаемых в проектную деятельность, регулярности, дифференцированного подхода и учета (развития) достижений в контексте развития творческой активности учащихся.

Литература

1. *Капитонова Т.А., Кондаурова И.К., Лебедева С.В.* Элементарная математика: учебное пособие для студентов мат.спец.пед.учебн.заведений и учителей математики. – Саратов: Научная книга, 2004.
2. *Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования.* Специальность 032100.00 Математика с дополнительной специальностью. – М., 2000.
3. www.1september.ru

Н.А. ТЕРНОВАЯ

ДИАЛОГ КАК ФОРМА СУБЪЕКТ – СУБЪЕКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Существует тесная взаимосвязь развития математических способностей студентов и предпочтения ими диалогических форм учебного взаимодействия. Более того, наличие диалога как формы субъект-субъектного взаимодействия преподавателя и студентов являются одним из принципов проектирования и эффективного функционирования технологии развития математических способностей. Подобное использование диалога предполагает методический и педагогический анализ этого явления.

Существуют два основных типа коммуникации – *диалог* и *монолог*. В самом общем виде первый представляет собой взаимонаправленную информационную связь коммуникатов в отличие от однонаправленной связи, характеризующей монолог (Н.Ю.Посталюк).

Диалог давно привлекал к себе внимание исследователей и практиков. Известны беседы и диалоги Сократа, Платона, Галилея, фундаментальная теория диалога Г.Я.Буша. Для нашей технологии принципиальную важность представляет социокультурная концепция диалога М.М.Бахтина, в частности, следующие два ее положения. Первое заключается в том, что существенный диалог может быть реализован только при наличии диалогических отношений, то есть несовпадающих смысловых позиций по поводу некоторого объекта. Не развивая эту идею подробно, отметим, что впоследствии на ее основе возникло определение диалога как такой формы субъект – субъектного взаимодействия, при которой различные смысловые позиции развиваются разными говорящими (внешний диалог) или одним говорящим (внутренний диалог). Соответственно, монолог можно характеризовать наличием одной смысловой позиции.

Наличие коммуникативной ситуации, характеризующейся присутствием коммуникатов и объекта их внимания, недостаточно для возникновения диалога. Существует содержание высказывания и отношение к нему. Встать в диалогическую позицию – это значит высказать не только саму предметную мысль, но и как-то к ней отнестись. Это второе, важное для нас положение рассматриваемой концепции. По мысли М.М.Бахтина, условие диалога – наличие некоторых объективных суждений об объекте в единстве с оценочным личностным отношением к нему. То есть внешний диалог возникает, когда несколько субъекта обмениваются информацией оценочного характера по поводу некоторого объекта, значимого для них обоих, и на основе этой информации вступают в отношения друг с другом.

Проблема диалога как формы мыследеятельности заметно актуализируется на современном этапе развития научной мысли. Такое положение дел является следствием явного дефицита диалога в жизни общества. В мире сейчас больше миллиарда источников информации, причем по оценкам У.Р.Эшби, 85 % из них носят ярко выраженный односторонний характер (радио, телевидение, печать и т.д.). Человек не в состоянии ответить на информацию, обсудить ее. Это воздействует на психику, видоизменяет эмоциональные реакции, отучая от диалога, от сосредоточенности и размышления.

Сейчас можно считать доказанным тот факт, что диалог – основа творческого мышления, что развитие диалектичности как системообразующего компонента творческого мышления невозможно без диалога (Л.С.Выготский В.С.Библер и др.). Значит логично предположить, что диалог оказывает влияние и на развитие отдельных составляющих математических способностей.

В каких же формах может осуществляться диалог? С позиций представленности коммуникатов можно выделить *непосредственную дискуссию* (субъекты диалога существуют одновременно и в одном пространстве) и *опосредованную дискуссию* (субъекты разделены во времени и пространстве). Поскольку в данном случае коммуникаты – реальны, это внешний диалог. Внутренний диалог, как показал Г.М.Кучинский, бывает явным и скрытым. Однако и в том, и в другом случае в речи человека присутствуют и взаимодействуют различные смысловые позиции.

Если анализировать диалог с точки зрения соотношения взаимодействующих в нем содержаний («носителем» которых может быть один человек или несколько участников), то выделяются диалектический диалог, полемика, а также различные промежуточные между ними формы.

Рассматривая диалектический диалог, Б.А.Ерунов отмечает, что он характеризуется тремя условиями: 1) участники такого диалога обладают мировоззренческой и идейной общностью, 2) у них разные точки зрения на проблемный предмет, 3) участники диалога, развивая собственные позиции, осуществляют это за счет мнений других (взаимообогащение, взаимоотражение позиций). Полемика же характеризуется единственным стремлением: убедить во что бы то ни стало в своей правоте и опровергнуть «противника». Позиции сторон в данном случае непримиримы, разведены до противостояния, и диалектический синтез мнений неосуществим. Диалектический диалог и полемика в таком понимании предстают как две «полярные» формы диалога, взаимодействие смысловых позиций в которых завершается отрицанием одной из них или диалектическим снятием оппозиции в некотором третьем содержании.

Не претендуя на глубокий философский анализ проблемы, сузим рамки обсуждения до собственно педагогического аспекта. В таком ракурсе особенно значимыми становятся вопросы, связанные с соотношением внутреннего диалога и развитием математических способностей, внутреннего и внешнего диалога, педагогических условий их стимулирования. Весьма ценным для организации педагогического процесса представляется фундаментальный вывод психологов о внутреннем диалоге как обязательном компоненте творческого мышления, о том, что внутренний диалог неразрывно связан с процессом общения человека с человеком. Пожалуй, первым осмыслил роль диалога в развитии нестандартного, самостоятельного мышления А.М.Матюшкин, который утверждал, что «…развитие познавательной активности осуществляется не как обучение приемам решения задач, а как воспитание творческого мышления в условиях дидактически организованного диалога в ситуациях группового мышления».

Ученые МГУ доказали высокую эффективность занятий в форме дискуссии с точки зрения усвоения знаний и развития познавательной мотивации. А.У.Хараш (совместно с Л.И.Подлесной) экспериментально подтвердили высокую побудительную силу дискуссии в работе с инженерно-техническим персоналом по формированию психологической готовности к нововведениям. Теоретическое обоснование влияния диалогических отношений в условиях социально-психологического тренинга на развитие коммуникативной компетенции и общей психологической культуры участников представлено в работах Л.А.Петровской. Становление логического мышления в диалоге исследовала Т.С.Кудрина, которой удалось экспериментально доказать, что диалогические отношения – обязательное условие развития логических операций. Такая важная функция диалога как его способность порождать интерес, мотивацию многократно подтверждена экспериментально в зарубежной социальной психологии, например, в цикле работ К.Левина.

Из вышеизложенного следует: элементарной технологической единицей образовательного процесса, ориентированного на развитие математических способностей студентов, выступает диалог как специфическая форма обмена духовно-личностными потенциалами, как способ согласованного взаиморазвития всовместной деятельности педагога и студентов. Под диалогом понимается определенная коммуникативная среда, заключающая в себе механизм становления и самообоснования личности в условиях множественности культур (В.В.Сериков). Развитие личности в этом случае (а значит и развитие ее способностей) – своеобразная интериоризация диалога, поскольку «сформировать свою точку зрения невозможно, не воспроизведя в ней иные способы понимания» (С.Ю. Курганов).

Диалогическая форма учебного взаимодействия строится на учете суверенитета чужой деятельности и чужого сознания. Преподаватель диалогически включается в сознание студента, отнюдь не стремясь занять в нем место диктатора или законодателя, он с самого начала является его собеседником, который не просто признает право своего партнера по общению на собственное мнение, а заинтересован в том, чтобы его партнер сохранил самостоятельность в суждениях.

Таким образом, в ракурсе нашего исследования педагог выступает как консультант, организатор среды обучения и развития математических способностей, как своеобразный посредник между студентом и социальным опытом в форме культуры. При этом важно отметить, что решающее влияние на студента осуществляется не через информацию, слово педагога, а через его личность. Одновременно с изменением психологической позиции преподавателя происходит и смена статуса студента. Последний выступает как докладчик, эрудит, оппонент в споре, проблематизатор, «генератор идей», критик, рецензент, одним словом, позиция «ученичества» заменяется позицией «партнерства».

Т.В. КУЧМИЙ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СЕТЕВЫХ СООБЩЕСТВ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ПЕДАГОГОВ

Интерес к новым формам организации обучения связан с тем, что окружающий нас мир меняется все быстрее, и сами принципы обучения подвергаются серьезному переосмыслению. Школы создавались в информационно бедном обществе, с тем, чтобы дать детям доступ к информации через книги и рассказы учителя. Уже в середине XX века эту информационную функцию взяли на себе другие информационные каналы, расположенные вне школы (радио, телевидение), и между школой и обществом возник информационный разрыв.

Обучение все чаще рассматривается как активный процесс выдвижения и проверки собственных гипотез о мире, как важнейшая адаптивная функция человека и человечества, которая помогала ему выжить, и может обеспечить его успешное существование в столь быстро изменяющемся мире. С этой точки зрения пространство образования и обучения оказывается значительно шире, чем рамки формальных учебных заведений. Обучение происходит в самых разных местах и ситуациях, оно не ограничивается временем, проведенным в учебных аудиториях. Такое прочтение ситуации, с одной стороны, позволяет увидеть огромный потенциал научных и культурных центров, который ранее не воспринимался как образовательный. С другой стороны, такое прочтение позволяет увидеть ту огромную ответственность, которая лежит на современном образовании, клиентами которого становятся все жители нашей планеты.

Школы и ВУЗы могут и должны выступить как городские и региональные центры образовательных сообществ, поддерживая обучение не только молодых, но и старых учеников.

Очевидно, что добиться построения системы обучения, которая бы обеспечивала всем желающим в любой период их жизни и в наиболее удобное для них время доступ к имеющимся образовательным ресурсам, только силами и средствами формальных учебных заведений, абсолютно не реально ни в одной стране мира. Решение такой задачи возможно только при объединении всех лиц, заинтересованных в развитии образования. Это глобальное объединение реально осуществить только на базе сетевых коммуникаций.

Педагогика сетевых сообществ развивается в тесной связи с сетью Интернет и напрямую зависит от состояния и концепций развития Всемирной Паутины. Современная концепция развития паутины получила название Веб 2.0

Веб 2.0 (Web 2.0) – второе поколение сетевых сервисов, действующих в Интернете.

Веб 2.0 с педагогической точки зрения:

1. Возможность пользователям сам наполнять сайты содержимым. Пользователи сами могут добавлять к сетевому контенту дневники, статьи, фотографии, аудио и видео записи, оставлять свои комментарии, формировать дизайн своих страниц.

2. Постоянные ссылки на опубликованные материалы. Малоприметная, но очень важная особенность, благодаря которой существенно возрастает значение каждого действия и каждого слова, опубликованного в сети. Теперь мы всегда можем вернуться и посмотреть на действия, которые человек совершал в прошлом. У учебного сообщества появляется возможность отслеживать индивидуальные и групповые истории поведения.

3. Метки как средство решения классификационных задач. К каждой закладке ее владелец может добавить название, краткое описание и ключевые слова, метки-категории облегчающие процесс дальнейшего поиска. Использование меток обеспечивает возможность фолксономии – народной классификации. Термин используется как противоположность таксономии – научной классификации. Благодаря цифровой революции мы обнаружили, что традиционная иерархия знаний, которая так успешно служила нам раньше, не работает так же успешно в мире цифровых технологий. Теперь наступает трудный период освоение новых способов неиерархического построения документов, классификаций и самого знания. Народная классификация делается и творится людьми - всеми нами.

4. Визуализация динамических отношений, которые существуют между участниками сетевых сообществ, категориями статей, отдельными статьями, фотографиями, рисунками и медиа-объектами. Благодаря визуальным сервисам мы можем понимать и показывать своим ученикам отношения между серверами, статьями и даже мыслительными категориями.

Современные сетевые средства открывают перед нами возможность и требуют от нас постоянно практиковаться в классификации. Кроме того, сетевые сервисы позволяют наблюдать и анализировать то, как другие люди и группы людей классифицируют объекты, с которыми они работают в сети. Нам не нужно задавать людям вопросы и просить их выразить свое отношение к тому или иному понятию, тому или иному человеку. Всякий раз, когда пользователь современных социальных сервисов размещает в сети информационный объект (закладку, сообщение, фотографию, видео или аудиозапись), система предлагает ему пометить этот объект одной или несколькими метками. Постоянные простые движения, которые они совершают, новые кирпичики знаний и метки, которыми они их отмечают, создают в обучении благоприятную среду для вовлечения студентов и школьников в поисковую и исследовательскую деятельность нового типа, когда учеба, поиск, написание текстов и классификация различных цифровых объектов описание текста суть единая повседневная деятельность.

Внедрение информационных и телекоммуникационных технологий (ИКТ) в учебный процесс требует от преподавателя изменения стиля работы и организации труда, приобретения новых навыков педагогической деятельности.

Поэтому современная система подготовки кадров новой формации должна включать наряду с высокой профессиональной подготовкой в предметной сфере освоение специфических знаний в области информационных технологий, формирование базовой ИКТ-компетентности, что в классификации ключевых компетенций личности, подразумевает использование мультимедийных технологий для извлечения, хранения, создания, презентации, классификации информации и обмена информацией.

Возможности использования социальных сервисов Web 2.0 в решении профессиональных задач учителя отражены в следующей таблице.

Идеи	**Решения**	**Риски**
Использование социальных сервисов Web 2.0 для организации и сопровождения Программы в рамках очного обучения	Разработка методического сопровождения и дидактических материалов для базового курса	Будут охвачены не все стороны использования социальных сервисов, методического обеспечения окажется недостаточно
Использование социальных сервисов Web 2.0 для организации дистанционного обучения и сопровождения	Разработка и организация сопровождения для дистанционного курса	▪ Недостаточность методологической и технологической подготовки преподавателей; ▪ нечеткость нормативно-правовой базы; недостаточность мотивации
Организация послекурсовой деятельности педагогов с использованием социальных сервисов Web 2.0	▪ Сетевые конкурсы для педагогов и учащихся; ▪ тематические форумы по актуальным проблемам сетевого межрегионального взаимодействия	Отсутствие финансирования со стороны региональных образовательных структур
Использование социальных сервисов Web 2.0 для обмена опытом и формирования сетевых профессиональных сообществ	Создание открытых интерактивных телекоммуникационных ресурсов по опыту использования в педагогической практике	• Недостаточная стабильность работы активного телекоммуникационного оборудования и каналов связи, • информационная безопасность

Литература

1. *Круглый стол* Новые возможности развития программы сетевые социальные сервисы Web 2_0_ (Псков 2007) — Letopisi_Ru.htm

2. *Патаракин Е. Д.* (2002) Вклад сетевых сообществ в образование. Электронные библиотеки - Том 5 - Выпуск 3 (http://www.elbib.ru/journal/2002/200203/patarakin/patarakin.ru.html)

3. *Патаракин Е.Д.* (2003) Использование цифровых коллекций в учебных коммуникациях. Educational technology & Society - - V. 6 -N 2.- с.133-144. –

4. *Патаракин Е.Д.* Формы сетевого сотрудничества - Educational Technology & Society 7 (2) 2004, pp. 236-246

О.М. КУЛИБАБА, Е.А. СИДОРОВА

МЕТОД ПРОЕКТОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Взяв в руки практически любой педагогический журнал, можно найти там различные формулировки основной задачи образования – воспитать человека, способного стать успешным в условиях современного, быстро меняющегося мира. А как это сделать? Этот вопрос каждый учитель решает сам, учитывая как свои личные возможности и потребности, так и возможности и потребности своих учеников. Если мы хотим воспитать послушных исполнителей, то вполне достаточно средств обучения, которые позволяли бы жестко регламентировать и дозировать информацию для ученика, а потом ее контролировать. Наверное, некоторые могут быть успешными, в силу своих психологических особенностей, именно в качестве исполнителей, грамотно и четко выполняя свою работу. Если же кроме исполнителя, мы хотим воспитать человека самостоятельно творчески мыслящего, умеющего находить и рационально решать проблемы, нам потребуются другие средства обучения, методологические и педагогические приемы. Здесь необходимо каждому ученику дать шанс попробовать свои силы в разных областях деятельности и в различных социальных ролях.

Одним из вариантов реализации выше сказанного является использование в процессе обучения проектной деятельности учащихся. Проектные методы образования становятся все более популярными. Это вызвано тем, что проект – это такая открытая и динамичная форма организации и учебной деятельности учащегося, и педагогической деятельности учителя, которая предполагает их выбор и творческие решения. Эти возможности не может в полной мере обеспечить традиционный урок. Тем не менее, метод проектов имеет и негативные стороны. Отразим все «за» и «против» проектной деятельности в следующей таблице:

Проектная деятельность учащихся	
Достоинства	**Недостатки**
▪ позволяет проявить мотивированный интерес к тому, что ученик выбрал в качестве предмета изучения ▪ позволяет ученику выработать и отстаивать собственную позицию, развивая критичность мышления ▪ позволяет самостоятельно выработать собственную систему взглядов ▪ продуктом образования является самостоятельная, отрефлексированная, обобщающая деятельность, в которой учащийся показывает свои универсальные умения в достижении сложного результата, охватывающего те или иные знания и опыт комплексно ▪ выполняя коллективные проекты, учащиеся приобретают опыт социального взаимодействия в творческом коллективе единомышленников, формируют собственное представление о принципах сотрудничества	▪ не дает гарантию того, что все дети усвоят некий общий объем отобранной информации ▪ проектное образование организовать труднее (и для ученика, и для педагога), чем классно-урочную систему образования ▪ знания не являются систематическими ▪ существует опасность переоценить результат проекта и недооценить его процесс

Исходя из приведенных выше доводов, можно сделать вывод, что наиболее рациональным является использование метода проектов наряду с традиционными методами обучения – не в качестве метода, заменяющего сложившуюся систему, а в качестве дополняющего ее элемента в организации самостоятельной работы ученика в развитой информационной среде.

Проектная форма организации деятельности школьника предусматривает, во-первых, предварительную подготовку учителя к организации проектной деятельности школьников, во-вторых, непосредственное выполнение детьми учебного проекта. Кроме того, проектная форма должна включать в себя две основные составляющие: наличие большой доли исходной аналитической информации и реализацию собственной модели исходной информационной задачи.

Соединение двух компонент, общих принципов формирования проекта с вариативностью (развитие авторской идеи, выдвигаемой на основе анализа конкретной ситуации) позволяет использовать исходные информационные задачи (темы проектов) многократно. Такой подход диктуется стремлением современной школы к развитию личности и интеллекта школьника в такой степени, чтобы выпускник школы был способен не только самостоятельно находить и усваивать ранее сгенерированную и обработанную информацию, но и сам генерировать новые идеи. Таким образом, метод проектов может использоваться как на пропедевтическом этапе обучения, так и в старших звеньях средней школы.

Учащимся 5-6 классов можно, например, предложить работу над проектом «Занимательная математика». Определим типологию данного проекта:

– *по доминирующей в проекте деятельности учащихся* – это творческо-поисковый проект;

– *по предметно-содержательной области* – межпредметный проект, реализующий интеграцию, по крайней мере, двух предметных областей «математика» и «информатика», и дополняющий интеграционную область историко-математической информацией;

– *по уровню сложности* – творческий, то есть предполагающий самостоятельное осуществление всех этапов проектной деятельности, включая поиск и переработку новой информации, с последующим творческим отчётом;

– *по степени самостоятельности* – выполняется совместно с другими учащимися без вмешательства учителя;

– *по количеству участников* – желательно, чтобы на этом этапе обучения и по данной теме проект был групповым;

– *по продолжительности выполнения* – краткосрочный (неделя) проект: наиболее оптимальный для учащихся данного возраста;

Техническим обеспечением проекта являются: текстовый редактор Microsoft Word, стандартное приложение Windows – программа Paint; программа Microsoft PowerPoint; фото- и видеокамера.

Сформулируем основные задачи проекта «Занимательная математика»:

– ознакомление с биографиями великих математиков;

– закрепление навыков работы в Microsoft PowerPoint, закрепление навыков работы в текстовом редакторе, графическом редакторе;

– изготовление средств обучения, которые можно использовать на уроках математики;

– развитие и поддержание интереса к обучению;

– развитие творческих способностей учащихся;

– развитие логического мышления;

– воспитание навыков сотрудничества и взаимодействия в небольшом творческом коллективе, развитие коммуникативных качеств;

– развитие умения анализировать собственную деятельность и деятельность других разработчиков проекта.

Предлагая учащимся участвовать в проектной деятельности, педагог формулирует для них следующие цели и задачи:

1) Цель – разработать средства обучения, которые можно было бы использовать в процессе изучения математике.

2) Подготовить сообщение в печатном виде о любом великом математике древности из предложенного списка: Евклид, Архимед, Л.Эйлер, Р.Декарт, И.Ньютон, Г.Лейбниц, П.Ферма, Г.Кантор, И.Бернулли и др.

3) Создать презентацию с фотографиями из жизни выбранного ученого.

4) Найти или придумать занимательные математические задачи юмористического характера (задачки с подвохом). Например:

а) Шли два отца и два сына. Нашли три апельсина. Стали делить – всем по одному досталось. Как это могло быть? //Это были дед, его сын и внук

б) Знаете ли Вы, чему равны: один в квадрате; десять в квадрате; угол в квадрате? // 1, 100, 90^o

в) Одно яйцо варится 3 минуты. Сколько минут потребуется, чтобы сварить 5 яиц? // 3 минуты

5) Подобрать занимательные задачи, требующие некоторого времени на обдумывание. Например: ***Путешественник, сняв в гостинице номер на неделю, предложил хозяину в уплату цепочку из семи серебряных колец – по кольцу за день, с тем, однако, условием, что будет рассчитываться ежедневно. Хозяин согласился, оговорив со своей стороны, что можно распилить только одно кольцо. Как путешественнику удалось расплатиться с хозяином гостиницы?*** Проиллюстрировать задачи (создать наглядный материал), оформить в виде картотеки.

Весь процесс работы над проектом можно условно разбить на следующие этапы.

Этап 1 (предварительный). Регистрация

Регистрация – первый официальный этап проектной деятельности, который проводится в назначенное время, и результаты которого фиксируется руководителем проекта. На этом этапе проходит важная педагогическая (организационная) работа: класс разбивается на группы (в нашем случае, целесообразно разбить учащихся на три группы), выбираются темы, ставится цель, формулируются задачи. При этом соблюдаются главные педагогические принципы: учесть интересы школьников, подобрать каждому посильную задачу, способствующую развитию и становлению личности. Каждая группа создает свою проектную папку (портфолио проекта), в которую будет складывать все информационные материалы, паспорт проекта, график сдачи работ, промежуточные отчеты, эскизы, наброски, то есть все рабочие материалы.

Этап 2. Осмысление

Осмысление – условный этап, характеризуемый следующими условиями (действиями со стороны учащихся): группа, получившая задание, уточняет задачу, обсуждает пути решения, уточняет требования к конечному продукту, консультируется с преподавателями, распределяет ролевые функции между участниками группы, разрабатывает структуру проектной работы, определяются сроки и виды промежуточного и итогового контроля.

Каждой группе выдается бланк паспорта проекта, который разработан для облегчения планирования в ходе работы над первым проектом. В последующих проектах эта форма несколько изменяется, отражая структуру конечного продукта. Паспорт проекта становится первым документом в проектной папке, причем он является рабочим документом, который заполняется два раза (минимум): при планировании (начальный вариант) и ближе к концу работы (то, что реализовано)

Этап 3. Работа над проектом (разработка проекта)

На этапе разработки проекта основными формами деятельности являются подбор материала, создание презентаций и других средств обучения (карточки) на уровне макета. Ученики углубляют свои знания по математике, ищут новые источники информации: книги, учебники, энциклопедии, тематические компьютерные диски, используют Интернет; одновременно приобретают навыки в использовании компьютерных технологий, осваивают приемы работы со сканером, принтером, с фото- и видеокамерами. Ученики используют все знания, которые они получили на уроках.

Проектные материалы учащиеся сортируют (по степени значимости, уровню проработки и пр.) и складывают в проектную папку.

Учитель консультирует учащихся по мере необходимости, контролирует степень сложности задачи для каждого, рекомендует литературу для самостоятельных занятий, направляет самостоятельную работу школьников, проверяет (наполняемость и степень систематизации материалов) портфолио каждой группы.

Этап 4. Защита проекта

Защита проекта проводится в виде игры, на которую приглашают учителей, учащихся других классов, родителей, администрацию и пр. Приглашение слушателей преследует две цели: образовательную (повышение мотивации к овладению компьютерными технологиями, к саморазвитию и самообразованию) и воспитательную.

Игра состоит из трех туров. В первом туре от каждой команды выходит один участник и рассказывает о жизни и трудах математика. Одновременно с этим идет показ слайдов (слайд-презентация). Две другие команды внимательно слушают, по ходу презентации записывают возникающие вопросы, а по окончании выступления задают вопросы, комментируют доклад и дополняют его. Все выступления, вопросы и дополнения оценивают члены жюри (например, учащиеся старших классов).

Второй тур – блиц-турнир. Каждая команда по очереди задает юмористические вопросы другим командам. Время на обсуждение практически не дается. Учитывается быстрота и правильность и полнота ответов.

Третий тур – тур занимательных задач. Каждая команда решает задачи (оформленные в виде карточек) своих соперников. На решение каждой задачи отводится определенное время. Оценка правильности решения в этом туре – двойная: со стороны команды, предлагающей задачу, и со стороны жюри.

После завершения игры жюри подводит итоги, и председатель жюри объявляет команду-победителя. Этому посвящён заключительный пятый этап работы.

Этап 5. Анализ проектной работы

Этот этап является самым важным, так как позволяет подвести итоги, обсудить вместе с детьми сильные и слабые стороны каждого проекта, что хотелось, что удалось, а что осталось нереализованным, что помешало исполнению планов, объективные и субъективные причины, что надо учесть в следующих проектах, предложения и пожелания, положительное или отрицательное отношение к проекту, планы на будущее.

Продуктом проектной деятельности являются электронные пособия (слайд-презентации) с биографиями математиков и средства обучения – раздаточный материал (карточки).

Укажем на необходимое условие формирование групп для работы над проектом «Занимательная математика»: группу должны составлять учащиеся одного уровня подготовки, а задания распределять равномерно между членами группы. Если данное условие не может быть выполнено в силу объективных причин, и в группу входят учащиеся с разными способностями, то можно распределять задания дифференцированно: наиболее подготовленные по предмету учащиеся собирают, обрабатывают информацию, делают заготовку страниц электронного пособия, в которые останется ввести только текст; менее подготовленным можно поручить набор готовой информации в текстовом редакторе и заполнять страницы учебника, используя созданные заготовки.

Все результаты поэтапной деятельности фиксируются и оцениваются преподавателем с учетом вклада в работу каждого члена группы.

На современном этапе развития методом проектов занимаются многие научные деятели; данные по нему систематизируются, обобщаются и постоянно обновляются. И потому нет никаких препятствий на пути учителя к созданию авторских проектов и реализации проектной деятельности в своей школе. Для этого необходимо следовать основным требованиям, предъявляемым к учебным проектам:

– *проблема* проекта должна быть *социально-значимой* – исследовательской, информационной, практической, заказанной внешним заказчиком;

– *планирование* проекта – определение вида продукта и формы презентации; пооперационная разработка проекта, с указанием сроков и ответственных;

– *поиск* информации – исследовательская работа учащихся как обязательное условие проекта;

– *продукт* является конкретным *результатом* проекта. Возможные результаты проектной деятельности: альбом, анализ данных социологического опроса, бизнес-план, видеоклип, видеофильм, выставка, газета, гербарий, журнал и др.;

– *презентация продукта* и *защита* самого проекта;

– *портфолио* проекта – папка, в которой собраны все рабочие материалы (черновики, отчеты, планы, результаты исследований и анализа, материалы к презентации и т.п.);

– наличие конкретного продукта на каждом этапе работы над проектом.

При использовании метода проектов также целесообразно учитывать ряд условий.

1) Учащимся следует предоставить достаточно широкий набор проектов для реализации возможности реального выбора. Следует отметить, что проекты могут быть как индивидуальными, так и коллективными. Последние, помимо прочего способствуют освоению учеником коллективных способов работы.

2) Поскольку школьник не владеет проектным способом работы, он должен быть снабжен инструкцией по работе над проектом. При этом важно учитывать индивидуальные способности разных школьников (одни лучше усваивают материал, читая текст, другие – слушая объяснения, третьи – непосредственно пробуя, ошибаясь и находя решения в процессе практической работы).

3) Для ребенка важна практическая значимость полученного им результата и оценка со стороны окружающих. Поэтому учебный проект должен предполагать для исполнителя законченность и целостность проделанной им работы, желательно в игровой или имитационной форме. Очень важно, чтобы завершенный проект был презентирован и получил внимание взрослых и сверстников.

4) Как показывает практика, следует создать условия, при которых школьники имеют возможность обсуждать друг с другом свои успехи и неудачи. При этом происходит взаимообучение, что полезно как для обучаемого, так и для обучающего.

5) Необходимо обладать желанием воспитать из своих учеников творчески мыслящих личностей.

Литература

1. *Буланова-Топоркова М.В., Духавнева А.В., Кукушин В.С., Сучков Г.В.* Педагогические технологии: учебное пособие для студентов пед. специальностей. М.: ИКЦ «МарТ»: – Ростов н/Д: изд. центр «МарТ», 2006

2. *Коджаспирова Г.М.* Педагогика в схемах, таблицах и опорных конспектах. Уч. пособие для ВУЗов. М. 2006

3. *Крылова Н.Б.* Проектные (продуктивные) методы против классно-урочной организации образования// Школьные технологии, №5, 2004. С. 59-63

4. *Малясова С.В.* Творческий проект – от идеи до разработки // Информатика и образование, № 9, 2005. С. 11 – 19

Р.Н. ЖАБИНА

РАЗВИТИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ 5 КЛАССА

Одной из особенностей математики является алгоритмичность решения многих её задач. Алгоритмом, как известно, называется определённое указание относительно того, какие операции и в какой последовательности надо выполнить, чтобы решить задачу определённого типа.

Обучение математике на любом уровне обязательно включает обучение алгоритмам. Алгоритмический подход – это обучение учащихся какому-либо общему методу решения посредством алгоритма, выражающего этот метод.

Умение формулировать и применять алгоритмы важно не только для развития математического мышления и математических умений, оно означает также и умение формулировать и выполнять правила.

Процесс решения задачи состоит из следующих этапов. В начале нужно разобраться в том, что за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования, то есть провести анализ. В ряде случаев этот анализ надо как-то зафиксировать, записать для того используют разного рода схематические записи задач. Анализ задачи и построение ее схематической записи необходим для того, чтобы найти решение данной задачи. Когда способ решения найден, его нужно осуществить. После того, как решение осуществлено и изложено, полагается убедиться в том, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи. Для этого производится проверка решения. Кроме проверки во многих задачах необходимо еще произвести исследование – при каких условиях задача имеет решение, а при каких нет, сколько решений в каждом отдельном случае. Убедившись в правильности решения необходимо четко сформулировать ответ. В учебных и познавательных целях полезно произвести анализ выполненного решения, в частности, установить, нет ли другого более рационального способа решения, нельзя ли задачу обобщить, какие выводы можно сделать из этого решения и так далее.

Приведем примеры заданий, принадлежащие к классам алгоритмических и полуалгоритмических (полуэвристических) задач в 5 классе, на материале урока по теме «Десятичные дроби», проведенного в рамках педагогической практики (2007 год) студенткой 461 группы С.С.Харьковой в МОУ СОШ № 18 города Саратова. На данном уроке учащимся предполагалось решить 10 задач.

<u>Задача 1.</u> (Устная работа) ***Расставьте в следующих забавных равенствах запятые:***

а) 32 + 18 = 5	***в) 14 · 5 = 7***	***д) 3 + 108 = 408***
б) 736 – 336 = 4	***г) 63 – 27 = 603***	***е) 12 · 50 = 60***

Данные задания явно не являются алгоритмическими. Более того, это типичное задание с развивающими функциями. Сама постановка задачи активизирует мыслительные процессы учащихся, побуждая их решить две проблемы: 1) ответить на естественным образом возникающий вопрос:

«Почему равенства «забавные»»? 2) выполнить требование, то есть восстановить равенства.

Путь решения подсказан: «расставьте запятые», поэтому ученики могут подойти к решению задачи, как к обычной головоломке, то есть будут действовать с опорой на интуицию, методом проб и ошибок. И если учитель не скорректирует процесс решения, то развивающая функция задачи будет напрочь потеряна.

Итак, после того, как учащиеся методом проб и ошибок, решили задачу, необходимо выяснить, как было получено решение, то есть добиться от учеников озвучание хода решения. Например: ***«в левой части равенства а – сумма двузначных чисел, а в правой – однозначное число 5, значит именно в левую часть нужно внести изменение, а именно отделить целую часть запятой от дробной в двух слагаемых: 3,2 + 1,8 = 5».***

Далее, можно применить подобные рассуждения к обоснованию результата заданий ***б, г, д***.

Таким образом, формируется потребность в установлении общих способов решения – основа алгоритмического мышления.

При попытке решить, используя приведенные выше рассуждения, задания ***в*** и ***г,*** ученики обнаруживают их недейственность, а значит, и непригодность. Чтобы установить способ рассуждений, достаточно вспомнить привило умножение десятичных дробей: «При умножении десятичных дробей сначала надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, а затем в произведении отделить запятой справа столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе**»**.

Общий способ рассуждения (для заданий ***в*** и ***е***) будет таким: 1) ***умножим числа, стоящие в левой части равенства // 14· 5 = 70;*** 2) ***сравним результат с правой частью // 7 в 10 раз меньше, чем 70;*** 3) ***в соответствии с пунктом 2) изменить какой-либо множитель в левой части // 1,4 · 5 = 7.***

Полученное алгоритмическое предписание позволяет получить два варианта «восстановить» равенство ***е***: 1,2 · 50 = 60 и 12 · 5,0 = 60, – из которых выбирается наиболее «эстетичное»: 1,2 · 50 = 60.

Таким образом, формируется и развивается другая составляющая алгоритмического мышления: продуктивность и рациональность, а также гибкость и полнота мышления в целом.

<u>Задача 2.</u> ***Даны две суммы. Найдите сумму этих сумм:***

7,82 + 5,64 + 3,47 + 1,23 ***1,18 + 3,36 + 5,53 + 7,77***

Учащиеся приступают, как правило, к выполнению задачи немедленно, даже не прочитав, как следует, требования и, не проанализировав условие задачи.

Опять же, останавливать их не стоит – пусть решают: находят значение первой, а затем второй суммы, и складывают их, то есть трижды используют алгоритм нахождения суммы десятичных дробей.

После этого учеников просят еще раз прочитать требование задачи, а затем вспомнить свойства суммы – переместительный и сочетательный законы сложения. После этого, дается задание решить задачу 2 устно, используя законы сложения. При этом можно использовать эвристический прием: записать выражение «столбиком».

$$\begin{array}{rl} & 7{,}82 + 5{,}64 + 3{,}47 + 1{,}23 \\ + & \underline{1{,}18 + 3{,}36 + 5{,}53 + 7{,}77} \\ & 9 \quad + 9 \quad + 9 \quad + 9 \quad = 9 \cdot 4 = 36 \end{array}$$

Подвести итог работе поможет важное <u>знание</u>: прежде чем применять какой-либо алгоритм, убедись, что он наиболее рациональный, для чего проанализируй текст задачи.

Для того, чтобы убедиться в осознании учениками данного факта, полезно предложить им для самостоятельного решения задачи 3 и 4.

Если ученики будут выписывать в задании 3 недостающие слагаемые и вести последовательное сложение чисел, а в задании 4 выполнять действия по известной схеме, то факт учениками не осознан. В этом случае работу по коррекции организует аналогично работе с задачей 2.

Если же ученики, проанализировав условие, придут к необходимости перезаписи суммы, то можно говорить о развитии у них рационального алгоритмического мышления (причем непосредственно на математическом материале и в рамках данного урока).

<u>Задача 3.</u> ***Найдите сумму 20 чисел: 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + … + 1,8 + 1,9 + 2.***

<u>Решение:</u> $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + \ldots + 1{,}8 + 1{,}9 + 2 = \underbrace{(0{,}1 + 2) + (0{,}2 + 1{,}9) + \ldots}_{\textit{10 пар}} = 2{,}1 \cdot 10 = 21$

<u>Задача 4.</u> ***Вычислите наиболее простым способом:***

a) $5{,}94 \cdot 0{,}07 + 0{,}33 \cdot 5{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}06$ *b)* $6{,}85 \cdot 3{,}2 - 6{,}85 \cdot 1{,}7 + 1{,}5 \cdot 4{,}15$

<u>Решение</u>:

a) $5{,}94 \cdot 0{,}07 + 0{,}33 \cdot 5{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 5{,}94 \cdot (0{,}07 + 0{,}33) + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 5{,}94 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 =$
$= 0{,}4 \cdot (5{,}94 + 0{,}06) = 0{,}4 \cdot 6 = 24$

<u>Задача 5.</u> ***Заполните таблицу:***

A	*B*	*C*	*A+B+C*	*A+B*	*A+C*	*B+C*
0,8	*1,3*	*2,7*				
	7,3	*15,5*			*18,3*	
	4,7		*15*			*12,2*
			26,6	*22,4*	*23,5*	
				20,6	*12,9*	*18,5*

Строки заполняются по данным в таблице. Алгоритмическое предписание в этом случае такое: ***в пустой ячейке – результат арифметического действия (+ / –) двух чисел, расположены в данной строке.*** Так, например, в заштрихованной ячейке разность **26,6** и ***22,4*** (обоснование: ***C = (A + B + C) – (A + B)***). Первую строку заполняет один ученик у доски, следующие строки – четыре ученика одновременно.

Разобранные выше задачи (1–5) позволяют закрепить и <u>обобщить</u> материал по теме «Сложение и вычитание десятичных дробей».

Следующий цикл задач предполагает получение (разработку) алгоритма решения задач нового типа.

Задача 6. ***Сравните данные условия и решения следующих двух задач. Подумайте, каким должен быть ответ во второй задаче.***

Найдите площадь зала прямоугольной формы со сторонами 12 м и 47 м. ***Решение:*** $12 \cdot 47 = 564$ (м^2) ***Ответ: 564 м***^{2}	***Найдите площадь кабинета прямоугольной формы, длина которого 12 м, ширина 4,7 м.*** ***Решение:*** $12 \cdot 4,7 = ?$ ***Ответ: ?***

Если вы затрудняетесь сразу дать ответ, сравните числа 47 и 4,7 и вспомните, как изменяется значение произведения, если один из множителей уменьшается в несколько раз.

Рассуждать можно, например, так: второе произведение отличается от первого тем, что в нем один из множителей меньше в 10 раз. Значит, и значение второго произведения по сравнению с первым меньше в 10 раз. Следовательно, 12 · 4,7 = 56,4.

Вычислите, рассуждая аналогично предыдущему примеру. Проанализируйте решения и постарайтесь сформулировать правило умножения десятичных дробей.

Задача 7. ***Вычислите:***

а) 31,54 · 32; ***в) 3,005 · 44, 44;*** ***д) 71,7 · 9,01;***

б) 61 · 3, 245; ***г) 60,5 · 48;*** ***е) 2,3456789 · 0,3.***

Задача 8. ***Вычислите:***

а) 13,3456789 · 3 + 99,7654321 · 3 + 766,666667;

б) 290 : 100 – 7,6 · 0,25 + 25,8 · 0,5 – 420 · 0,03.

Далее вводится правило умножения десятичных дробей: ***При умножении десятичных дробей сначала надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, а затем в произведении отделить запятой справа столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе.***

Затем правило преобразуется в алгоритм умножения десятичных дробей:

1. ***Подсчитать количество знаков после запятой***
2. ***Зафиксировать это число буквой n***
3. ***Перемножить числа, не учитывая запятые (столбиком)***
4. ***Записать результата***
5. ***В полученном результате справа отделить запятой n цифр***

Для дальнейшего закрепления умения выполнения действий с десятичными дробями, можно провести математическую эстафету «Заполни клетку» (задача 9). Каждая команда (ряд) получают бланки, текст которых приведен ниже. Учащиеся по-очереди выполняют действия. Ответ предыдущего действия ставится в первую клетку следующего. Выигрывает та команда, которая первой скажет правильный ответ, в последней клетке.

2,3	+	0,5	=	
	–	1,4	=	
	·	2,3	=	
	:	4	=	
	+	2,8	=	
	:	0,5	=	
	–	6,32	=	
	·	1,3	=	
	–	2,047	=	
	:	0,01	=	

4,5	+	1,7	=	
	:	3,1	=	
	·	4,74	=	
	+	4,64	=	
	–	7,5	=	
	+	9,4	=	
	:	1,8	=	
	·	3,4	=	
	–	15,3	=	
	+	0,04	=	

9,8	–	2,9	=	
	:	2,3	=	
	·	6,18	=	
	–	4,7	=	
	:	17,3	=	
	·	5,2	=	
	+	7,8	=	
	–	4,2	=	
	–	5,81	=	
	+	0,05	=	

В качестве завершающего данный цикл заданий можно предложить учащимся (в рамках домашней работы) ***разработать алгоритм деления десятичной дроби на целое число*** (задача 10).

Мы рассмотрели задачи, принадлежащие к классам алгоритмических и полуалгоритмических задач, те есть таких, для которых существует общий метод (алгоритм) решения. Но, многообразные ситуации, возникающие в ходе математической и нематематической деятельности, приводят к постановке и последующей формулировке как стандартных (алгоритмических и полуалгоритмических/полуэвристических), так и нестандартных задач.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача А. ***Решили Вини-Пух, Кролик и Пятачок купить горшочек меда стоимостью 24 рублей. У Вини-Пуха было 7 рублей 50 копеек, у Кролика на 5 рублей 60 копеек больше, чем в Вини-Пуха, а у Пяточка на 2 рубля 10 копеек меньше чем у Вини-Пуха. Купят ли они горшочек меда, если сложат все свои деньги? Сколько денег имел каждый?***

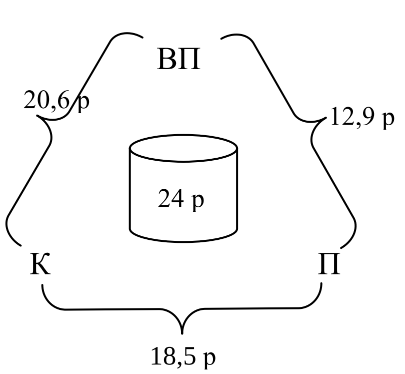
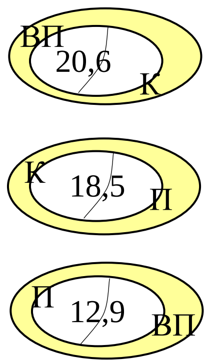
Задача Б. ***Три неразлучных друга – Вини-Пух, Кролик и Пятачок – решили узнать свой вес. Но шкала весов до 20 кг была повреждена, и показания по ней прочитать не представлялось возможным. Поэтому Вини-Пух взвесился сначала с Кроликом: получилось 22,4 кг; затем с Пятачком, получилось 23,5 кг; а затем они взвесились все вместе и получили 26,7 кг. Какова масса каждого из них в отдельности?***

Задача В. ***Решили Вини-Пух, Кролик и Пятачок купить горшочек меда стоимостью 24 рубля. У Вини-Пуха с Кроликом было 20,6 рублей, у Вини-Пуха с Пятачком 12,9 рублей, а у Кролика с Пятачком 18,5 рублей. Купят ли они горшочек меда, если сложат все свои деньги? Сколько денег имел каждый?***

Сравним эти задачи. Основанием для сравнения выберем краткую запись условия, определяющую план решения. Результат сравнения оформим в таблицу «Решение задач».

Уже на этапе сравнения информационных моделей задач (кратких записей) А, Б и В мы видим, что задача А – алгоритмическая (план решения задаётся информационной моделью), Б – полуалгоритмическая/полуэвристическая (идея решения может быть выявлена путём сопоставления задачи 5 (см. стр. 21) и данной задачи), В – эвристическая (требует детального анализа, а затем применения некоторых эвристических приёмов. Сначала эвристический приём из задачи 2, после этого приём из задачи 5 или задачи Б).

В целях развития аналитического, алгоритмического и творческого мышления в учебный процесс (на уроке математики) следует включать именно связку задач А – Б – В (предваряемую решением задач типа 2 и 5), и организовать их решение с учетом данных таблицы сравнений.

<table>
<tr><th colspan="4">Решение задач</th></tr>
<tr><th>А</th><th>Б</th><th colspan="2">В</th></tr>
<tr>
<td>ВП – 7,5 руб.
К – ? на 5,6 руб. <u>б</u>
П – ? на 2,1 руб. <u>м</u>
ВСЕГО – ?
МЕД – 24 руб. ?</td>
<td>К – ?
ВП – ?
П – ?
22,4 кг
23,5 кг
26,7 кг</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>Все неизвестные величины зависят от одной, которая нам известна</td>
<td>В задаче описаны три ситуации, взаимосвязанные между собой следующим образом
$a + x = в$</td>
<td colspan="2">В задаче нет явной функциональной зависимости (зато есть отношения между множествами)</td>
</tr>
<tr>
<td>Идея (план) решения: последовательно находить неизвестные.</td>
<td>Идея (план) решения: последовательно находить неизвестные по формуле
$a + x = в$</td>
<td colspan="2">Идея (план) решения: изменить краткую запись условия (изменить информационную модель задачи). Попробуем известный (<u>задача 2</u>) эвристический прием.</td>
</tr>
<tr>
<td>Решение:
1) 7,5 + 5,6 = 13,1
2) 7,5 – 2,1 = 5,4
3) 7,5 + 13,1 + 5,4 = 26
4) 26 > 24</td>
<td>Решение:
1) 26,7 – 23,5 = 3,2
2) 26,7 – 22,4 = 4,3
3) 22,4 – 3,2 = 19,2</td>
<td>План решения:


2) ВП+К+П=?
3) ВП –?
4) К –?
5) К –?</td>
<td>Решение:
1) 20,6 + 18,5 + 12,9 =
= ВП + К+
+ К + П+
+ П + ВП =
=2ВП+2К+2П =
=2· (ВП+К+П)
или
52 = 2· (ВП+К+П)
2) 52 : 2 = 26 –
- всего было у ВП, К и П.
3) 26 – 18,5 = 7,5
4) 26 – 12,9 = 13,1
5) 26 – 20,6 = 5,4
6) 26 > 24</td>
</tr>
<tr>
<td>Ответ: Друзья купят горшочек с медом</td>
<td>Ответ: Кролик весит 3,2 кг, Пятачок – 4,3 кг, Вини-Пух – 19,2 кг</td>
<td colspan="2">Ответ: Друзья купят горшочек с медом:
у Вини-Пуха – 7,5 руб.
у Кролика – 13,1 руб.
у Пяточка – 5,4 руб.</td>
</tr>
</table>

С.В.ЛЕБЕДЕВА, Л.В.КРИВОНОСОВА

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ МЫШЛЕНИЕ И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕГО РАЗВИТИЯ В УСЛОВИЯХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Последние двадцать лет остро стоит проблема развития учащихся в процессе обучения, которую можно сформулировать следующим образом: уровень развития школьников не позволяет им осваивать программный материал средней школы на творческом уровне, определяемым состоянием современной науки, техники и культуры в целом; полученные же знания формальны, бессистемны, нежизненны и не способствуют интеллектуальному, творческому и профессиональному развитию личности.

Попытки разорвать этот замкнутый круг на различных этапах обучения школьников составляют основу реформы среднего образования.

Но, несмотря на различные меры, определяемые принципами дифференцированного подхода (уровневая и профильная дифференциация), личностно-ориентированного подхода, гуманизации и гуманитаризации обучения, принцип развивающего обучения, а также различные инновационные технологии в области среднего образования, положение по-прежнему остаётся тяжёлым, а обозначенная проблема повсеместно так и не решена.

Создаётся впечатление, что корни данной проблемы не только и не столько в плохо организованном процессе обучения, а гораздо глубже.

Напомним, что под развитием понимают объективный процесс внутреннего последовательного количественного и качественного изменения физических и духовных сил человека; выделяют физическое, физиологическое и психическое развитие. Психическое развитие состоит в постепенном усложнении процессов отражения человеком действительности (ощущения, восприятие, память, мышление, чувства, воображение), а также более сложных психических новообразований (потребности, мотивы деятельности, способности, интересы, ценностные ориентации).

Объект нашего исследования – пространственное мышление – является результатом развития таких компонентов психики как память, восприятие, воображение и некоторые мыслительные операции (сравнение, анализ, синтез, классифицирование и пр.). Задержка в развитии одного из них препятствует и развитию пространственного мышления. Пространственное мышление формируется в различных видах деятельности (практической и теоретической), наиболее продуктивными формами которой являются конструирование, рисование, черчение, а также научно-техническое творчество. В процессе перечисленных видов и форм деятельности формируется умение создавать пространственный образ некоторого объекта, преобразовывать его, представлять результаты своих действий по преобразованию, воплощать их в рисунке, схеме, чертеже, поделке, постройке, а также вербально; выделять пространственные соотношения, отражать их в представлениях и понятиях; прогнозировать новые соотношения и на их основе создавать новые пространственные образы, выражать их графически или словесно и т.д.

Таким образом, пространственное мышление является специфическим видом мыслительной деятельности, которая проявляется, прежде всего, в решении задач, требующих ориентации в практическом (реальном) и теоретическом (воображаемом) пространстве. В своих наиболее развитых формах пространственное мышление – это мышление образами, фиксирующими пространственные свойства и отношения.

По способу деятельности пространственное мышление бывает эмпирическим и теоретическим [2].

Определим эмпирическое пространственное мышление как совокупность мыслительных операций по опознанию и классификации пространственных объектов и образов по их внешним (формально общим) признакам с помощью выделения и дальнейшего сравнения данного объекта, чувственно воспринимаемого и представляемого по памяти.

Теоретическое пространственное мышление определяется (по И.Я.Каплуновичу [3]) как совокупность особых мыслительных действий по воспроизведению и конструированию особых идеализированных пространственных объектов и систем их связей, отражающих в своём единстве всеобщность и сущность трансформаций исходного объекта и его отношений с другими пространственными предметами. Формирование этого типа мышления представляет собой овладение учащимися умениями: 1) отыскивать источник происхождения преобразования; 2) улавливать суть преобразования; 3) определять суть конструирования нового объекта на основании выявленного преобразования; 4) осуществлять реальные трансформации во внутреннем (умственном) и внешнем планах двух- и трёхмерных объектов в различных геометрических пространствах.

Таким образом, пространственное мышление возникает в недрах практической ориентации на местности среди объектов материального мира, а своего максимального развития достигает при исследовании пространственных свойств и отношений математическими методами.

Каждый обладает задатками пространственного мышления, а его развитие определяется в полной мере участием человека в тех или иных видах деятельности. Этот факт позволяет выявить причины недостаточного развития пространственного мышления учащихся на момент начала изучения ими систематического курса геометрии.

Итак, к основным причинам отнесём

1) изменившуюся действительность: если раньше пространственное мышление естественным образом возникало в недрах практической потребности ориентации на местности среди объектов материального мира, то на современном этапе существования человечества подобная деятельность переносится, как правило, в профессиональную сферу деятельности, то есть становиться менее востребованной в детском, подростковом и юношеском возрасте;

2) изменившееся содержание дошкольной игровой деятельности: известно, что период от 1,5 до 4 лет характеризуется развитием символического и допонятийного мышления, от 4 до 8 лет образуется, основываясь на

предшествующем, наглядное интуитивное мышление, прогрессивные сочленения которого подводят к операциям; от 8 до 12 лет формируются конкретные операции (операциональные группировки мышления), относящиеся к объектам, которыми можно манипулировать или которые можно «схватить» в интуиции, то есть к 12 годам завершается формирования компонентов эмпирического пространственного мышления. Этот возраст считается критическим сенситивным для развития пространственных представлений (эмпирического пространственного мышления) человека. Но несмотря на эти объективные закономерности детей всё чаще и всё более целенаправленно отрывают от игровой деятельности, позволяющей естественным образом познавать объекты окружающей действительности, и уже с 3 лет пытаются обучать счёту, письму, чтению и пр. Чтобы компенсировать социально «невостребованные» действия по формированию компонентов пространственного мышления воспитатели вынуждены подменять непосредственное познание окружающей действительности разнообразными (виртуальными) развивающими играми, которые при всём их многообразии ни в коей мере не могут подменить всего богатства окружающего нас мира, со всеми его взаимоотношениями и взаимосвязями. Таким образом, уже в дошкольном возрасте пространственное мышление не получает должного (адекватного возрасту) развития;

3) стремление к наискорейшему переходу от наглядно-образного (конкретного, интуитивного) мышления к формальному, абстрактному, группировки которого характеризуют зрелый, рефлексивный интеллект, способный воспринимать и перерабатывать разнообразную информацию большого объёма, фильтруя и преобразуя её в активное знание. Естественно, что школьника, обладающего таким мышлением обучать легче, быстрее и эффективнее, но база такого мышления – всё то же эмпирическое пространственное мышление. Следует ли пренебрегать его развитием в начальной школе, пытаясь в обход его формировать мышление абстрактное? И стоит ли гипотезу Л.В.Занкова: «неправомерное облегчение учебного материала, неоправданно медленный темп его изучения, многократные однообразные повторения, по-видимому, не могут способствовать интенсивному развитию школьников», использовать в качестве аксиомы обучения в начальной школе? Именно начальная школа, вооружившись этим лозунгом, вопреки физиологическим и психическим закономерностям развития человека пытается углубить учебный материал, увеличивая объём теоретического материала, обобщения и дедукции. Таким образом, недостаточно развитое (по объективным причинам) пространственное мышление дошкольников не только не компенсируется при начальном обучении, но ещё более тормозится.

4) Из выше сказанного следует, что последней возможностью, для развития пространственного мышления в критический сензитивный период является целенаправленная работа по развитию компонентов этого мышления в 5-6 классах. Уже разработаны программы и учебники по наглядной геометрии, но они почему-то не пользуются должной популярностью в учительской среде. Традиционные курсы «Математика 5-6» рассчитаны на

адекватное возрасту развитие пространственных представлений и должным образом сформированное пространственное мышление, поэтому на сегодняшний день требуют доработки содержания включением развивающих пространственное мышление заданий, а также соответствующего подхода к решению сюжетных задач.

В противном случае упускается последний шанс развить надлежащим образом пространственное мышление, а именно теоретическое пространственного мышления, которое на данном этапе должно быть сформировано. Если этого не происходит, то есть большая вероятность, что в мыслительной деятельности человека устойчиво закрепляется эмпирический тип пространственного мышления, требующий постоянного обращения к наглядной основе для решения поставленной задачи (при отсутствии наглядной основы «пространственная задача» не может быть решена).

5) Если до 12-летнего возраста у ребёнка сформировано лишь эмпирическое пространственное мышление, то освоение основного курса геометрии путем изучения планиметрии способствует дальнейшему торможению теоретического пространственного мышления, вплоть до остановки в развитии, особенно в том случае, если в основу изучения планиметрии положены свойства простейших геометрических фигур, а не свойства геометрических преобразований.

6) Обращение к стереометрическому материалу в старших классах средней школы требует развитого теоретического пространственного мышления. В противном случае работа с абстрактным стереометрическим материалом усугубляет проблему слабого развития пространственного мышления теперь уже в контексте становления самосознания и устойчивого образа личности старшеклассника, отрицающего саму необходимость развития пространственного мышления: «Не могу – не хочу – не надо!»

Выявленные проблемы позволяют остановиться на развитии пространственного мышления в рамках пропедевтического курса математики, учитывая, что это единственно возможный этап в обучении школьника для (становления и) развития теоретического пространственного мышления.

В рамках проводимого исследования нами разработана система заданий, включающая четыре подсистемы, ориентированные на развитие отдельных компонентов пространственного мышления:

I. Система упражнений, направленная на развитие пространственных представлений.

II. Система задач на формирование умения создавать пространственные образы.

III. Система заданий на формирование умения осуществлять реальные трансформации объектов и образов.

IV. Система математических задач, раскрывающих сущность некоторых видов геометрических преобразований.

Система заданий (подсистемы I-IV) удовлетворяет следующим принципам: <u>1) непрерывности</u>, то есть требует включения упражнений, задач и заданий системы в содержание <u>каждого</u> урока (в том числе и в контрольные работы); 2) <u>интеграции</u> – требует включения в систему практических (а в дальнейшем прикладных) задач и разнообразных математических задач (арифметических, алгебраических); 3) учета возрастных особенностей, что предполагает решения ряда задач системы в ходе игровой деятельности; 4) активности – требует невмешательства педагога в процесс выполнения учащимися заданий.

Следует заметить, что разрабатываемая система заданий ориентирована на традиционные программы изучения математики в 5-6 классах. В случае, когда обучение ведется по инновационным программам и методикам, система задач должна быть пересмотрена и скорректирована в соответствие с выбранной программой.

Приведём пример (см. таблицу) системы упражнений, направленных на развитие пространственных представлений (подсистема I).

№	Формулировка задания	Цель (достигаемый результат) Дополнительные развивающие функции	Время выполнения
1.	**Умная раскраска** Определить, какие картинки соответствуют каким предметам и правильно раскрасить соответствующие детали картинок	Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях- формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ребенок не будет «терять» при различных ее перемещениях в дальнейшем Развитие мелкой моторики	5 минут
2.	**Найти два одинаковых предмета** Из восьми изображенных предметов (например кубиков) найти два абсолютно одинаковых	Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях- формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ребенок не будет «терять» при различных ее перемещениях в дальнейшем Внимание	1 минута
3.	**Найти вид объемной фигуры сверху**	Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ребенок не будет «терять» при ее перемещениях в дальнейшем Логическое мышление	1 минута
4.	**Конструирование** многогранников и тел вращения.	Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ребенок не будет «терять» при ее перемещении в дальнейшем. Конструктивное мышление	Домашняя работа
5.	**Изображение** (рисунок) многогранников и тел вращения	Узнавание различных фигур в различных пространственных положениях – формирование устойчивого адекватного образа фигуры, форму которой ребенок не будет «терять» при ее перемещении в дальнейшем. Мелкая моторика	7 минут
6.	**Упражнения на распознавание** объекта - по изображению; - по описанию.	Активизация образов памяти, в результате которого ученик проводит поиск в своем банке образов памяти и путем сличения предлагаемого образа с имеющимся в памяти распознает искомую форму Внимание, память	2 минуты
7.	**Упражнения на выделение** объекта из множества данных, образующего единое целое: • сюрреалистические портреты Джузеппе Арчимбольдо; • соберите осколки; • гравюра Эшера (невозможные объекты)	Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является творческим отделом мозга, специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей. Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали. Анализ, синтез, внимательность.	2 минуты

№	Формулировка задания	Цель (достигаемый результат) Дополнительные развивающие функции	Время выполнения
8.	**Упражнения на сравнение**	Тренировка правого полушария мозга, которое в зрительной интерпретации окружающего мира является творческим отделом мозга, специализирующемся на построении глобальной картины и выявлении общих закономерностей. Тренировка левого полушария мозга, воспринимающего детали, сосредотачивающего на них внимание и анализирующего эти детали. Анализ, внимательность, сравнение, синтез.	До 5 минут
9.	**Упражнения на классифицирование**	Классификация и упорядочение изучаемых объектов. Анализ	До 3 минут
10.	**Сечения и вырезание**. Найти отрезанный (вырезанный) от каждого кубика фрагмент.	Создание образов воображения Анализ	От 1 до 3 минут

Представленные упражнения можно включать в содержание урока на любом его этапе: они вызывают интерес, активизируют память и воображение, не занимают много времени, пригодны как для индивидуальной, так и фронтальной работы.

Особенностью упражнений является отсутствие математического содержания, но цель – формирование пространственных представлений, столь необходимых в математической деятельности – оправдывает их выполнение на уроке математики. Упражнений собственно математического содержания, формирующих и развивающих пространственные представления, для учащихся 5-6 классов, разработать не представляется возможным.

Литература

1. *Белошистая А.В.* Новая методическая система по развитию пространственного мышления учащихся 5-6 классов // Вопросы психологии, 2006, №1, с.17-23.
2. *Дубовицкая И.В., Яковлева З.И.* К вопросу о развитии: Виды мышления //http://novgorod.fio.ru/projects/Project915/k_voprosu_o_razvitii.htm.
3. *Каплунович И.Я.* Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. – Новгород, 1996 г.
4. *Платонова В.И.* К вопросу о развитии пространственных представлений учащихся // Математика в школе, 2003, №6, с.36-38.
5. *Щирякова А.Н.* Как развивать пространственное воображение учащихся.// Математика в школе, 2000, №2, с.29-32.
6. *Якиманская И.С.* Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980.

Е.В. КИРИЛЕНКО

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В V – VI КЛАССАХ

В основе большинства проблем обучения математике учащихся V-VI классов лежат возрастные особенности детей: перестройка познавательных процессов – формируется произвольность, продуктивность и устойчивость внимания, память (прежде всего механическая память), мышление (словесно-логическое); саморегуляция поведения и воли; расширение сферы общения; формирование самооценки школьника (на основе оценивания учителем достигнутых результатов в учебе), причём в этот возрастной период нередко происходит снижение самооценки; формирование либо уверенности в себе и компетентности, либо (в случае затруднений в учебе, критичности учителей и родителей) чувства неполноценности.

Выделим наиболее распространенные проблемы обучения математике в V-VI классах, решение которых оказывает непосредственное влияние на последующее изучение подростками математических дисциплин школьного курса:

1. Низкий уровень языкового развития учащихся.
2. Несформированность умения задавать вопросы.
3. Слабое представление о математических методах решения практических задач, и, как следствие, неспособность начать и довести до конца решение текстовой задачи с числом взаимосвязей между данными условия более двух.
4. Слабое развитие пространственного и логического мышления.
5. Организация обучения математике учащихся, различного уровня развития математических способностей.

Под языковым развитием учащихся будем понимать: 1) осознание детьми наличия специфических способов изложения информации, относящейся к различным отраслям знания, то есть понимания различия между разговорной речью и научным стилем, способами изложения и обоснования математических утверждений и, например, исторических фактов или физических явлений; 2) владение матемаической терминологией и символикой; 3) способность записать на математическом языке некоторую информацию и объяснить смысл математической записи; 4) понимание необходимости обоснования математических утверждений; 5) способность проводить рассуждения (соответствующего возрасту и этапу обучения математике уровня строгости), устно и письменно (с использованием математического и логического аппарата), подтверждающие или опровергающие те или иные гипотезы.

Именно пропедевтический курс математики призван формировать и развивать все перечисленные компоненты языкового развития.

Как известно, изложение школьного курса математики основано на совместном использовании словесной (вербальной) и символико-графической (математической) форм описания учебного материала. Каждая из этих форм – это своеобразный язык, служащий для передачи информации. Поэтому добиться осознанного и точного понимания учебного материала можно лишь при условии одинаково высокой подготовки школьников к восприятию информации, закодированной каждым из этих способов. Исследования показывают, что многие учащиеся находятся в сильной зависимости от формы подачи информации. В соответствии ведущему типу восприятия, а также полушарной доминантности учащиеся V-VI классов либо лучше воспринимают математическую информацию, записанную в символьной форме, либо словесное описание математических фактов. Причём, первый вариант восприятия и переработки информации, начиная с 10 лет, становится ведущим, а при неправильных подходах к обучению способен вытеснить словесные рассуждения математического содержания.

Так, наблюдения за учениками 6 класса (Лицей №37 г.Саратова), обучающихся по усложнённой программе, показали, что:

1) ученики не только охотно проговаривают нужные математические утверждения, но и используют их в качестве аргумента своей правоты. Так, например, на требования: «Сложить дроби ¼ и ½» и «Сложить дроби ¼ и ¾» учащиеся дают ответ: «¾» и «1» соответственно, а в качестве аргумента формулируют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Учителю приходится концентрировать внимание учащихся на компонентах сложения с целью выяснения возможности применения указанного правила: «Слагаемые – дроби с одинаковыми знаменателями?» Налицо привязанность аргументации к форме подачи задания: поясняется лишь то, что требуется выполнить, а все промежуточные результаты никак не аргументируются. Более того, на дополнительные вопросы учитель получает односложные ответы. Попытки учащихся дать развёрнутый ответ выражаются в бессвязном наборе терминов и фраз, поддерживаемом жестикуляцией;

2) гораздо хуже учащиеся формулируют не заученные правила и алгоритмы, а «вновь открытые» (в рамках проблемного обучения) математические утверждения. Возникающие при этом проблемы можно разделить на две группы. Первая группа объединяет возникающие у учащихся сложности с грамматикой и стилистикой и является предметом изучения методистов и учителей русского языка и литературы. Вторая группа проблем связана с логикой и строгостью математических рассуждений. Требование включать в математические утверждения те и только те условия, которые полностью описывают и исчерпывают рассматриваемую математическую ситуацию – должно предъявляться к учащимся всякий раз, когда учитель применяет проблемные методы в обучении. Зачастую педагоги пренебрегают эти требованием, добиваясь главного, по их мнению – **понимания смысла** того или иного математического факта. Но это понимание строится на интуиции, экспериментах со словами и грамматической формой и неосмысленным угадыванием того, что «желает получить учитель». Приведём следующий пример. В ходе практической работы ученики выяснили, что сумма углов некоторых остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников получилась равной 180°. Учитель хочет обобщить эти результаты и придать им

форму некоторого математического факта, для чего вовлекает учащихся в следующую беседу:
Учитель: ***Давайте обобщим результаты нашей работы и сформулируем одно из важных свойств треугольника.***
Ученик I: ***У любого треугольника углы равны 180°.***
Ученик II: ***У всех треугольников углы 180°.***
Ученик III: ***У остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников углы равны 180°.***
Учитель: ***Посмотрите на ваши чертежи и скажите, чему равны углы A, B и C треугольника ABC?***
Ученик I: ***30°, 60°, 90°.***
Учитель: ***Разве эти углы равны 180°?***
Хоровой ответ: ***Нет!***
Учитель: ***Что равно 180°?***
Ученик I: ***Все углы.***
Ученик II: ***30° + 60° + 90° = 180°.***
Ученик III: ***Углы***
Ученик IV: ***Сумма углов***
Ученик V: ***Сумма углов треугольника ABC.***
Учитель: ***Сформулируйте свойство треугольника.***
Ученик I: ***У любого треугольника сумма углов равна 180°.***
Ученик II: ***У всех треугольников сумма углов равна 180°.***
Ученик III: ***У остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников сумма углов равна 180°.***
Учитель: ***Можно ли заменить фразу «у остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников» на фразу «у всех треугольников»?***
Хоровые ответы: ***Нет! Да!***

На дополнительный вопрос: «Поясните свой ответ», можно услышать следующее: ***«Можно, потому, что все треугольники – это остроугольные, прямоугольные и тупоугольные», «Можно, потому что других треугольников нет», «Треугольники могут быть или острыми, или прямоугольными или тупоугольными, поэтому,.. да».*** Первые два ответа указывают на то, что учащиеся их давшие, подтверждают свою точку зрения, а третий ответ – на то, что точка зрения была пересмотрена. Кроме того, приведённые выше (а есть ещё и другие, менее удачные) ответы учащихся со всей наглядностью иллюстрируют то **понимание смысла**, за которое ратуют учителя;

3) учащиеся гораздо продуктивнее работают с материалом, представленным в наглядном виде, причём, результаты действий представляются аналогичным заданию образом. Так, например, если задачу нахождения числа по его части представлять различным образом, то учащиеся каждое новое представление будут воспринимать как новое задание, решать его соответствующим представлению образом и формулировать аналогичным образом ответ.
Задача I: ***Решить уравнение 0,1 · x = 33.***
Ответ: ***x = 330.***
Дополнительный вопрос (остался без ответа): ***Чем является число 33 для корня нашего уравнения?***
Задача II: ***Найти число, десятая часть которого равна 33.***
Ответ: ***330. Для решения мы составили и решили пропорцию: 10 : 33 = 100 : x.***
Дополнительный вопрос: ***Чем похожи задачи I и II?***

Ответ: ***У них одни и те же числа.***

Задача III: ***Ручка стоит 0,1 $. Сколько ручек можно купить на 33 $?***

Решение:

Цена	Количество	Стоимость
0,1 $	***?***	***33 $***

33 : 0,1 = 330 (штук.)

Ответ: ***330 ручек.***

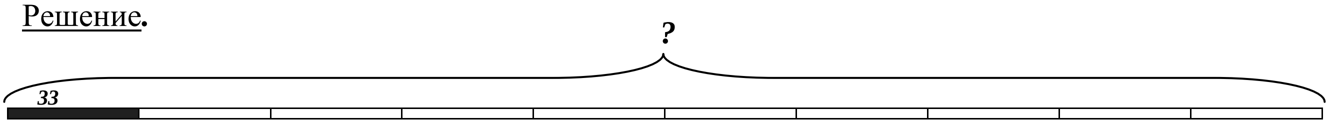
Дополнительный вопрос: ***Чем похожи задачи I и III?***

Ответ: ***Задачу III можно решить уравнением задачи I.***

Дополнительный вопрос (остался без ответа, так как учащиеся сравнивают способы решения задачи, а не их формулировки): ***Чем похожи задачи II и III?***

Задание. ***Решить задачу II, используя геометрический рисунок (с помощью отрезков).***

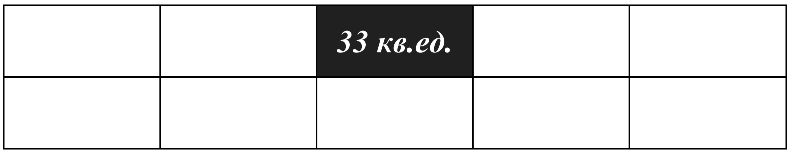
Решение.



33 · 10 = 330

Ответ: ***330.***

Задача IV: ***Найти площадь фигуры, изображённой на рисунке, если известна её закрашенная часть.***



Решение. ***33 · 10 = 330 (кв.ед.)***

Ответ: ***330 кв.ед.***

Дополнительный вопрос: ***Чем похожи задачи IV и II?***

Ответ: ***В этих задачах надо найти целое по его части.***

Мы видим, что способ представления информации и построенная информационная модель задачи (наглядное представление) оказывает существенное влияние на решение задач пропедевтического курса математики. Без дополнительной работы учителя по обобщению математического материала учащиеся V-VI классов не в состоянии осознать всеобщности некоторых математических понятий и законов;

4) уровень языкового развития учащихся можно определить, предложив школьникам сконструировать задачу по некоторой её информационной модели. Так, по модели к задаче IV ученики 6 класса предложили такие тексты (они расположены по возрастанию уровня языкового развития): ***«Одна клеточка – 33 квадратные единицы. Сколько квадратных единиц в десяти клеточках?», «Площадь одного прямоугольника – 33 квадратные единицы, какова будет площадь десяти таких прямоугольников?», «Прямоугольник разделён на десять равных частей. Площадь одной части – 33 кв.ед. Какая площадь у прямоугольника?», «Найти площадь прямоугольника, если известно, что десятая его часть составляет 33 квадратные единицы».***

В данной статье мы выделили лишь небольшую часть проблем обучения математике учащихся V-VI классов и подробно остановились на ряде аспектов языкового развития. Результаты исследования других проблем будут описаны в следующих работах.

М.А. ВАРФОЛОМЕЕВА

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕУРОЧНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи формирования всесторонне развитой личности школьника, комплексного подхода к постановке воспитательного процесса требуют, чтобы внеурочная работа представляла собой стройную целенаправленную систему, основанную на единстве целей, принципов, форм и методов деятельности.

Одной из важнейших целей проведения внеклассной работы по математике является развитие интереса учащихся к математике, привлечение учащихся к дополнительным занятиям математикой: у учащихся должно развиваться желание проверить свои силы, математические способности, умение решать нестандартные задачи.

В то же время, включение школьников во внеурочную математическую деятельность помогает выявить учащихся, имеющих интерес и склонности к занятиям математикой, что весьма важно для решения вопроса о подготовке большого числа новых математических и научно-методических кадров.

Изучив рубрику «Открытый урок», размещенную в разделе «Фестиваль педагогических идей» официального сайта ИД «Первое сентября», приведем некоторые цифры, отражающие роль внеклассной работы по математике и отдельных ее форм в системе школьного математического образования в целом. Результаты анализа оформим в таблицу.

	Учебный год							
	2003 – 2004		2004 – 2005		2005 – 2006		2006 – 2007	
	кол-во	%	кол-во	%	кол-во	%	кол-во	%
Всего статей	269	100	572	100	583	100	495	100
Внеклассная работа	28	10,4	46	8	73	12,5	37	7,8
Внеклассная работа	28	100	46	100	73	100	37	100
Кружки Факультативы	5	17,9	12	26,1	19	26	7	18,9
Соревнования	16	57,1	23	50	36	49,3	17	45,9
Викторины Конкурсы	1	3,575	5	10,9	4	5,5	3	8,1
Спектакли	3	10,7	–	–	3	4,1	1	2,7
Вечера	–	–	3	6,5	3	4,1	3	8,1
Неделя математики	1	3,575	–	–	–	–	2	5,4
Творческий отчет	–	–	–	–	1	1,4	–	–
Олимпиады	–	–	1	2,2	1	1,4	–	–
Матер.(содержание)	1	3,575	2	4,3	6	8,2	4	10,8
Конструирование	1	3,575	–	–	–	–	–	–
Метод проектов	1	0,4	5	0,9	5	0,9	5	1
Элективные курсы	6	2,2	12	2,1	24	4,1	14	2,8

Основные задачи проведения внеклассной работы по математике: 1) диагностическая (определить степень заинтересованности и совпадения интересов учеников и учителей во внеклассной работе, место внеклассной работы по математике в школьной жизни, направленность этой работы и пр.); 2) организационная (вовлечь как можно большее число учащихся во внеурочную математическую деятельность); 3) развивающая (спланировать внеклассную работу по математике таким образом, чтобы занимательность и игровой компонент удачно дополняли познавательный и саморазвивающий компоненты деятельности); 4) воспитательная (сплотить ученический коллектив); задача по социализации личности учащихся; 5) профориентационная (помочь учащимся в профессиональном самоопределении).

Общим недостатком освещения организации и содержания внеурочных мероприятий в методической литературе и периодических изданиях является отсутствие классификаций, помогающих учителю разобраться в специфике того или иного мероприятия. В результате очень часто можно наблюдать следующую картину: содержание либо форма некоторого внеклассного мероприятия не соответствует желаемой цели, из-за чего само мероприятие буквальным образом срывается, идёт вопреки запланированному сценарию, не воспринимается всерьез частью (или большинством) учащихся, не реализует доминирующую идею и т.д.

Таким образом, первая проблема организации внеурочной работы по математике связана с выявлением и взаимным сопоставлением целей, принципов, форм и методов внеурочной деятельности. Сопоставление возможно в рамках, по крайней мере, классификации форм внеклассной работы по математике. Проведем классификацию форм внеклассной работы по математике по двум основаниям: по основной цели (виду) деятельности, по способам организации. Результаты представим в следующей таблице .

<table>
<tr><th colspan="4">Классификация форм внеклассной работы по математике</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Способы организации
Цель (вид) деятельности</th><th rowspan="2">Заочная форма</th><th colspan="2">Очная форма</th></tr>
<tr><th>закрытая
(в рамках детского объединения)</th><th>открытая
(для всех желающих)</th></tr>
<tr><td>Диагностическая цель, профессиональное определение</td><td colspan="3">НЕДЕЛЯ МАТЕМАТИКИ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Познавательная деятельность</td><td rowspan="2">Дистанционные курсы</td><td>Кружки, факультативы</td><td>Математическая экскурсия</td></tr>
<tr><td colspan="2">Творческий отчет</td></tr>
<tr><td>Общественная деятельность</td><td colspan="3">Школьная математическая печать</td></tr>
<tr><td>Ценностно-ориентированная деятельность</td><td>—</td><td>Пресс-конференция</td><td>—</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Художественная деятельность</td><td>Математическое моделирование и конструирование</td><td rowspan="2">—</td><td rowspan="2">Математический театр</td></tr>
<tr><td>Математическая сказка</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Спортивно-соревновательная деятельность</td><td colspan="3">Математические соревнования</td></tr>
<tr><td>Математические конкурсы</td><td>Математические олимпиады (внешкольные)
и турниры (КВН)</td><td>Математические викторины, бои и эстафеты</td></tr>
<tr><td>Свободное общение</td><td>—</td><td colspan="2">Математический вечер</td></tr>
</table>

Указанные формы часто пересекаются и поэтому трудно провести между ними резкие границы. Более того, элементы многих форм могут быть использованы при организации работы по какой либо одной из них. Например, при проведении математического вечера можно использовать соревнования, конкурсы, доклады и пр., учитывая их целеполагающую и функциональную составляющую. Каждая из выше перечисленных форм достаточно полно представлена в методической литературе. Ограничимся в рамках данной статьи описанием характеристических особенностей и некоторых проблем, присущих таким формам внеклассной работы, как математическая неделя, математические соревнования, пресс-конференции, кружковые занятия и математический вечер.

Математическая неделя является наиболее распространённым, обязательным и самым длительным и насыщенным мероприятием из всех форм внеклассной работы, требующим долгой и тщательной подготовки. Основная цель математической недели – диагностическая. Перечислим наиболее часто встречающиеся проблемы недели математики: 1) учащиеся с выраженными способностями к математике не желают участвовать в мероприятиях Недели; 2) учащиеся игнорируют мероприятия с ярко выраженной математической составляющей (олимпиады, конкурсы, творческие отчёты и конференции), но охотно посещают мероприятия занимательного по форме характера; 3) в подготовительной работе принимают участие лишь те, кому интересно то или иное мероприятие или же те, кто назначен ответственным; 4) выявленные за время проведения Недели учащиеся, обладающие математическими способностями, не собираются заниматься в соответствующих объединениях.

Соревновательные виды внеклассных мероприятий наиболее популярны, но пользуются успехом у учащихся лишь в том случае, когда основаны на занимательном практико-математическом материале; собственно математический материал пользуется меньшей популярностью и является, как правило, основой для соревнований олимпиадного типа. Проблематика математических конкурсов определяется, прежде всего, необходимостью отбора и составления конкурсных задач, отношением к представленным учениками формам отчётности и решением вопроса о награждении победителей. Другая форма соревнований – математические викторины – помимо проблемы отбора заданий (которые должны быть интересными, но технически не сложными) вызывает ряд проблем связанных с подготовкой, организацией и дисциплиной во время проведения викторины. Основная проблема математических боёв связана с деятельностью учащихся на подготовительном этапе и определяется необходимостью контроля учителя за этой деятельностью. Кроме того, во время проведения самого конкурса часто возникает проблемы нехватки времени: разбор одной задачи может длиться достаточно долго.

В старших классах средней школы важную роль в углублении знаний учащихся может сыграть такая форма организации внеклассной работы по математике как пресс-конференция, основные задачи которой – расширение и углубление учебного материала, ознакомление с новыми сведениями за счёт обращения к различным информационным источникам, формирование умения формулировать вопросы, анализировать и оценивать ответы товарищей. Основная форма работы учащихся в процессе подготовки к конференции – изучение информационных источников, а в ходе самого занятия – взаимообмен информацией, ведение тезисных записей, составление плана выступления, оппонирование и пр. В ходе изучения различных первоисточников, учащиеся вооружаются текстами статей математического содержания. На этом этапе необходимо учить школьников работать над математической статьёй, то есть не только читать, что в ней написано, но и восстанавливать все пропущенные логические связи, от общего случая переходить к частным конкретным примерам, по материалам статьи составить доклад, слайд-презентацию, библиографический список, перечень общих и частных вопросов интересующей проблемы и пр.

Одной из основных форм внеклассной работы по математике в школе является математический кружок, призванный вызывать у учащихся интерес к предмету, способствовать расширению математического кругозора и развитию математического мышления, формированию исследовательских умений, воспитанию инициативы и творчества. В основе кружковой работы лежит принцип строгой добровольности, согласно которому стать членом кружка может каждый желающий, а каждый член кружка должен подчиняться Уставу кружка (то есть соблюдать выработанные права и обязанности). План работы кружка составляется на весь учебный год. Кроме того, возможно планировать и работу разнообразных секций: историко-математической, научно-популярной, олимпиадной, конструкторской, математико-театрализованной и других. Альтернативой секционной организации работы кружка может стать проведение комбинированных тематических занятий, содержание которых разнообразно по сути и представлению. Например, занятие может начаться с театрализованной подачи некоторой математической (учебной) проблемы, которая в дальнейшем будет раскрыта с исторической точки зрения (доклады учащихся), проиллюстрирована рядом наглядных пособий (чертежи, схемы, макеты, модели и пр.), сформулирована в виде математической задачи, решена в общем виде и т.д.

Занятия математического кружка начинаются в середине сентября и заканчиваются в начале мая проведением итогового математического вечера.

Математический вечер – художественное, занимательное, познавательное мероприятие, основная цель которого – вовлечь учащихся в серьёзную самостоятельную работу по математике. С точки зрения педагогической целесообразности, период подготовки к вечеру имеет для непосредственных исполнителей гораздо большее значение, чем последующее участие в проведении мероприятия: в процессе подготовки к вечеру ученики изучают как материал основной темы вечера, так и широкий круг смежных проблем, зачастую знакомятся с новыми методами, способами, приёмами решения математических и практических задач.

Краткой характеристикой математического вечера мы заканчиваем обзор основных организационных форм внеклассной работы и присущих им проблем.

Ж.С. КЛУШЕВА

О ПРОБЛЕМАХ ИЗУЧЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ В МАЛОКОМПЛЕКТНЫХ ШКОЛАХ

Когда обсуждаются реформы среднего образования, то, как правило, предлагаемые организационные методы и формы ориентируются на городскую среднюю образовательную школу, реализующую идею непрерывного образования, хорошо укомплектованную, со средней наполняемостью классов – 25 человек и, по крайней мере, двумя классами в, параллели. К услугам учащихся такой школы – информационные ресурсы Интернет, богатые школьные библиотеки, помощь друзей, родителей и знакомых, различные учреждения дополнительного образования и прочее. Большая часть методических находок касается обучения математике учащихся именно таких школ, и обмен опытом осуществляется учителями, работающими в схожих условиях. А что делать педагогам малокомплектных школ, где учащихся – 50 человек, и из них половина учащихся начальной школы, а другая половина школьники среднего звена. Как им действовать в условиях реформы? Как организовать изучение математического материала нового содержания? Какие средства обучения будут при этом эффективнее? Недостаточная разработанность данных вопросов определила тему исследования, несмотря на убежденность части работников образования в бесперспективности подобных исследований и «вымирания» малокомплектных школ.

Малокомплектная сельская школа в условиях современной России – явление редкое, стремящееся к исчезновению в силу своей невыгодности: проблемы финансирования и материально-технического обеспечения, кадровые проблемы и проблемы набора и обучения детей ставит такие школы под угрозу расформирования.

С другой стороны сельская малокомплектная школа – явление уникальное. Перечислим основные характеристические особенности малокомплектной школы. 1) Это почти «семейный» коллектив, явно осознающий свою общность в деле образования, сплоченный и дружный. 2) Наполняемость класса от 1 до 10 человек позволяет применять технологии коллективных и групповых способов обучения в их невероятных комбинациях 3) Стираются границы между классно-урочной, внеклассной, внеурочной и домашней учебной работой, что позволяет, как нельзя лучше реализовать развивающие и воспитывающие задачи обучения. 4) Учителя такой школы – универсалы. Они, как правило, преподают не одну – две, а несколько учебных дисциплин, как в начальном, так и в среднем звене, реализуя тем самым интегративный подход к обучению. 5) Отсутствие доступа к информационным ресурсам характеризует, к сожалению, современную малокомплектную школу, принуждая учителей и учащихся работать по старинке: учебник – доска – мел – тетрадь.

В условиях современной малокомплектной школы выстраивать образовательный процесс необходимо в соответствии с известными дидактическими принципами наглядности, доступности, научности, проблемного обучения, а также с учётом специфических особенностей данных учебных заведений.

Анализ содержания материала по теме «Комбинаторика» показал, что вне зависимости от этапа обучения содержание математического материала инвариантно и включает в себя следующие разделы: 1) Понятие о комбинаторике. Исторические комбинаторные задачи. 2) Типы комбинаторных задач. 3) Правила произведения. 4) Понятие факториала. 5) Комбинаторные сочетания: перестановки, размещения, сочетания. 6) Способы решения комбинаторных задач: перебор вариантов, таблица вариантов, графы, граф-дерево вариантов, алгебраический метод.

Учитывая «идейную» сложность комбинаторного материала необходимо поддерживать внимание учащихся, излагая учебный материал «через задачи» занимательного характера или задачи, «взятые» непосредственно из жизненного опыта учащихся, а также через интеграцию с другими предметными областями.

В малокомплектной школе необходимо начать знакомство с комбинаторикой в начальной школе, и более подробно изучить материал в основной школе, используя коллективную технологию обучения: в одно время проводить (кружковые) занятия (цикл из 9 занятий) по комбинаторике отдельно со всеми учениками начальных классов (возраст 6-9 лет) и уроки (9 уроков) со всеми учащимися среднего звена (10-16 лет). После того, как тема будет изучена, рекомендуется организовать работу всех учащихся школы над совместным коллективным долгосрочным проектом «Комбинаторика вокруг нас».

Технология коллективного обучения, описанная в начале 20-го века А.Г.Ривиным будет наиболее эффективной в условиях современной малокомплектной школы, поскольку по своей численности и возрастным особенностям ученический коллектив Ривина близок к ученическому коллективу современной малокомплектной школы.

В разработанной нами системе обучения решению комбинаторных задач заложены основные принципы стратегии формирования гибкости мышления. Методика обучения младшеклассников включает несколько этапов, каждый из которых опирается на закономерности развития гибкости мыслительной деятельности детей и логику изучения комбинаторики. Каждый этап, хотя и взаимосвязан с возрастными способностями интеллектуального развития детей от 6 до 10 лет, не имеет жёсткой привязки к определённой возрастной группе; именно поэтому возможно обучение в разновозрастных коллективах. Этап (последний) обобщения рациональных приемов перебора является как итогом подготовки детей к введению комбинаторных формул, так и началом изучения теории множеств и логики науки математики.

В основной школе учащиеся должны освоить решение комбинаторных задач алгебраическим методом.

Содержание и методика изучения тем «Комбинаторные задачи и их решение» (I-IV классы) и «Элементы комбинаторики» (V-IX классы) рассчитаны на то, что в рамках коллективного способа обучения они будут изучаться один раз в четыре года и один раз в пять лет соответственно. Проблему организации дальнейшего изучения математического материала комбинаторного содержания, с учётом того, что первое обращение к нему и всесторонне изучение проходило в рамках коллективного способа обучения, предлагаем решить последующим ежегодным включением в процесс обучения так называемых **уроков одной задачи** (А.А.Окунев) комбинаторного содержания. Выделим основные характеристические особенности **урока одной задачи**:

1. На уроке решается одна единственная задача.
2. Цель урока двуедина: 1) направить деятельность школьников на исследование связей между данными задачи; 2) отработать умение делать логический вывод из полученных результатов.
3. Основная форма деятельности учащихся – исследовательская работа, включающая обязательно этап анализа условия и решения задачи.
4. Решение задачи несколькими способами.
5. Предваряющее домашнее задание по решению задачи; предварительная запись желающих рассказать на уроке решение выбранного ими этапа решения задачи.

В нашем случае, основу таких уроков составляет исследовательская работа по изучению новых комбинаторных соединений или новых способов решения комбинаторных задач. Содержание семи таких работ нами полностью разработано, сами работы частично апробированы в основной школе посёлка Лесной Дергачёвского района Саратовской области. Тексты работ – универсальны, как и содержание предлагаемых задач, однако, способы рассуждений на каждом этапе обучения – различны, поэтому в рамках одной исследовательской работы предложено несколько способов рассуждения (оформления решения) на усмотрение учителя, и возможно, учащихся. Тематика занятий определяется согласно следующей таблице.

З а н я т и я		
№	**Тема**	**Содержание**
1	Разнообразие погоды	Размещения с повторениями, правило произведения, степень с натуральным показателем
2	Рассылка фотографий	Комбинаторные разбиения; размещения с повторениями; правило произведения; степень с натуральным показателем
3	Банковская карта: секретный код	Комбинаторные разбиения; размещения с повторениями; правило произведения; степень с натуральным показателем
4	Команда космического корабля	Комбинаторные задачи с ограничениями; правило произведения; дерево вариантов
5	Как поделить фрукты?	Комбинаторные разбиения; перестановки с повторениями; сумма ***n*** членов арифметической прогрессии
6	Львы и тигры	Комбинаторные задачи с ограничениями; перестановки, размещения; правило произведения
7	Покупка пирожных	Сочетания и перестановки с повторениями

Кроме всего прочего, нами предусмотрена возможность развития комбинаторного стиля мышления сельских школьников посредством решения нематематических задач нематематическими методами (судоку, лингвистическая комбинаторика, различные головоломки и пр.).

С.В. ЛЕБЕДЕВА, О.В. ДОКТОРОВА

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ

Задачи на построение являются важным средством формирования у учащихся геометрических представлений в целом. Лучше всего об этом сказано у Дж.Пойа: «Вычерчивание или построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки традиционно занимает большое место в преподавании планиметрии. Простейшие из этих построений используются чертёжниками, но в остальном практическая ценность геометрических построений незначительна, а теоретическое значение невелико. И всё же место, занимаемое такими построениями в программе обучения, полностью оправдано, так как они представляют собой наиболее пригодное средство для ознакомления начинающего с геометрическими фигурами и лучше всего подходит для освоения путей решения задач».

Выделим некоторые проблемы организации процесса обучения учащихся решению задач на построение.

Первая проблема связана с умением провести анализ условия задачи и наметить план её решения.

Задача 1. ***Дана равнобокая трапеция. На оси симметрии трапеции построить точку P, из которой обе боковые стороны видны под прямыми углами.***

Решение. Анализ: ***P – искомая точка. Правая сторона видна из P под прямым углом, следовательно, $\angle P = 90°$. Треугольник, в основании которого – боковая сторона***

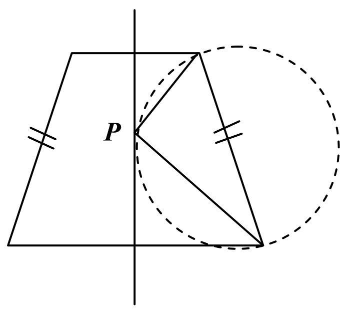


Рис. 1

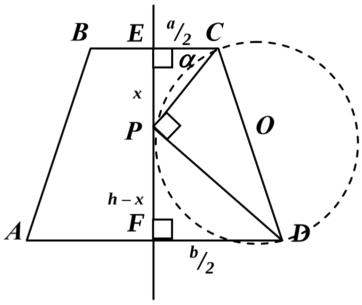


Рис. 2

трапеции, а противолежащий угол P – прямой, является прямоугольным (рис.1). Из этого следует, что P лежит на описанной около прямоугольного треугольника окружности, центр которой – середина гипотенузы, то есть середина боковой стороны трапеции. Таким образом мы выяснили, что точка P – точка пересечения оси симметрии трапеции и окружности с центром в середине боковой стороны и радиусом, равным половине длины боковой стороны.

Построение: ***Пусть дана равнобокая трапеция ABCD: AB = CD.***

1. ***Отметить точку E – середину BC. Отметить точку F – середину AD. Провести прямую EF – ось симметрии трапеции.***
2. ***Отметить точку O – середину CD. Построить Окр(O, $^{CD}/_{2}$).***
3. ***Искомая точка $P = EF \cap$ Окр(O, $^{CD}/_{2}$).***

Доказательство ***следует из построения.***

Исследование (рис.2): ***Обозначим BC = a, AD = b, EF = h, EP = x, тогда PF = h – x. Обозначим $\angle ECP = \alpha$, тогда $\angle FPD = \angle EPF - \angle CPD - (180° - \angle CEP - \alpha)$.***

$$\angle FPD = 180° - 90° - (180° - 90° - \alpha) = \alpha.$$

Δ ECP ~ Δ FPD (по двум углам), следовательно, соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, то есть выполняется равенство: $\frac{a}{2} : (h - x) = x : \frac{b}{2}$.

Из этого равенства следует, что $x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{2}$. ***Следовательно, получаем:***

1. ***Если*** $h^2 > ab$, ***то задача имеет два решения.***
2. ***Если*** $h^2 = ab$, ***то задача имеет единственное решение.***
3. ***Если*** $h^2 < ab$, ***то задача не имеет решения.***

Проводя анализ с учётом симметричности боковых сторон относительно оси симметрии трапеции, построение можно свести к нахождению точек P_1 и P_2, то есть множества $\{ P_1, P_2 \} = Окр(O_1\ , {}^{AB}/_2) \cap Окр(O_2\ , {}^{CD}/_2)$, ***при этом P_1P_2 – ось симметрии трапеции (рис.3).***

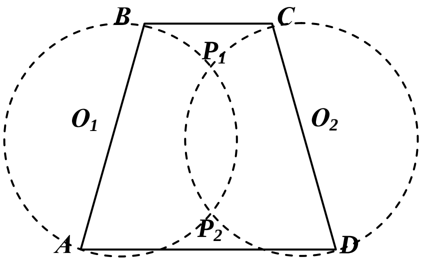


Рис. 3

На этом примере (решения задачи 1) хорошо прослеживается ведущая роль анализа в решении задачи. Поэтому на уроке: 1) следует уделять анализу задачи достаточно времени; 2) чертёж строить с максимальной степенью точности; 3) рассуждения должны быть чёткими, последовательными, доказательными, и должны быть осознаны всеми учащимися.

Первого требования можно добиться следующим методическим приёмом. Первую половину урока «отдают» под анализ всех задач, планируемых к решению, анализ проводят в форме коллективной беседы, чертежи (анализа) всех задач остаются на доске. По этим «готовым» чертежам ученики вторую половину урока самостоятельно проводят построения, доказательства и исследования задач.

Задачи на построение уникальны тем, что требуют знания <u>всех</u> изученных в курсе планиметрии фактов и умения <u>выбирать</u> только те факты, которые могут помочь в решении конкретной задачи. Поэтому при решении задач на построение возникает проблема повторения ранее изученного материала:

– Если перед решением какой-либо задачи повторить с учащимися те утверждения, которые помогут её решению, то не будет ли это прямой подсказкой?

– Если предоставить учащимся возможность самостоятельного поиска нужного факта, то большая часть учеников (как показала практика) его не найдёт (по истечению какого-то времени школьники просто прекращают поиск), другие – выберут «не то» утверждение и будут безуспешно пытаться применить его, третьи на этапе анализа условия воспользуются обратной теоремой, составят план решения, реализуют его, но получат непонятно какой результат, и только отдельные ученики интуитивно «решат» поставленную задачу, но не смогут обосновать своё решение. Так может быть лучше прямая подсказка?

– Если ученик выбрал «не тот факт», стоит ли наблюдать, что из этого получится, или же сразу указать на ошибку? Тогда, как организовать <u>самостоятельный</u> поиск, включающий в себя кроме всего прочего и умение опровергнуть неудачную гипотезу?

Одним из решений проблемы можно считать коллективные методы работы на этапе поиска решения.

Следующую проблему сформулируем так: если каждая задача на построение – уникальна, то, что же закреплять, и каким образом?

Закрепляют умения: 1) анализировать ситуацию, 2) проводить работу по поиску решения, 3) аргументировать все умозаключения, 4) проводить исследование решения.

Первые два умения закрепляют на уроке в процессе коллективных способов организации деятельности учащихся по решению задачи.

Потребность учащихся в аргументации своих умозаключений необходимо взращивать ещё в начальной школе. При правильной организации учебного процесса данное умение находится в постоянном совершенствовании, достигая своего наивысшего развития при изучении курса планиметрии. При решении задач на построение необходимость аргументации каждого шага заложена в самой схеме решения, третий этап которой указывает на соответствующий вид деятельности – доказательство. На уроках геометрии можно практиковать методический приём, сформулированный нами в виде следующего задания: *дано решение некоторой задачи на построение (указаны шаги построения), необходимо обосновать возможность построения на каждом шаге решения указанной геометрической фигуры.* Основой для таких заданий могут служить работы (контролирующего характера) самих учащихся, написанные ими ранее и сданные на проверку учителю.

Исследование решения включает в себя выяснение следующих вопросов: 1) всегда ли (при любом ли выборе исходных данных) можно выполнить построение избранным способом; 2) можно ли построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить; 3) сколько решений имеет задача при каждом допустимом выборе начальных данных, – то есть имеет свой целью установить условия разрешимости задачи и определить число решений?

Нередко исследование проводится в известной мере произвольно: рассматриваются непонятно по каким причинам выбранные случаи. При этом абсолютно не ясно, все ли возможные случаи рассмотрены. При исследовании достаточно сложной задачи такой подход может привести к потере решений, к тому, что некоторые случаи останутся без рассмотрения.

Чтобы достигнуть необходимой планомерности и полноты исследования, рекомендуется проводить его «по ходу построения». Сущность этого приёма (аналогично доказательству того, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям) состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение, и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то сколькими способами.

Для лучшего усвоения и закрепления материала по теме «Методы решения задач на построение» и с целью освоения каждого из введённых методов учителю рекомендуется классифицировать задачи по методам их решения. Результаты классификации желательно фиксировать в таблице (столбцы: 1 – номер/формулировка задачи, 2 – метод геометрических мест точек, 3 – метод вспомогательных фигур, 4 – метод геометрических преобразований, 5 – метод подобия, 6 – метод спрямления, 7 – метод обратности, 8 – алгебраический метод, 9 – замечания), заполнение которой может быть предложено учащимся с целью обобщения и систематизации материала.

Целесообразно создавать банк задач на построение – альбом, каждая страница которого посвящена решению «интересной» задачи. Чертежи выполняются учащимися (поочерёдно) в рамках домашней работы с учётом следующих требований: грамотность в построении, аккуратность в исполнении, общность, наглядность. Использование цветных ручек упростит восприятие чертежа.

Возможно включение учащихся в проектную деятельность с целью создания электронных презентаций, посвящённых решению наиболее сложных (с технической точки зрения) задач на построение.

«Рассматривание» чертежей с решением задачи способствует развитию мышления. Ещё один способ развития мышления посредством решения задач на построение – конструирование задачи «по готовым чертежам».

В соответствии с принципами открытости, сознательности и активности в обучении необходимо проводить самостоятельные работы на закрепление с достаточно большим набором задач различного уровня сложности. На таких работах можно предложить ученикам выбрать для решения любую задачу любого уровня сложности.

Организовать тематическую проверку знаний по теме рационально в форме зачёта. Первое зачётное задание – на знание опорных задач (простейшие задачи на построение), второе задание – решение задачи на построение средней степени сложности (из числа уже решённых).

В данной статье мы попытались охарактеризовать наиболее важные на наш взгляд методические проблемы организации обучения школьников решению задач на построение. Нерассмотренными остались проблемы содержания занятий по теме и организации уроков по теме, которые планируются исследовать в дальнейшем.

Литература

1. *Белошистая А.Б.* Задачи на построение в школьном курсе геометрии // Математика в школе, 2002, №9.
2. *Блудов В.В.* К теме «Геометрические построения» // Математика в школе, 1994, №4.
3. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1976.
4. *Шарыгин И.Ф. , Голубев В.И.* Факультативный курс по математике. – М.: Просвещение, 1991.

Э.Г. БАГАУТДИНОВА, В.Н. РЫЖОВ

ДИДАКТИЧЕСКАЯ ИГРА «ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ» НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

Известную задачу-головоломку «Ханойская башня», которую придумал в начале 20 века французский математик Э. Люка, можно эффективно использовать для организации увлекательной дидактической игры со школьниками на уроках информатики. Суть головоломки заключается в следующем. На подставке укреплены три стержня. На левый стержень нанизано несколько уменьшающихся колец: внизу – самое большое, на нем поменьше, сверху еще меньше и т. д. Кольца можно перекладывать со стержня на стержень, соблюдая два привила:

1) за один ход переносится только одно кольцо;
2) нельзя класть большее кольцо на меньшее.

Необходимо перенести все кольца с левого стержня на правый. Дополнительное задание: оценить затраты времени на перекладывание n колец, если за одну секунду перекладывается одно кольцо.

Существует легенда, согласно которой буддийские монахи в одном из монастырей перекладывают 64 золотых кольца ханойской башни. Если верить преданию, то с перекладыванием всех 64 колец наступит конец света…

Легенда вызывает неподдельный интерес, как у взрослых , так и детей, что позволяет применить эту задачу в дидактических целях. Решение этой и подобных задач является полезным для развития алгоритмического мышления школьников, что является одной из задач обучения информатике. Анализ алгоритма перекладывания колец может служить наглядным примером при изучении темы «Рекурсия».

Решение задачи начинают с трех, а затем и четырех колец. Обычно 3 кольца перекладывают все школьники, как правило, с первой попытки. Четыре кольца также удается переложить всем, но потратив на это в среднем 3-4 попытки. С пятью кольцами дело обстоит чуть хуже.

После того как учащимися освоен, в основном, алгоритм перекладывания колец можно предложить им игру-соревнование в следующих вариантах:

1) на время перекладывания заданного числа колец;
2) на максимальное количество переложенных колец за фиксированное время;
3) на максимальное количество переложенных колец без ограничения времени.

Соревнование можно проводить как одновременно между двумя учащимися, так и поочередно. Вместо колец со штырями можно использовать диски, вырезанные из пластика или плотного картона, и перекладывать их на столе.

В игре участвовали два ученика 6 класса, пять учеников 8 класса и несколько студентов университета. Восьмиклассники легко справились с перекладыванием трех и четырех колец, затрачивая на это пару минут. Пять колец одолела половина из них, а шесть колец осилил только один. Для перекладывания шести колец ученику понадобилось около трех минут. У шестиклассников дело обстояло примерно также, только как ни странно, им понадобилось на это чуть меньше времени.

Когда «Ханойская башня» была предложена студентам, оказалось, что первоначально на перекладывание трех и четырех колец они затрачивают примерно столько же времени, что и школьники. 100 % студентов справились с перекладыванием пяти колец, 80% – шести. Некоторым удалось переложить 10 и даже 11 колец. Рекордным было перекладывание 12 колец за 38 минут.

Оказалось, что у школьников эта задача вызывает также отсроченный интерес – 50 % участников пытались улучшить свои результаты по истечении времени (и им это удалось). Многие учащиеся демонстрировали свои успехи родителям и друзьям. Некоторые из учеников играли в эту игру даже на переменах, как в классной комнате, так и в коридоре на подоконнике.

Интерес для школьников представляет оценка времени, необходимого для перекладывания 64 колец. Для этого посчитаем число действий и время, необходимые для переноса башни из n колец. Если считать, что d_{n-1} – число действий, необходимых для переноса башни из n-1 кольца, то для переноса башни из n колец потребуется число действий равное $d_n = 2d_{n-1} + 1$. Эти действия включают в себя:

1) переложить башню из n-1 кольца на второй стержень;
2) переложить n-е кольцо на третий стержень;
3) переложить башню из n-1 кольца со второго на третий стержень.

Если считать, что одно кольцо перекладывается за одну секунду, то число действий совпадает со временем, необходимым для переноса башни из n колец. Тогда приближенное значение для затрат времени на перекладывание n колец можно вычислить по формуле: $t = 2^n - 1$.

Из этой формулы следует, что три кольца можно переложить за 7 секунд, четыре – за 15 секунд, пять – за 31 секунду, шесть колец – за 63 секунды, десять – за 1023 секунд, то есть за 17 мин 3 секунды. Дюжину (двенадцать) колец можно переложить за 4095 секунд, что равно 68 минутам и 15 секундам.

Если верить легенде о буддийских монахах, то конец света должен наступить через:
18 446 744 073 709 551 615 секунд = *307 445 734 561 825 860* минут *15* секунд = *5 124 095 576 030 431* час *15* секунд = *213 503 982 334 601* день *7* часов *15* секунд, что составляет приблизительно *584 542 046 090* лет.

По легенде, монахи сменяются из поколения в поколение и не прерывают процесс перекладывания колец башни уже не один век. Судите сами, стоит ли опасаться приближения конца света?

Литература

1. *Симонович С.В., Евсеев Г.А.* Практическая информатика: Учебное пособие для средней школы. Универсальный курс. – М.: АСТ-ПРЕСС: Инфорком-Пресс, 1998.

С.В. ЛЕБЕДЕВА, С.С. ХАРЬКОВА

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

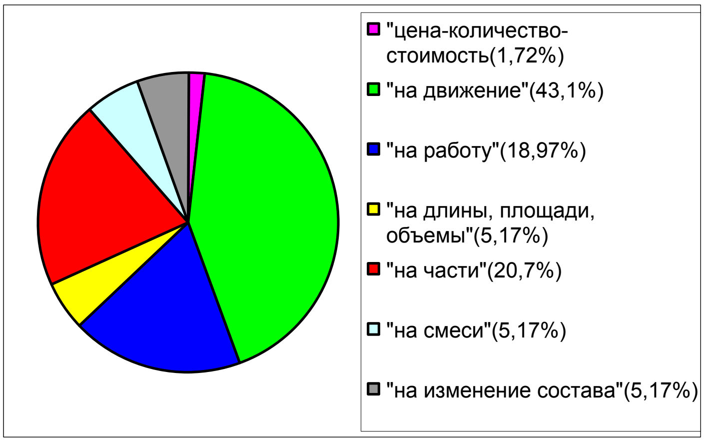
Содержание экзаменационной работы за курс математики основной школы отражает, в известной мере, содержание среднего математического образования выпускников, поэтому анализ экзаменационных заданий позволяет выделить наиболее перспективный математический материал с точки зрения реализации всех функций обучения (дидактической, развивающей и воспитательной).

Анализ первой (обязательной) части работы выявил следующие особенности содержания: 1) задания направлены на проверку базовой подготовки выпускников в ее современном понимании; 2) по сравнению с традиционным экзаменом усилены понятийный и практический аспекты; 3) проверке подвергается не только усвоение основных алгоритмов и правил, но и понимание смысла важнейших понятий и их свойств, содержания применяемых приемов, умение применять знания в простейших практических ситуациях; 4) при выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний, умение пользоваться разными математическими языками и переходить с одного из них на другой, распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках; 5) эта часть работы содержит 16 заданий с выбором ответа, с кратким ответом и на соотнесение, из 16 заданий – 4 сюжетных задачи: одна из задач – на умение работать с величинами, второй вид задач – на изменение и сравнение величин количественно и в процентах, задачи третьего вида на адекватность алгебраической модели содержанию задачи, в задачах четвертого вида условие задачи представлено графиком зависимости пути от времени, а требование сформулировано в виде вопроса.

Анализ второй части экзаменационной работы показал, что умение решать сюжетные задачи является одним из наиболее важных, подлежащих отдельной проверке. Задачи, позволяющие оценить сформированность данного умения, выделены в седьмой раздел «Текстовые задачи» и представлены несколькими видами, классификация которых дается в следующей таблице.

Задачи на зависимость				Задачи на соотношение между величинами, выраженными в процентах		
функциональную – $C=AB$ – между величинами						
"Цена-количество-стоимость" 1,7 %	**"На движение"** 43,1 %	**"На работу"** 18,9 %	**"На вычисление длин, площадей, объемов"** 5,2 %	**"На части"** 20,7 %	**На смеси/ сплавы** 5,2 %	**На изменение состава вещества** 5, 2 %

Обращает внимание следующий факт: в перечне видов задач отсутствуют так называемые «задачи на количество» (функциональная зависимость определяется формулой $a \cdot n = b$, где a – количество предметов в одном наборе, n – количество наборов, b – всего предметов), хотя, в содержании школьного курса математики, начиная с начальной школы, данный вид задач представлен достаточно широко).



Следующая диаграмма «Доля различных типов сюжетных задач во второй части экзаменационной работы по математике за курс основной школы» позволяет визуально определить, что большая часть экзаменационных задач – задачи «на движение». Выясним роль этого типа задач, особенности, основные этапы решения, требования, предъявляемые к организации работы учащихся по формированию умения решать задачи на движение.

Сюжетные задачи – это наиболее древний вид задач. Во всех сохранившихся письменных памятниках древности встречаются разные сюжетные задачи, в том числе и задачи на движение.

Например, во II веке в Китае решали следующую задачу: Дикая утка от южного моря до северного моря летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного моря летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетели одновременно. Через сколько дней они встретятся?

Задача из учебника Л.Ф. Магницкого: Послан человек из Москвы на Вологду, и велено ему в хождении своем совершати на всякий день 40 верст; потом другой человек в другий (следующий) день послан в след его и велено ему идти на день 45 верст, и ведательно есть, в коликий день постигнет (догонит) второй первого.

Приведем также пример старинной русской задачи.

Из Москвы в Тверь вышли одновременно два поезда. Первый проходил в час 39 верст и прибыл в Тверь двумя часами раньше второго, который проходил в час 26 верст. Сколько верст от Москвы до Твери?

Как видно, две последние задачи относятся к типу задач на движение. Это лишний раз подтверждает тот факт, что подобным задачам придавали особое значение во все времена.

Задачи на движение имеют важное практическое значение: это единственный вид учебных задач, в процессе решения которых учащимся необходимо использовать сразу несколько различных информационных и математических моделей: графические (чертеж, схема, граф), реляционные (таблица) и алгебраические (алгебраические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств). Графическая модель позволяет лучше понять взаимосвязи и отношения, описанные в условии задачи, табличная модель – определить наиболее удобный способ решения, математическая модель строится с целью получения ответа на поставленный вопрос. Таким образом, задачи на движение могут с успехом использоваться, в том числе, и при обучении моделированию.

Одной из особенностей задач на движение является то, что всякая такая задача требует обязательного анализа. Без предварительного анализа трудно определить, какой метод, и какая соответствующая математическая модель являются наиболее подходящими для решения данной задачи. Процессы реальной жизни характеризуются величинами, между которыми существуют определенные зависимости. Поэтому целесообразно научить детей начинать решение всякой задачи с установления процессов, описываемых в задаче, затем выявлять величины, характеризующие каждый процесс, уяснять функциональную зависимость между величинами.

Надежность результатов деятельности ученика при решении задачи обуславливается его умением выбирать нужные операции, приводящие к получению желаемого результата. Выбор операций определяется структурой задачи, а также сформированностью приемов умственной учебной деятельности учащихся. Из этого вытекает необходимость расчленения задачи на составные элементы, отбор и соединение этих элементов в ином плане, обеспечивающем активную работу учащихся. Из этого также вытекает необходимость расчленения хода решения задачи на отдельные логико-психологические этапы, каждый из которых представляет собой определенную законченную часть решения задачи, дающую возможность осуществить операции следующего этапа.

В логико-психологическом плане такие этапы, содержащие определенные рекомендации, представляют собой программу деятельности учащихся, вызывающую соответствующие операции на уровне познавательных процессов – восприятия и мышления.

Без конкретной программы деятельности для учащихся, без алгоритмов или общих указаний по поиску решения задач трудно организовать процесс учения школьников, так как этот процесс имеет своими составными частями подражание и последующее творчество.

Традиционно решение задач на движение проходит семь основных этапов. I этап – составление информационной модели задачи. Соотнесение задачи к одному из классов: определённых, недоопределённых, переопределённых (с противоречивыми или непротиворечивыми данными условия) задач. II этап – выявление основания для составления математической модели: числового выражения (или его отдельных арифметических элементов), уравнения, неравенства или системы уравнений и неравенств. III этап – составление математической модели. IV этап – решение уравнения (неравенства, системы), нахождение значения числового выражения. V этап – интерпретация результатов: исследование корней уравнения (системы) с целью установления решений задачи, смысловой анализ решения задачи. Проверка расчетов и обоснований. VI этап – запись ответа. VII этап – анализ решения задачи: комментирование решения задачи, возвращение к решению задачи (ретроспективный подход) с целью уяснения и уточнения идей и методов решения задачи, упрощение расчетов, рассмотрение всех вариантов данной ситуации, выяснение возможности обобщения, установление общих правил для решения подобных задач, поиск более рациональных приемов решения задачи.

В процессе решения задач на движение нужно придерживаться описанной выше схемы, однако, разбивать процесс решения на отдельные этапы и озаглавливать нет необходимости. Тем более нет необходимости оформлять решение, придерживаясь некоторого алгоритма: все зависит от характера и особенностей задачи, от того, с какой целью решается задача и на каком этапе обучения. Решение должно быть организовано так, чтобы принесло наибольшую пользу для осуществления тех целей, ради которых задача включена в процесс обучения математике.

Как было указано выше, успешное решение задач на движение зачастую зависит от правильного использования различных моделей. Наблюдение, анализ письменных работ и устных ответов учащихся позволяют утверждать, что основная причина всех допускаемых школьниками ошибок кроется в неправильной организации 1) первичного восприятия задачи, 2) анализа: должным образом не выяснена сложившаяся ситуация, отраженная в задаче, 3) работы по моделированию: первичному (информационному) и основному (математическому).

Обратимся к проблеме первичного восприятия задачи. Чтобы каждый ученик в соответствии с данными условия смог выполнить требование задачи, ему необходимо уяснить, о чем говориться в задаче: сколько ситуаций описано, сколько объектов участвует в движении, по какой траектории происходит движение и в каком направлении. Монологические формы выяснения этих вопросов, как правило, не приносят нужных результатов: не все учащиеся способны следить за логикой рассуждений педагога. Диалоговые формы работы позволяют подавляющему большинству учащихся уяснить суть решаемых проблем, но из-за несовершенства оперативной памяти многие ученики не в состоянии удерживать всю анализируемую информацию, и тем более осуществлять дальнейший анализ данных условия на предмет выявления функциональных взаимосвязей. Диалоговым способам организации процесса решения задачи должна сопутствовать визуализация выделяемой из текста задачи информации.

Уже в начальной школе, согласно требованиям программы, каждый ученик должен уметь не только кратко записать (сократить текст до возможного минимума) условие задачи, но и проиллюстрировать (визуализовать выделяемую из текста задачи информацию) условие с помощью рисунка, схемы или чертежа. В краткой записи используются и развиваются умения учащихся представлять информацию в вербальной форме. А схематическая запись нацелена на умение работать с образной информацией.

В V-VI классах, как правило, используются лишь разные виды краткой записи задачи да изредка готовые схемы (помещённые в учебнике), а создание информационной (графической) модели задачи и учителем и учащимися применяется крайне редко. Это аргументируется тем, что наглядность обязательна только на начальном этапе обучения, а с развитием у детей абстрактного мышления она свое значение теряет. А между тем наглядность нужна на всем протяжении обучения как важное средство развития более сложных форм пространственного мышления и формирования математических понятий. Как отмечает Л.Ш.Левенберг, «рисунки, схемы и чертежи не только помогают учащимся в сознательном выяснении скрытых зависимостей между величинами, но и побуждают активно мыслить, искать наиболее рациональные пути решения задач, помогают не только усваивать знания, но и овладевать умениями применять их».

Наряду с графическим представлением информации задач на движение используются схемы. Обучение умению строить схемы проводится по принципу от простого к сложному и реализуется по мере усложнения самих задач на протяжении всего курса математики.

Перечислим основные требования, предъявляемые к схемам, составляемым по условию задач на движение: 1) при движении по прямой расстояние принято обозначать отрезком; 2) равные расстояния обозначаются равными отрезками; 3) для обозначения суммы пройденных расстояний используются фигурные скобки; 4) если в задаче описываются две (и более) ситуации, строятся две (и более) схемы; 5) если в задаче описывается движение в одном направлении двух объектов, желательно разделять информацию об этих объектах, располагая ее в различных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок (модель пройденного пути); 6) место (пункт отправления, встречи, прибытия) обозначают либо точкой на отрезке и соответствующей буквой, либо черточкой, либо флажком; 7) время, затраченное на тот или иной отрезок пути, отмечается, как правило, над флажком; 8) стоянку можно обозначать выколотой точкой, под которой обозначается время, отведенное на стоянку, 9) направление движения указывают стрелками; 10) движение вслед изображается с использованием двух координатных лучей, располагающихся друг под другом; 11) в задачах на движение по течению (против течения) реки расстояние желательно обозначать наклонной линией, при этом «вниз» по наклонной обозначается движение по течению реки и «вверх» – против течения. Потребность в использовании наклонной определяется необходимостью сконцентрировать внимание обучаемых на изменении скорости объекта (имеющего собственную скорость) при его движении по реке. Кроме того, данный приём позволяет вести пропедевтическую работу по изучению основ векторной алгебры: если за $\bar{v}$ обозначить собственную скорость транспортного средства, за $\bar{v}_t$ – скорость течения, то скорость объекта по течению определяется векторной суммой $\bar{v}+\bar{v}_t$, а против течения – разностью векторов $\bar{v}-\bar{v}_t$; поскольку векторы коллинеарны, то $|\bar{v}+\bar{v}_t|=|\bar{v}|+|\bar{v}_t|$ и $|\bar{v}-\bar{v}_t|=|\bar{v}|-|\bar{v}_t|$.

Сначала с учащимся в ходе коллективной беседы разбираются принципы построения схем по данным условия задачи, потом предлагается система упражнений, в которую входят задания: 1) на выбор схемы, соответствующей условию задачи, 2) на чтение схемы, 3) на составление задачи по схеме, 4) на составление схемы по аналогии, 5) на достраивание незаконченных или исправление неточных схем.

Одна из трудностей, поджидающих ученика, заключается в необходимости так представить условие задачи в знаково-символической форме, чтобы она оказалась предельно понятной.

При решении задач на движение схемы выполняют ориентировочную роль, поскольку дают возможность одновременно видеть все связи между данными. Лучшему и быстрому осознанию сути явления, зафиксированного в схеме, помогает уменьшение количества перекодировок, которые потребуется делать при сопоставлении схемы с реальной ситуацией. Поэтому применяемая схема должна быть разумно сокращенной и упрощенной по сравнению с реальным явлением и в то же время наиболее естественной для каждой задачи.

В некоторых методических рекомендациях по поводу использования той или иной информационной модели задачи часто между строк читается такое положение: «запись должна отражать связи на том языке, на котором задача сформулирована», то есть если в задаче сказано: «больше на», то и в краткой записи должна присутствовать эта фраза. Считая это положение разумным, причислим его в дальнейшем к перечню тех требований, которые мы будем предъявлять к таблицам, но в случае схематической записи условия данное положение будем считать излишним. Кроме того, подмена текстовой информации её арифметическим эквивалентом также недопустима: возможная при этом ошибка выявится только на этапе интерпретации результатов (или не выявится вообще) при использовании алгебраических моделей или в ходе решения задачи арифметическим способом (невозможно осуществить некоторое арифметическое действие на множестве натуральных или положительных рациональных чисел).

Графико-схематическая модель позволяет перейти к построению другой информационной (реляционной) модели – таблице. Целесообразно строить две реляционные модели, в первой – размещать информацию на языке задачи, во второй – ту же информацию представлять на алгебраическом языке.

С таблицами учащиеся работают, начиная с начальной школы; главная цель при этом – научить учащихся размещать и считывать информацию с таблицы. Кроме того, уже в начальной школе идёт пропедевтическая работа по использованию информации, размещённой в таблице, для составления числовых выражений.

В 5-6 классах задачи, решаемые школьниками, усложняются. Наряду с арифметическим методом начинает использоваться алгебраический метод решения текстовых задач, подразумевающий адекватный выбор переменных условию и требованию задачи. Поэтому на данном этапе обучения целесообразно использовать табличную информационную модель задачи для осуществления такого выбора.

В 7 классе необходимость такой работы обуславливается возросшей степенью сложности решаемых задач, психолого-педагогическими предпосылками решения задач, расширением математического аппарата для осуществления такого решения и ещё рядом второстепенных причин. Поэтому, овладение учащимися умением строить адекватные задаче реляционные модели можно считать одной из основных целей обучения математике в 7 классе. Отметим, что этот этап обучения решению задач тесно связан с аналогичным методом представления информации, используемым в информатике. Таким образом, работа учителей математики и информатики в этом направлении должна быть хорошо организованной, с учётом требования единообразия.

Мотивация обучения табличному моделированию обусловлена психолого-педагогическую ценностью реляционных моделей: когда решающий не в состоянии изначально представить себе целиком план решения задачи, то информация, представленная в таблице позволяет ему наметить некоторые ключевые моменты плана, расчленить задачу на ряд элементарных и решить некоторые из них, осознать и сформулировать причины возникших затруднений и пр. В законченном (числовыми данными заполнены все ячейки) виде таблица дает возможность обобщения способов решения типовых задач, а также осознания некоторых эвристических приёмов деятельности.

Обратимся к объекту нашего исследования – задачам на движение. Таблица, являющаяся информационной моделью этого типа задач инвариантна по форме: состоит из четырёх столбцов. В первом содержится информация об объектах движения, во втором указывается скорость движения рассматриваемых объектов, в третьем – время движения, в четвёртом – пройденный путь (расстояние). Менять содержание столбцов местами в зависимости от того, какой элемент требуется найти, как это советуют некоторые учителя математики, с практической точки зрения нецелесообразно, а с методической точки зрения – неверно: нарушается требование посильности предлагаемых для выполнения заданий.

Сформулируем другие требования к составлению таблиц первого рода, то есть содержащих информацию на языке задачи: 1) количество строк зависит от количества участников движения и количества ситуаций; 2) при необходимости можно использовать сложные таблицы, содержащие объединённые ячейки и (или) «разбитые» ячейки; 3) если рядом стоящие ячейки столбца содержат одинаковую информацию, то они подлежат объединению, если эти ячейки разделены и не содержат явной числовой информации – их равенство обозначают соединяющим отрезком с точками на обоих концах ●————●; 4) если ячейки столбца содержат информацию, связанную некоторым отношением, то существующую зависимость означают отрезком с точкой на одном конце (зависимое значение) и стрелкой на другом конце (независимое значение) ●————► и подписывают условие зависимости, например, *«? на 2 м б.»* или *«? в 2 раза м.»*; 5) разность двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца обозначают дугой со стрелками на двух концах, сумму двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца обозначают фигурной скобкой; 6) в ячейке содержится либо число, либо вопрос, либо вопрос и условие зависимости, главный вопрос (требование) задачи обводится в овал ?.

Требования к составлению таблиц второго рода, содержащих информацию на алгебраическом языке следующие: 1) форма таблицы второго рода полностью соответствует форе таблицы первого рода, поэтому способ решения задачи с использованием таблиц первого и второго рода назовём решением задачи с использованием таблицы наложений; 2) числовые величины переносятся из таблицы первого рода без каких либо изменений; 3) неизвестные величины записываются в виде арифметических действий или алгебраических выражений с переменной в соответствии с условиями зависимости и основной функциональной зависимостью ($s = v \cdot t$); 4) наличие и количество переменных определяется наличием или отсутствием условий зависимости; 5) если информация в ячейке получена двумя способами, то осуществляется разбиение ячейки по диагонали. Но основе информации таких ячеек составляется уравнение; 6) знаки суммы и разности двух величин (двусторонняя стрелка и фигурная скобка) в таблице первого рода предполагают трансформацию соответствующих ячеек таблицы второго рода; 7) единицы измерений величин не указываются; 8) возможно в правом верхнем углу указать ограничения, накладываемые не неизвестные величины.

В процессе решения задач на движение важно целенаправленно работать над формированием и развитием у учащихся умения выбирать величину, которая будет неизвестной в уравнении, составленном по тексту задачи.

Решение задач с использованием таблицы наложений проиллюстрируем на конкретном примере: «Из пункта А выехал велосипедист. Одновременно из пункта В, отстоящем от А на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Скорость велосипедиста 12 км/ч, мотоциклиста – 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта А мотоциклист догонит велосипедиста?»

В задаче рассматриваются два объекта, что предполагает наличие трёх строк таблицы первого рода: «Характеристики движения» (участники/ситуации – скорость – время – расстояние), «Велосипедист», «Мотоциклист». Составляется таблица 3×4. Поскольку время в пути одинаково для двоих участников движения, то следует объединить соответствующие ячейки столбца «Время». Устно указывается функциональная зависимость. Затем в таблицу вносятся два числовых значения: скорости – 12 км/ч и 16 км/ч, то есть указываются, какие из выделенных величин известны, и расставляются знаки вопроса вместо всех остальных величин (указываются неизвестные величины). Далее определяется зависимость между неизвестными величинами, что дополняет таблицу соотношением между пройденными расстояниями. Можно выявить зависимость и между известными величинами, что дополнит таблицу соотношением между скоростями и определит ещё один способ решения задачи. Выделяется главное требование (вопрос) задачи. Этим заканчивается этап анализа условия задачи.

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В			
М			

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12 км/ч*	*?*	*?*
М	*16 км/ч*		*?*

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12 км/ч*	*?*	**?**
М	*16 км/ч*		*?* *на 20 км б.*

Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12 км/ч*	*?*	**?**
М	*16 км/ч* **?**		*?* *на 20 км б.*

Рис.1

Процесс составления таблицы первого рода проиллюстрирован на рисунке 1.

По содержанию таблицы первого рода составляется таблица второго рода (рисунок 2): одним из трех возможных способов выбирается одно из неизвестных (обозначается буквой *x*), все остальные неизвестные величины выражаются через *x* (варианты таблиц – I-III). При этом возникает ситуация, когда информация в некоторой ячейке получена двумя способами (осуществляется разбиение ячейки по диагонали). Но основе информации разбитой по диагонали ячейки составляется уравнение. Кроме того, возможен арифметический способ решения (вариант IV).

I вариант			
	v	t	s
В	*12*	*x*	*12x*
М	*16*		*12x+20* / *16x*

IV вариант (1 действие)					
	v		t	s	
В	*12*	*16-12*	*?*	*?*	*20*
М	*16*			*?*	

II вариант			
	v	t	s
В	*12*	*x:12* / *(x+20):16*	*x*
М	*16*		*x+20*

IV вариант (2 действие)					
	v		t	s	
В	*12*	*4*	*20:4*	*?*	*20*
М	*16*			*?*	

III вариант			
	v	t	s
В	*12*	*(x–20):12* / *x:16*	*x–20*
М	*16*		*x*

IV вариант (3 действие)					
	v		t	s	
В	*12*	*4*	*5*	*12 ·5*	*20*
М	*16*			*?*	

Рис.2

Итак, по результатам составления реляционной модели задачи возможно составление соответствующей математической (разрешающей) модели данной задачи:

1) $12x+20=16x$, $x=5$, $12x=60$.

2) $x : 12 = (x + 20) : 16$, $12(x+20)=16x$, $4x = 240$, $x=60$.

3) $(x – 20) : 12 = x : 16$, $12x=16(x – 20)$, $4x=320$, $x=80$; $80 – 20 =60$.

4) 16 – 12 = 4 (км/ч) – скорость сближении; 20 : 4 = 5 (ч) – понадобиться, М. чтобы «покрыть» разницу в 20 км; 12 ·5 = 60 (км) – расстояние от А до встречи М. и В.

Кроме того, IV вариант реляционной модели задачи предусматривает алгебраическую разрешающую модель задачи – числовое выражение:

5) $12 \cdot (20 : (16 – 12))= 60$

На примере рассмотренной задачи можно сформулировать в явном виде и в дальнейшем исследовать проблему рациональности выбора неизвестных, для чего необходимо сравнение всех способов решения задачи (то есть информационных модели (схематическую и табличную), математической модели и тем решением, которое осуществляется в рамках составленной математической модели).

В рамках сформулированной проблемы учащиеся делают важный вывод: анализ содержания таблицы (информационной модели задачи) позволяет определить, какой способ решения задачи является наиболее рациональным.

Понятие «решающая математическая модель» было введено с целью показать, что эти модели создаются для решения (получения числового значения) конкретной сюжетной задачи. Составленная модель может представлять собой как арифметическое выражение, так и уравнение (систему уравнений).

В условиях средней школы необходимо в первую очередь формировать у учащихся *умение составлять уравнение.* При этом следует обратить внимание учащихся на тот факт, что при выражении одной и той же величины двумя способами (в таблице – соответствующая ячейка разделена по диагонали) уравнивают выражения, описывающие эти способы. Если же уравниваются различные величины, то при составлении уравнения учитываются отношения между ними.

Наличие в таблице двух ячеек разделённых по диагонали говорит о том, что разрешающей моделью задачи будет система двух уравнений.

Решение в рамках составленной математической модели проходит в соответствии с основными положениями соответствующей математической теории.

Например, уравнения могут иметь вполне определенные решения (одно, два или более), иметь бесконечное множество решений или же и не иметь решений. В уравнениях первого вида корни могут быть положительными, равняться нулю и/или быть отрицательными. При этом необходимо помнить, что не всякое положительное число может быть решением задачи.

Неопределенность уравнения связана с недостаточностью условий для получения ограниченного числа корней. Алгебраические выражения, составленные по условию задачи, нередко приводят в таких случаях к тождеству, а не к уравнению. В отдельных случаях неопределенные решения задачи имеют смысл.

Для того чтобы привлечь внимание учащихся к этапу интерпретации результатов разрешающей модели задач, необходимы упражнение следующего содержания: проверьте на достоверность полученные результаты.

№	Данные условия, требование задачи	Полученный результат	Аргументация
1	*В движении участвовали три автомобиля. Пройден путь в 1800 км…*	*Скорости машин равны: 2 км/ч, 120 км/ч, 620 км/ч*	
2	*За три часа человек прошёл 15,6 км..*	*Скорость человека равна 5 км/ч или (–5,2)км/ч*	
3	*Улитка проползла два метра…*	*Время, затраченное на путь 1/3 ч или (–3)ч*	
4	*В движении участвовали три автомобиля. Скорость одного на 20 км/ч больше скорости другого и на 10 км/ч меньше скорости третьего. Автомобили были в пути 4 часа…*	*Расстояние между первым и вторым автомобилем 40 км, между первым и третьим 600 км*	

С.В.ЛЕБЕДЕВА, В.В.ПИЛИПЕНКО

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ

Говоря об информационной культуре человека, подразумевают в первую очередь культуру информационной деятельности человека, которую понимают, прежде всего, как владение компьютерными технологиями, и уже затем, как видение окружающего мира под особым информационным углом зрения.

Становление и развитие компьютерной компетентности и, связанной с нею, информационной компьютерной культуры – основная цель школьного курса информатики и информационно-коммуникационных технологий. Реализация второй составляющей информационной культуры – видение окружающего мира под информационным углом зрения – забота всех учителей-предметников, и одна из развивающих целей школьного курса математики.

Тесное сплетение дидактических и развивающих целей и задач школьного курса математики особенно прослеживается при организации процесса обучения решению текстовых задач. И если решение текстовой математической задачи относят к специфическим математическим видам деятельности, то решение сюжетных задач (прикладного и практического характера) основано и предполагает участие обучающихся в различных видах деятельности, и в том числе, и в информационной деятельности, которая в свою очередь требует достаточного уровня развития информационной культуры.

Зачастую низкий уровень информационной культуры не позволяет учащимся использовать математические знания для решения той или иной сюжетной задачи. Попытки учителей решить данную проблему, усилив математическую составляющую образования, обречены на провал. Косвенно этому мы находим подтверждение в системах задач различных учебно-методических пособий. Так, в сборнике заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе [1] во втором разделе, где содержаться задачи, направленные на дифференцированную проверку повышенных уровней подготовки учащихся по математике, помещена задача (7.49(1)), решение которой оценивается максимальным количеством баллов (6 баллов): *В свежих яблоках 80% воды, а в сушёных – 20%. На сколько процентов уменьшается масса яблок при сушке?*

Всё, что требуется для решения задачи, это умения: 1) выделить пропорцию, и 2) найти её неизвестный член (VI класс, обязательный уровень подготовки). Более того, задача решается устно в течение одной минуты! Так за что же 6 баллов?.. Чем задача сложна? А она действительно сложна для учащихся не только IX, но и XI класса.

С точки зрения математической техники задача проста: неизвестный член пропорции умеют находить все учащиеся. С идейной же точки зрения задача кажется трудной: как найти ход решения, «увидеть» пропорцию, с чего начинать? У учителя-практика есть готовый ответ: с анализа и краткой записи условия задачи! Однако, анализ задачи – достаточно сложная умственная операция, требующая прекрасно развитых математической памяти, комбинаторного и логического мышления. Это дано не каждому! А краткая запись условия?…

Св.яб.– 80% воды
Суш.яб.–20% воды
На ск.% стала м. масса яб.?

Масса св.– ?– 80% воды
Масса суш.– ?– 20% воды
На ск.% стала м. масса яб.?

Всё это образцы отсутствия информационной культуры: ни одна краткая запись не отражает полностью ситуации, описанной в задаче, не позволяет провести анализ условия, наметить план решения задачи и успешно осуществить его.

При наличии адекватной информационной модели задача, напомним ещё раз, решается устно. Значит, в первую очередь необходимо составить адекватную задаче информационную модель, например такую, которая задана таблицей 1.

Таблица 1

Я Б Л О К И				
	СВЕЖИЕ		СУШЁНЫЕ	
	в %	масса в кг		в %
неизменное вещество				
вода	*80%*			*20 %*
ВСЕГО	*100%*	*1*		*100%*

На ? м. (в %)

Процесс решения задачи – заполнение пустых ячеек таблицы – зафиксирован в таблице 2. В углу соответствующих ячеек проставлен порядок арифметических операций (этапы решения задачи).

Таблица 2

Я Б Л О К И				
	СВЕЖИЕ		СУШЁНЫЕ	
	в %	масса		в %
неизменное вещество	*1)* ***20%***	*4)* ***0,2***	*5)* ***0,2***	*2)* ***80%***
вода	*80%*	*3)* ***0,8***	*6)* ***0,05***	*20 %*
ВСЕГО	*100%*	***1***	*7)* ***0,25***	*100%*

На ? м. (в %)

8) ***1 – 0,25 = 0,75 = 75%.***

Ответ. ***Масса яблок при сушке уменьшилась на 75%.***

Преимущества таблицы очевидны:

1. Информация в таблице предельно систематизирована. В закрашенной ячейке содержится основное требование (главный вопрос) задачи.

2. Таблица задаёт программу решения задачи.

3. Появляется возможность устных вычислений с последующим занесением результатов в пустые ячейки.

4. Процесс заполнения пустых ячеек (с числовым значением) предельно прост и задаётся следующей схемой.

Пустая ячейка		
единственная в столбце:	не единственная в столбце,	
выполняется соответствующее арифметическое действие (сложение или вычитание).	единственная среди четырёх ячеек, составляющих пропорцию:	не единственная среди четырёх ячеек, составляющих пропорцию:
Например, при заполнении таблицы 1, это операции 1, 2, 4 и 7.	находится неизвестный член пропорции.	перенос информации в соответствии с условием задачи
	Например, при заполнении таблицы 1, это операции 3 и 6.	Например, при заполнении таблицы 1, это операция 5.

Но откуда взялась приведённая таблица, кто, а, главное, как её составил?

Хочется думать, что приведённая информационная модель – форма таблицы 1 – наша методическая находка, хотя вполне вероятно, что любители табличной записи текста задачи создали что-то подобное. И это не случайно: стремление к наглядности, визуализации информации, её систематизации, желание хоть в какой-то степени автоматизировать процесс решения приводит к сознательному поиску различных табличных форм, усовершенствованию уже имеющихся, созданию новых, более универсальных (для широкого круга задач) или специфических (для задач какого-то конкретного типа).

Применим имеющуюся форму для решения задачи 7.49(2) из сборника [1]: *Абрикосы при сушке теряют 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат абрикосы, если в сушёных абрикосах 25% воды?*

С учётом того, что вычисления проводятся мысленно, условие, решение и ответ задачи будут заданы таблицей 3.

				Таблица 3
А Б Р И К О С Ы				
	СВЕЖИЕ		СУШЁНЫЕ	
	в %	масса		в %
неизменное вещество	8) ***30%***	6) ***0,3***	5) ***0,3***	4) ***75%***
вода	9) ***70%***	7) ***0,7***	3) ***0,1***	*25 %*
ВСЕГО	*100%*	**1**	2) ***0,4***	*100%*
		100%	1) ***40%*** *на 60% <u>м.</u>*	

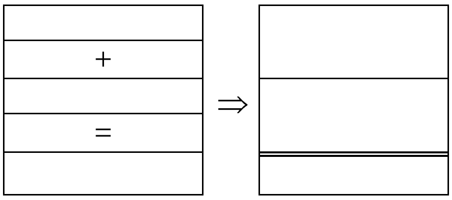
По результатам решения задачи 7.49(2) сформулируем выводы.

1. Заданная таблицей 1 информационная модель позволяет количественно описывать класс задач, одним из обязательных условий которых является испарение жидкости. Второе обязательное условие – известно процентное соотношение жидкости и неизменного вещества. Назовём этот класс – «задачи на проценты – испарение».

2. Исходная (базовая) форма модели имеет вид таблицы 4. Объединение ячеек «масса вещества в исходном состоянии» и «масса вещества в конечном состоянии» позволяет сократить количество шагов при решении задачи (становится ненужной операция переноса информации из одной ячейки в другую).

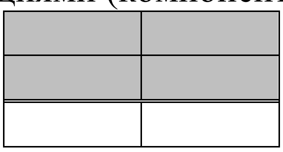
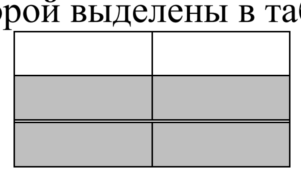
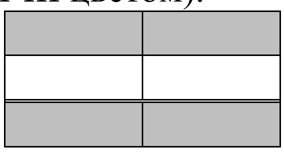
				Таблица 4
В Е Щ Е С Т В О				
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	ИСХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ		КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ	
	в %	масса		в %
неизменный компонент				
жидкость/вода				
ВСЕГО	*100%*	***m***		*100%*

Двойная черта отделяет сумму (фиксируемую в последней строке таблицы) от компонентов сложения.



По сути, столбцы таблицы представляют собой вертикальную таблицу «сложения» – первую изученную учащимися (ещё в начальной школе) информационную модель сюжетной задачи.

3. Каждое состояние (исходное и конечное) описывается тремя пропорциями (компоненты которой выделены в таблицах I-III цветом).

I.  II.  III. 

4. Возможны производные формы таблицы 4, например, таблицы 2 и 3.

Используя базовую форму, составим информационную модель, описывающую ситуацию задач 541 и 542 практикума по элементарной математике [2]: *Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные – 12%. Сколько получится сушёных грибов из 88 кг свежих?* (№541)

Таблица 5

ГРИБЫ				
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	СВЕЖИЕ		СУШЁНЫЕ	
	в %	масса (в кг)		в %
неизменный компонент	1) ***10%***	4) ***8,8 кг***		2) ***88%***
вода	*90%*	3) ***79,2 кг***	5) ***1,2 кг***	*12%*
ВСЕГО	*100%*	*88 кг*	6) ***10 кг***	*100%*

Ответ. ***Сушёных грибов – 10 кг.***

Пчёлы, перерабатывая цветочный нектар в мёд, освобождают его от значительной части воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчёлам для получения 1 кг мёда, если нектар содержит 70% воды, а полученный из него мёд – 17% воды? (№542)

Таблица 6

СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	НЕКТАР		МЁД	
	в %	масса (в кг)		в %
неизменный компонент	1) ***30%***	4) ***0,83 кг***		2) ***83%***
вода	*70%*	5) $1\frac{281}{300}$ ***кг***	3) ***0,17 кг***	*17%*
ВСЕГО	*100%*	6) $2\frac{23}{30}$ ***кг***	*1 кг*	*100%*

Ответ. $2\frac{23}{30}$ ***кг нектара.***

Предвосхищая протесты некоторых методистов – противников «громоздких» таблиц – в отношении узкого круга задач, решаемых с использованием данных таблиц, можно указать на, по крайней мере, ещё одну группу задач «на смеси и сплавы».

Задача 540 [2]: *Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?*

Таблица 7

СЫРЬЁ				
СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	I СОРТ		I I СОРТ	
	в %	масса (в т)		в %
неизменный компонент	1) ***75%***	3) ***28,5 т***		6) ***95%***
примеси	*25%*	2) ***9,5 т***	4) ***1,5 т***	5) *5%*
ВСЕГО	*100%*	*38 т*	*30 т*	*100%*

Задача 7.31(1) [1]: *Сколько граммов 75% раствора кислоты нужно добавить к 30 граммам 15% раствора, чтобы получить 50% раствор кислоты?*

Таблица 8

	I		II		I + II	
	в %	масса	в %	масса	в %	масса
кислота	*75%*	3) ***0,75x***	*15 %*	6) ***4,5***	*50%*	7) ***0,75x+4,5*** ⇕
вода	1) ***25%***	2) ***0,25x***	4) ***85%***	5) ***25,5***	*50%*	8) ***0,25x+25,5***
ВСЕГО	*100%*	***x***	*100%*	*30 г*	*100%*	***x+30***

Переходим к алгебраической модели: $0,75x + 4,5 = 0,25x + 25,5;\quad 0,5x = 21,\ x = 42.$
Ответ: ***42 г.***

Как видно из последнего примера, таблица, разработанная нами, помогает предельно легко перейти от информационной модели (и устного решения задачи) к модели алгебраической (и решению линейного уравнения). Время затраченное на решение задачи – около трёх минут. Отказ от использования таблицы увеличивает время на решение минимум в три раза.

Полагаем, что польза от использования информационных моделей сюжетных задач в обучении математике несомненна, а разработка методики работы по овладению умениями конструировать и применять подобные модели – дело самого ближайшего будущего.

Литература

1. *Алгебра:* сб.заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 кл./ [Л.В.Кузнецова, С.Б.Суворова, Е.А.Бунимович и др.]. – М.: Просвещение, 2007. – (Итоговая аттестация).
2. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов – М.: Просвещение, 1991.

А.Д. ГУСЬКОВ, Э.В. ЗЛОБИНА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ

Геометрические построения являются существенным звеном математического образования: они представляют собой мощное орудие геометрических исследований.

Изложение многих геометрических вопросов опирается на геометрические построения. Это особенно характерно для «доказательств существования»: существование центра окружности, вписанной в треугольник; существование подобных треугольников; существование параллельных прямых и многое другое доказывается с помощью построений.

Геометрические построения привлекали внимание еще древнегреческих математиков в VI – V вв. до н. э. Ими занимались почти все крупные греческие геометры: Пифагор (VI в. до н. э.) и его ученики, Гиппократ (V в. до н. э.), Евклид, Архимед, Аполлоний (III в. до н. э.) и многие другие. В IV в. до нашей эры греческие мыслители разработали ту общую схему решения геометрической задачи на построение (анализ – построение – доказательство – исследование), которой мы пользуемся и сейчас.

Древнегреческие математики считали «истинно геометрическими» построения, производимые циркулем и линейкой, не признавая «законным» использование других средств для решения конструктивных задач, при этом циркуль и линейка рассматривались как равноправные инструменты.

Но уже давно было замечено, что циркуль является более точным, более совершенным инструментом, чем линейка, что некоторые построения можно выполнить одним циркулем без употребления линейки, например, разделить окружность на шесть равных частей, построить точку, симметричную данной точки, относительно данной прямой. Также было обращено внимание на тот факт, что при резьбе на тонких математических пластинах, при разметке делительных кругов астрономических инструментов пользуются, как правило, одним только циркулем. Последнее, вероятно, и послужило толчком к исследованию геометрических построений, выполняемых одним лишь циркулем.

В 1672 году датский математик Мор, а затем и итальянец Маскерони в 1797 году пришли к выводу, что все геометрические задачи на построение, решаемые при свободном пользовании циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем.

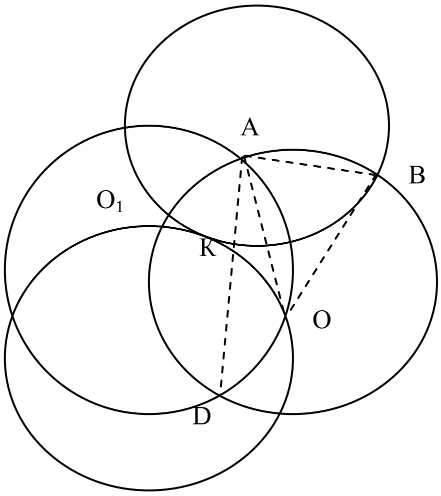
Общий метод решения какой-либо геометрической задачи на построение исключительно циркулем состоит в том, что намечают план ее решения посредством циркуля и линейки, а затем пользуются способами замены построений циркулем и линейкой построениями исключительно циркулем.

Конечно, решение геометрических задач циркулем зачастую приводит к громоздким и сложным построениям, что указывает с одной стороны, на малую эффективность этого метода, но трудами Мора, Маскерони и Адлера выделен ряд интересных задач, в которых демонстрируется красота и удобство этого метода.

Задача 1. ***Построить циркулем вершины равнобедренного треугольника со стороной а, у которого основание равно проекции одной боковой стороны на другую.***

Решение. ***Пусть Δ АОВ – искомый. Задача состоит в построении отрезка*** $a\sqrt{3}-a$.

Построение. ***Из точки O, как из центра, радиусом** a **проводим окружность.***



Из произвольной точки окружности тем же радиусом проводим другую окружность. Отрезок $AD = a\sqrt{3}(OA = OA_1 = a, AD = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}).$

Из точки D пересечения окружностей радиусом** a**, проводим другую окружность, отсекающую от AD отрезок AK = $a\sqrt{3} - a = x.$

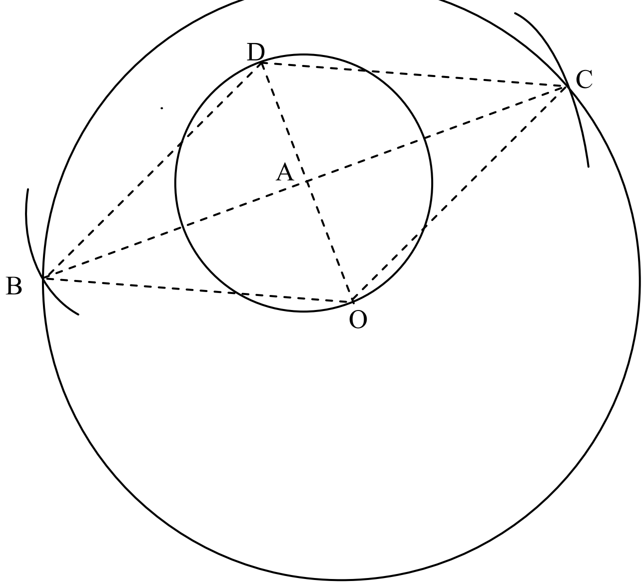
Для отыскивания циркулем точки K следует найти середину дуги OO_1.

Из точки A как из центра проводим дугу радиусом AK до пересечения в точке B с окружностью O.

Δ AOB – искомый.

Задача 2. ***Через данную точку внутри круга провести хорду, делящуюся в данной точке на равные части (построить концы хорды).***

Решение. ***Предположим, что задача решена и что хорда BC делится в данной точке A пополам.***



Продолжив отрезок OA на его длину до точки D и соединив точку D с точками B и C, получим ромб OBCD, следовательно, BD = DC, а сторона ромба равна радиусу окружности.

Построение. ***Из данной точки A радиусом OA проводим окружность и строим точку D, диаметрально противоположную точке O.***

Из точки D радиусом, равным радиусу данной окружности, засекаем данную окружность в точках B и C.

Хорда BC – искомая.

Доказательство. ***BD = DC = OC = OB (по построению), следовательно, OBCD – ромб и BA = AC, что и требовалось доказать.***

Геометрические задачи на построение, выполненные одним циркулем полезны и могут играть большую роль в математической подготовке школьника. Данный вид задач способствует развитию математической инициативы и логических навыков учащихся. Геометрические задачи на построение, выполненные одним циркулем не допускают стандартного подхода к ним и их формального восприятия. Данные задачи могут быть удобны для закрепления теоретических знаний учащихся по любому разделу школьного курса геометрии

С.Т. ТУЛЕПОВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

На уроках в современной школе геометрическим преобразованиям уделяется недостаточно внимания, хотя ещё в 70-80-е годы XX столетия данная тема была основной и изучалась подробно. Между тем посредством изучения геометрических преобразований в средней школе реализуются следующие цели: расширение аппарата решения математических задач; реализация межпредметных связей; развитие пространственного воображения и пространственного мышления; формирование мировоззрения.

Формирование геометрических знаний на уровне представлений наиболее характерно для детей младшего школьного возраста, так как их мышление опирается, в основном, на образы. Главная задача обучения младших школьников геометрии – это подготовка базы для изучения геометрии в среднем и старшем звеньях школы.

Геометрические преобразования в начальной школе изучаются на уровне знания-знакомства на уроках математики, конструирования, рисования, художественного труда (технология): даётся понятие о центральной и осевой симметриях, параллельном переносе, повороте. При этом никакие определения и правила не заучиваются, умения различать и осуществлять различные преобразования вырабатываются в результате многократных упражнений на построение образа той или иной фигуры (или части фигуры) при различных преобразованиях (в ходе практических работ).

Учителю математики, работающему в 5-6 классах, необходимо учесть тот факт, что в начальных классах учащиеся уже познакомились с геометрическими преобразованиями на наглядно-интуитивном уровне. С учётом этого педагог должен расширить круг знаний школьников о геометрических преобразованиях: выявить характерные черты изученных ранее преобразований, зафиксировать их в определении (соответствующего возрастным особенностям уровня сложности), выработать алгоритмы построения образов фигур для каждого из преобразований и пр.

Опережающее изучение на уроках математики геометрических преобразований и функций позволяет учащимся уже в 6 классе решать задачи следующего вида.

Задача. ***Построить график функции***

$$y = \begin{cases} 3, \text{ если } |x| \le 3, \\ 2x - 3, \text{ если } x \rangle 3, \\ -2x - 3, \text{ если } x \le -3. \end{cases}$$

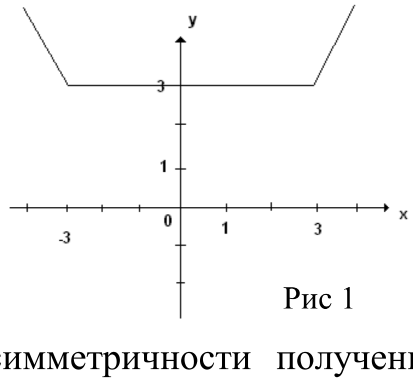


Рис 1

По результатам построения (по чертежу, рисунок 1) учащиеся должны сделать вывод о симметричности полученной линии: выявить взаимосвязь данных условия (алгебраической модели) и получившегося графика (графической модели), проводя анализ области определения и области значений функции; 2) определить вид симметрии; 3) составить аналогичную (по конечному результату) задачу.

Начиная с VII класса, учащиеся осваивают систематические курсы алгебры и геометрии (планиметрия). Геометрические преобразования при этом изучаются параллельно и, зачастую, без должного обобщения. Так, например, преобразования графиков функции в курсе алгебры воспринимаются учащимися как нечто совершенно иное и «не такое как в геометрии». Причины этому мы видим в следующем: 1) в курсе алгебры преобразования плоскости привязаны к аналитической записи функции, преобразования – аффинные, названия преобразований отражают специфику способа задания функции, например, «сдвиг вдоль оси» (в геометрии – параллельный перенос), «симметрия относительно оси» (в геометрии – осевая симметрия), «растяжение/сжатие» (в школьном курсе планиметрии аналогичные преобразования геометрических фигур не рассматриваются); 2) в курсе планиметрии идёт речь о симметриях фигуры отдельно, о симметрии фигур отдельно, о преобразовании плоскости отдельно, об отношении равенства и подобия фигур тоже отдельно – взаимосвязи между перечисленными точками зрения на геометрические преобразования не устанавливаются; 3) метод геометрических преобразований для решения основных типов задач (на доказательство, построение и вычисление длин, углов и площадей) не является основным; 4) теоретические сведения о геометрических преобразованиях в курсе планиметрии не скомпонованы в единую систему. Таким образом, обращение к геометрическим преобразованиям в курсе планиметрии основной школы можно считать ситуативно-иллюстративным (эпизодическим).

Курс геометрии X-XI классов полностью посвящен стереометрии, и с точки зрения изучения геометрических преобразований не предоставляет преимущественно новой информации.

В средней школе рассматриваются следующие виды преобразований: движение: симметрия (осевая, центральная), параллельный перенос, поворот; подобие (в частности, гомотетия) аффинные преобразования (расширение, сжатие). Элементы (геометрические), которыми задается преобразование, могут быть следующими: 1) ось, пара точек – это осевая симметрия; 2) центр симметрии, пара точек – центральная симметрия; 3) центр вращения, угол поворота, направление (по часовой, против часовой стрелки) – поворот; 4) направленный отрезок – параллельный перенос. Аналитически в курсе алгебры и геометрии задаются параллельный перенос, осевая симметрия, преобразования растяжения/сжатия; кроме того, аналитический способ задания функции или геометрической фигуры позволяет судить о наличии (отсутствии) симметрий изображения.

При углубленном изучении математики возможно вести изучение геометрических преобразований по двум основным направлениям. Первое направление реализует идею фузионизма: понятие преобразования наряду с понятием множества – основные понятие курса математики. Второе направление связано с практическим значением метода геометрических преобразований для решения геометрических задач.

В любом случае для более успешного осознания учащимися идеи геометрических преобразований необходим интегрированный элективный курс, позволяющий показать применение теории геометрических преобразований к решению практических и прикладных задач. В рамках предпрофильной подготовки возможны следующие курсы: «Паркеты, орнаменты, мозаика», «Применение метода геометрических преобразований к решению задач на построение», «Симметрия вокруг нас», «Симметрия геометрических фигур», «Симметрия в архитектуре» «Симметрия в природе» и пр.

В методической литературе выделяют следующие формы занятий, способствующих наилучшему (более эффективному) изучению геометрических преобразований: обобщающая лекция, посвященная какому-либо частному случаю преобразования; практические работы, на которых отрабатываются умения и навыки построения образов основных геометрических фигур при заданном преобразовании; исследовательские работы по изучению дополнительных свойств геометрических преобразований; метод проектов, как способ проявления творческих способностей учащихся в области математики со смежными с ней дисциплинами; кружки и факультативы; элективные курсы в рамках предпрофильной и профильной подготовки учащихся.

Перечислим основные виды и формы организации деятельности учащихся на этих занятиях, позволяющих продуктивно изучать геометрические преобразования: составление плана лекции; составление ОСК; составление вопросника «Верно ли, что …» по материалам лекции; иллюстрирование лекции; работа с геометрическими преобразованиями на клетчатой бумаге и на нелинованной бумаге; составление узоров, паркетов, орнаментов; преобразование (многократное и последовательное) данной геометрической фигуры; математические диктанты с «геометрическим» результатом; работа на компьютере с программой Microsoft Photo Editor, в которой можно совершать разные преобразования с фотографиями, картинками; можно использовать Microsoft Word или другие компьютерные программы; коллективное и групповое решение математической проблемы методом геометрических преобразований; решение геометрических задач; исследовательские работы по выявлению симметрии различных геометрических фигур и изучению дополнительных свойств геометрических преобразований; элементы соревновательной деятельности на занятиях математического кружка, факультатива и элективных курсов; конкурсы и викторины, реализующие познавательные и диагностические функции обучения.

Приведем примеры некоторых форм организации изучения геометрических преобразований.

1. Элективный курс предпрофильной подготовки учащихся «Паркеты. Орнаменты. Мозаика»

Целью данного курса является развитие пространственного воображения и пространственного мышления посредством изучения некоторых преобразований плоскости. Курс рассчитан на 8 часов. Содержание составляют следующие темы: 1) Геометрия и искусство, 2) Многоугольник, 3) Паркеты, 4) Мозаика, 5) Орнамент, 6) Резьба, 7-8) Симметрия в окружающем нас мире.

Элективный курс предоставляет учащимся возможность самостоятельной работы с теоретическим и практическим материалом под руководством учителя с учетом возможностей и способностей каждого ученика.

Для усиления межпредметных связей и практической направленности содержания курса, а также мотивации к изучению в качестве практических заданий можно предложить следующие:

1. Придумайте свои элементы паркета, которые представляют собой фигуры животных, птиц.

2. Поработайте реставраторами, решив задачу: «От украшающего здания орнамента осталась часть. Удалось разгадать, что этот фрагмент симметричен относительно прямой. Восстановите фрагмент орнамента». (Любой фрагмент).

3. Придумайте геометрический орнамент для украшения вашей комнаты.

4. Воспользовавшись различными первоисточниками, найдите паркеты (орнаменты) в произведениях искусства. Укажите первоисточники и паркеты (орнаменты) в них зафиксированные.

5. Опишите технологию составления некоторого паркета (орнамента, мозаики, узора).

2. Математический диктант

Математический диктант по существу является формой контроля знаний, умений, навыков. Но именно этой форме контроля присущи основные черты повторения материала: вспоминание и обобщение. В ходе математического диктанта ученики выполняют задания, диктуемые учителем одно за другим. Различают **предваряющие** математические диктанты (проводимые в рамках базового повторения с целью получения результатов, необходимых в последующем для объяснения нового материала, демонстрации некоторых утверждений и пр.) и **результирующие** диктанты (основная цель которого – проверка знаний, общеучебных и специальных умений). Ниже приведены задания предваряющих математических диктантов.

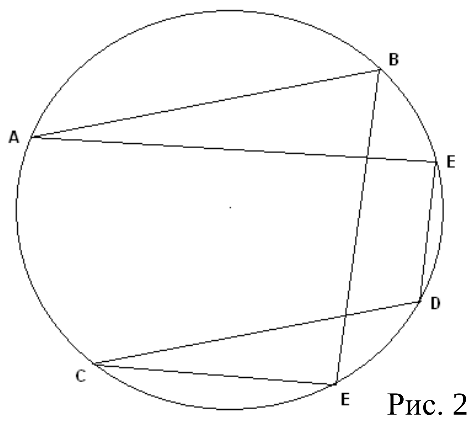


Рис. 2

Задания математического диктанта №1

1. ***Построить окружность*** *$\omega(0;7)$.*
2. ***Провести хорду*** *$AB \neq d$.*
3. ***Провести хорду*** *$AE \neq AB$.*
4. ***Построить хорду*** *$CD \parallel AB$.*
5. ***Построить хорду*** *$CF \parallel AE$.*
6. ***Сделайте предположение (сформулируйте гипотезу) относительно взаимного расположения прямых*** *BF* ***и*** *ED.*

Если основная цель математического диктанта – повторение, то во время его проведения возможны (со стороны учителя) фразы, активизирующие мыслительную деятельность учащихся и даже напрямую помогающие вспомнить или связать какие-либо факты. Например, ***«Вспомните определение осевой симметрии!»*** (к заданию 6 математического диктанта №2), ***«Вспомните все фигуры, обладающие свойствами, отражёнными в ходе построения, и выберите из этих фигур только ту, которая***

удовлетворяет <u>всем</u> зафиксированным при построении свойствам» (к заданию 7 математического диктанта №2).

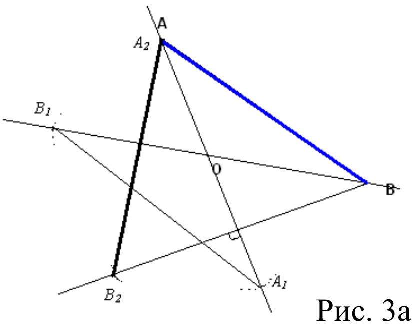


Рис. 3а

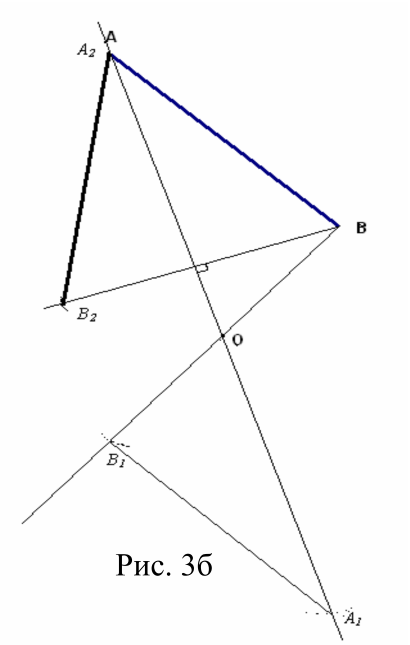


Рис. 3б

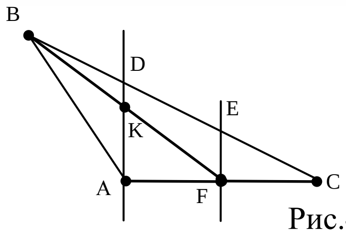


Рис.4

Задания математического диктанта №2

1. ***Отметьте точку О.***
2. ***Изобразите отрезок АВ, причем точка О не принадлежит отрезку АВ.***
3. ***Постройте точку A_1 – образ точки А при симметрии относительно точки О.***
4. ***Постройте точку B_1 – образ точки В при симметрии относительно точки О.***
5. ***Соедините точки A_1 и B_1.***
6. ***Постройте отрезок A_2B_2 – образ отрезка АВ при симметрии относительно прямой AA_1.***
7. ***Определите фигуру ABA_1B_1.***
8. ***Определите фигуру A_2BB_2.***
9. ***Определите фигуруBB_1B_2.***

3. Решение геометрических задач

Поскольку геометрические преобразования изучаются на ознакомительном уровне, решение задач ограничивается содержанием тем, касающихся отношений равенства и подобия. Поэтому нелишним будет исследование заданной условием конфигурации на наличие симметрий и подобий. Например, предлагается решить задачу: ***«Точка К – середина медианы BF треугольника ABC. Прямая AK пересекает сторону BC в точке D. Докажите, что BD = $^1/_3$·BC».*** Учащиеся, как правило, строят следующий чертёж (рис.4) и предлагают такое решение: ***«Через точку F проведём прямую, параллельную AD. Пусть она пересекает сторону BC в точке E. Так как AF = FC, то CE = ED (по теореме Фалеса для $\angle ACB$). Так как BK = KF, то BD = DE (по теореме Фалеса для $\angle FBC$). Таким образом, BD = $^1/_3$·BC, что и требовалось доказать».*** После завершения доказательства можно дать учащимся дополнительные задания: ***1) Отыскать в данной конфигурации пары подобных фигур, пары равных фигур. 2) Объяснить подобие и равенство выделенных фигур. 3) попробовать доказать утверждение, используя свойства подобия и равенства.***

Дополнительные задания, требующие от учащихся выявления некоторых геометрических преобразований, обладают несомненными развивающими функциями. Они позволяют, прежде всего развивать пространственное мышление учащихся, аналитические способности и некоторые компоненты творчества. Кроме того, закрепляются необходимые знания и умения, отражающие требования к геометричсекой подготовке учащихся: понимание условия задачи; владение соответствующей терминологией и символикой; умение выполнить чертёж, сопровождающий условие и решение задачи; использование известных методов решения (доказательств) и соответствующего теоретического материала.

О.М. КУЛИБАБА, Н.А. ИВАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

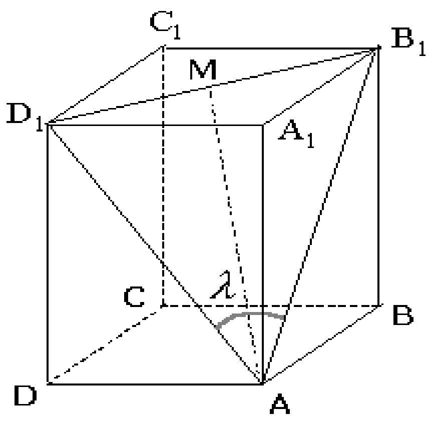
С включением понятия вектора в число ведущих идей школьного курса геометрии векторный метод стал одним из основных методов решения геометрических задач и доказательства теорем. Однако для учащихся этот метод остается сложным, в особенности применительно к стереометрическим задачам.

Основной причиной трудного усвоения векторного метода является то, что учащиеся недостаточно овладевают умениями и навыками, необходимыми для его применения при решении основных типов задач стереометрии. Не секрет, что эти задачи порой являются камнем преткновения даже для наиболее подготовленных учащихся: время, отводимое на изучение стереометрии, часто оказывается недостаточным и не позволяет должным образом продолжить развитие пространственного воображения, без которого чисто геометрическое решение задачи вызовет непреодолимые затруднения. Во многих случаях векторы позволяют компенсировать указанный недостаток и помогают даже слабо подготовленным по предмету ученикам находить решения довольно трудных задач, поскольку, как показывает практика, рассматриваемые методы хорошо усваиваются подавляющим большинством учащихся.

Разумеется, не всегда векторное решение предпочтительно. Все зависит от конкретной задачи, в частности от того, к какому классу она относится. Например, методы векторной алгебры оказываются более эффективными, когда речь идет о доказательстве параллельности прямых и отрезков, доказательстве перпендикулярности прямых, нахождении величины угла и длины отрезка, а также доказательстве зависимостей между длинами отрезков.

Рассмотрим эффективность применения векторного метода на примере решения одной задачи обычным методом и с помощью векторов.

Задача. ***Высота правильной четырехугольной призмы** h**. Из вершины основания проведены в двух смежных боковых гранях две диагонали, угол между которыми** λ**. Определить сторону основания.***



Решение. **Способ 1** [2] (с использованием понятия последовательности прямоугольных треугольников):

***Неизвестной величиной является сторона** $AB = a$.*

Проведем** D_1B_1 **и** $AM \perp D_1B_1$**. Обозначим** $D_1B_1 = d$**, тогда** $\triangle B_1D_1C_1$ **– прямоугольный и к нему можно применить одну из известных теорем для прямоугольных треугольников.

Выразим искомый отрезок** AB **через заданные величины** h **и** λ**, чтобы затем получить уравнение для исключения введенной величины** $d = D_1B_1$**.

Из** $\triangle B_1D_1C_1$ **(**$d = D_1B_1$**)[1]:** $d^2 = 2a^2$**,** $d = \sqrt{2}a$**,** $a = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**.

[1] В скобках указываются известные элементы в треугольнике.

Из $\triangle AB_1M$ ***(*** $\angle MAB_1 = \frac{\lambda}{2}$***,*** $MB_1 = \frac{d}{2}$***):*** $\sin\frac{\lambda}{2} = \frac{MB_1}{AB_1}$***,*** $AB_1 = \frac{d}{2\sin\frac{\lambda}{2}}$***.***

Из $\triangle ABB_1$ ***(*** $BB_1 = h$***,*** $AB_1 = \frac{d}{2\sin\frac{\lambda}{2}}$ ***,*** $AB = d\frac{\sqrt{2}}{2}$***):*** $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2}$***.***

Отсюда, $h^2 = \frac{d^2}{4\sin\frac{\lambda}{2}} - (\frac{d\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}} = a^2\frac{1-2\sin\frac{\lambda}{2}}{2\sin^2\frac{\lambda}{2}} = a^2\frac{\cos\lambda}{2\sin^2\frac{\lambda}{2}}$ ***.***

Ответ. $a = h\cdot\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\cos\lambda}}$ ***.***

Способ 2. ***Найдем скалярное произведение*** $\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}$***:***

$\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AB_1} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{BB_1} = h^2$***, так как*** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ ***вследствие перпендикулярности векторов сомножителей, а*** $\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{BB_1} = h\cdot h\cdot\cos 0 = h^2$***.***

Итак, $AD_1\cdot AB_1\cdot\cos\lambda = h^2$***, то есть*** $(a^2+h^2)\cos\lambda = h^2$***.***

Решая полученное уравнение относительно *a****, находим,*** $a = h\cdot\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\cos\lambda}}$ ***.***

Ответ. $a = h\cdot\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\cos\lambda}}$ ***.***

Очевидно, что векторный способ проще.

Проанализировав вышеприведенное решение, можно утверждать, что особую важность при решении задач имеет умение применять векторы в различных ситуациях. Оно предполагает [10, с.134]:

- перевод с геометрического языка на векторный и обратно (осуществление перехода от соотношения между фигурами к соотношению между векторами и обратно);
- Выполнение операций над векторами;
- представление вектора в виде суммы, разности векторов;
- представление вектора в виде произведения вектора на число;
- преобразования векторных равенств;
- переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот;
- выражение длины вектора через его скалярный квадрат;
- выражение величины угла между векторами через их скалярное произведение.

Несомненно, что перечисленные действия необходимо формировать непосредственно на уроках математики, посвящённых изучению векторов.

Успех в применении векторного метода в различных ситуациях также во многом обусловлен владением специальным словарем, служащим для перевода с языка геометрического на язык векторный и обратно. Этот словарь можно представить следующей таблицей [10, с.135], которую целесообразно составлять с учащимися вместе, добавляя в неё по мере необходимости всё новые и новые строки.

	Язык геометрии	Язык векторов
1	$AB \parallel CD$	$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}, k \neq 0$
2	$\overline{AB} \perp \overline{CD}$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
3	*Точка C принадлежит прямой AB*	$\overline{AB} = k\overline{BC}$, *или* $\overline{AC} = k\overline{BC}$, *или* $\overline{AC} = k\overline{AB}$, *или* $\overline{OC} = p\overline{OA} + q\overline{OB}$, *где O – произвольная точка и* $p + q = 0$
4	*M – середина отрезка AB*	$\overline{AM} + \overline{BM} = \overline{0}$ *или* $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, *где O – произвольная точка*
5	*M_1 – середина A_1B_1, M_2 – середина A_2B_2*	$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$
6	*Точка C делит отрезок AB в отношении AC : CB = m : n*	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ *или* $\overline{OC} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$, *где O – произвольная точка*
7	*ABCD – параллелограмм*	$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{MO} = \frac{1}{4}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD})$, *где M – произвольная точка, а O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD*
8	*M – центроид $\triangle ABC$*	$OM = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, *точка O – произвольная, или* $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$
9	*M – точка пересечения медиан $\triangle ABC$*	
10	*O, A, B, C – точки одной плоскости*	$x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} = \overline{0}$, *где x, y, z – действительны числа и* $x + y + z = 1$.
11	$AB \perp \alpha$, *CD и MK – пересекающиеся прямые плоскости α.*	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ *и* $\overline{AB} \cdot \overline{MK} = 0$
12	$\lvert AB \rvert = a$ *(отрезок AB длиной a)*	$\sqrt{\overline{AB}^2} = a$
13	*cos∠ABC*	$\dfrac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\lvert \overline{BA} \rvert \cdot \lvert \overline{BC} \rvert}$

Данный словарь включает в себя как наиболее важные векторные соотношения, которые рассматриваются в теоретическом курсе, так и ряд опорных задач, являющихся ключом к решению многих более сложных задач с помощью векторов. Кроме того, словарь включает в себя ряд опорных задач (условие принадлежности точки прямой, деление отрезка в данном отношении, условие принадлежности четырёх точек плоскости), записанных в символизированном виде, и являющихся ключом к решению многих более сложных задач. Словарём уместно пользоваться на самостоятельных работах обучающего, закрепляющего и обобщающего характера.

Однако, проблема составления и отбора специальных учебных задач по стереометрии, для которых можно и целесообразно применять аппарат векторной алгебры продолжает оставаться актуальной. В связи с этим является насущным вопрос о разработке элективного курса «Решение стереометрических задач векторным методом», рассчитанного на учащихся старших классов в условиях профильной дифференциации.

Приведем учебно-тематический план данного элективного курса и рассмотрим общие вопросы методического обеспечения разработанного курса «Решение стереометрических задач векторным методом».

№	Тема и содержание	Кол-во часов	Форма контроля
1	Развитие векторного исчисления	1	Доклады
2	Повторение теоретических сведений	1	Фронтальный опрос.
3	Разложение вектора по трем данным некомпланарным векторам	1	Самостоятельное решение задач
4	Отношение отрезков	1	
5	Длина отрезка и угол между скрещивающимися прямыми	1	Работа в группе
6	Расстояние от точки до прямой	1	Самостоятельное решение задач
7	Расстояние от точи до плоскости. Угол между прямой и плоскостью.	1	
8	Расстояние между скрещивающимися прямыми	1	
9	Угол между двумя плоскостями	1	
10	Контрольная работа	1	Итоговая контрольная работа
11	Разбор результатов контрольной работы	1	Самопроверка, взаимопроверка
12	Защита проектов	1	Защита проектов

Спецкурс предлагается для учащихся 11 классов.

В исследовании Похватилова А.М. [9], посвященном общим проблемам постановки элективных курсов, указывается, что наличие у спецкурсов специфических целей и задач должно отражаться, в частности, и на выборе соответствующих методов и форм обучения.

Специфика элективных курсов проявляется не в том, что есть какие-то «специальные» методы обучения, а в «нетрадиционных сочетаниях методов и приемов обучения, использовании этих методов в необычайных контекстах» [11, с.76]. Осуществить нетрадиционное сочетание методов обучения позволяют следующие особенности спецкурсов:

- В основе выбора учащимися спецкурса по математике лежит принцип добровольности. Поэтому мотивы его выбора следует учитывать при разработке методик обучения, поскольку для действия метода обучения необходимо соединение цели учителя с целями ученика.
- Опора на устойчивый интерес и склонность ученика к математике.

Эта фундаментальная особенность существенным образом влияет на выбор методов обучения и разработку методик, применяемых на элективных курсах. Например, в основном курсе математики лишь фрагментарно используется метод обучения, сущность которого состоит в том, что учащиеся самостоятельно раскрывают новое содержание при ненавязчивой помощи учителя.

Согласно Д. Пойа [8], этот метод называется эвристическим. При наличии интереса и сознательного отношения учащихся к учебе эвристический метод может стать определяющим при изучении спецкурса, поскольку в этих условиях не нужно побуждать учащихся к деятельности, а только необходимо направлять и контролировать ее.

В формы проведения занятий элективного курса были включены лекции, практические занятия, доклады учащихся.

На спецкурсах можно ставить вопрос «об ускорении изучения материала за счет значительной самостоятельной работы учащихся» [8,с.80]. Поэтому ведущее положение на элективных курсах занимает самостоятельная работа учащихся.

После первоначального знакомства с материалом, когда учитель введет основные понятия изучаемой темы, можно дальнейшее изучение этой темы провести в процессе индивидуальной самостоятельной работы каждого ученика. Основной заданный материал для всех учащихся дается один и тот же. Помощь и руководство со стороны учителя осуществляется строго индивидуально.

В рамках элективного курса применяются фронтальные формы работы: коллективное обсуждение и сравнение способов решения задач, поиски новых путей решения. Дискуссии, возникающие при коллективном обсуждении задачи, не только развивают самостоятельность суждений учащихся, но и способствуют более глубокому усвоению математической теории.

Любые новые математические понятия, вводимые на элективных курсах, «должны выглядеть в глазах учащихся убедительными, а главное – полезными (если не необходимыми)» [5, с.10].

На основании анализа научной и учебно-методической литературы, школьных программ, мы пришли к выводу, что для достижения этой цели при разработке и проведении спецкурса полезно руководствоваться следующими **методическими принципами.**

■ *Принцип опоры на знания и опыт учащихся.*

При введении нового понятия по возможности опираться только на уже известные учащимся понятия

■ *Принцип связи нового материала с ранее изученным материалом.*

Этот принцип в известной мере является следствием вышеуказанного. Чем больше устанавливается связей между новым материалом и ранее изученным, чем оно естественнее вытекает из старого материала, чем больше между ними преемственности, тем легче оно усваивается. С философской точки зрения это означает, что всякое явление надо изучать в его связях с окружающими явлениями.

■ *Принцип обобщения и конкретизации.*

От конкретных примеров к общему определению, а от него к конкретизации и практическому применению - такой метод знакомства учащихся с основными понятиями данного спецкурса.

■ *Принцип доступности.*

Принцип доступности требует, чтобы обучение осуществлялось на основе учета возрастных возможностей учащихся. Поэтому при формировании понятий целесообразно учитывать данные психологии.

При разработке содержания спецкурса мы исходили из возрастных особенностей развития учащихся старших классов. Психологами было установлено[4], [6], что возрастные психофизиологические особенности развития учащихся старших классов благоприятствуют постановке довольно сложных по научному уровню элективных курсов.

Перечислим основные **методические приемы**, используемые при изучении спецкурса «Решение стереометрических задач векторным методом».

а) Использование ранее изученного материала при знакомстве с новыми знаниями. Известно, что человеческая память устроена таким образом, что сведения, которые ощущаются как ненужные, довольно быстро забываются. Поэтому важно стремиться организовать обучение так, чтобы ранее изученный материал воспринимался школьниками как еще нужный, не подлежащий забыванию.

б) Побуждение учащихся к выводам, обобщениям.

Процесс обобщения в ходе обучения протекает при активном управлении со стороны учителя, который специально включает школьников в деятельность, формирующую умение обобщать изученное.

Обобщение понятий увеличивает познавательную ценность мышления, поскольку общие понятия дают возможность рассмотрения ранее изученного материала.

Таким образом, обобщение предполагает повышение теоретического уровня

в) Степень обобщенности знаний проверяется в ходе их переноса на решение новых учебно-практических задач. Поэтому необходимо обучать учащихся умению самостоятельно переносить приемы познавательной деятельности с ранее изученного материала на вновь узнаваемое.

Разработка занятий включала в себя следующие вопросы:

а) основной теоретический материал, рассматриваемый на занятии;
б) темы сообщений и проектов;
в) формы и методы проведения занятий;
г) задачи для осуществления учебной деятельности учащихся;
д) список используемой и рекомендуемой литературы.

Отбор задач для осуществления учебной деятельности.

В процессе обучения на элективном курсе решающая роль отводится задачам. Это наилучший способ обучения учащихся, дающий им не только сознательные и прочные знания, но и обеспечивающий одновременно их творческое развитие.

Задачи, предлагаемые учащимся для решения векторным методом должны составлять некоторую систему, удовлетворяющую известным дидактическим принципам: «от простого – к сложному», доступности, посильности, активности и пр. кроме того, эти задачи должны не только иллюстрировать векторный метод, но и демонстрировать его преимущество перед другими методами при некоторых условиях, содержащихся в тексте задачи. Выявление этих условий должно стать предметом отдельного исследования.

Вопрос контроля качества знаний учащихся.

Важным дидактическим средством, способствующим сознательному и прочному усвоению содержания материала курса, является контроль и самоконтроль учащихся.

Рассматриваемый элективный курс развивает и углубляет заложенные в основном курсе математики знания о методах решения стереометрических задач с использованием векторов.

Учителю курс поможет наиболее качественно подготовить учащихся к математическим олимпиадам, сдаче ЕГЭ, экзаменов при поступлении в вузы.

Литература

1. *Беккер Б.М., Некрасов В.Б.* Применение векторов для решения задач. Учебное пособие по математике для учащихся 8-11 кл.-СПб, 2002.-88с.
2. *Волхонский А.И.* Последовательности прямоугольных треугольников в решении геометрических задач // Математика в школе.1963 № 4. с. 50-51.
3. *Гусев В.А., Хан Д.И.* Методика решения геометрических задач с помощью векторов // Математика в школе.1978 № 3. с. 26-30.
4. *Ительсон Л.Б.* Проблемы современной психологии учения. Выпуск 2.-М.:Знание, 1969.
5. *Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л.* Основные понятия современного школьного курса математики: Пособие для учителя. /Под ред. А.И. Маркушевича.-М.:Просвещение, 1974.
6. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников.-М.: Просвещение, 1968.
7. *Лазар Г.* Применение векторов при решении задач // Математика в школе.1965 № 4. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
8. *Похватилов А.М.* К решению задач векторным методом // Математика в школе.1980 № 5. с. 27-30.
9. *Саранцев Г.И.* Обучение математическим доказательствам в школе. Кн. Для учителя.-М.: Просвещение, 2000.-173 с.
10. *Фирсов В.В., Шварцбурд С.И.* Методы обучения на факультативных занятиях по математике. / О современных методах обучения математике: Пособие для учителя: сборник статей.- М.: Просвещение, 1978.
11. *Уткина Т.И.* К методике обучения учащихся решению задач с помощью векторов // Математика в школе.1979 № 4. с. 37-39.
12. *Шестаков С.А.* Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. - М.: МЦНМО, 2005. – 112 с.

Е.В. ГОЛУБЦОВА

ОБЗОР ФОРМ РАБОТЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «МНОГОГРАННИКИ» В КЛАССАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

В «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года» (утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 29.12.2001 № 1756 – Р (п. 2)) отмечается, что необходимо создавать условия для введения профильного обучения на старшей ступени общеобразовательной школы. Надо создать систему специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся.

Учебный план профильного обучения должен включать три типа учебных предметов: базовые общеобразовательные, профильные общеобразовательные и элективные. Базовые, профильные и элективные курсы в учебном плане должны занимать соответственно 50%, 30% и 20%.

Анализ учебных программ позволил прийти к выводу, что при изучении учебных предметов в специализирующихся на математическом профиле учебных заведениях происходит по различным учебным программам, они могут быть как авторскими, так и установленными министерством образования РФ и дополненные в соответствии с требованиями того или иного учебного заведения; изучение геометрии в общеобразовательных учебных заведениях на профильном уровне происходит по стандартам, установленным министерством образования РФ, и программам, базирующимся на этом стандарте.

Данная статья посвящена проблемам изучения темы «Многогранники» через призму второй линии, то есть изучение многогранников в общеобразовательных учебных заведениям на профильном уровне.

Тема «Многогранники» является одной из центральных в курсе стереометрии средней школы. В процессе ее изучения синтезируются знания учащихся о многоугольниках из курса планиметрии, а также знания о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве из курса стереометрии IX класса. Это, естественно, требует от учителя особой организации повторения как соответствующих вопросов курса планиметрии, так и изученных ранее разделов стереометрии.

Ниже будут рассмотрены две наиболее важных проблемы изучения темы «Многогранники» в классах математического профиля, и на основе анализа содержания образования по данной теме будут даны методические рекомендации по решению данных проблем.

Первая проблема – это разобщенность содержания базового, предпрофильного и профильного обучения по математике, в частности по теме «Многогранники». Ученики средних общеобразовательных школ впервые сталкиваются с понятием «Многогранники» только на стадии профильного обучения, таким образом, затрудняется углубленное изучение данной темы, так как много времени тратится на объяснение, усвоение и закрепление основных понятий. Из первой проблемы, как было обозначено выше, вытекает другая очень значимая проблема изучения темы «Многогранники» в классах математического профиля – нехватка учебного времени. Достаточно много интересного, важного и сложного материала по данной теме рассматривается, на наш взгляд, не в должной мере. Разрешить эту проблему позволяют элективные курсы, факультативные занятия и необычная форма проведения уроков по данной теме. Ниже будут представлен обзор наиболее интересных вариантов.

Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана. Элективные курсы могут быть предметно-ориентированные и межпредметные.

Целью создания курса является: 1) повышение качества математической подготовки учащихся; 2) развитие кругозора учащихся; 3) развитие творческих способностей учащихся; 4) развитие мышления; 5) развитие эстетических качеств через красоту в геометрии; 6) систематизация и развитие знаний о многогранниках как о центральной фигуре в геометрии.

Основная рекомендуемая технология проведения занятий – проблемное обучение. Ход занятий учитель планирует сам, используя схемы.

Более подробная информация о содержании и реализации элективных курсов содержится в источниках [5], [6].

Факультативные занятия. В современных условиях информатизации образования предполагается широкое использование возможностей новых информационных технологий для повышения эффективности и качества учебно-воспитательного процесса в школе, в частности, для развития математических способностей и интереса к самостоятельным исследованиям на факультативных занятиях по математике и информатике. В настоящее время разработано значительное число программных средств, которые широко используются для решения научно-технических, инженерных и учебных задач: Maple, Derive, Mathcad, Mathematica и другие.

Например, программа факультатива ”Тела вращения и многогранники”, составленная для учащихся 10-11 классов с математическим уклоном, содержит следующие разделы:

Глава 1. Знакомство с пакетом Maple V. Краткая характеристика пакета Maple. Графические возможности Maple.

Глава 2. Поверхности и тела вращения. Основные команды модуля plots. Поверхности и тела вращения, изучаемые в школе: цилиндр, конус, шар.

Глава 3. Многогранники. Выпуклые многогранники: призма, пирамида, параллелепипед. Правильные многогранники. Архимедовы тела.

Более подробная информация об этом факультативном курсе дана в источниках [2],[4].

Факультативные занятия в игровой форме. На изучение темы «Правильные многогранники» отводят обычно всего 2 часа. Этого очень мало. Из-за нехватки времени не удается уделить должное внимание правильным многогранникам, а ведь они эстетически очень привлекательны. Поэтому стараются, как можно больше рассказать о них во внеклассной работе. Например, организуют устный журнал «Пять Платоновых тел». Подготовка к нему очень увлекает ребят. Они клеят модели правильных и полуправильных многогранников, изучают литературу по математике. Много интересного узнают и о Платоновых телах, и об ученых, которые ими занимались.

Но одна только лекция, пусть и в театрализованной форме, не может долго удержать внимание учащихся. Нужно находить элементы занимательности. Например, практикуют фокусы. Очень нравится ребятам фокус с октаэдром. Здесь представлен своеобразный дидактический фокус: с помощью простой уловки с числами заставляем учащихся разглядывать и разглядывать октаэдр.

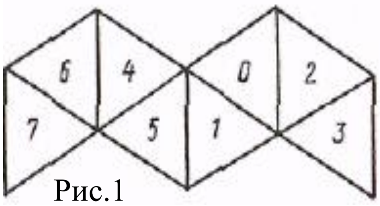


Рис.1

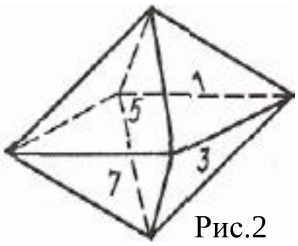


Рис.2

Для демонстрации фокуса необходимо пронумеровать грани октаэдра от 0 до 7, как это показано на его развертке (рис. 1, 2).

Данное факультативное занятие подробно описано в источнике [3].

Урок по теме: «Правильные многогранники» (10 класс, 2 часа)

Содержание: Правильные выпуклые многогранники. Теорема Эйлера (без доказательства).

Цель изучении: Познакомить учащихся с новым типом выпуклых многогранников – правильными многогранниками. Показать связь геометрии и природы.

Прогнозируемый результат: Учащиеся должны знать: определение правильного выпуклого многогранника, формулировку теоремы Эйлера; уметь 1) доказать существование всего пять видов таких тел, 2) охарактеризовать каждый вид правильных многогранников, 3) решать задачи на нахождение элементов правильных многогранников.

План урока

I. Организационный момент.

II. Актуализация знаний.

III. Изучение нового материала – введение нового понятия, изучение правильных выпуклых многогранников.

III.1. Лекция (выступления учащихся с докладами). План.

1. Правильные многогранники в философской картине мира Платона (сообщение учащегося).

2. Кубок Кеплера (сообщение учащегося).

3. Икосаэдро-додекаэдровая структура Земли (сообщение учащегося).

III.2. Формула Эйлера (исследовательская работа класса).

III.3. Продолжение лекции.

4. Правильные многогранники на картинах великих художников.

5. Правильные многогранники в природе (сообщение учащегося).

IV. Решение задач.

V. Подведение итога урока.

VI. Домашнее задание.

Оборудовании: чертёжные инструменты; модели многогранников; репродукция картины С. Дали «Тайная вечеря»,иИллюстрации к сообщениям учащихся: модель солнечной системы И. Кеплера; икосаэдро-додекаэдровая структура земли; правильные многогранники в природе.

Подробное описание данного урока и некоторых других представлено в источнике [1].

Спецкурс по стереометрии «Построение сечений геометрических фигур с использованием компьютерного программного обеспечения»

Данный спецкурс «Построение сечений геометрических фигур с использованием программного обеспечения», в рамках дисциплин по выбору, предназначен для учащихся X-XI классов различных типов общеобразовательных учреждений. Данный курс по выбору, рассчитан на 72 часа, знакомит учащихся с понятием движения и обучает поэтапному построению сечений на проекционном чертеже. Он также может быть рекомендован для параллельного изучения с темой «Многогранники» в курсе стереометрии и читаться как для небольшого числа слушателей, так и для целого класса в рамках обязательного.

Данный спецкурс предусматривает развитие пространственных представлений и воображения, формирование у учащихся устойчивого интереса к математике, выявление и развитие математических способностей, проведение ориентации на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе.

Содержание спецкурса «Построение сечений геометрических фигур с использованием программного обеспечения», на наш взгляд, является эффективным приложением для изучения курса стереометрии в X-XI классах, необходимым в первую очередь для повышения результативности учебного процесса. Он позволят не только добиться качественного усвоения методов построения сечений, но и дальнейшего использования полученных навыков для свободного овладения умением решать достаточно сложные задачи на построение.

При изучении данного курса по выбору рекомендуется использовать соответствующее компьютерное программное обеспечение, которое позволит визуализировать процесс построения сечений, поможет не только развить пространственное воображение учащихся, но и, во-первых, осмыслить структуру проекционного чертежа, во-вторых, получить возможность правильно оперировать данными задачи.

Данный программный продукт можно использовать и для самостоятельного изучения материала учащимися. Подробная информация по данному спецкурсу находится в источнике [7].

Метод проектов. Одной из форм самостоятельного изучения нового материала на творческом уровне и проверки знаний по теме «Многогранники» в классах математического профиля является метод проектов. Ниже представлен фрагмент проекта учащихся 11 класса московской школы, который создан с помощью пакета Maple.

Платоновы тела. Представители семейства

Проектная деятельность учащихся при изучении правильных многогранников наиболее целесообразна, поскольку интеграционные связи данного учебного материала обширны и разнообразны. Эти связи не в состоянии раскрыть в полном объёме ни один межпредметный элективный курс. Однако, это под силу учащимся в рамках групповой проектной деятельности.

Более подробная информация о методе проектов дана в источнике [7].

Таким образом, были рассмотрены две основные проблемы, возникающие при изучении темы «Многогранники» и представлен обзор форм работы для решения данных проблем: организация элективных курсов, факультативных занятий, изучение материала темы в нестандартной форме (урок-игра, метод проектов). Все это помогают учителю при изучении темы «Многогранники» в классах математического профиля, способствуют более глубокому усвоению материала темы, развивают интерес к исследовательской деятельности на этапе школьного образования и являются основой дифференциации обучения в рамках изучения данной темы.

Литература

1. *Азевич А.И.* Двадцать уроков гармонии: Гуманитарно-математический курс//М.: Школа-Пресс, 1998. (Библиотека журнала «Математика в школе». Вып.7).
2. *Буравова Н.И.* Профильное обучение в X классе// Математика в школе.- 2000.-№4.
3. *Вергазова О.Б.* Октаэдр показывает фокус// Математика в школе.-2001.-№3.
4. *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Задача одна - решения разные: Геометрические задачи. Книга для учащихся// М.: Просвещение.- 2000.
5. *Саакян С.М., Бутузов В.Ф.* Изучение темы «Многоугольники» в курсе X класса// Математика в школе.- 2000.-№2.
6. *Саакян С.М., Бутузов В.Ф.* Применение тематического планирование уроков геометрии в X-XI классах с углубленным изучением математики// Математика в школе.-2006.-№5.
7. www.tmn.fio.ru.

Т.А. КАПИТОНОВА, О. И. ПОНОМАРЕВА

ОБЗОР ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Систематическое изучение темы «Числовые последовательности» в общеобразовательной школе начинается в 9 классе. Учащиеся знакомятся с частными случаями числовых последовательностей – арифметической и геометрической прогрессиями. Все программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев по математике для 9 класса предусматривают изучение темы «Числовые последовательности» в объёме не менее 16 часов.

Продолжается изучение темы в классах с углублённым изучением математики, где рассматриваются свойства монотонности, ограниченности и сходимости последовательностей. В старших профилирующих классах вводится понятие предела последовательности и рассматриваются его свойства.

Однако с понятием последовательности учащиеся встречаются намного раньше. Младшие школьники знакомятся с последовательностями натуральных чисел, чётных и нечётных чисел. Немного позже, изучая понятие квадрата числа, получают последовательность квадратов чисел. При построении координатной прямой знакомятся с последовательностями положительных и отрицательных чисел. В старших классах при использовании табличного способа задания функции задают последовательность значений аргументов и вычисляют соответствующую последовательность значений функции и т.д.

Тема «Числовые последовательности» имеет глубокие корни. Само понятие «числовая последовательность» возникло и развилось задолго до наших дней. Уже в древности были известны такие бесконечные числовые последовательности, как последовательность натуральных чисел, чётных чисел, нечётных чисел, простых чисел, а также чисел, обратных натуральным.

В клинописных табличках вавилонян, в египетских папирусах, относящихся ко II тысячелетию до нашей эры, встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий.

Первые из дошедших до нас задач связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практики, как, например, распределение продуктов, деление наследства и т.д. По содержанию некоторые китайские задачи трактуют о растущей и убывающей производительности труда ткачих. Примеры прогрессий имеются и в индийских «сиддхантах». В древнерусском сборнике «Русская правда» содержатся выкладки о приплоде от скота и пчёл за известный промежуток времени, о количестве зерна, собранного с определённого участка земли и т.д. Задачи на прогрессии также возникали из наблюдений над явлениями природы и из исследований общественно-экономических явлений, к которым применимы законы прогрессий.

Возможно, древние вавилоняне и другие народы той далёкой эпохи имели некоторые общие приёмы решения задач. Уже в V веке до нашей эры греки знали следующие арифметические прогрессии и выражения для их сумм:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$; $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n\cdot(n + 1)$; $1 + 3 + 6 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$ и др.

В «Псаммите» («Исчисление песчинок») Архимед впервые сопоставил арифметическую и геометрическую прогрессии и указал на связь между ними. У греков теория прогрессий была связана с так называемой непрерывной пропорцией, а сами прогрессии рассматривались как продолжения пропорций. Идея предела последовательности восходит к V-IV векам до нашей эры.

В III веке до нашей эры александрийский ученый Эратосфен указал способ получения *n*-го члена последовательности простых чисел. Этот способ был назван «решетом Эратосфена».

Задачи на прогрессии имеются в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах», в котором нет указаний на применение какой-либо формулы суммирования. При решении задач египтяне, видимо, пользовались правилом, которое можно записать в современной символике так: $a = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}\cdot(n-1)$. Происхождение этого правила не установлено: вероятнее всего оно носит эмпирический характер [1].

Само слово «прогрессия» (*progressio*) латинского происхождения, буквально означающее «движение вперед», впервые встречается у римского автора Боэция (V-VI века). Первоначально под прогрессией понимали всякую числовую последовательность, построенную по закону, позволяющему неограниченно продолжать её в одном направлении.

Правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202 год) Леонардо Пизанского. В «Науке о числах» (1484 год) Н.Шюке, как и Архимед, сопоставил прогрессии и дал общее правило для суммирования любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула бесконечно убывающей геометрической прогрессии была известна П.Ферма и другим математикам XVII века.

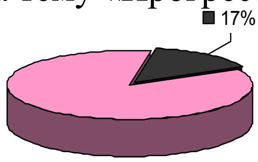
В XVII веке Дж.Грегори употребил вместо прогрессии термин «ряд», а другой английский математик Дж.Валлис применил для бесконечных рядов термин «бесконечные прогрессии».

Символическое обозначение прогрессий впервые появилось у Исаака Барроу, а затем встречается и у других учёных XVIII века.

В настоящее время числовые последовательности рассматриваются как частные случаи функции. Так, например, арифметическая прогрессия является линейной функцией натурального аргумента, а геометрическая прогрессия – показательной функцией натурального аргумента.

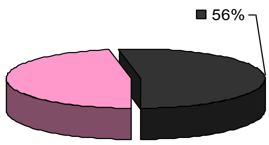
Задания по этой теме регулярно содержатся в материалах ЕГЭ и централизованного (абитуриентского) тестирования. Анализ результатов централизованного тестирования за 2006 год показал, что при сдаче экзамена *математика-I* справились с заданием по теме «Прогрессии» (уровня *B*) в среднем около 17% учащихся. При сдаче экзамена *математика-II* решили задание по теме «Прогрессии» (уровня *A*) в среднем около 56%. Заметим, что в вариантах тестирования (*математика-I, математика-II*) за 2006 предлагалось одно задание на тему «Прогрессии».

Математика-I
2006г



Процент учащихся, решивших задание на тему «Прогрессии» из части В на абитуриентском тестировании.

Математика-II
2006г



Процент учащихся, решивших задание на тему «Прогрессии» из части А на абитуриентском тестировании.

Рассмотрим примеры заданий [2], предлагавшихся в вариантах *Математика-I* (задание *В4*).

Вариант 1. Найти наименьшую из сумм n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -157$ и $a_2 = -143$.

Вариант 3. Найти наибольшую из сумм n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 136$ и $a_2 = 121$.

Согласно статистическим данным задание *В4* третьего варианта решило 21% тестируемых, а задание *В4* первого варианта – всего 15%.

Примеры заданий, предлагавшихся в вариантах *Математика-II* (задание *А7*):

Вариант 1. Сумма первых четырёх членов возрастающей арифметической прогрессии равна сумме следующих трёх её членов. Обязательно ли один из членов этой прогрессии равен нулю? Если да, то каков его номер?

Вариант 2. Сумма первых четырёх членов убывающей арифметической прогрессии равна сумме следующих пяти её членов. Обязательно ли один из членов этой прогрессии равен нулю? Если да, то каков его номер?

Задание *А7* первого варианта решило 55% тестируемых, а второго варианта – 56%. Представленные данные свидетельствуют, что не смотря на кажущуюся простоту заданий на знание свойств прогрессий, выпускники школ не всегда справляются с ними.

В связи с выше изложенным возникает проблема улучшения качества подготовки учащихся общеобразовательных школ по теме “Числовые последовательности”.

Анализ источников показал, что понятие числовой последовательности вводится в учебно-методической литературе по-разному. Каждый автор предлагает своё определение последовательности. Например, в [3] числовая последовательность рассматривается как множество действительных чисел. В [5] последовательность определяется как ряд чисел, полученных по определённому правилу. В [4] автор вводит числовую последовательность как функцию натурального аргумента.

В связи с таким разнообразием определений понятия числовой последовательности возникает задача выбора оптимального варианта изучения данной темы в рамках общеобразовательной школы.

Одним из наиболее широко используемых в школьной практике учебников является [5]. Отметим недостатки изучения темы «Числовые последовательности» по учебнику [5].

1. Понятие числовой последовательности строго не определяется, а вводится с помощью примеров.

2. Не вводится понятие монотонной (возрастающей и убывающей) последовательности.

3. Не делается акцент на характеристические свойства прогрессий (не выделяются как отдельные свойства).

4. Количество составных текстовых задач, решаемых с помощью различных алгебраических моделей, явно недостаточно.

С целью устранения отмеченных недостатков можно предложить следующие методические рекомендации.

1. Определить некоторые понятия (в частности понятие монотонности).

2. Расширить имеющийся в этом учебнике задачный материал.

3. Сбалансировать материал темы, сделав его более наглядным.

Наиболее удачный вариант изложения темы «Числовые последовательности» предложен, на наш взгляд, в учебнике [4].

Материал темы представляет собой отдельную главу под названием «Прогрессии», состоящую из трёх параграфов: «Числовые последовательности», «Арифметическая прогрессия», «Геометрическая прогрессия». Автор [4] даёт строгое определение числовой последовательности как функции натурального аргумента. Подробно описаны способы задания числовой последовательности: аналитический, словесный и рекуррентный. Каждый способ иллюстрируется достаточным количеством примеров для лучшего понимания материала. Рассматривая числовую последовательность как частный случай числовой функции, автор переформулирует некоторые свойства функций и для последовательностей, в частности вводит определения возрастающей и убывающей числовой последовательности.

Арифметическая и геометрическая прогрессии рассматриваются как рекуррентно заданные числовые последовательности. Для прогрессий используются специальные обозначения, известные ещё из истории математики (для арифметической « $\div$ », для геометрической « $\div\div$ »). Формула n-го члена прогрессии доказывается методом математической индукции. Характеристические свойства прогрессий формулируются в виде теорем.

В [4] используется исторический материал. Например, опираясь на идею решения одной старинной задачи, которую применил немецкий математик Гаусс в возрасте 5 лет, автор предлагает вывести формулу суммы членов конечной арифметической прогрессии. Использование исторического материала способствуют большей заинтересованности школьников в изучении данной темы, что способствует повышению качества ее усвоения.

Литература

1. *Глейзер Г.И.* История математики в школе:VII-VIII классы. М., 1982.
2. Книга-тесты. Математика. Варианты и ответы централизованного (абитуриентского) тестирования. – М.: ООО “РУСТЕСТ”. 2006.
3. Математика. Справочник школьника, М., 1995.
4. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 9 кл.: Ч.1: Учеб. для общеобразов. учреждений. М., 2003.
5. *Теляковский С.А.* Алгебра. Учебник для 9 класса средней школы. М., Просвещение, 1992.

Т.А. КАПИТОНОВА, Н.С. КУЗНЕЦОВА

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Понятие обратной функции является сложным для учащихся, усваивается с трудом, требует большого искусства учителя при объяснении материала, достаточно продолжительной тренировки учащихся на разнообразных упражнениях, которых явно мало в учебниках (некоторых авторов) для общеобразовательных школ.

Тема «Обратная функция» до последнего времени отсутствовала в школьном курсе математики. Такое положение дел не способствовало формированию у учащихся целостного представления о понятии функции вообще. Сталкиваясь с новым понятием – арксинус, арккосинус, арктангенс или арккотангенс – при решении тригонометрических уравнений, школьники испытывали трудности.

Анализ учебников [1]-[3] показал что, тема «Обратные тригонометрические функции» наиболее удачно, с точки зрения доступности, представлена в учебнике [2] (Ш.А.Алимов и др.), хотя многие утверждения авторами даются без доказательства. С точки зрения строгости изложения материала предпочтителен учебник А.Н.Колмогорова [3]. Задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями, в всех проанализированных учебниках, на наш взгляд, явно недостаточно.

На следующих диаграммах представлено количественное соотношение тригонометрических задач и задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями в учебниках «Алгебра и начала анализа 10-11» (Ш.А.Алимов и др.) [рис.1] и «Алгебра и начала анализа 10-11» (под редакцией А.Н.Колмогорова) [рис.2].

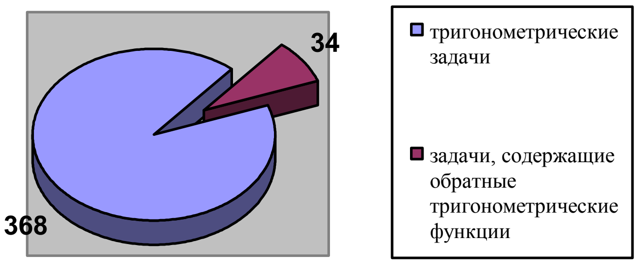


рис.1

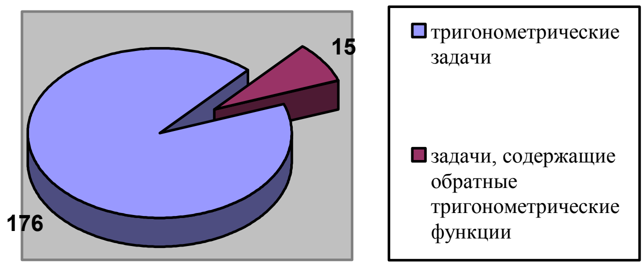


рис.2

Анализ упражнений и задач по данной теме, представленных в вышеуказанных учебниках, приводит к необходимости разработки дополнительных заданий: на нахождение области определения и множества значений обратных функций, на вычисление значений выражений, связывающих тригонометрические функции и аркфункции, на решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Приведем примеры таких заданий, предварительно разбив их на следующие группы.

1. Свойства обратных тригонометрических функций.

При решении задач данной группы используется непосредственно определение обратной тригонометрической функции, а также соотношения между различными тригонометрическими функциями. Можно рекомендовать учителю предложить учащимся в рамках домашнего задания повторить основные математические утверждения по данной теме. Задания этой группы обязательного уровня подготовки.

Задание 1. ***Найдите область определения функции*** $y = arcsin(3x-4)$.

Решение. **Функция арксинус определена на отрезке** $[-1;1]$, **поэтому для нахождения области определения функции достаточно решить неравенство** $-1 \le 3x-4 \le 1$.

Ответ. $\left[1;\frac{5}{3}\right]$.

Задание 2. ***Найдите множество значений функции*** $y = 3arcsin(x+1)$.

Решение. ***По определению функции арксинус:*** $-\frac{\pi}{2} \le arcsinx \le \frac{\pi}{2}$, ***причем функция принимает все значения из этого промежутка:*** $E(arcsinx) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда, $-\frac{\pi}{2} \le arcsin(x+1) \le \frac{\pi}{2}$, ***а следовательно,*** $-3\frac{\pi}{2} \le 3arcsin(x+1) \le 3\frac{\pi}{2}$.

Итак, множеством значений функции $y = 3arcsin(x+1)$ ***является отрезок*** $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ. $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 3. ***Найдите множество значений функции y=sin2x, если*** $x \in [arctg0,75;arctg2]$.

Решение. ***По определению арктангенса*** $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$. ***Так как*** $x \ge 0$, ***то*** $arctgx \ge 0$. ***Следовательно,*** $[arctg0,75;arctg2] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Функция y = sin2x на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ***непрерывна и принимает все значения из промежутка [0; 1}. Кроме того, на указанном отрезке функция достигает своего наибольшего значения, равного 1 при*** $x = \frac{\pi}{4}$.

Вернёмся к промежутку $[arctg0,75;arctg2]$, ***для чего рассмотрим функцию z = tgt. Она монотонно возрастает на интервале*** $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ***и принимает все значения из промежутка*** $(0;+\infty)$, ***поэтому большему значению тангенса соответствует большее значение его аргумента.***

Таким образом, из неравенства 0,75<1<2 следует, что $arctg0,75 < arctg1 < arctg2$, ***а значит,*** $arctg0,75 < \frac{\pi}{4} < arctg2$.

Итак, на отрезке $[arctg0,75; arctg2]$ функция $y = \sin 2x$ принимает свое наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{4}$. Поэтому, для нахождения множества значений функции $y = \sin 2x$ достаточно сравнить ее значения на концах данного отрезка, то есть сравнить $\sin(2arctg0,75)$ и $\sin(2arctg2)$. Используя формулу $\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$, получаем:

$$\sin(2arctg0,75) = \frac{2tg(arctg0,75)}{1+tg^2(arctg0,75)} = \frac{2\cdot 0,75}{1+0,75^2} = 0,96 \text{ и } \sin(2arctg2) = \frac{2tg(arctg2)}{1+tg^2(arctg2)} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2} = 0,8.$$

Так как $0,8 < 0,96 < 1$, то множество значений функции $y = \sin 2x$ на отрезке $[arctg0,75; arctg2]$ есть отрезок $[0,8; 1]$.

Ответ. $[0,8; 1]$.

Задание 4. ***Найдите множество значений функции*** $y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right)$.

Решение. ***Используя формулы приведения и разности синусов, получаем:*** $\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Множество значений функции синуса – все числа отрезка [-1;1]. Поэтому выражение $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ и, значит, выражение $(\sin x-\cos x)$ принимает все значения от $(-\sqrt{2})$ до $(\sqrt{2})$. Следовательно, выражение $(3\sqrt{2}+\sin x-\cos x)$ принимает все значения от $(2\sqrt{2})$ до $(4\sqrt{2})$. Поэтому дробь $t = \frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}$ принимает все значения от 0,5 до 1. По определению арккосинуса: $\arccos 0,5 = \frac{\pi}{3}$ и $\arccos 1 = 0$, значит, при $t \in [0,5;1]$, имеем $\arccos t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Отсюда $E(y) = E\left(\frac{9}{\pi}\arccos t\right) = [0;3]$.

Ответ. $[0; 3]$

2. Вычисление значения выражений.

При решении задач (среди них задачи обязательного и повышенного уровней подготовки) на вычисление значения выражения, как правило, используются известные формулы тригонометрии.

Задание 5. ***Вычислите $\sin(200\arcsin(-0,5))$.***

Решение. ***Известно, что $\arcsin 0,5 = \pi/6$. Тогда,***

$$\sin(200\arcsin(-0,5)) = -\sin\left(\frac{200\pi}{6}\right) = -\sin\left(34\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание 6. ***Вычислить*** $ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)-\pi\right)$.

Решение. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)-\pi\right) = ctg\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}-\pi\right) = ctg\left(-\arccos\frac{1}{3}\right) = -ctg\left(\arccos\frac{1}{3}\right) =$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = -\frac{1}{3\sqrt{\frac{8}{9}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Задание 7. ***Найти значение выражения*** $2\sqrt{13}\cos(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3})$.

Решение. ***Заметим, что все значения обратных тригонометрических функций от положительных чисел – это углы, лежащие в первой четверти, то есть острые углы, которые можно найти в прямоугольном треугольнике. Так,*** $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{2}{3}$ ***– это "угол" в треугольнике, тангенс которого равен*** $\frac{2}{3}$, ***то есть противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. Так как углы подобных треугольников равны, возьмем треугольник с катетами 2 и 3. По теореме Пифагора находим гипотенузу:*** $\sqrt{13}$. ***Отсюда можно находить значение любой тригонометрической функции этого арктангенса:***

$$\cos(\mathrm{arctg}\frac{2}{3}) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{13}\cos(\mathrm{arctg}\frac{2}{3}) = 6.$$

Задание 7 требует грамотного методического подхода со стороны учителя: необходимо повторение геометрического материала соответствующего содержания, связать этот материал с теорией тригонометрических функций; кроме того, желательно организовать решение с использованием проблемного метода; в завершение полезно сформулировать обобщающие выводы относительно применённого способа решения: очертить круг задач решаемых рассмотренным способом.

Задание 8. ***Вычислить*** $\mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3$.

Решение. ***Обозначим*** $\alpha = \mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3$.

$$tg\alpha = tg(\mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3) = \frac{tg(\mathrm{arctg}2) + tg(\mathrm{arctg}3)}{1 - tg(\mathrm{arctg}2)\,tg(\mathrm{arctg}3)} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$

Теперь остается найти α ***по заданному значению тангенса этого аргумента. Для того чтобы эта задача была однозначной, нужно указать пределы изменения*** α. ***Так как*** $\frac{\pi}{4} < \mathrm{arctg}2 < \frac{\pi}{2}$ ***и*** $\frac{\pi}{4} < \mathrm{arctg}3 < \frac{\pi}{2}$, ***то*** $\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3 < \pi$, ***то есть*** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. ***Следовательно,*** $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ. $\mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3 = \frac{3\pi}{4}$.

Задание 9. ***Вычислить:*** $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

Решение.

Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$, ***тогда*** $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ ***и*** $\alpha \in [0;\pi]$. ***Следовательно,*** $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Пусть $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \beta$, ***тогда*** $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ ***и*** $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. ***Следовательно,*** $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

Пусть $\arcsin\frac{1}{2} = \gamma$, ***тогда*** $\sin\gamma = \frac{1}{2}$ ***и*** $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. ***Следовательно,*** $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Итак, $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + \cos\left(-3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

3. Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

При решении уравнений, содержащих аркфункции, используются общие методы решения уравнений, в частности, метод замены переменных, приводящий к некоторому алгебраическому уравнению, поэтому предварительно с учащимися проводят работу по обобщению и систематизации знаний и умений решения алгебраических уравнений.

Задание 10. ***Решить уравнение*** $2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$.

Решение***. Подстановка arcssin x = z приводит данное уравнение к квадратному:*** $2z^2 - 7z + 3 = 0$***. Его корнями являются числа*** $z_1 = 3$ ***и*** $z_2 = \frac{1}{2}$***.. Значение 3 не удовлетворяет условию*** $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$***, и потому нам остаётся решить уравнение*** $\arcsin x = \frac{1}{2}$.

$$x = \frac{1}{2}.$$

С помощью микрокалькулятора можно вычислить приближённое значение корня: $x \approx 0{,}4794$.

Ответ***.*** $\sin \frac{1}{2}$

Задание 11. ***Решить уравнение*** $\arcsin (x^2 - 4x + 3) = 0$.

Решение***. Замена переменной:*** $x^2 - 4x + 3 = z$, ***– приводит данное уравнение к виду*** $\arcsin z = 0$***.. Это уравнение имеет единственный корень*** $z = 0$.

Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$***, находим два корня:*** $x_1 = 1$, $x_2 = 3$..

Ответ***.*** $\{1; 3\}$.

Задачи 10 и 11 целесообразно предлагать в связке. После их решения необходимо сравнить условия и решения: выявить общее и различное, пояснить зависимость способа решения от вида уравнения. Можно также организовать работу (в парах) по конструированию аналогичных уравнений с последующим обменом и решением получившихся задач.

Задания рассмотренных типов (группы 1-3) позволяют учащимся лучше усвоить и запомнить определения и свойства обратных тригонометрических функций, прояснить именно обратную функциональную зависимость. Все это в целом способствует усвоению теории тригонометрических функций и развитию функционального мышления.

Литература

1. *Алгебра и начала анализа:* учебник для 10-11 классов общеобр. учреждений / Алимов Ш. А. и др. – М.: Просвещение, 1999.
2. *Алгебра и начала анализа:* учебник для 10-11 классов общеобр. учреждений / Алимов Ш. А. и др. – М.: Просвещение, 2004.
3. *Алгебра и начала анализа.* Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров и др.: Под ред. А. Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 1991.
4. *Колесникова, С. И.* Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. М.: Айрис-пресс, 2006.
5. *Крамор В. С.* Готовимся к экзамену по математике: Учебное пособие. – М.: ООО "Издательство Оникс", 2006.
6. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990.

Т.А. КАПИТОНОВА, И.Б. СЕРЕБРЕННИКОВА

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

На страницах ряда учебно-методических и научно-популярных изданий, в том числе журналов «Математика в школе», «Квант», «Математическое образование», неоднократно обсуждались хорошо известные неравенства Бернулли, Коши, Гюйгенса и их частные случаи.

Классические неравенства – образец «красивого математического знания», с которым должен ознакомиться каждый учащийся, выбирающий математику в качестве будущей профессии. С другой стороны, они имеют огромное прикладное значение, так как использование классических неравенств как метода решения некоторых математических задач позволяет сделать решение более простым, быстрым и красивым. Рассмотрим примеры и дадим методические рекомендации использования классических неравенств при доказательстве алгебраических неравенств и решении уравнений.

Неравенство Коши. ***Для положительных чисел*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***справедливо неравенство Коши:*** $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$***. Равенство достигается в том случае, когда*** $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$***.***

Задание 1. ***Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство*** $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$***.***

Решение***. Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства:***

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \ge 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{ab}\left(\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{ab}\left(2\sqrt{\frac{a}{4}}+2\sqrt{\frac{b}{4}}\right) = \sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$.

Задание 2. ***Решить уравнение:*** $\dfrac{x^2+13x+4}{x+2} = 6\sqrt{x}$***.***

Решение***. Данное уравнение задано для неотрицательных x и в области допустимых значений левая часть всегда положительна. Преобразуем ее следующим образом:*** $\dfrac{x^2+13x+4}{x+2} = \dfrac{\left(x^2+4x+4\right)+9x}{x+2} = \dfrac{(x+2)^2}{x+2}+\dfrac{9x}{x+2} = x+2+\dfrac{9x}{x+2}$***. На основании неравенства Коши имеем оценку*** $\dfrac{x^2+13x+4}{x+2} \ge 2\sqrt{(x+2)\dfrac{9x}{(x+2)}} = 2\sqrt{9x} = 6\sqrt{x}$***, в которой равенство достигается при условии*** $x+2=\dfrac{9x}{x+2}$***. Поскольку именно равенство реализует исходное уравнение, то достаточно решить последнее уравнение:*** $x+2=\dfrac{9x}{x+2}$; $x^2-5x+4=0$***. Отсюда по теореме, обратной теореме Виета, находим корни*** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$***. Так как оба найденных значения положительны, то это искомые корни данного уравнения.***

Ответ. $x_1=1$, $x_2=4$.

Задание 3. ***Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных им чисел не меньше 9.***

Доказательство. ***Требуется доказать, что*** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ ***при условии*** $a>0$, $b>0$, $c>0$. ***Рассмотрим разность между левой и правой частями неравенства, раскроем скобки и сгруппируем члены:***

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1-9==\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-6.$$

В силу неравенства Коши имеем: $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}, \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}, \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$,

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2, \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2, \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2.$$

Сложив эти неравенства, получим: $(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})\geq 2+2+2=6.$

Итак, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\geq 0$***, то есть*** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Задание 4. ***Решите в целых числах уравнение*** $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$.

Решение. ***Левая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных выражений, поэтому можно воспользоваться неравенством Коши:***

$$2x^4+2y^4\geq 2\sqrt{2x^4\cdot 2y^4}=2\cdot 2x^2y^2=4x^2y^2.$$

С учетом исходного уравнения имеем:

$$\begin{cases}2x^4+2y^4=4xy-1\\ 2x^4+2y^4\geq 4x^2y^2\end{cases}\Rightarrow 4xy-1\geq 4x^2y^2\Rightarrow -4x^2y^2+4xy-1\geq 0.$$

От последнего неравенства легко перейти к неравенству $(2xy-1)^2\leq 0$.

Отсюда $2xy-1=0$, $2xy=1$, $y=\frac{1}{2x}$.

Подставив $y=\frac{1}{2x}$ ***в исходное уравнение, получим*** $2x^4+\frac{1}{8x^4}=2-1$.

При обозначении $x^4=z$, $z>0$, ***предыдущее равенство примет вид:*** $2z+\frac{1}{8z}=1\Rightarrow z=\frac{1}{4}$.

Вернемся к исходной переменной: $x^4=\frac{1}{4}$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ***и*** $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Полученные x, y ***целыми не являются, следовательно, в целых числах решений нет.***

Ответ. ***Решений нет.***

Неравенство Бернулли. ***Для*** $\forall n\in N$ ***и*** $a\geq -1$: $(1+a)^n\geq 1+na$; ***равенство достигается при*** $x=0$.

Задание 5. ***Верно ли неравенство:*** $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$***?***

Решение. ***Вынесем*** $\sqrt[3]{3}$ ***за скобки, затем применим неравенство Бернулли к каждому слагаемому в скобках:*** $\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}/3}+\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{3}/3}\right)<\sqrt[3]{3}\left(1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3\cdot 3}+1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3\cdot 3}\right)=2\sqrt[3]{3}$.

Ответ. ***Неравенство верно.***

Задание 6. ***Докажите, что для положительных чисел*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***и любого натурального числа p выполняется неравенство:*** $\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n} \ge \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^p$.

Решение. ***Полагая,*** $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = A$***, представим*** x_k^p ***в виде:***

$$x_k^p = (x_k - A + A)^p = A^p\left(1 + \left(\frac{x_k}{A} - 1\right)\right)^p.$$

Ко второму множителю в правой части применим неравенство Бернулли:

$$x_k^p \ge A^p\left(1 + p\left(\frac{x_k}{A} - 1\right)\right), \text{ где } k = 1, 2, ..., n.$$

Складывая неравенства, получим: $x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p \ge A^p\left(n + p\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{A} - n\right)\right)$.

По определению A: $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{A} - n = 0$***, так что:*** $x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p \ge nA^p$.

Отсюда после деления на n получим требуемое неравенство.

Из доказанного неравенства при $p=2$ ***получаем:*** $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$.

Задание 7. ***Доказать, что:*** $x^2 + y^2 + z^2 \ge 12$***, если*** $x + y + z = 6$.

Решение***. Применим неравенство, доказанное в предыдущем задании:***

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 3\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 = 3\left(\frac{6}{3}\right)^2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Задание 8. ***Решите в целых числах уравнение:*** $x = lg(9x+1)$.

Решение. ***Функция*** $f(x) = lg(9x+1)$ ***определена при*** $x > -\frac{1}{9}$***. Следовательно, целых отрицательных корней уравнение не имеет.***

Проверим, существует ли корень, равный нулю. В самом деле, при $x=0$ ***уравнение принимает*** вид $0 = lg(9 \cdot 0 + 1)$***, то есть,*** $0=0$***. Итак,*** $x=0$ ***– корень уравнения.***

Остается установить, имеет ли уравнение положительные корни. Преобразуем: $x \cdot 1 = lg(9x+1)$, $x \cdot lg10 = lg(9x+1)$, $lg10^x = lg(9x+1)$, $10^x = 9x+1$, $(1+9)^x = 9x+1$.

В неравенстве $(1+9)^x \ge 9x+1$ ***равенство достигается или при*** $x=1$ ***или*** $x = -\frac{1}{9}$***.***

Второе значение x ***не входит в область допустимых значений неизвестной в исходном уравнении.***

Ответ: $x=1$, $x=0$.

Задание 9. ***Решите уравнение:*** $\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} = 2$***, при условии, что*** $\sqrt{1-x^2} \ge 1$***.***

Решение***. Представим левую часть уравнения в виде суммы степеней. Поскольку основание степени с дробным показателем неотрицательно, заключаем, что*** $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$***. Тогда для выражений*** $\left(1 \pm \sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}$ ***выполняются условия:***

$$\sqrt{1-x^2} > -1 \quad \text{и} \quad -\sqrt{1-x^2} > -1, \text{ к тому же } 0 < \frac{1}{5} < 1.$$

Значит, можно применить неравенство Бернулли:

$$\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}} \le 1 + \frac{1}{5}\sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}} \le 1 - \frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}.$$

$$\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}\le 1+\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}+1-\frac{1}{5}\sqrt{1-x^2}=2.$$

Так как $\frac{1}{5}\neq 1$***, равенство возможно, если*** $\sqrt{1-x^2}=0$***. Отсюда*** $1-x^2=0$, $x^2=1$ ***и*** $x=\pm 1$.

Ответ: $x=\pm 1$.

Неравенство Гюйгенса. ***Для любых*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***положительных чисел верно неравенство*** $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\ge\left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n$***. Равенство достигается, когда все числа*** x_i ***равны.***

Задание 10. ***Сумма положительных чисел*** $a_1+a_2+\ldots+a_n=s$***. Показать, что выполняется неравенство*** $f=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\ge\left(1+\frac{n}{s}\right)^n$***.***

Решение***. Применим к левой части неравенства неравенство Гюйгенса, а затем воспользуемся неравенством Коши. В результате получим:***

$$f=\left(1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\right)^n\ge\left(1+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}\right)^n=\left(1+\frac{n}{s}\right)^n.$$

Задание 11. ***Докажите, что если*** $0<x_k<1$, $k=1, 2, \ldots, n$***, то:***

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\le\left(1-\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n.$$

Решение***. Так как*** $0<x_k<1$, $k=1, 2, \ldots, n$***, то имеем в правой части неравенства под корнем n степени следующее:***

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}=\left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\left(1+\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right)\ge$$

$$\ge\left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\left(1+\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right)\ge\left(1+\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n}-1\right)}\right)^n=$$

$$=\left(1+\sqrt[n]{\frac{1-x_1}{x_1}\cdot\frac{1-x_2}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{x_n}}\right)^n$$ ***, где*** $1-x_k>0$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Извлечем корень n ***степени из обеих частей неравенства:*** $\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}\ge\left(1+\frac{\sqrt[n]{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}}{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}\right)$***.***

Умножим обе части неравенства на $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ ***:*** $1\ge\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}+\sqrt[n]{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}$***,***

$$1-\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\ge\sqrt[n]{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}.$$

Возведя обе части неравенства в n степень, получим наше неравенство.

Задание 12. ***Найдите положительные корни уравнения***

$$\sqrt[3]{(1+x)(1+2x^2)(1+4x^3)}=1+2x^3.$$

Решение***. При положительных значениях x левую часть уравнения можно оценить снизу, используя неравенство Гюйгенса:*** $\sqrt[3]{(1+x)(1+2x^2)(1+4x^3)}\ge 1-\sqrt[3]{x\cdot 2x^2\cdot 4x^3}=1+2x^3$.

Так как равенство в оценке достигается лишь только, если $x=2x^2=4x^3$***, то*** $x=\frac{1}{2}$ ***– единственный положительный корень уравнения.***

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Задание 13. ***Решите уравнение:*** $1+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[36]{x}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[4]{x})}$.

Решение***. Уравнение задано при*** $x\geq 0$***, причем*** $x = 0$ ***– корень уравнения. Найдем его положительные корни. Для этого правую часть уравнения оценим снизу по неравенству Гюйгенса. Получим:***

$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[4]{x})}\geq 1+\sqrt[3]{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}=1+\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=1+x^{\frac{13}{36}}=1+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[36]{x}.$$

Так как равенство в произведенной оценке возможно только при условии $\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{x}$***, то*** $x = 1$ ***– единственный положительный корень исходного уравнения.***

Ответ**.** $x = 0,\ x = 1.$

Задание 14. ***Докажите, что для любых чисел*** a, b, ***с выполняется неравенство:***

$$(a^2+b^2+2c^2)\cdot(a^2+c^2+2b^2)\cdot(b^2+c^2+2a^2)\geq 64a^2b^2c^2.$$

Решение***. Вынесем за скобку в левой части неравенства*** $a^2b^2c^2$ ***и далее применим неравенство Гюйгенса:***

$$a^2b^2c^2\left[\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}\right)\cdot\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right)\right]\geq$$

$$\geq a^2b^2c^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{a^2b^2c^2}}\right)^3=a^2b^2c^2\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\right)^3$$

В силу неравенства Коши имеем: $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

Тогда получаем: $a^2b^2c^2\left(1+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\right)^3\geq a^2b^2c^2(1+3)^3=64a^2b^2c^2$.

После демонстрации выполнения первого из рассмотренных выше заданий учителю целесообразно организовать обсуждение с учащимися с целью выявления конструктивных особенностей выражений, стоящих в левой и правой частях доказываемого неравенства или решаемого уравнения по схеме: 1) выявить выражение, к которому применимо классическое неравенство; 2) определиться с количеством (n) положительных чисел, к которым будет применяться то или иное классическое неравенство; 3) если классическое неравенство нельзя применить «в лоб», то необходимо продумать возможные варианты преобразования выражений (разбить какой-либо член выражения на слагаемые, добавить и вычесть слагаемые, рассмотреть разность между левой и правой частями, выделить полный квадрат и др.).

Литература

1. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения (Элективные курсы). 10 – 11 кл.: учебное пособие. – М. Дрофа, 2005.

2. Калинин С.И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: Учебное пособие по спецкурсу. – Киров: ВГГУ, 2002.

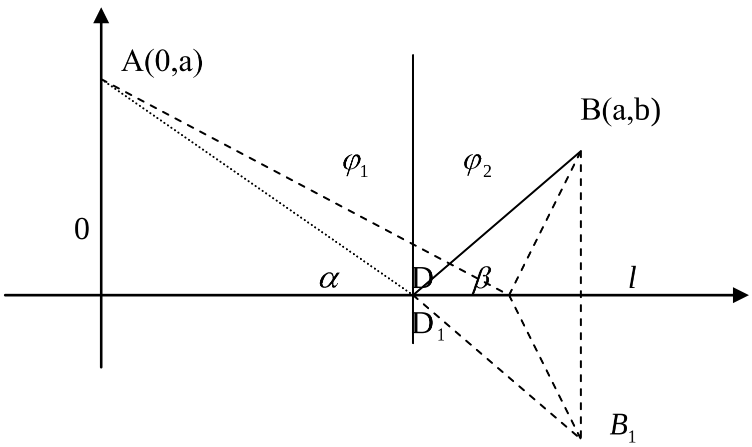
3. Сорокин Г.А. Экстремум и неравенства: Учебное пособие. – Саратов: СГПИ, 1997.

Т.А. КАПИТОНОВА, И.В. ШМАРОВОЗ

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

В математике исследование задач на максимум и минимум началось очень давно – почти три тысячи лет назад. Если в античные времена экстремальные задачи исследовались только геометрическими методами, и каждая задача для своего решения требовала специфического приема, то в XVII веке появились общие методы решения экстремальных задач, которые привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

Рассмотрим старинные задачи на экстремум.



Задача 1 (задача Герона). ***Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой l. Требуется найти на l такую точку D, что сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.***

Решение. ***Пусть B_1 – точка, симметричная точке B относительно прямой l. Соединим A с B_1.***

Тогда D – точка пересечения AB_1 с прямой l будет искомой.

Действительно, для любой точки D', отличной от D, имеет место следующее неравенство:

$$|AD'|+|D'B|=|AD'|+|D'B_1|>|AB_1|=|AD|+|DB|. \qquad \textbf{(1)}$$

В неравенстве (1) используются свойства симметрии, из которых следуют равенства $|DB|=|DB_1|, |D'B|=|D'B_1|$, и неравенство треугольника $|AD'|+|D'B_1|>|AB_1|$. Задача решена.

После того, как учащиеся самостоятельно или с помощью учителя решили данную задачу, необходимо в ходе специально организованного обсуждения выявить идею приведенного решения и зафиксировать ее (в виде плана, алгоритма, схемы и т.п.). Закрепление полученного алгоритма осуществляется на этом же занятии в ходе решения цепочки аналогичных, но усложняющихся задач (задачи 2, 3).

Задача 2. ***Дан угол и точка C внутри него. Найти точки A и B на сторонах угла так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.***

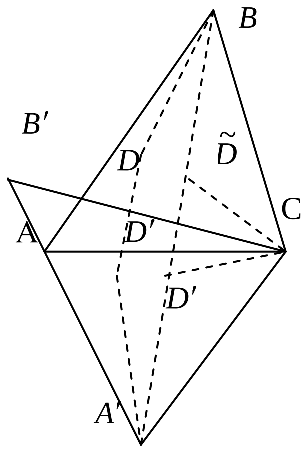
Задача 3. ***Дан угол и две точки C и D внутри него. Найти точки A и B на сторонах угла так, чтобы сумма длин $|CA|+|AB|+|BD|$ была наименьшей.***

Некоторые из старинных задач на экстремум связаны с легендами. К таким задачам относится задача Дидоны. Финикийская царевна Дидона, спасаясь от преследований своего брата, отправилась на запад вдоль берегов Средиземного моря искать себе прибежище. Ей приглянулось одно место на побережье нынешнего Тунисского залива. Дидона повела переговоры с местным предводителем Ярбом о продаже земли. Запросила совсем немного – столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Дидоне удалось уговорить Ярба. Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от нее – город Карфаген. Этот эпизод дает повод задуматься над вопросом: сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно правильно математически поставить задачу.

Задача 4 (задача Дидоны). ***Среди замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.***

Задача 5 (задача Штейнера). ***В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.***

Приведем известное [1] геометрическое решение задачи Штейнера для треугольника с углами, не превосходящими $120°$.



Решение. ***Пусть в треугольнике ABC угол $C \geq 60°$. Повернем теперь треугольник ABC вокруг точки C на угол $60°$. Получим треугольник $A'B'C$.***

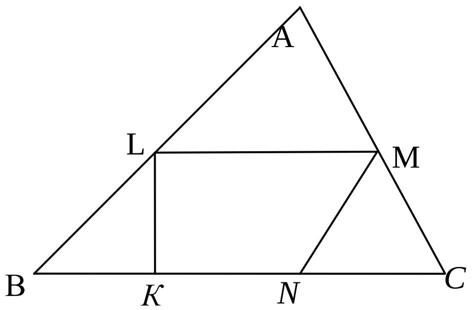
Возьмем любую точку D в треугольнике ABC, и через D' обозначим образ D при нашем повороте. Тогда сумма длин $|AD|+|BD|+|CD|$ равна длине ломаной $|D'A|+|BD|+|DD'|$ (так как $\Delta CDD'$ – равносторонний).

Пусть теперь $\tilde{D}$ – точка, из которой все стороны видны под углом $120°$, и $\tilde{D}'$ – образ при повороте. Точки $B, \tilde{D}, \tilde{D}'$ и A' лежат на одной прямой, откуда следует, что точка $\tilde{D}$ и является решением задачи.

В паре с задачей Штейнера, на наш взгляд, должна быть рассмотрена следующая задача (задача 6): ***В выпуклом четырехугольнике ABCD найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.***

Следующая задача не является традиционной для школьного курсе планиметрии, но достаточно интересна своим решением.

Задача 7 (задача Евклида). ***В данный треугольник ABC вписать параллелограмм BLMN наибольшей площади.***



Решение [2]. ***Пусть ABC – треугольник, в который вписан параллелограмм BLMN, основание которого BN = x. Обозначим через h высоту параллелограмма, тогда его площадь S выразится формулой*** $S = h \cdot x$ ***(2)***

Далее, $h = BL \cdot \sin B$. Пусть BC = a. Из подобных треугольников CMN и ABC имеем: $\frac{MN}{BA} = \frac{BL}{BA} = \frac{NC}{BC} = \frac{a-x}{a}$.

Итак, $BL = \frac{BA}{a}(a-x)$***, откуда*** $h = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot (a-x)$.

Возвращаясь к (2), получим: $S = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot x(a-x)$. ***Таким образом, сформулированная выше геометрическая задача сводится к определению максимума***

функции $y = x(a-x)$***, где*** a ***– постоянная. Исследуя функцию с помощью производной, решаем уравнение*** $y' = a - 2x = 0$ ***и констатируем, что при*** $x = \frac{a}{2}$ ***имеем максимум.***

Задача 8***. Найти максимальную площадь прямоугольного треугольника, если сумма длин катетов постоянна.***

Данная задача связана с самым древним неравенством, в настоящее время называемым неравенством Коши. Это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел: ***Пусть*** a ***и*** b ***– неотрицательные числа. Их средним геометрическим называется число*** $\sqrt{ab}$***, а средним арифметическим – число*** $\frac{a+b}{2}$***. Для любых неотрицательных чисел*** a ***и*** b ***имеет место неравенство*** $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ ***(3)***

Равенство в (3) достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

Из неравенства Коши вытекает следующее свойство треугольников: ***среди прямоугольных треугольников с заданной суммой катетов максимальную площадь имеет равнобедренные треугольник.***

Рассмотрев [2] геометрическую формулировку и геометрический способ решения неравенства Коши, можно рекомендовать здесь же привести алгебраическую формулировку этого неравенства с соответствующим алгебраическим решением.

Задача 8****. Найти максимум произведения двух чисел, если их сумма постоянна.***

Решение. $0 \le (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

В дальнейшую цепочку усложняющихся заданий можно отнести следующие задачи.

Задача 9. ***Доказать, что среди прямоугольников, вписанных в круг, наибольшую площадь имеет квадрат.***

Задача 10. ***Среди прямоугольных параллелепипедов, вписанных в шар, найти параллелепипед наибольшего объема.***

Исторические задачи, вызывая естественный интерес у учащихся, способствуют повышению их мотивации к изучению сложного математического материала, что позволяет организовать процесс обучения более эффективно.

Рассмотренные старинные геометрические задачи, благодаря своей наглядности, помогают учащимся самостоятельно или с минимальной помощью учителя находить решения, что способствует повышению не только уровня познавательной активности учащихся, но и уровня развития их творческих способностей.

Литература.

1. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
2. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1983.
3. *Потапов Б.Ф.* Замечательная страница «Задача Герона».// Математика в школе, 1995, №2, с.72-75.
4. *Юшкевич А.П.* Хрестоматия по истории математики. – М.: Просвещение, 1977.

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-методическое издание

Коллектив авторов

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

Сборник научных трудов

Выпуск 5

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать 19.05.2007. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Бумага офсетная Ризопечать Гарнитура Times
Усл. печ. л. 6,25. Тираж 100 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Наука»
410600, г.Саратов, ул.Пугачёвская, 117, к.50
Отпечатано в типографии ООО «Мелон»
410005, г. Саратов, ул. Пугачёвская,161