Профессиональная
подготовка
педагогических
кадров

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

Сборник научных трудов

Выпуск 4

Издательство «Научная книга»
2005

ББК 22.1 Р
У 92

Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 4. – Саратов: Научная книга, 2005. – 80 с.

ISBN

Составители: С.В. Лебедева, Т.А. Капитонова

Рецензент доктор пед. наук, профессор В.И. Игошин

В сборнике представлены результаты научно-методических исследований молодых ученых, проведенные как самостоятельно, так и совместно с научными руководителями. Сборник адресован преподавателям средних и профессиональных учебных заведений, аспирантам, студентам педвузов.

ISBN

ББК 22.1 р
У 92

Н.В.ПУЙШО

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В практике исследования процессов обучения в различных учебных заведениях сложился определенный стереотип, базирующийся в основном на чисто описательном подходе, когда высказывается педагогическая гипотеза, определяющая направление научного поиска и, как результат, ставится педагогический эксперимент. Последний имеет целью выявить повышение уровня знаний учащихся при использовании того или иного методического приема или той или иной педагогической технологии. Как правило, речь идет просто о сопоставительном анализе экспериментальных и контрольных групп.

Представляется в этой связи интересным сделать попытку введения в педагогические исследования математических методов описания характеристик учебного процесса. Это позволит раскрыть широкие возможности для успешного прогнозирования результатов процесса обучения, его планирования и оптимизации в пространстве многочисленных факторов, влияющих на этот процесс. В качестве факторов могут выступать как характеристики используемых педагогических технологий, так и уровень преподавания, зависящий от самого преподавателя, личностных качеств обучаемого: его способностей, интеллектуальных возможностей, уровня познавательной самостоятельности, психологических характеристик и т.д.

В направлении количественного описания учебного процесса проводились исследования Р.В. Акатовым, В.П. Мизинцевым, Р.В. Майером и другими, значимость которых безусловна. Важно также отметить, что в 70-х годах в нашей стране делались попытки использования для количественного описания степени влияния на процесс обучения методов теории планирования эксперимента.

Предполагается, что модель учебного процесса может быть математически представлена одним из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = v + at - bt^2 - \gamma z + ctz \qquad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = v + at - bt^2 - \gamma(1 - ct)z \qquad (2)$$

где z – уровень знаний обучаемого в некоторый момент времени t, при $t = 0$ этот уровень соответствует начальному уровню знаний z_0 о предмете изучения или физическом явлении;

v – количество учебной информации, поступающей учащемуся от преподавателя за выбранную единицу времени (например, за урок или лекцию);

a – некоторый коэффициент, характеризующий получение учащимися дополнительного знания (это может быть либо какой-нибудь дидактический материал, физический эксперимент, компьютерное моделирование физического явления или знания, получаемые учащимися через сеть Internet), т.е. определенная характеристика уровня познавательной самостоятельности; в общем случае соответствующая информация может линейно нарастать по мере развития познавательного интереса учащихся, углубления учебного процесса или освоения компьютера за счет раскрытия его новых возможностей;

γ – коэффициент, описывающий естественный процесс забывания учащимися некоторой части сообщенного ему учебного материала: можно предположить, что забываемый материал пропорционален его объему.

Слагаемое ***ctz*** можно трактовать как стремление преподавателя (за счет различных приёмов и методов, в частности, за счет интенсивного повторения учебного материала, инициирования отчетов по пройденным темам или написания рефератов по этим темам) скомпенсировать потерю знаний учащихся.

Коэффициент ***b*** позволяет учесть степень уставания учащихся и следующий в этой связи процесс замедления обучаемости. При определенных значениях ***b*** может наступить момент времени, после которого степень познания резко падает из-за утомляемости обучаемого.

Естественно, предлагаемая модель учебного процесса ((1) или (2)) не может полностью описать учебный процесс и является лишь определенным приближением в решении проблемы прогнозирования уровня знаний учащихся. Новая информация об особенностях процесса обучения или о специфике его протекания позволит уточнить модель. Кроме того, улучшение модели возможно при анализе результатов прогнозирования учебного процесса и оценки степени адекватности этого прогнозирования реальным результатам.

С использованием методов теории планирования эксперимента можно получать простые функциональные зависимости одних величин от других, отличающиеся достаточной степенью точности в виде полиномов.

Одной из возможностей графического представления полиномиальной модели является центральное сечение. Центральные сечения модели (1) представлены на рис. 1.

Воспользуемся моделью (1). Зададим интервалы изменения переменных v, a, b, γ: $4 \le v \le 6$, $1 \le a \le 2$, $0.02 \le b \le 0.04$, $0.3 \le \gamma \le 0.5$, $c = 0{,}075$.

Они получены в результате анкетирования школьников. В соответствие реальным параметрам поставим нормированные переменные x_1, x_2, x_3, x_4..

Используя центральный композиционный ротатабельный план второго порядка, получаем при отбрасывании малозначимых слагаемых в переменных x_i следующую модель:

$$Z = 20.9 + x_1 + 1.8\, x_2 - 0.14\, x_3 - 1.6\, x_4 + 0.1\, x_4^2 - 0.1\, x_1 x_4 - 0.1\, x_2 x_4 - 0.01\, x_3 x_4 \qquad (3)$$

Соответственно в переменных X_i эта модель имеет вид:

$$Z = 7.36 + 3.7v + 10.5a - 36.9b - 34.4\gamma - 5.08b^2 + 41.16\,\gamma^2 + 0.005vb - 3.73v\gamma - 8.48a\gamma + 25.3b\gamma \qquad (4)$$

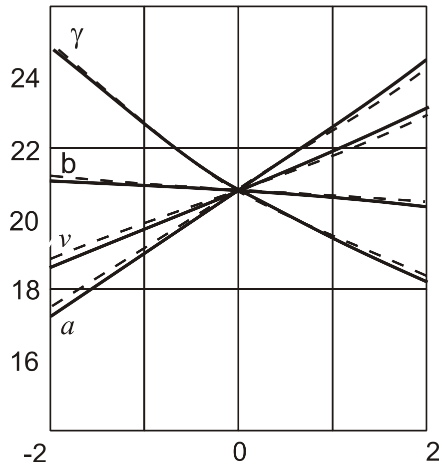


Рис. 1. Центральные сечения модели (1).

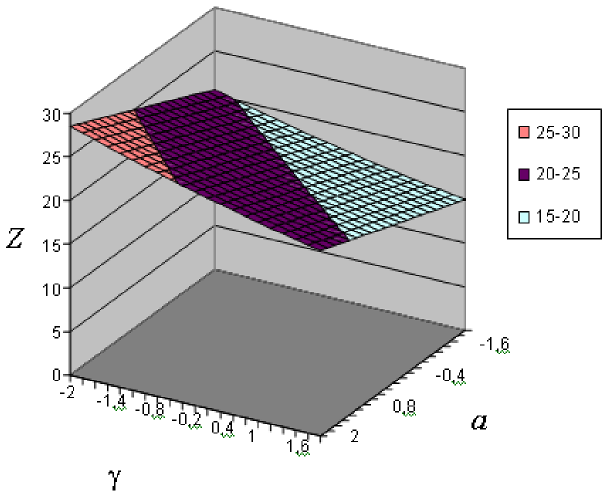


Рис. 2 Решение модели (1) на плоскости γa.

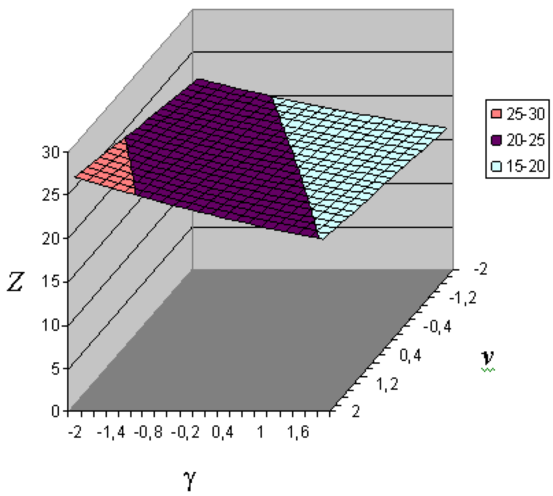


Рис. 3 Решение модели (1) на плоскости γv.

Математическая модель, полученная методами теории планирования эксперимента, является приближенным описанием исходной модели. Поэтому важным звеном в оценке качества и практической значимости полиномиальных моделей является сравнение степени расхождения расчётов, выполненных по исходным уравнениям и уравнениям, полученным методами теории планирования.

В центре плана совпадение расчётов по модели (4) (сплошные линии) и по уравнению (1) (пунктир) практически идеальное. На краях диапазона изменения параметров расхождение расчётов также не превышает долей процента. Это делает полиномиальные модели надёжным инструментом оценки влияния на учебный процесс характеризующих его параметров.

На рис. 2 и 3 решения уравнения (1) приведены в объемном исполнении на двухфакторных плоскостях.

По формулам общего решения каждой из моделей учебного процесса (1) и (2) нами были построены (рис. 4) графики центральных сечений с применением пакета MathCAD.

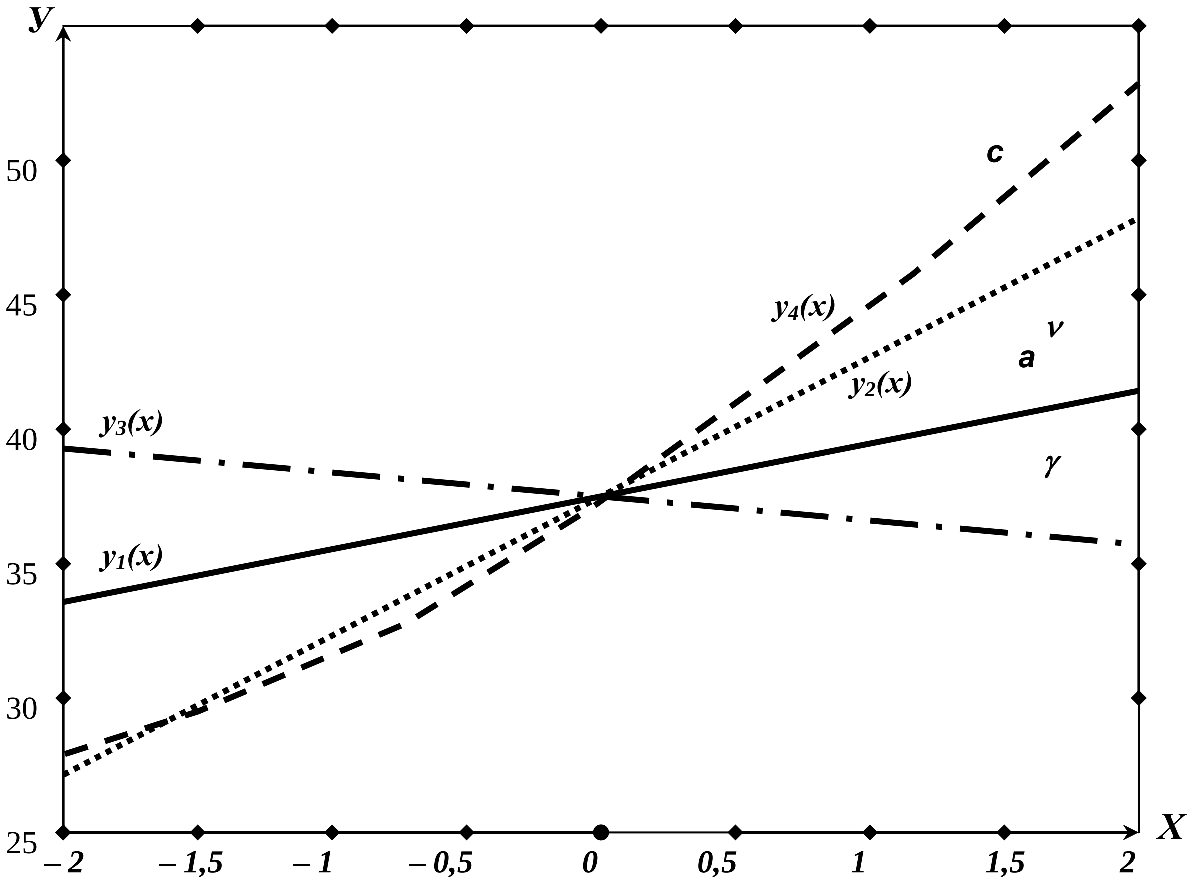


Рис. 4 Центральные сечения модели (2).

Литература

1. *Бродский Б. З.* Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976.
2. *Железовский Б.Е., Железовский А.Б.* Математическая полиномиальная модель школьного урока. Инициирование и формирование стратегических векторов развития образования. Материалы заочной научно-методической конференции. – Саратов, 2004. – с. 94-96.
3. *Железовский Б.Е., Недогреева Н.Г., Ступина С.Б.* Построение математической модели урока с использованием методов теории планирования эксперимента. Инициирование и формирование стратегических векторов развития образования. Материалы заочной научно-методической конференции. – Саратов, 2004. – с. 97-104.
4. *Железовский А.Б., Железовский Б.Е., Капитонова Т.А., Н.В. Пуйшо.* Об одной возможности описания процесса обучения физике с привлечением математически методов. Исследования физических явлений и характеристик приборов СВЧ: Сборник научных статей.- Саратов: Изд –во «Научная книга», 2005. - с.82 – 85.

Ю.А.ПАВЛОВА

ВАРИАТИВНОСТЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Слово «Вариант» (от лат.*varians* – изменяющийся) трактуется как «видоизменение», «разновидность»; одна из возможных комбинаций. «Варьировать» (лат. *variare*) означает: «видоизменять», «разнообразить» или «изменяться, колебаться в известных пределах».

Психологи утверждают, что «с позиций историко-эволюционного подхода неклассическая психология предстаёт как фактор реформирования сферы образования, его перехода от унифицированной адаптивной «парадигмы знаний, умений, навыков» – к парадигме вариативного развивающего образования [2, с.7].

Известны следующие методические принципы, выражающие вариативность образования:

- соответствие учебной нагрузки возрастному, психологическому и умственному развитию ребенка;
- сбалансированное ежедневное планирование учебной нагрузки;
- формирование у учащихся установки на активное усвоение знаний;
- тщательный контроль усвоенного материала;
- формирование у учащихся стремления к знаниям через систему поощрений.

А.Г.Асмолов убедительно доказывает, что вариативное образование обеспечивает личности ориентацию в различного рода жизненных ситуациях, способствует возможности личности выбрать свой жизненный путь(в том числе и в ситуации неопределенной), обеспечить саморазвитие личности. Он называет семь методологических ориентиров развития вариативного образования, в числе которых следующие:

1. *От отдельных альтернативных научных педагогических школ – к системе вариативных инновационных технологий в контексте культурного развития.* При этом, во-первых, в развитии вариативного образования важную роль должны играть, так называемые «авторские школы», а во-вторых, теория и технология должны быть неотделимы.
2. *От монотипного учебника – к вариативным учебникам.* Это уже делается в России, так как в 1990-1996 годах значительно расширена возможность выбора учебников.
3. *От монофункциональных технических средств обучения – к полифункциональным средствам и инновационным технологиям.* Такие технологии не только выступают как одно из средств обучения, но и приобщают школьника к информационной культуре, к умению жить в информационной среде.

Таким образом, практическая психология выступает в качестве фактора конструирования вариативного развивающего образования [2].

Вариативность образования является одним из основополагающих принципов и направлением развития современной системы образования в России. Авторы педагогических статей в периодических изданиях за последние годы всё чаще обращаются к различным составляющим образовательного процесса. Когда речь идет о *содержании образования,* – то это выбор учебно-методического комплекта, образовательных систем, учебных планов и т.д. *В организации учебного процесса* – это индивидуальное варьирование цикличности учебного года, месяца, недели; организация учебного дня, распределение каникулярного времени. *В методическом обеспечении* – это использование педагогами разнообразия методических подходов и приёмов; различных форм уроков, внеклассной работы по той или иной конкретной дисциплине, факультативных занятий, работы с сильными и слабыми по математике учащимися; самостоятельное изучение школьниками новой информации как с помощью традиционных, так и с помощью современных новейших информационных технологий. Если говорить о *системе контроля и оценки знаний* – это не только изменения в системе отметок, но и использование разнообразных накопительных систем, таких, как рейтинговые шкалы, диагностическое тестирование, папки творческих работ; зачетные задания, коллективное оценивание и т.д. Использование этих и других различных форм вариативности, разнообразия приемов и методов обучения зависят от мастерства учителя, его заинтересованности в судьбе ученика [1, с. 75-76].

Одним из видов современных технологий обучения является *индивидуализированное обучение* в школе, характерной особенностью которой является вариативность. При таком подходе каждый ученик, находясь на своем рабочем месте, изучает содержание учебного материала в своём темпе, получая в любой момент необходимую помощь учителя. В свою очередь, в процессе таких консультаций учитель исследует познавательные возможности каждого ученика и его индивидуальные особенности. При этом параллельно осуществляется мониторинг учебного процесса и проводится воспитательная работа с учащимися. Школьникам предлагаются диагностические тесты, и в зависимости от результата тестирования каждому ученику предоставляется соответствующая помощь. Таким образом, вариативность индивидуального обучения позволяет учитывать уровни потребностей, способностей и возможностей личности [3, с. 59-60], позволяет самоопределиться каждому ученику.

В практической деятельности учителя реализация принципа вариативности осуществляется чаще всего через дифференциацию содержания учебного предмета с учетом уровня его усвоения, возможностей усвоения материала в своём темпе, выбора способов изучения, выбора форм контроля за степенью усвоения каждым учеником нового материала на каждом этапе его изучения [5, с.60-61].

В результате наблюдения учителя и мониторинга оценивание производится по следующим параметрам:

- уровень познавательной активности учащихся;
- степень трудности и сложности изучаемого материала;
- скорость изучения нового материала;
- объём изученного материала (минимальный объём; общий объём в соответствии с требованиями стандарта; объём превышающий стандарт);

- прочность изучения материала;
- способность использования изученного учебного материала в необычной, нестандартной ситуации.

Последнее представляет собой элемент творчества учащегося и чаще всего наблюдается в условиях углубленного изучения той или иной дисциплины. Заметим, что, варьируя содержание, объём изучаемого материала, средства обучения, используя разнообразные методы и приёмы, изменяя технологию обучения, мы можем добиться большей эффективности в овладении учащимися знаниями. Это- второй аргумент в пользу широкого использования варьирования в обучении.

Однако мы предпочитаем сузить свои задачи, и будем говорить только о вариативности в обучении отдельной дисциплине – математике.

Попытку классификации видов варьирования в обучении делает Е.С.Петрова [7]. Она выделяет:

1 класс: варьирование организации учебной деятельности учащихся;

2 класс: варьирование в дидактике обучения;

3 класс: варьирование в обучении математике.

Выделяя отдельные подклассы названных классов варьирования, можно внести некоторые уточнения.

Так, ко второму классу относится «варьирование системы задач и упражнений, используемых для различных дидактических целей», а к третьему классу – «варьирование при конструировании математических задач». Нетрудно видеть, что эти подклассы частично пересекаются. Аналогично, к третьему классу относится «варьирование параметров сложности математического материала», а к первому классу «варьирование способов дифференциации обучения».

Некоторые виды варьирования в обучении математике предлагают нам авторы известных современных пособий. Так, в книге для учителя Г.И.Саранцева «Обучение математическим доказательствам в школе» называются различные приёмы открытия фактов и поиска доказательств, варьируя можно прийти к наиболее быстрому и легкому способу доказательства в процессе решения задач или доказательства теоремы [10, гл.III].

Мордкович А.Г. приводит примеры решения уравнений с широким использованием варьирования алгебраического и функционально-графического методов. При решении геометрических задач он считает целесообразным использовать три основных метода: алгебраический, геометрический и комбинированный [6, с. 217].

При описании своей системы дифференцированных заданий по геометрии В.А.Гусев варьирует эти задания по разным параметрам:

- по уровню знаний учащихся (например, по числу вопросов и по уровню их сложности);
- по формам учебной деятельности школьников (например, индивидуальной, коллективной и групповой);

- по возможности использования учащимися «дозы помощи» в виде наводящих вопросов, вспомогательных задач, указания дополнительных построений и т.д. [4, п.48].

Поистине безграничным представляется варьирование при *обучении через задачи.* Здесь возможны различные варианты систем задач для введения определений новых понятий, для доказательства теорем, для мотивации необходимости знакомства с новой очередной темой, предлагаемой учебником и программой по математике, для знакомства школьников с новым для них математическим предложением.

При составлении плана решения задачи чрезвычайно важным представляется варьирование поисков решения задачи.

Требуется выяснить:

- известны ли какие-либо родственные задачи;
- известна ли задача, к которой можно свести решаемую;
- все ли данные задачи использованы;
- нельзя ли преобразовать искомые и данные задачи, чтобы приблизить их;
- нельзя ли решить часть задачи;
- нельзя ли расчленить задачу на более простые;
- нельзя ли найти путь к решению частного случая данной задачи;
- нельзя ли дать к задаче графическую иллюстрацию? И т.д.

Эти факты хорошо известны из работ Д.Пойа [8,9].

Всё вышесказанное говорит о том, что исследованием проблем вариативности в обучении математике целесообразно заняться специалистам в области теории и методики обучения математике, так как подобные исследования позволяют указать новые пути оптимизации в обучении математике и отвечают современным требованиям личностно-ориентированного подхода в обучении этой дисциплине.

Литература

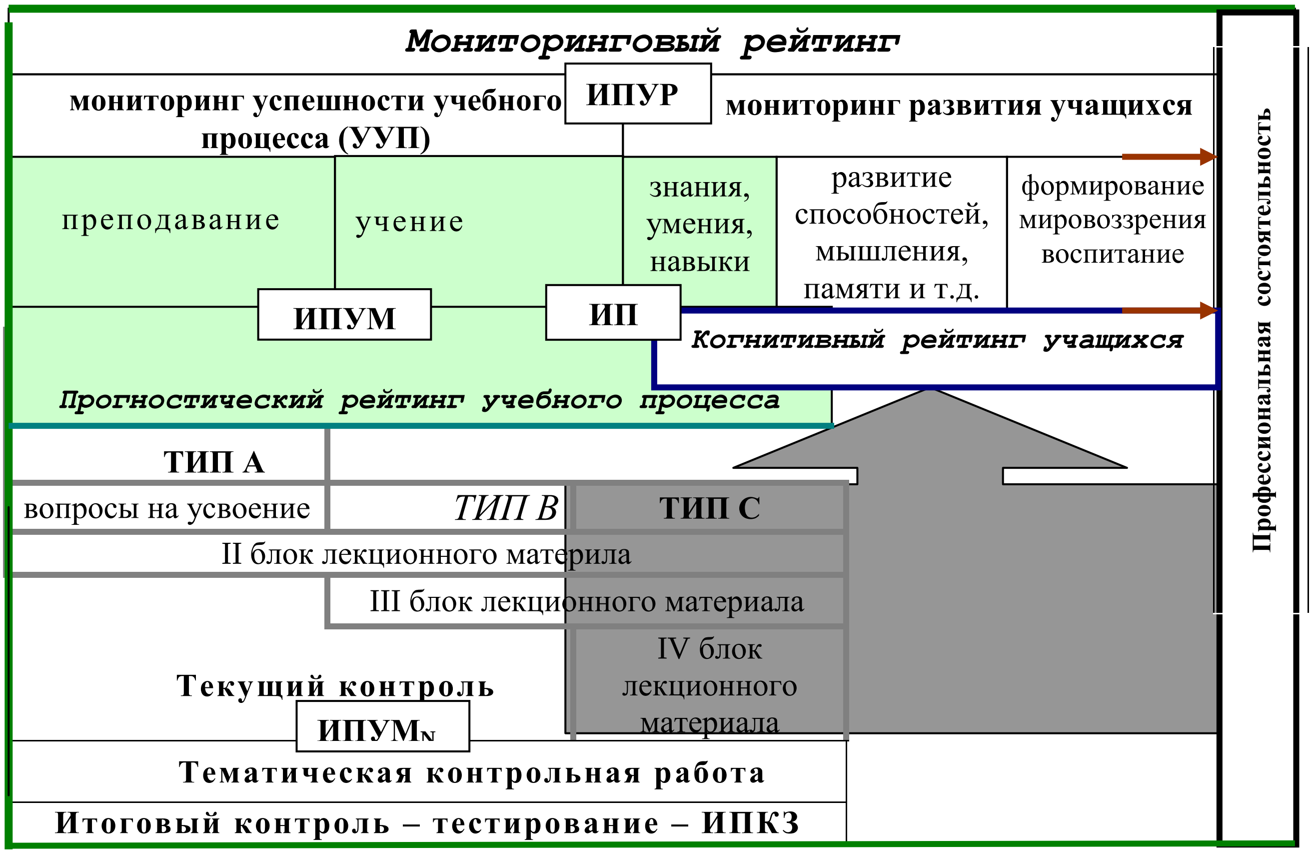
1. *Александрова Е.А.* Педагогическое сопровождение индивидуального образования и идея свободы // НЦО. Свободное воспитание и практика образования. – 2003, №3(14), С.71-77.
2. *Асмолов А.Г.* XXI век: Психология в век психологии // Вопросы психологии – 1999, №1, С.3-13.
3. *Вороняк Н.* Самообучение как ведущий принцип образовательного процесса // Директор школы. – 2004, №10, С.59-63.
4. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике – М.: ООО «Изд-во «Вербум-М»; ООО « Издательский центр «Академия», 2003.-432 с.
5. *Евстифеева О.* На пути к школе индивидуального образования// Директор школы.- 2004.- №4. – С.60-63.
6. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителями математики.- М.: Школа- Пресс, 1995.-272с.(Б-ка журнала «Математика в школе»)
7. *Петрова Е.С.* Динамика внимания и идея вариативности// Материалы Четырнадцатых Страховских Чтений. Труды психологической лаборатории: Сб. науч. трудов. – Саратов. Изд-во «Научная книга». Т.1 – 2005, С.105-113
8. *Пойа Д.* Как решать задачу? – М.: Просвещение, 1961
9. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1979.
10. *Саранцев Г.И.* Обучение математическим доказательством в школе: Кн. для учителя – М.: Просвещение, 2000.

М.Ю.ЖИЛКО

ДИАГНОСТИКА КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ В ТЕХНОЛОГИИ МОНИТОРИНГОВОГО РЕЙТИНГА

В сборнике «Учитель-ученик: проблемы, поиски, находки: Выпуск 3» [2] дана характеристика новой технологии, которую мы назвали технологией мониторингового рейтинга.

Разрабатываемая технология [2] опирается на такие формы контроля [1], которые выполняют самые разнообразные функции: диагностические, коррекционно-развивающие, прогностические и т.д. Все эти формы контроля образуют некоторую систему – основу новой технологии. Дальнейшая разработка системы контроля привела к необходимости включения, помимо видов и форм текущего контроля, форм мониторинга, и тематических контрольных работ, итоговых тестов, и созданию, таким образом, комплекса мер по проектированию образовательного процесса.



Для целей диагностики введём индивидуальный показатель уровня развития студента (ИПУР), который рассчитывается на этапе входного контроля и включает в себя знания, умения и навыки базового курса конкретной учебной дисциплины и уровень развития основных и специальных способностей. На каждом занятии определяется индивидуальный показатель усвоения материала (ИПУМ$_N$) который дает возможность преподавателю контролировать и корректировать (выбрать нужную стратегию дальнейших действий) учебно-воспитательный процесс, а обучающимся осуществлять самоконтроль и самооценку. Для осуществления диагностической функции контроля, проводимого в форме итогового тестирования, необходим числовой показатель оценки количества знаний, умений и навыков.

Индивидуальный показатель контроля знаний (ИПКЗ) выполняет диагностическую функцию и рассчитывается по следующей формуле:

$$
\left[
\begin{array}{l}
t = t_0, \text{ИПКЗ} = \dfrac{k_1 + \dfrac{3k_2}{4} - \dfrac{k_3}{2}}{K} \cdot 100\% \\[2ex]
t > t_0, \text{ИПКЗ} = \dfrac{k_1 - 1 + \dfrac{3k_2}{4} - \dfrac{k_3}{2}}{K} \cdot 100\% \\[2ex]
t < t_0, \left[
\begin{array}{l}
\text{ИПКЗ} = \dfrac{k_1 + 1 + \dfrac{3k_2}{4} - \dfrac{k_3}{2}}{K} \cdot 100\%, \text{если } k_1 = k_{\max}(k_1, k_2, k_3) \\[2ex]
\text{ИПКЗ} = \dfrac{k_1 + \dfrac{3(k_2+1)}{4} - \dfrac{k_3}{2}}{K} \cdot 100\%, \text{если } k_2 = k_{max}(k_1, k_2, k_3) \\[2ex]
\text{ИПКЗ} = \dfrac{k_1 + \dfrac{3k_2}{4} - \dfrac{k_3+1}{2}}{K} \cdot 100\%, \text{если } k_3 = k_{max}(k_1, k_2, k_3)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

где K – количество возможных баллов, k_1 – количество баллов за правильно решённые (в том числе в черновике), k_2 – количество баллов за правильно «угаданные» задания (решения в черновике нет), k_3 – количество баллов за задания, отмечены в бланке тестов как верные, но решение которых в черновике дано с ошибкой, t – время, затраченное студентом на выполнение теста, t_0 – время отведенное на выполнение заданий теста.

Все числовые характеристики формируют индивидуальный показатель (ИП) – рейтинг учащегося.

Рассмотрим подробнее форму контроля – тест – на основании которой определяется ИПКЗ. Приведём пример теста по курсу физики за первый семестр для студентов средних технических учебных заведений. Тест составлен в соответствии с ГОС СПО и предназначен для проверки качества знаний студентов обучающихся по специальностям: «путь и путевое хозяйство», «техника и эксплуатация подвижного состава», «организация управления и перевозок», «автоматика и телемеханика», «радиосвязь», – в Саратовском техникуме железнодорожного транспорта.

Тест имеет четыре эквивалентные формы и состоит из двух частей А и В. Каждый раздел состоит из отдельных блоков включающих по три задания. Задания части А носят репродуктивный характер и позволяют оценить уровень освоения студентами теоретического материала (знание определений, законов и основных формул). Задания части В ориентированы на частично-продуктивную деятельность тестируемых и позволяют оценить степень сформированности специфических умений (то есть применения знаний в стандартной ситуации, например, при решении задач). Тест рассчитан на 70 минут: 60 минут отводится на выполнение заданий теста, а 10 минут на организационные вопросы (знакомство с КИМами, заполнение бланков, в т.ч. фиксацию времени). Задания в тесте расположены по разделам: кинематика (первая группа заданий: №№ 1 – 9), динамика (задания №№ 9 – 18), законы сохранения импульса и энергии (задания №№ 18 – 27), молекулярная физика (задания №№ 27 – 36), термодинамика (задания №№ 36 – 45), электродинамика (задания №№ 45 – 54).

№ п/п	СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДМЕТА	***ПРЕДПОЛАГАЕМАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ТЕСТИРУЕМОГО***	
		РЕПРОДУКТИВНЫЙ УРОВЕНЬ (ЧАСТЬ А)	ПРОДУКТИВНЫЙ УРОВЕНЬ (ЧАСТЬ В)
1.	Основы кинематики	9 заданий	3 задания
2.	Основы динамики	9 заданий	3 задания
3.	Законы сохранения	9 заданий	3 задания
4.	Молекулярная физика	9 заданий	3 задания
5.	Термодинамика	9 заданий	3 задания
6.	Электродинамика	9 заданий	3 задания
Итого		54 заданий (75 %)	18 заданий (25 %)

Порядок выполнения групп заданий студентами определяете самостоятельно. Общая инструкция студентам по всей работе даётся организатором в устной форме непосредственно перед тестированием. Особо подчёркивается, что пользование дополнительными материалами на тестировании запрещается. Первоначально, ответы на вопросы теста студенты фиксируют в черновике каким-либо образом. Черновик должен быть аккуратно заполненным, Только после того, как даны ответы на все вопросы, можно заполнять бланк ответов.

Ф.И.О.	вариант

БЛАНК ОТВЕТОВ

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
А																		
Б																		
В																		
Г																		
раздел	кинематика									динамика								
время	начальное время……время окончания……..									начальное время……время окончания……..								

Если организатором тестирования выступает преподаватель, ведущий физику у данных студентов, то он руководит деятельностью тестируемых и по ходу решает возникающие организационные проблемы (бездействие одних и поверхностное выполнение заданий другими, списывание, досрочная сдача и пр.), не позднее, чем за 7 минут до окончания организатор сообщает тестируемым об этом. Оценка студенту за тест выставляется согласно следующей таблице.

КОЛИЧЕСТВО БАЛЛОВ			
менее 24	24 – 47	48 – 60	60 – 72
неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
ОЦЕНКА			

Приведем примеры тестовых заданий к разделу «Кинематика» (время выполнения 10 минут).

Задание 1. ***Тело отсчета, система координат, прибор для измерения времени называют:***

а) системой отсчета *б) колебательной системой*

в) системой единиц измерения *г) симметричная система*

Задание 2. ***Движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения называется:***

а) равномерным *б) равномерным прямолинейным*

в) неравномерным прямолинейным *г) равномерным непрямолинейным*

Задание 3. ***Направленный отрезок прямой, соединяющий начальное и конечное положения тела называется:***

а) путь *б) траектория* *в) перемещение* *г) прямая*

Задание 4. ***При прямолинейном неравномерном движении ускорение не определяется формулой:***

а) $a = \frac{v - v_0}{t}$ *б)* $a = \frac{2s}{t^2}, v_0 = 0$ *в)* $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ *г)* $a = v \cdot t$

Задание 5. ***При движении по окружности угловая скорость определяется формулой:***

а) $\omega = 2\pi R$ *б)* $\omega = \pi R^2$ *в)* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *г)* $\omega = \frac{T}{2\pi}$

Задание 6. ***Перемещение тела при прямолинейном равноускоренном движении определяется формулой:***

а) $s = v \cdot t$ *б)* $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ *в)* $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ *г)* $s = v_0 + \frac{at^2}{2}$

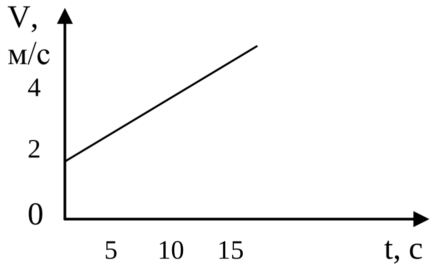
Задание 7. ***Скорость автомобиля за 10с уменьшилась с 36 км/ч до 18 км/ч. Найти ускорение:***

а) 1,8 м/с^2 *б) -1,8 м/с^2* *в) -0,5 м/с^2* *г) 0,5 м/с^2*

Задание 8. ***Поезд движется со скоростью 54 км/ч по закруглению радиусом 1000м. Его центростремительное ускорение равно:***

а) 0,225 м/с^2 *б) 0,015 м/с^2* *в) 2,916 м/с^2* *г) 0,000015 м/с^2*

Задание 9. ***Дан график скорости. Уравнение скорости имеет вид***



а) v=2+0,2t *в) v=0,2t*

б) v=2-0,2t *г) v=2+10t*

Литература

1. *Жилко М.Ю.* О проблемах контроля знаний в средних технических учреждениях // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки*:* Сборник научных трудов: Выпуск 2. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2004. – С.19-22.

2. *Жилко М.Ю.* Технология обучения, в основе которой – текущий рейтинговый контроль // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки*:* Сборник научных трудов: Выпуск 3. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2005. – С.40-43.

В.Н.РЫЖОВ, С.В.ЧИКАЛКИНА

ОБ ОТНОШЕНИИ СТУДЕНТОВ К РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ УЧЕТА И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Как известно, рейтинговая система является для нас относительно новой формой учета и контроля знаний и постепенно начинает использоваться не только в высших, но и в средних учебных заведениях. С целью выяснения отношения студентов к рейтинговой системе учета и контроля знаний был проведен их анкетный опрос. Анкетирование проводилось среди студентов Аткарского педагогического училища. Анкетированием было охвачено 40 студентов, что составляло примерно 50% студентов.

Анкета для студентов содержала три вопроса:

1) Какие трудности вы встречаете при работе по этой системе?
2) Одобряете или нет эту систему?
3) Ваши предложения и замечания.

На первый вопрос 60% студентов ответили, что нет трудностей. Остальные ответы были: 10% – «сначала было трудно набирать баллы, а теперь все легко», «поначалу не разобрались, а сейчас уже все нормально»; 6% – «не могу подсчитать баллы»; 4% – «недобор баллов».

На второй вопрос 72% ответили «одобряю»; 19% – «не одобряю»; остальные ответы: «привычнее система отметок», «нет и да», «иногда».

На третий вопрос ответы были: 11% – «ввести по всем предметам»; 10% – «дать списывать»; 8% – «ликвидировать или оценивать по старой системе»; 6% – «ставить больше баллов»; 4% – «подробнее о ней рассказать»; 4% – «сделать возможность получать больше дополнительных баллов» и т.п. Симптоматичным было замечание одного студента: «По этой системе надо много трудиться».

Анализ результатов анкетирования и наблюдения за характером учебной деятельности студентов позволяет сделать следующие выводы и рекомендации.

1. Большинство студентов одобряют рейтинговую систему, легко и быстро к ней приспосабливаются.

2. Действительные трудности испытывает лишь небольшое число студентов (6%) – это те, кто затрудняется в подсчете своих баллов.

3. Не одобряют эту систему относительно большое число студентов – 19%. Из них многие отмечают трудности в подсчете баллов. Возможная причина этого – низкая успеваемость этой части студентов (на конец предыдущего семестра успеваемость в анкетируемых группах была 90 %).

4. Необходимо предоставлять более широкие возможности студентам для набора дополнительных баллов.

Наблюдения в течение восьми лет за характером учебной деятельности и активности студентов позволяют выделить следующие специфические особенности работы по рейтинговой системе.

1) Большинство студентов в ходе семестра не могут ориентироваться в своем текущем рейтинге, не понимают много или мало у них набрано баллов.

Поэтому необходимо регулярно устанавливать максимальный суммарный балл на определенные календарные даты, а также после каждой контрольной работы и объявлять его студентам.

2) Даже при продолжительной работе по рейтингу 15 – 20 % студентов не ведут регулярно учет своего рейтинга, постоянно просят у преподавателя подсчитать его, уточнить их баллы, не ориентируются в своем продвижении в учебе, задают вопросы типа: «Много это или мало?», «Сколько надо набрать баллов?» и т.п. Поэтому регулярно на определенные календарные даты и после контрольных работ необходимо вывешивать очередной лист рейтинга.

3) Вывешивание для обозрения студентов листа с новым рейтингом всегда вызывает интерес и оживление у студентов, стимулирует их учебную активность. Эти особенности и другие наблюдения за реакцией студентов позволяют сформулировать закономерность: чем регулярнее обновляется лист рейтинга, тем выше учебная активность студентов по повышению своего рейтинга.

4) Примерно 20% студентов показывают высокую заинтересованность в повышении своего рейтинга, обращаются с просьбами к преподавателю дать виды работ для получения дополнительных баллов. Их активность весьма высока, базируется на точном подсчете своего рейтинга и необходимости получения желаемой отметки. Для таких студентов результаты обучения можно прогнозировать на основе точного расчета.

5) Регулярное начисление рейтинга и вывешивание его в «чистом виде» для обозрения не дает большой эффективности. Это связано с тем, что большинство студентов педагогического училища, имея гуманитарный склад интеллекта, не могут по баллам рейтинга свободно ориентироваться в своем продвижении в учебе, не могут свободно вычислить процентное соотношение набранного числа баллов с максимальным баллом на данный момент обучения. Кроме того, сильны традиции оценивать успехи в учебе по обычной пятибалльной шкале отметок и желание иметь эти столь привычные отметки. Поэтому, помимо начисления собственно рейтинга, необходимо набранные на данный момент баллы переводить в привычную для студентов отметку по пятибалльной шкале и тоже наносить ее на лист рейтинга.

Об отношении преподавателей к рейтинговой системе можно сделать следующие замечания. Педагоги в массе своей всегда консервативны, а в педагогическом учебном заведении тем более, поэтому на успешное внедрение рейтинговой системы сильно влияет позиция педагогического коллектива и, особенно, руководства. Рейтинговая система более объективно, обоснованно и гласно оценивает знания студентов. Она сразу начинает высвечивать пробелы и недоработки преподавателей, часто их низкую требовательность, приверженность процентомании. Все эти недостатки видны и студентам. Поэтому к переходу на рейтинговую систему педагогический коллектив должен быть подготовлен. Достаточно много преподавателей относятся к ней скептически – им привычнее работать по-старому. Административными мерами в обязательном порядке ввести новую систему невозможно – никто не может лишить преподавателя свободы в выборе методов контроля.

Поэтому, путями внедрения рейтинговой системы должны стать: поддержка и поощрение тех преподавателей, кто на неё перешел; демонстрация преимуществ системы; акцентирование внимания студентов на её важность и перспективность; создание со стороны администрации необходимых условий для преподавателей, реализующих рейтинговую систему контроля.

Указанные особенности, можно предположить, частью имеют место и в других типах учебных заведений, а не только в педагогическом училище, поэтому данная проблема требует проведения дополнительных исследований.

Литература

1. *Рыжов В.Н.* Дидактика: Учебное пособие для студентов педагогических колледжей и лицеев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
2. Педагогические технологии: Учебное пособие для студентов педагогических специальностей / Под общей ред. В.С. Кукушина. – Серия «Педагогическое образование». – Ростов н/Д: издательский центр «Март», 2002..
3. *Кукушин В.С.* Дидактика (теория обучения): Учебное пособие. – Москва: ИКЦ «МарТ», Ростов-н/Д: Издательский центр «МарТ», 2003.
4. *Рыжов В.Н.* Обучение студентов рейтинговой системе контроля и учета знаний. // Подготовка конкурентоспособного педагога в современной социокультурной ситуации: Сб.науч. трудов. Саратов. Изд-во Саратовского ун-та. 2003. – С.198-199.
5. *Рыжов В.Н.* Опыт использования рейтинговой системы учета и контроля знаний. // Инициирование и формирование стратегических векторов развития образования: Материалы Международной заочной научно-методической конференции. Саратов: Издательство «Саратовский писатель», 2004. – С. 256-258.
6. *Рыжов В.Н.* Рейтинговая система учета и контроля знаний как эффективное средство управления учебно-воспитательным процессом. // Доступность, качество, эффективность образования – приоритетные требования времени. Научное, практико-ориентированное пособие для работников органов управления образованием, руководителей ОУ, учителей. / Кошелев В.А., Лодзято А.Э. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2004. –С. 68-73.

В.И.ИГОШИН, Т.Ю.ЗЫБИНА

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ КАК ОДНО ИЗ СРЕДСТВ РАЗВИТИЯ ИНТУИТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ

Среди путей становления специалиста, готового к решению перманентно возникающих нестандартных ситуаций, одним из наиболее перспективных является формирование *интуитивного мышления*. Отчасти это обусловлено возросшим спросом на людей, которые могут принимать решения и действовать, полагаясь на свою интуицию, поскольку профессионалы, которые способны формировать надежные интуитивные суждения, могут принести больше прибыли, чем те, действия которых носят стандартный характер (T.Piters, G.Watermen, О.В.Степаносова [12]). В ответ на вопрос, почему так происходит, обычно указывают на большое количество информации, с которой приходится иметь дело человеку, и на быструю смену событий, что приводит к необходимости действовать и принимать решения, не имея возможности тщательно обдумать ситуацию.

В этой связи в исследованиях последних лет наблюдается рост интереса к изучению интуитивного мышления как сложного феномена, являющегося объектом анализа в целом ряде философских, психологических и педагогических систем.

Интуиция и логика

С *позиций философии* сущность интуитивного мышления выявляется в ходе исследования соотношения интуиции (от латинского слова *intuitus,* буквально означающего «созерцание», «усмотрение», «видение») и рассудочного (логического) познания. Отличительной особенностью логического мышления является то, что оно от истинных посылок всегда приводит к истинному заключению, не опираясь при этом на опыт, интуицию и другие внешние факторы.

Но не только и не столько умением использовать строгую логику обусловлена способность мышления открывать новые факты. «Существуют закономерности мышления, отличные от логических операций, которые позволяют организовать мыслительную деятельность так, чтобы она выводила человека за пределы знаний, достигаемых посредством формальной логики» [11]. Не менее важным условием освоения знаний об окружающем мире выступает способность мышления к интуитивным суждениям. Среди компонентов интуитивного характера, направленных на получение нового знания, выделяют следующие: зрительное угадывание закономерностей; высказывание гипотез; проведение рассуждений по аналогии и по индукции; построение обобщений; конкретизации [4], [5].

Роль интуитивного мышления в его соотношении с мышлением логическим рассмотрел Д.Брунер в работе «Процесс обучения» [1]. Сопоставляя логическое и интуитивное мышление, Д.Брунер указывает на следующее обстоятельство. Аналитическое мышление характеризуется тем, что его отдельные этапы отчетливо выражены, объективированы для думающего человека, и он может выразить их в речи. Такое мышление обычно осуществляется с относительно полным осознанием как его содержания, так и составляющих его операций. Оно может принимать форму стройного дедуктивного рассуждения, которое имеет четкий план или форму последовательной индукции иногда с применением статистического анализа.

Основной чертой интуитивного мышления, в противоположность логическому, по мнению Д.Брунера, является то, что в нем отсутствуют четко определенные этапы, а имеет место свернутое восприятие всей проблемы сразу. Человек достигает ответа независимо от того, правильным или ошибочным является этот ответ, не осознавая при этом того процесса, посредством которого этот результат был получен. Более того, даже материал задачи, различные его стороны отражаются в этом случае неосознанно. Сам процесс этого вида интеллектуальной деятельности осуществляется в виде скачков, быстрых переходов, с пропуском отдельных звеньев. Эти особенности интуитивного мышления основываются на знакомстве с основными знаниями в данной области, с их структурой; в силу этих особенностей результаты интуиции должны проверяться средствами логического мышления.

Таким образом, логика и интуиция являются неотъемлемыми и неразделимыми компонентами мыслительной деятельности. «Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции», – утверждал А.Пуанкаре [9].

В современной философии интуиция обычно определяется как «знание, полученное без понимания того, как мы его приобретаем» (F.E.Vaughan), как «знание, которое окружено ореолом «правильности», но не имеет ясно артикулируемых причин своего возникновения» (G.Claxton). Однако данный подход не является единственным. Так, Ф.Вауган предложила выделять четыре уровня интуиции: 1) физический уровень, которому соответствуют осознаваемые телесные ощущения, встречающиеся в ситуации, когда, казалось бы, нет причины думать о чем-то необычном; 2) эмоциональный уровень, когда интуиция достигает сознания посредством чувств (например, любовь с первого взгляда или нелюбовь к чему-то без видимой причины); 3) ментальный уровень, когда интуиция проявляется через образы и позволяет человеку делать точные выводы на основе несущественной информации; 4) спиритуальный уровень, при котором с помощью интуиции достигается целостное понимание действительности, не зависящее от ощущений, чувств или мыслей [2].

С позиций представленной классификации интуиция как знание соответствует ментальному уровню. Ее функциями являются в основном оценка ситуации, выбора, альтернатив, действий, гипотез и т.д.; предсказание развития данной ситуации, последствий принятия того или иного решения.

Также подчеркивается наличие аффективного оттенка в интуиции. Возникшая интуиция обычно субъективно проявляется посредством таких феноменов, как догадка, предчувствие, внутреннее чутье (T.Bastick). Еще одним часто выделяемым свойством является связь интуиции с накопленным опытом, как осознаваемым, так и неосознаваемым (W.H.Agor).

В рамках философии выявлены и достаточно полно описаны различные виды интуиции: чувственная (эмпирическая) интуиция, конструирующая интуиция, интеллектуальная (категориальная) интуиция (появляется на основе некоторого труда, опыта и деятельности).

Наиболее полно в современной философии описана интеллектуальная интуиция. Так, в трудах М.Бунге тщательно разработан вопрос о разновидностях интеллектуальной интуиции, в ряду которых выделяются следующие:

– мгновенная интуиция как способность к быстрой интерпретации;

– геометрическая интуиция как способность к представлению образов и созданию изображений отсутствующих объектов;

– творческая интуиция как способность к творческому воображению, созданию гипотез, новых технических изобретений и путей экспериментального исследования [2].

Таким образом, современная философия признает существование неосознаваемых мыслительных процессов, которые составляют основу продуктивного мышления, являются его важнейшим звеном.

Интуиция и инсайт

В *контексте психологии* основное направление исследований интуиции связано с анализом процесса ее возникновения и обоснованием способов получения нового знания.

Ученым, раскрывающим природу интуитивного мышления, удалось выяснить, что в коре больших полушарий существует инстанция (блок), управляющий поведением человека как целостной личности, и блок, который осуществляет познавательную функцию, роль которой заключается в установлении отношений между сторонами проблемной ситуации.

Как показывают исследования, процесс решения проблемы, происходящий в клетках теменной коры, может при определенных условиях происходить обособленно. Таким образом, сознательная мыслительная деятельность происходит, когда одновременно (синхронно) работают оба блока – устанавливающий отношения и высший блок, регулирующий целостное поведение личности. Если блоки работают раздельно, то возможна мыслительная деятельность, которая не осознается человеком. Полученные данные позволили сделать педагогические выводы о возможностях формирования интуитивного мышления путем целенаправленного формирования «клеток, заведующих интуицией» [10].

Возможности развития интуитивных механизмов исследуются в работах В.Н.Пушкина, который указывает, что в детском возрасте интуитивные механизмы развиваются в игре, представляющей собой построение моделей окружающего мира и работу с ними. Он пишет: «В игре предметы что-то значат не сами по себе, а в зависимости от того, какое назначение им придано ребенком». Таким образом, детская игра, по мнению исследователя, – это первая форма «тренировки механизмов интуиции» [8], поскольку, чем больше ребенок устанавливает отношений, тем интенсивнее будут развиваться соответствующие участки мозга. Тренировка в установлении отношений между одними объектами приводит к тому, что ребенок начинает лучше видеть отношения и в других областях, воспринимает их как целостную динамическую систему. Способность увидеть связи между предметами обогащает интеллект, в результате чего дети начинают лучше решать задачи «на сообразительность». При этом В.Н.Пушкин отмечает, что «целенаправленно тренировать интеллектуальную интуицию не только можно, но и необходимо» [10].

При анализе процесса возникновения интуиции в психологии исследуется феномен инсайта – внезапного озарения, которое невозможно спрогнозировать; догадки, необусловленной предшествующим ходом мысли. Некоторые авторы употребляют эти понятия как синонимы (T.Bastick, M.Chapmen, H.H.Spitz и др.). Другие (A.M.Baylor, M.D.Liberman, R.M.Hogarth, P.Goldberg, К.А.Абульханова-Славская, А.В.Брушлинский, А.Н.Леонтьев, С.Л.Рубинштейн и др.) признают, что интуиция и инсайт тесно связаны между собой, но при этом отмечают существенные различия между ними.

Так, М.Либерман пишет: «Хотя инсайт внешне и похож на интуицию, это разные явления. Инсайт — процесс, посредством которого человек внезапно осознает логические связи между проблемой и ответом. В случае же интуиции нет такого проникновения в логические отношения, а есть суждение, предчувствие или поведенческий ответ [12].

Э.Бейлор считает, что интуиция и инсайт имеют два общих компонента: непосредственность, отсутствие сознательного контроля за возникновением инсайта или интуитивного решения (неосознанность процесса возникновения); чувствование отношений. По его мнению, интуиция отличается от инсайта тем, что включает в себя еще третий компонент — рассуждение неаналитического типа [12].

Можно выделить следующие общие свойства инсайта и интуиции, которые позволяют авторам говорить о перекрытии этих двух феноменов. Во-первых, инсайт и интуитивное знание выступают как ответ на вопрос, решение проблемы. Это некоторое осознанное знание, сопровождаемое ощущением его правильности до того, как могут быть найдены доказательства, подтверждающие данное чувство. Во-вторых, интуиция и инсайт не возникают посредством анализа и рассуждения, а являются результатом иного процесса, который не осознается.

Одним из первых связь между интуицией и инсайтом, в контексте выбора оптимальных путей получения новых знаний, затронул А.Пуанкаре, выделив четыре периода в процессе мышления в ходе решения определенной проблемы.

Первый (подготовительный) период сознательной работы необходим для создания предпосылок решения проблемы. В этот период ученый ставит проблему и различными путями пытается решить ее.

Второй период начинается после прекращения сознательной работы над решением задачи и продолжается до момента интуитивного «озарения» сознания и получения готовых результатов. Это период работы, по мнению А.Пуанкаре, соответствует периоду действия бессознательных психических сил.

Результатом активности бессознательных сил является третий период творческого процесса – внезапное «озарение» сознания, то есть инсайт. Бессознательная работа играет здесь роль первостепенной важности. Не отрицая, что для подготовки «озарения» важную роль играет также отдых нервной системы после напряженной сознательной работы, А.Пуанкаре отмечает: «Но с большей уверенностью можно предположить, что этот отдых наполнен бессознательной работой» [9].

Четвертый период мыслительной деятельности необходим для упорядочения интуитивно полученных результатов, придания им логически стройной формы. Этот период полностью сознателен.

Процесс интуитивного озарения без предварительной активной умственной работы не может привести к решению проблемы, новому знанию, открытию, поскольку лишь в ходе настойчивого и целенаправленного поиска исследователь, получая все больше и больше информации о задаче и её условиях, глубже проникает в суть проблемы и приходит к необходимому решению.

Эвристика, эвристические приёмы и интуиция

Из сказанного следует, что оптимальным механизмом получения нового знания в ходе интуитивной мыслительной деятельности являются ***эвристические приемы***, понимаемые как быстрые, упрощенные по сравнению с рациональным обдумыванием правила принятия решения (A.Tversku, T.Kahneman), как некоторые процедуры, приводящие к правдоподобным решениям и выводам лишь с известной степенью вероятности, но не всегда, в отличие от алгоритмов, гарантирующие успех (D.Bryner) и позволяющие субъекту более эффективно регулировать свою мыслительную деятельность: находить нужную информацию, преобразовывать ее, вырабатывать на ее основе планы и решения даже в нестереотипных ситуациях (Ю.Н.Кулюткин).

В *контексте педагогики* проблема интуиции связана с исследованием возможностей развития интуитивного мышления и анализом средств эффективного осуществления данного процесса.

Признавая принципиальную возможность развития интуитивного мышления, мы в качестве средства осуществления данного процесса рассматриваем творческие (нестандартные) задачи, понимаемые как разновидность учебного задания, связанного с определенной дидактической целью – приобретением новых знаний или нового способа деятельности, качественно отличающегося от ранее применявшихся. В свою очередь, решение творческих задач мы предлагаем осуществлять на основе применения эвристических приёмов.

Под ***эвристическими приемами (эвристиками)*** будем понимать *процедуры, основанные на взаимосвязанном применении нескольких эвристических операций и правил, объединенных для достижения цели в ходе эвристического поиска и содержащих рекомендации о том, как преобразовать данную конкретную задачу для получения оптимального решения.*

Необходимость выделения эвристических приемов как системы процедур поиска решений основана на том, что ни одна из отдельных эвристических операций сама по себе не способна привести к окончательному результату. Лишь их совокупность составляет самостоятельную структурную единицу, на основе которой осуществляется процедура «наведения» обучающегося на идею решения (Ю.Н.Кулюткин).

В.И.Андреев под эвристическими приемами понимает систему принципов и правил, которые задают наиболее вероятные стратегии и правила деятельности, стимулируют интуитивное мышление и генерируют новые идеи, существенно повышающие эффективность решения определенного класса творческих задач.

Эвристики как приемы познавательного процесса используются в такой ситуации решения задачи, когда наступает момент затруднения в нахождении действий, направленных на достижение цели. При этом существенное значение в поиске правильного решения имеет интуиция, поскольку интуитивная деятельность представляет одно из проявлений деятельности эвристической, результаты которой появляются до того, как они будут обоснованы средствами логического вывода (В.Н.Соколов). Она является бессознательной формой психической деятельности, которая использует временно неосознаваемую и тем самым исключенную из активной работы сознания информацию.

Эвристические приемы подразделяются на многочисленные разновидности, детерминирующиеся типом и классом решаемых задач.

Наиболее полно систему эвристических приемов, лежащих в основе любого творческого поиска решений, соотнесенную с фазами решения задачи, описал Д.Пойа [8].

На первой, начальной фазе решения происходит определение типа задач (на доказательство, на построение, на нахождение), выяснение того, что представляет собой неизвестное (конец), данные (начало) и условия (требования), определение их составных частей.

Вторая фаза решения задачи – составление плана решения (поиск пути от неизвестного к данным). Оно включает следующие стадии:

- работу от конца к началу и наоборот;
- использование вспомогательных задач, эквивалентных, промежуточных, аналогичных, с тем же неизвестным, с отброшенными и добавочными условиями, с расширенными и суженными условиями, с противоположными условиями, с частной задачей, с общей задачей;
- преобразование неизвестных (через введение новых неизвестных, более близких к данным);
- преобразование данных, получение новых данных, более близких к искомому (методы преобразования – введение дополнительных элементов, переструктурирование;
- применение аналогии;
- использование метода изоляции (то есть сосредоточение на деталях данных и требований по очереди) и метод специализации (проведение решения на частном случае решаемой задачи).

Третья фаза заключается в осуществлении плана решения. Для этого необходимо выполнение следующих правил: контролировать каждый шаг; доказывать правильность каждого шага.

Четвертая фаза – изучение полученного решения. Она состоит из следующих этапов: 1) проверка результатов, 2) проверка хода решения, 3) поиск другого способа получения результатов, 4) использование полученного результата и метода решения.

Данные эвристические приемы имеют отношение не только к математическим задачам, а лежат в основе любой продуктивной мыслительной деятельности [6]. Как отмечает Ю.Н.Кулюткин: «Общность эвристических приемов … связана, очевидно, с тем, что эвристики – это метаспособы и в них выражаются некоторые общие закономерности поиска, направленные на раскрытие самых разнообразных конкретно-содержательных отношений» [7].

Множественность подходов к классификации эвристических приёмов позволяет выдвинуть вариант классификации, который, не претендуя на универсальность, в контексте данного исследования будет наиболее адекватен. Представляется, что эвристические приемы решения творческих задач как механизм формирования интуитивного мышления личности могут включать в себя следующие группы:

- приемы формирования умений увидеть проблему и сформулировать познавательную задачу;
- приемы формирования умений генерировать идеи;
- приемы формирования умений обосновывать варианты решения задачи.

Конкретным педагогическим вопросам применения некоторых эвристических приёмов при обучении решению творческих задач посвящена статья первого автора [3].

Литература

1. *Брунер Дж.* Психология познания. – М.: Прогресс, 1977.
2. *Бунге М.* Интуиция и наука. – М.: Прогресс, 1967.
3. *Зыбина Т.Ю.* Педагогическая технология применения эвристических приёмов обучения решению творческих задач // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 3. – Саратов: Научная книга, 2005. – С.6-14.
4. *Игошин В.И.* Логика и интуиция в математическом образовании // Педагогика – 2002 – №9. – С. 40-48.
5. *Игошин В.И.* Математическая логика в системе подготовки учителя математики. – Саратов: Слово, 2002.
6. *Игошин В.И.* Логика с элементами математической логики. – Саратов: Научная книга, 2004.
7. *Кулюткин Ю.Н.* Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970.
8. *Пойа Д.* Математическое открытие / Пер. с англ. В.С.Бермана, под ред. И.М.Яглома. - М.: Наука, 1970.
9. *Пуанкаре А.* О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л. С.Понтрягина. – М.: Наука, 1990.
10. *Пушкин В.Н.* Эвристика - наука о творческом мышлении. – М.: Политиздат, 1967.
11. *Соколов В.Н.* Педагогическая эвристика: Введение в теорию и методику эвристической деятельности.– М.: Аспект Пресс, 1995.
12. *Стапаносова О.В.* Современные представления об интуиции // Вопросы психологии. – 2003. – № 4. – С.133-143.

С.В.ГАЛАЕВ, А.В.БУКУШЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК В КРИМИНАЛИСТИКЕ

После появления первой публикации профессора Л. Заде по теории нечетких множеств прошло около сорока пяти лет – в наше время стремительных изменений во всех сферах человеческого бытия не малый срок проверки прикладных возможностей теории. В предисловии к известной книге А. Кофмана [3] Л. Заде пишет: «Теория нечетких множеств — это, по сути дела, шаг на пути к сближению точности классической математики и всепроникающей неточности реального мира, к сближению, порожденному непрекращающимся человеческим стремлением к лучшему пониманию процессов мышления и познания. Множество или совокупность объектов — основное понятие в математике. Мы не очень быстро подошли к представлению о том, что многие, возможно большинство, человеческих знаний и связей с внешним миром включают такие построения, которые нельзя назвать множествами в классическом смысле. Их скорее следует считать «нечеткими множествами» (или подмножествами), т. е. классами с нечеткими границами, когда переход от принадлежности к классу к непринадлежности происходит постепенно, не резко. По существу ставится под сомнение, что логика человеческого рассуждения основывается не на классической двузначной или даже многозначной логике, а на логике с нечеткими значениями истинности, с нечеткими связками и нечеткими правилами вывода».

В основе теории Л. Заде лежит тоже достаточно очевидный факт - субъективные представления о цели всегда нечетки. Но он делает и следующий шаг - он полагает, что и все оценки субъекта и ограничения, с которыми он работает, также, как правило, нечетки, а иногда и вообще лишены в своем начальном виде количественных характеристик. Так он приходит к понятию лингвистической переменной» - красное, не очень красное, совсем не красное и т. п. - а затем вводит некоторую функцию принадлежности как способ формализации субъективного смысла этих качественных показателей. Тот же прием позволяет охарактеризовать принадлежность какому-либо множеству. Характеристической функцией множества оказывается тогда не разрывная функция 1 - на множестве, 0 - вне его, а некоторое распределение, напоминающее интуитивные вероятностные распределения. Заде развивает технику использования подобных оценок и определенный формализм, дающий новое описание моделей принятия решений в условиях нечеткой информации. Основная цель подобных исследований - научиться извлекать из этого нечеткого описания правило выбора альтернатив.

Получив развитие как научная область исследования, теория нечетких множеств активно проникает в учебный процесс. Так например, в Саратовском государственном университете «Теория возможностей и принятие решений в юриспруденции» читается будущим информатикам-юристам на пятом курсе. К этому времени потенциальный слушатель имеет достаточно полное представление об области применения. Читаемый курс поможет студенту освоить новые методы использования информационных технологий для решения проблем, возникающих в правовой сфере. По существу, в процессе изучения этой дисциплины у будущего специалиста укрепляется регулятивность на внедрение новых инструментальных средств в предметную область. В спецкурсе «Теория возможностей и принятия решений в юриспруденции» студентам и слушателям предлагаются следующие вопросы:

1. Нечеткие множества (основные характеристики нечетких множеств; алгебраические операции над нечеткими множествами; расстояния между нечеткими множествами и их использование в задаче принятия решений).

2. Нечеткие отношения (операции над нечеткими отношениями; построение групповых решений в пространстве четких и нечетких бинарных отношений; композиция нечетких отношений).

3. Нечеткая и лингвистическая переменные (операции над нечеткими числами; модель принятия решений на основе лингвистической переменной).

4. Нечеткие высказывания и нечеткие модели систем (правила преобразования нечетких высказываний; логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели; системы поддержки принятия решений).

Покажем, как теория нечетких множеств может применяться в криминалистике. Пусть у нас есть некоторая картотека, например преступников, каждая карточка которой содержит значения некоторых характеристик (признаков), соответствующих данному лицу.

После совершения преступления по результатам спроса свидетелей мы можем получить некоторое описание преступника в виде значений некоторых характеристик из множества характеристик, содержащихся в карточке. Естественно, возникает вопрос: есть ли лицо с такими характеристиками в нашей картотеке? При решении этой поисковой задачи возникают трудности следующего характера. Во-первых, очень мала вероятность того, что в описании преступника, данном свидетелями, будут содержаться значения характеристик с сильными разделяющими свойствами, таких, например, как серия и номер паспорта, фамилия, имя, отчество, год и место рождения и т.п. Обычно фиксируются значения характеристик преступника как физического объекта: рост, особенности фигуры, походки, форма лица, головы, цвет глаз, волос и т.п.

Во-вторых, значения характеристик в описании свидетелей представляют собой не числа (количественные описания), а некоторые понятия (качественные описания). Например, рост описывается не как значение роста в сантиметрах, а как одно из значений: высокий, выше среднего, средний, низкий. И, наконец, описания свидетелей могут отличаться друг от друга. Одного и того же человека одни свидетели могут описать как человека высокого роста, другие - как роста выше среднего (но, естественно, не низкого).

При больших размерах картотеки ее естественно перевести на ЭВМ, т.к. человек может просто не справиться с задачей. Использование ЭВМ дает ряд дополнительных возможностей, но сравнение, сопоставление описаний должно теперь большей частью производиться машиной.

Алгоритм поиска близких или похожих на данное описание записей в такой автоматизированной картотеке должен учитывать тот факт, что описания объектов составляли люди и в некотором смысле имитировать действия человека-оператора в случае "ручной" картотеки. Действительно, поиск по образцу (сравнение описаний по совпадению значений характеристик) может привести к пропуску свидетеля могут иметь разные значения характеристик (если вернуться к примеру со значениями характеристики "Рост" - это могут быть значения "средний" и "выше среднего"). Если мы расширим запрос к системе, т.е. потребуем для искомого значения "средний" выдать описания лиц с ближайшими значениями "выше среднего" и "низкий" (включая, естественно, и "средний"), то можем получить слишком большое число выданных системой описаний, среди которых большинство относится к другим лицам (т.н. информационный шум).

Предположим, что решается задача определение преступника из трех подозреваемых. Выбор преступника (a_i) осуществляется, исходя ряда критериев: c_1, c_2, c_3.

Оценки возможных исходов формируются экспертами по критериям c_i и задаются нечеткими числами на базовом множестве X = (1, 2, 3, ..., 10). К примеру лингвистических оценок относятся ОН (очень низкий); Н (низкий); С (средний); В (высокий); ОВ (очень высокий). Функции принадлежности термов имеют вид:

ОН = {1,0/1; 0,8/2; 0,2/3}; Н = {0,8/1; 0,9/2; 0,5/3; 0,2/4};
С = {0,3/3; 0,7/4; 1,0/5; 0,8/6; 0,2/7}; В = {0,2/7; 0,5/8; 0,9/9; 0,8.10};
ОВ = {0,2/8; 0,8/9; 1,0/10};

Лингвистические векторные оценки заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} OB & C & B \\ B & OH & H \\ C & OB & H \end{pmatrix}$$

Суть данной методики заключается в вычислении оценки возможности принадлежности подозреваемых к преступному миру. Сначала вычисляются наихудшие оценки для каждой альтернативы $(\mu_{\prec})$, а после этого обратные им отношения предпочтительности $(\mu_{\geq})$ среди которых выбирается максимальное.

Вычислим степень предпочтительности для альтернативы a_1:

$$\mu_{\prec}(c_i(a_1), c_i(a_2), c_i(a_3)) = \sum_{m=1}^{n} \nu_{c_1(a_1)}(x_m)(1-\sum_{j=1}^{n} \nu_{c_1(a_2)}(x_j))(1-\sum_{i=1}^{n} \nu_{c_1(a_3)}(x_i));$$

$$\nu_{c_i(a_j)}(x_m) = \mu_{c_i(a_j)}(x_m) / \sum_{y \in S_{c_i(a_i)}} \mu_{c_1(a_j)}(y).$$

Для $i=1$ и $j=1$ $\sum_{y \in S_{c_1(a_j)}} \mu_{c_1(a_j)}(y) = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}0 = 2$.

Для $i=1$ и $j=2$ $\sum_{y \in S_{c_1(a_j)}} \mu_{c_1(a_j)}(y) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}9 + 0{,}8 = 2{,}4$.

Для $i=1$ и $j=3$ $\sum_{y\in S_{c_1(a_j)}} \mu_{c_1(a_j)}(y) = 0{,}3+0{,}7+1{,}0+0{,}8+0{,}2=3$.

Аналогично находятся суммы по критериям c_2 и c_3. Функция принадлежности вычисляется следующим образом:

$$\mu_<(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = \frac{0{,}2}{2}\left(1-\frac{0{,}2}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{0{,}3}{3}\right)+\frac{0{,}8}{2}\left(1-\frac{0{,}2+0{,}5}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{0{,}3+0{,}7}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{0{,}2+0{,}5+0{,}9}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{0{,}3+0{,}7+1}{3}\right)=0{,}327;$$

$$\mu_<(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = \frac{0{,}3}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{0{,}2}{2}\right)+\frac{0{,}7}{3}\left(1-\frac{1{,}8}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{2}\right)\left(1-\frac{2}{2}\right)=0{,}057$$

$$\mu_<(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = \frac{0{,}2}{2{,}4}\left(1-\frac{0{,}8}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{0{,}8}{2{,}4}\right)+\frac{0{,}5}{2{,}4}\left(1-\frac{1{,}7}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{1{,}7}{2{,}4}\right)+\frac{0{,}9}{2{,}4}\left(1-\frac{2{,}2}{2{,}4}\right)\left(1-\frac{2{,}2}{2{,}4}\right)=$$

$$=0{,}057$$

Теперь вычислим нечеткое отношение $\mu_\geq(a_1)$:

$\mu_\geq(c_i(a_1),c_i(a_2),c_i(a_3)) = 1-\mu_<(c_i(a_1),c_i(a_2),c_i(a_3))$;

$\mu_\geq(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = 0{,}673$; $\mu_\geq(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = 0{,}943$;

$\mu_\geq(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = 0{,}943$.

Степень предпочтительности альтернативы a_1 равна минимальному из приведенных значений, т.е. $\mu_\geq(a_1)=0{,}673$. Для альтернативы a_2 получены следующие оценки:

$\mu_<(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = 0{,}137$; $\mu_<(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = 0{,}538$;

$\mu_<(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = 0{,}291$;

$\mu_\geq(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = 0{,}863$; $\mu_\geq(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = 0{,}462$;

$\mu_\geq(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = 0{,}709$.

Степень предпочтительности $\mu_\geq(a_2)=0{,}462$. Соответственно для a_3:

$\mu_<(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = 0{,}165$; $\mu_<(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = 0{,}072$;

$\mu_<(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = 0{,}291$;

$\mu_\geq(c_1(a_1),c_1(a_2),c_1(a_3)) = 0{,}835$; $\mu_\geq(c_2(a_1),c_2(a_2),c_2(a_3)) = 0{,}928$;

$\mu_\geq(c_3(a_1),c_3(a_2),c_3(a_3)) = 0{,}709$.

Степень предпочтительности $\mu_\geq(a_3)=0{,}709$. Лучшей считается альтернатива, имеющая максимальную степень предпочтительности, т. е. a_3

Литература

1. *Сидоренко Е.В.* Методы математической обработки в психологии. – СПб, 1996.
2. *Варга Б., Димень Ю., Лопариц Э.* Язык, музыка, математика: Пер. с венгр. – М.: Мир, 1981.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с фр. – М.: Радио и связь, 1982.
4. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

С.В.ЛЕБЕДЕВА, Г.Н.МУХАНГАЛИЕВА

АКТИВИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ ПОСРЕДСТВОМ ВКЛЮЧЕНИЯ В СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Ориентированность современных технологий обучения, прежде всего, на развитие учащихся, требует интеграции (полной или частичной) разнообразных отраслей знания. Примером полной интеграции может служить курс обществознания. Частичная интеграция осуществляется путём установления межпредметных связей. Для естественнонаучных дисциплин наиболее приемлемой считается внутренняя интеграция, либо интеграция каждой из них с историей возникновения и развития соответствующей науки. При этом, интеграцией учебной дисциплины с историей возникновения и развития соответствующей науки можно считать только такое их сочетание, при котором исторический материал подчёркивает, а ещё лучше, усиливает все образовательные функции изучаемой дисциплины. Поэтому наиболее часто встречающаяся форма включения в учебный процесс исторического материала, а именно, изложение биографий учёных по плану:

фамилия, имя, отчество – годы жизни – основные открытия и изобретения,

наименее удачна, в силу своей малой эффективности. Другая форма знакомства учащихся с историей науки – составление реферата с последующим чтением доклада по теме реферата, – также не является эффективной по целому ряду причин. Во-первых, более или менее глубоко с историей вопроса знакомится только тот ученик, который получил задание составить реферат по заданной теме, остальные учащиеся во время доклада, как правило, не проявляют должной познавательной активности. Во-вторых, учитель достаточно редко даёт возможность ученику во время урока сделать доклад, основной аргумент при этом: мало (жалко) времени. Все это приводит к тому, что у школьников исчезает желание не только выступать с докладами, но и готовить рефераты, и даже читать какую-то ни было литературу по истории науки. Не оценённая по достоинству деятельность (и её результаты) снижает мотивационную основу учения (обучения соответствующему школьному предмету) и может в конечном итоге привести к равнодушию или, что еще хуже, полнейшему отвращению к учению.

При обучении математике можно наблюдать три вида интеграции с историей математики. Первый вид, обозначим его условно ***«математика + история математики»***, характеризуется доминированием математического содержания над соответствующим историческим; схема, определяющая сценарий урока выглядит следующим образом:

- С учётом (на основе) историко-математического материала создаётся проблемная ситуация.
- В ходе беседы выдвигаются различные гипотезы по разрешению проблемы.
- Гипотезы комментируются в историческом контексте, отвергаются тупиковые версии, выбирается правдоподобная гипотеза.

- По ходу работы с правдоподобной гипотезой изучается соответствующий математический материал.
- Материал закрепляется на различных видах упражнений.

Так можно изучать большинство тем школьного курса математики. Но есть такой материал, значимый и необходимый учащимся, математическую суть которого в условиях средней школе изложить невозможно в первую очередь из-за высокого уровня абстракции материала и низкого уровня сформированности теоретического мышления школьников. Речь идёт об аксиоматическом построении математики (и в частности, об аксиоматическом методе). Материал данной темы излагают только в историческом аспекте. В этом случае можно говорить об интеграции второго вида «**история математики $\supseteq$ математика**».

Третий вид интеграции «**(этимология и история языка** + **история математики) $\subset$ математика**» становится всё более популярным в ниши дни, так как позволяет без особого труда возбудить познавательную активность учащихся. Суть рассматриваемой интеграции заключается в попытках разобраться вместе с учащимися в следующем вопросе: кто впервые придумал то или иное понятие и зачем? Достоинством данного вида интеграции является органичность включения исторического материала в контекст урока, ведь нет ничего естественнее детских вопросов: «Почему косинус назван именно *косинусом*, а не как-то иначе?», «Откуда взялось слово *пирамида*?», «Кто и зачем придумал *транспортир*?», «Как появилось слово *окружность*?» «Что означает слово *интеграл*?» и т.д. Ответы на эти и подобные вопросы не просто оживляют урок, делая его интересным и запоминающимся, но и представляют изучаемую науку живой и современной, развивают мышление и культуру мышления учащихся, побуждают к поиску и анализу нужной информации, вызывают желание не только выслушать ответ на уже поставленный вопрос, но и самому увидеть проблему, сформулировать её в форме вопроса и постараться найти ответ. Последнее особенно ценно, так как, по сути, является прообразом творческой деятельности. Более того, грамотно организованная работа со словом формирует культуру речи и значительно расширяет кругозор учащегося, поскольку слово, возникающее и живущее в определённой языковой среде, также непосредственно связано с историей культуры народа, которому принадлежит язык, с историей цивилизации. Ещё одним достоинством интеграции данного вида является то, что включение в содержание урока историко-математического материала не занимает много времени и, что ещё важнее, позволяет удерживать внимание учащихся на изучаемом объекте, а не переключает его (как зачастую бывает при чтении доклада по историко-математической тематике) на факты, мало относящиеся к теме урока. Главная проблема интеграции рассматриваемого вида заключается в том, что возникать она может спонтанно, не считаясь с планами учителя. Для этого достаточно какому-нибудь ученику задать подходящий вопрос. Игнорировать поставленный ребёнком вопрос в рамках изучаемого программного материала учитель не имеет права. Отсылать школьников слишком часто к справочникам и словарям – показать незнание преподаваемого предмета. Единственный выход таков: если учитель строит процесс обучения математике на основе интеграции вида «(этимология + история математики) $\subset$ математика», он должен знать этимологию и историю возникновения всех понятий школьного курса математики.

Можно изучать историко-математический материал в рамках других учебных предметов. Наиболее удачными для этого мы считаем курс *истории* и предмет *информатики и ИКТ*. В профильных математических классах целесообразно вопросами этимологии математических терминов заниматься на уроках *русского языка (и литературы)*. Рассмотрим обозначенные интеграции.

Урок в рамках интеграции **«история + естественные и точные науки»** желательно проводить в конце изучения темы, посвященной культурному наследию той или иной цивилизации (научным достижениям народа на изучаемом этапе его развития). Предварительно учащимся предлагается изучить достижения учёных данной страны и эпохи в различных областях знания (математика, химия, физика, биология, медицина и пр.). В зависимости от интересов, учащиеся разбиваются на группы, каждая из которых занимается определённой отраслью знания. Нас интересует деятельность учащихся, выбравших для своего исследования математику, и деятельность учителя математики, который вместе с этими учащимися образует единую творческую группу, которую условно можно назвать *«Математика»*. Учитель математики в группе выступает не только организатором и инициатором творческой деятельности учеников по изучению истории математики и связанными с ней математическим материалом, но и рядовым исполнителем тех проектов, которые будут реализованы в ходе подготовки и поведения урока. На уроке истории (в рамах рассматриваемой интеграции) учитель математики может отчёт своей творческой группы предварить обзорным сообщением о развитии математического знания на данном историческом этапе. Уже вслед за этим учащиеся творческой группы *«Математика»* выступают с краткими сообщениями о математических проблемах, задачах, открытиях и изобретениях, выдающихся деятелях науки, демонстрируют разнообразие специфических техник (например, решения задачи), инструментов, моделей и пр. Наиболее интересен такой урок истории, в ходе которого ученики получат возможность познакомиться с деятельностью того или иного учёного в различных областях человеческого знания. Примером может служить урок истории в 5 классе, посвящённый знаниям древних греков в V-IV веках до н.э. Здесь разные творческие группы будут упоминать имя греческого учёного Аристотеля, известного ранее ученикам по высказываниям относительно «проверки прав гражданина» (тема «Возвышение Афин в V веке до н.э. и расцвет демократии»). Сочинения Аристотеля (логический свод «Органон», трактат по философии «Метафизика», рукописи «Физика», «О возникновении животных», «О душе», «Этика», «Политика», «Риторика», «Поэтика») охватывают все отрасли знания той эпохи. Творческая группа математиков будет рассказывать, например, об Аристотеле – математике, размышляющем о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата, изучающем количество, множество, бесконечность и непрерывность, основоположнике классической логики, создателе силлогистики и теории доказательного знания: «Доказательством же я называю силлогизм, который дает знания».

Уроки в рамках интеграции **«информатики и ИКТ + естественные и точные науки»** представляют собой разработку проекта (6-7 уроков) и демонстрацию результатов проектной деятельности учащихся (защита проекта), которая направлена на самореализацию творческого потенциала школьников, обучение навыкам самообразования, развитие творческой и исследовательской инициативы, внедрение сетевых технологий в учебный процесс и обучение навыкам систематизации и структуризации информации. Задание для проекта может быть общим для всех учащихся. Интересной для этого представляется тема «Философия математики», которая к тому же реализует интеграцию **«математика + философия».** Известно, что проектная деятельность является одной из высших форм самостоятельности учащихся, подчас недоступной контролю со стороны учителей. И если для учителя информатики главное – оценить функциональность, эстетичность, новизну, технологичность и другие стороны проекта с точки зрения информационной культуры учащихся, то основная цель учителя математики – довести до сознания учащихся мысль о том, что главная задача философии математики заключается в упорядочении или переосмыслении всей той хаотической массы математических знаний, которая накоплена в течение столетий. Для достижения указанной цели учителю математики необходимо обратиться к материалам (содержанию) разработанных проектов хотя бы ещё один раз и организовать в рамках нестандартного урока (например, пресс-конференции) беседу по осмыслению изложенного в проектах материала.

Нестандартные уроки (с их необычностью, новизной и демократичностью межличностного общения учителя и учащихся, разнообразием ролевых функций и общей положительной аурой) дают возможность учителю максимально активизировать познавательную самостоятельность учащихся. Мы выделяем два пути активизации самостоятельности учащихся. Первый путь – включение учащегося в деятельность по решению специально разработанной системы заданий, позволяющей формировать и развивать основные умения, составляющие основу творческой деятельности. Второй путь активизации познавательной самостоятельности – изменение по ходу деятельности ролевых функций учащегося, создание таких ситуаций, которые обязывают проявлять инициативу и творчество.

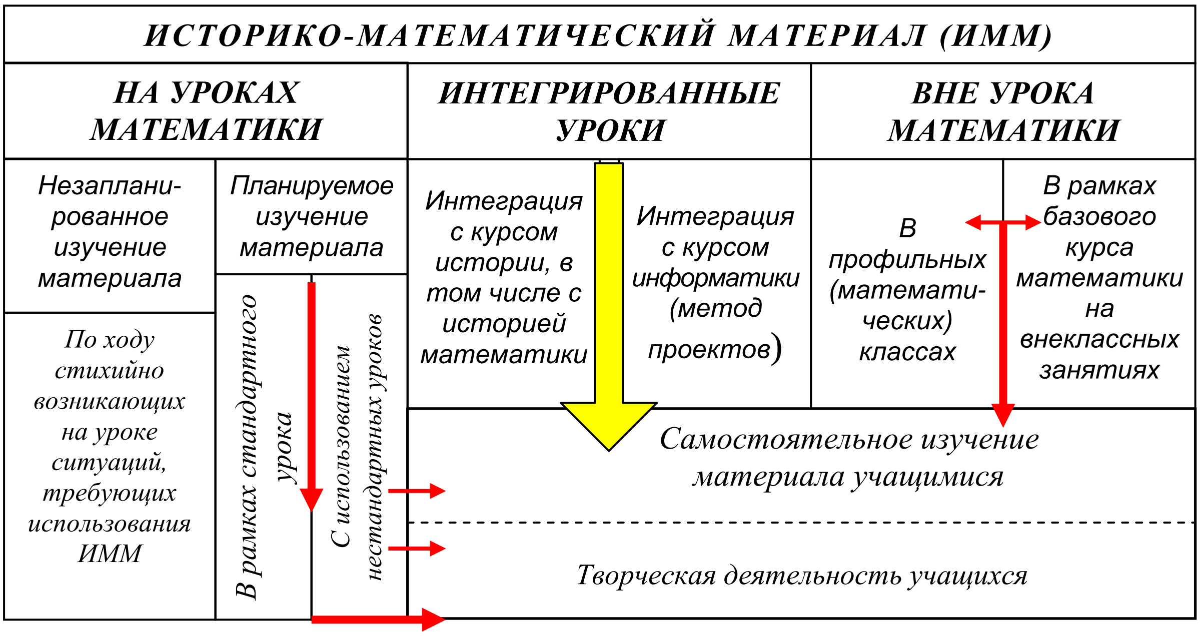
Историко-математический материал позволяет использовать любую форму из того многообразия нестандартных уроков, структуры которых разработаны методистами и учителями математики. Перечислим лишь некоторые из них [2]:

- уроки с изменёнными способами организации (урок-лекция, лекция-парадокс, защита знаний, урок вдвоём),
- уроки, опирающиеся на фантазию (урок творчества, урок-сочинение, творческий отчёт, рассказ об учёных, урок-бенефис),

- уроки, имитирующие какие-либо занятия или виды работ (заочная экскурсия, путешествие в пошлое, история изобретения, «Как нам это записать?», урок-лаборатория, «Проведём эксперимент?»),
- уроки с игровой состязательной основой,
- уроки, предусматривающие трансформацию стандартных способов организации (парный опрос, экспресс-опрос, урок-семинар, общественный смотр знаний, итоговое собеседование, конференция).

В 5-9 классах историко-математический материал может быть включён в содержание занятий математического кружка или изучаться на факультативных занятиях. В профильных математических классах возможен элективный курс по истории математики. В этих случаях мотивационная основа изучения историко-математического материала позволяет организовать обучение на более высоком научном уровне, последовательно и систематично, а значит более эффективно. Уровень самостоятельности учащихся при этом определяется не степенью сложности задания, данного учителем, а исключительно интересом, инициативностью и, в конечном итого, уровнем развития творческих способностей.

Итак, включение ИММ в содержание школьного курса математики и связанную с этим самостоятельную деятельность учащихся можно представить следующей схемой.



Литература

1. *Белобородова С.В.* История математики на первых уроках тригонометрии // Математика в школе, 1999, № 3, с.59-64
2. *Кульневич С.В., Лакоценина Т.П.* Не совсем обычный урок: Практическое пособие для учителей и классных руководителей, студентов средних и высших педагогических учебных заведений, слушателей ИПК. – Ростов-на-Дону: «Учитель», 2001
3. *Рыбников К.А.* История математики: Учебник. – М.: Изд-во МГУ, 1994.

Т.А.КАПИТОНОВА, Ю.А.ИГНАТОВА

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ 5-6 КЛАССОВ

Одной из отличительных черт гуманистического подхода в образовании является особое внимание к индивидуальности человека, четкая ориентация на сознательное развитие самостоятельного критического мышления. Такой подход рассматривается в педагогике как альтернативный традиционному, основанному главным образом на усвоении готовых знаний и их воспроизведении [1].

Главный недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализуют чаще всего лишь одну функцию знаний – информационную, оставляя в стороне другие функции: развивающую и деятельностную.

Отношение обучения и развития представляет «самый центральный и основной вопрос, без которого проблемы педагогической психологии не могут быть не только правильно решены, но даже поставлены»[2].

Традиционная система школьного образования построена по единому принципу: познание нового осуществляется как освоение образца качественно нового знания, данного учителем с помощью различных средств, в том числе и учебника.

Известно, что в структуре деятельности можно выделить три связанных элемента:

- умение ставить цель (целеполагание);
- умение реализовывать цель (исполнительная часть);
- умение оценить результат (контроль, оценка).

Сегодня в школьной практике наиболее просто реализуется только второе звено – исполнительная часть, так как она наиболее доступна учителю с любым стажем работы. Для развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся необходимо смещение акцента в деятельности учителя с объяснительно-иллюстративного на личностно-ориентированный, эвристический.

Когда учитель на уроке объясняет учебный материал, его нередко почти никто не слушает, так как это не всегда интересно учащимся. Важно так организовать учебную работу, чтобы ученику пришлось действовать самому, чтобы он самостоятельно экспериментировал, исследовал, выбирал и классифицировал. Естественно в этой ситуации он будет задавать учителю вопросы, которые его заинтересовали. Необходимо распределять деятельность таким образом, чтобы каждый ученик был занят.

Отдельные аспекты общей проблемы познавательной самостоятельности постоянно интересовали философов и педагогов. Но только в XX веке появились попытки создания целостных теорий, направленных на формирование познавательной самостоятельности учащихся. Все оказалось возможным только в рамках развивающего обучения.

Процессы обучения и воспитания не сами по себе непосредственно развивают ребенка, а лишь тогда, когда они имеют деятельностные формы и обладают соответствующим содержанием. Между обучением и развитием ребенка всегда стоит его деятельность.

В наше время деятельностный подход интенсивно разрабатывается в самых разных отраслях науки: в философии, психологии, педагогике, методике преподавания конкретных дисциплин.

Деятельностный подход к обучению реализуется в различных теориях, созданных и создающихся в настоящее время. Отметим такие из них, как теория проблемного обучения; теория поэтапного формирования умственных действий, созданная П.Я.Гальпериным; теория учебной деятельности, разработанная Д.Б.Элькониным и В.В.Давыдовым. Рассмотрим подробнее последнюю теорию [3].

Согласно этой теории усвоение школьниками тех или иных знаний в форме учебной деятельности всегда начинается с творческого преобразования усваиваемого им материала. Своеобразие учебной деятельности состоит в том, что в процессе ее осуществления школьник усваивает теоретические знания. Их содержанием является происхождение, становление и развитие какого-либо предмета. Если же мы наблюдаем в школе усвоение ребенком таких знаний, которые уже заранее четко сформулированы и даются ему учителем в «готовом виде», и в содержании которых отсутствуют моменты происхождения и развития изучаемого предмета, то можно твердо сказать, что в данном случае ребенок учебной деятельности не выполняет. При этом он усваивает с помощью иллюстраций и объяснений, предлагаемых учителем, те или иные эмпирические знания. К сожалению, в обычной школе дети чаще всего усваивают именно такие знания. Поэтому полноценной учебной деятельностью в обычной школе обладает сравнительно небольшое количество детей.

Учебная деятельность состоит из таких компонентов, как учебные потребности, мотивы, задачи, действия и операции. У детей, приходящих в первый класс, целостной ее структуры еще, конечно, нет. Она формулируется у некоторой части детей в течение нескольких лет школьной жизни, особенно интенсивно в начальных классах. В младшем школьном возрасте учебная деятельность является основной и ведущей среди других видов детской деятельности. Ее выполнение младшими школьниками определяет развитие у них главных психических новообразований, и прежде всего основ теоретического мышления, нацеленного на раскрытие закономерностей развития предметов.

Чтобы у младших школьников, а затем и у школьников 5-6 классов формировалась полноценная учебная деятельность, они должны систематически решать учебные задачи. Главная особенность учебной задачи состоит в том, что при ее решении школьник ищет и находит общий способ подхода ко многим конкретно-частным задачам определенного класса, которые в последующем решаются школьником как бы «с хода» и сразу правильно.

Учебная задача решается посредством системы учебных действий. Первым из них является преобразование проблемной ситуации, входящей в такую задачу. Это действие нацелено на поиск такого генетически исходного отношения предметных условий ситуации, которое служит всеобщей основой последующего решения всего многообразия частных задач. Другие учебные действия позволяют школьникам моделировать и изучать это исходное отношение, выделять его в частных условиях, контролировать и оценивать процесс решения учебной задачи. Главным методом школьного обучения должен стать метод введения детей в ситуацию учебных задач и организацию учебных действий, то есть метод решения школьниками учебных задач [3].

Важное место среди учебных задач должно принадлежать логическим задачам.

Логические задачи являются оптимальным средством развития творческого мышления и эвристической деятельности учащихся. Процесс решения логических задач схож с процессом решения настоящих творческих задач в науке и технике и повторяет все этапы творческого мышления.

При решении логических задач используется ряд эвристических приемов[5].

Прием конкретизации задачи

Данный прием состоит в нахождении частных случаев общей задачи путем введения дополнительных видовых свойств явлений. Рассмотрим прием конкретизации на примере задачи, содержащей ложные высказывания.

Задача 1. *Четыре одноклассницы Маша, Даша, Оля и Поля участвовали в лыжных соревнованиях и заняли четыре первых места. На вопрос, кто какое место занял, они дали три разных ответа:*

- *Ольга заняла первое место, Даша – второе.*
- *Ольга на втором месте, а Полина – на третьем.*
- *Маша на втором месте, Полина на четвертом.*

При этом они признали, что одна часть каждого ответа верна, а другая нет.

Решение. *Пусть первая часть первого ответа – истина, а вторая – ложь. Исходя из этого, запишем истинные или ложные высказывания в таблицу.*

Истина	**Ложь**
Ольга – I *Полина –III* *Маша – II*	*Даша – II* *Ольга – II* *Полина - IV*

Теперь легко увидеть, что в правом столбце таблицы оказалось два противоречивых высказывания: Даша и Ольга не могут одновременно занимать второе место. Значит хотя бы одно из этих высказываний ложное.

Никаких противоречий нет в левом столбце. Это позволяет получить решение: в левой колонке отражены истинные места, а Даше осталось четвертое место.

Это решение не полное. *Предположим, что первая часть первого ответа неверна. Это значит, что верно следующее предположение:*

Ольга заняла не первое место, а Даша – второе. Тогда ложна первая часть второго ответа, а значит, истиной является то, что Полина – на третьем месте. Тогда из третьего ответа получится, что Маша на втором месте, как и Даша. А это противоречит условию задачи.

Ответ: *Ольга – I, Маша – II, Полина – III, Даша – IV.*

Приемы моделирования

Моделирование с помощью графов рассмотрим на примере задачи.

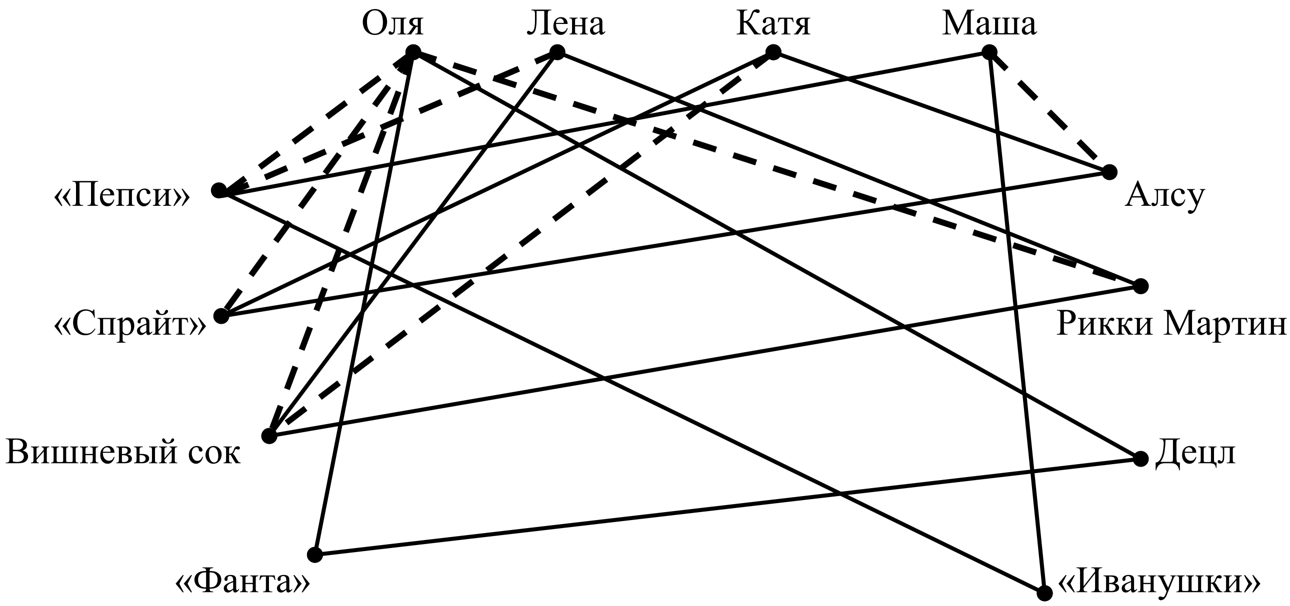
Задача 2. *Оля, Лена, Катя и Маша решили вместе встретить Новый год. У каждой из них есть любимый напиток, и все они любят эстраду. Оля и Лена не любят «Пепси». Оля также не любит «Спрайт». Той девочке, которая любит «Пепси», не нравится Алсу.*

Наоборот, Кате Алсу очень нравится. Катя не любит вишневый сок. Оля разделяет ее вкус. Той девочке, которая любит «Фанту», не нравится Рикки Мартин. Маша против зарубежной эстрады ничего не имеет, но сама предпочитает группу «Иванушки». Четвертой девочке нравится Децл.

Определить предпочтение каждой из подруг.

<u>Решение.</u> *Выпишем условия задачи в следующем порядке.*

1. *Оля и Лена не любят «Пепси».*
2. *Оля не любит «Спрайт».*
3. *Катя не любит вишневый сок.*
4. *Оля не любит вишневый сок.*
5. *Той девочке, которая любит «Пепси», не нравится Алсу.*
6. *Кате нравится Алсу.*
7. *Той девочке, которая любит «Фанту», не нравится Рикки Мартин.*
8. *Маша предпочитает «Иванушек».*
9. *Четвертой девочке нравится Децл.*



В зависимости от условий задачи точки соединяли сплошной линией, если имеет место соответствие между данными элементами, или пунктирной линией, если соответствия нет.

<u>Ответ</u>*: Оле нравятся «Фанта» и Децл, Лене – вишневый сок и Рикки Мартин, Кате нравится «Спрайт» и Алсу, а Маше – «Пепси» и группа «Иванушки».*

Моделирование с помощью рисунка продемонстрируем на примере решения следующей задачи.

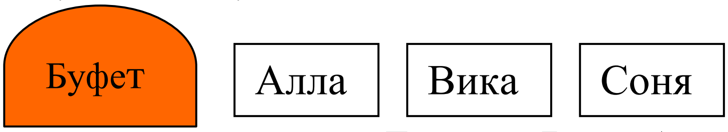
Задача 3. *В очереди в школьный буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Боря и Алла не стоят рядом; Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей. В каком порядке стоят ребята?*

<u>Решение.</u> *Выпишем условия в следующем порядке.*

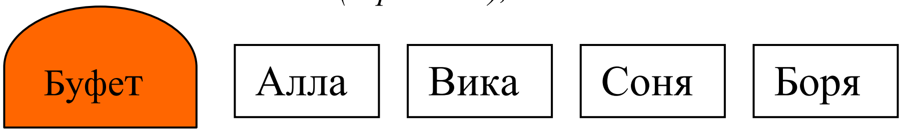
1. *Вика стоит впереди Сони, но после Аллы.*
2. *Боря и Алла не стоят рядом.*
3. *Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей.*

Изобразим буфет и ребят стоящих в очереди некоторыми геометрическими фигурами, например, прямоугольниками.

Из первого условия следует, что девочки стоят в таком порядке: Алла, Вика, Соня.

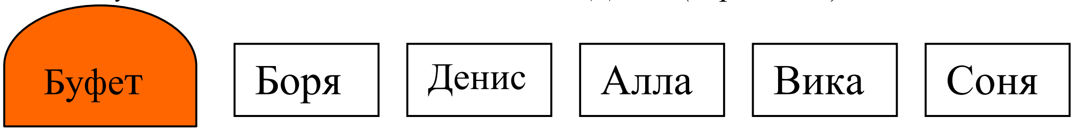


Проанализируем второе условие. Поскольку Боря и Алла не стоят рядом, то Боря может находиться либо позади Сони (вариант 1),



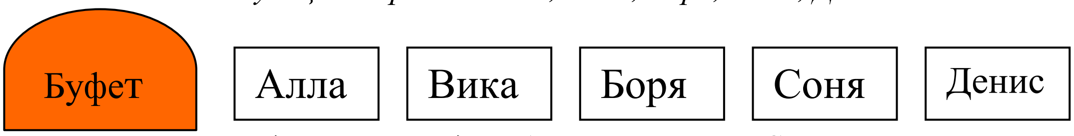
либо между Викой и Соней (вариант 2).

Существует возможность того, что Боря стоит впереди Аллы, тогда кто-то должен стоять между ними. Это может быть только Денис (вариант 3).



Проанализируем третье условие, из которого следует, что Денис стоит с краю, позади Сони и, следовательно, вариант 3 не подходит. Приходится выбирать среди вариантов 1 и 2. Значит, Алла стоит первой. Так как Борис и Денис не могут стоять рядом, то Боря может стоять только между Викой и Соней.

Итак, дети стоят в следующем порядке: Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.



Ответ. *Дети стоят в следующем порядке: Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.*

Перечисленные приёмы моделирования отвечают принципу наглядности в обучении, и являются, по сути, визуализацией процесса решения.

Все перечисленные выше приёмы могут и должны быть сформированы у учащихся 5-6 классов на уроках математики.

Ряд эвристических приёмов можно сформировать у учащихся не только по ходу решения, но и в процессе конструирования логических задач. Алгоритм конструирования, предложенный М.В.Шнейдерманом [6] предписывает:

1) определить содержание текста задачи;

2) составить полную информацию о сюжете;

3) сконструировать условие задачи с помощью исключения (или искажения) части данных;

4) формулировать текст задачи;

5) проверить возможность решения с помощью рассуждений:

- если получился единственный непротиворечивый ответ (совпадающий с пунктом *2*),
- то задача считается составленной (задание по составлению логической задачи выполнено);
- иначе, корректируем условие задачи и возвращаемся к пункту *5*.

Проиллюстрируем работу по конструированию задачи на примере.

1) ***Объекты: три сына: Роман, Фёдор, Кирилл.***

2) ***Исходная информация: Фёдор получил двойку.***

3) ***Лишаем информацию очевидности, делаем её логически противоречивой. Роман: «Двойку получил Кирилл». Кирилл: «Двойку получил Фёдор», Фёдор: «Двойку получил Роман».***

4) ***Формулируем текст задачи: Мама пришла с работы, а Роман ей и говорит: «Кирилл получил двойку». На что Кирилл возразил: «Двойку получил Фёдор», а Фёдор сказал «Нет, двойку получил Роман!». Как маме узнать, кто из мальчиков получил двойку, если один из сыновей говорит правду, а двое других солгали.***

5) ***Попробуем решить задачу. Рассмотрев все возможные варианты, нетрудно установить, что решение найти невозможно.***

	Роман	***Фёдор***	***Кирилл***	***Результат***	
1	***правда***	***ложь***	***ложь***	***«Кирилл получил двойку»***	***Выбрать решение из трёх равновозможных вариантов нельзя.***
2	***ложь***	***правда***	***ложь***	***«Роман получил двойку»***	
3	***ложь***	***ложь***	***правда***	***«Фёдор получил двойку»***	

Корректируем условие задачи. Уточняем информацию. Допускаем, что лгут все, изменяем ответ Кирилла: «Двойку получил не Фёдор». Проверяем.

	Ответ	***Результат***			
		Роман	***Фёдор***	***Кирилл***	***Вывод***
1	***Кирилл получил двойку***	***правда***	***ложь***	***правда***	***Противоречит условию: лгут все.***
2	***Роман получил двойку***	***ложь***	***правда***	***правда***	***Не соответствует условию: лгут все.***
3	***Фёдор получил двойку***	***ложь***	***ложь***	***ложь***	***Соответствует всем данным условия***

6) ***Таким образом, составлена следующая задача: Мама пришла с работы, а Фёдор ей и говорит: «Мама, а Роман получил двойку!». На что Роман возразил: «Кирилл получил двойку». Как маме узнать, кто из мальчиков получил двойку, если Кирилл ей сообщил, что Фёдор двойки не получал, но она знает, что все сыновья говорят неправду?***

При организации работы по конструированию логических задач целесообразно опираться на жизненный познавательный опыт учащихся. Дети часто наполняют задачи психологическим подтекстом и пережитыми жизненными ситуациями. Некоторые задачи могут стать поводом для бесед, что расширяет воспитательные возможности для учителя.

Литература

1. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учебное пособие./ Под ред.Е.С.Полат.- М.: Издательский центр «Академия», 2001, с.16.

2. *Выготский Л.С.* Педагогические технологии./ Под ред. В.В. Давыдова,- М.: Педагогика, 1991,с.37.

3. Деятельностный подход в психологии: проблемы и перспективы. М.: АПН СССР, 1990. С.37-39.

4. *Капитонова Т.А.* Познавательная самостоятельность младших школьников на уроках математики. Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 1998.

5. *Заесёнок В.П.* Эвристические приемы решения логических задач./ Математика в школе. 2005. № 3. С.29-33.

6. *Шнейдерман М.В.* Метод конструирования логических задач. / Математика в школе. 1998, № 3, С.23-25.

Т.А. КАПИТОНОВА, А.М.ШИБАНОВА

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ» С УЧЕТОМ ТЕКСТОВ ЕГЭ

При подготовке к ЕГЭ в первую очередь нужно обратить внимание на содержание, проверяемое заданиями контрольно-измерительных материалов. При подготовке к экзамену полезно учесть недочеты в знаниях выпускников средней школы, которые выявились при проведении единого экзамена в предыдущие годы. Анализ ответов показал, что отдельные учащиеся допускают грубые ошибки в заданиях как базового, так и повышенного уровня сложности.

По теме «Функции и их графики» наибольшее затруднения вызвали задания, связанные с геометрическим смыслом производной, с нахождением наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке и с нахождением точек максимума (минимума) функции.

В связи с этим важно обратить внимание на особенности изучения темы «Функции и их графики». Тема «Линейная функции и ее график» является начальным этапом в обеспечении систематической функциональной подготовки учащихся. Здесь вводятся такие понятия, как «функция», «аргумент», «область определения функции», «график функции». Функция трактуется как зависимая переменная. Рассматриваются способы задания функции. Начинается работа по формированию умений учащихся находить значения функции, заданной формулой, графиком, по известному значению аргумента, а также определять по графику функции значение аргумента, если значение функции задано.

При изучении квадратичной функции учащиеся последовательно знакомятся с графиком и свойствами функций $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=x^2+px+q$, $y=ax^2+bx+c$. Построение графиков этих функций на конкретных примерах осуществляется по точкам. Основное внимание уделяется построению графика с использованием координат вершины параболы, нулей функции (если они имеются) и нескольких дополнительных точек. Преобразования же графиков являются вспомогательным материалом.

При изучении темы формируются умения определять по графику промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, нули функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции и решение задач с их применением не входит в число обязательных.

При изучении материала темы «Степенная функция» углубляются и существенно расширяются функциональные представления учащихся. На примерах функций $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=1/x$ рассматриваются основные свойства степенной функции, которые после изучения степени с действительным показателем лягут в основу формирования представлений о степенной функции с любым действительным показателем. Здесь важно не только изучить свойства и графики конкретных функций, но и показать прикладной аспект их применения.

При изучении данной темы формулируются определения возрастающей (убывающей) функции на промежутке, а, следовательно, появляется возможность аналитически обосновывать характер монотонности конкретной функции на указанном промежутке. Однако проведение подобных доказательств не входит в число обязательных умений. Учащиеся должны научиться находить промежутки возрастания и убывания с помощью графика рассматриваемой функции.

Приведем некоторые аргументы «за» и «против» ЕГЭ, встречающихся в обсуждении этой проблемы среди тех, кто непосредственно будет участвовать в ЕГЭ, то есть учителей, учащихся и их родителей.

«За»:

1. Оснащение всех образовательных учреждений компьютерами (если ЕГЭ подразумевает проверку знаний с помощью ЭВМ).

2. Возможность поступления выпускников из отдалённых регионов в различные вузы страны, в том числе и престижные. Все учащиеся будут поставлены в равные условия. Те дети, чьи родители испытывают материальные затруднения при отправке их для сдачи вступительных экзаменов в другие города, будут поставлены в те же условия, что и дети обеспеченных родителей. То есть, поступление выпускников не потребует от родителей материальных затрат.

3. Объединение выпускного экзамена в школе с вступительным экзаменом в вузы снизит количество психологических стрессов, получаемых учащимися.

4. Общие требования к структуре и содержанию тестов по математике также можно считать положительным моментом.

В последнее время все вузы предъявляют свои требования к абитуриентам. Тексты вступительного экзамена каждый вуз составляет самостоятельно, при этом уровень и содержание заданий порой не соответствует программе по математике средней школы (например, включаются темы и типы заданий, не рассматриваемых в школе). Поэтому, многие учащиеся для успешного поступления вынуждены посещать платные очные (заочные) курсы, на которых рассматриваются специфические задания, предлагаемые на вступительных экзаменах в конкретный вуз или заниматься с репетитором данного вуза, что накладывает отпечаток на материальное состояние семьи. Таким образом, в выигрышном положении оказываются дети обеспеченных родителей.

5. Обеспечивается объективность оценки уровня экзаменуемых. Исключается списывание, возможность подсказки.

6. Тексты ЕГЭ по математике соответствуют программе школьного курса, отвечают требованиям дифференциации обучения, некоторые задания второй части и все задания третий части носят развивающий характер.

«Против»:

1. Сдача экзамена итоговой аттестации за курс средней школы вне её стен может вызвать у учащихся стресс, что может сказаться не только на результатах экзамена, но и на здоровье учащихся.

2. Возможно, по каким-то субъективным и объективным причинам именно в данный день ученик не смог показать свои истинные знания. В связи с этим, он лишается возможности поступления в выбранный им вуз в данном году. В настоящее же время учащиеся одновременно могут поступать сразу в несколько вузов, и при этом есть вероятность того, что экзамен по математике в один из них он сдаст лучше, чем в другой.

3. Задания первой и второй части ЕГЭ подразумевает только выбор или запись ответа. Ход решения и рассуждения остается для учителя загадкой, что не позволяет ему проанализировать ошибки и учесть их при работе в своей дальнейшей деятельности. Кроме того, выбор ответа может быть угадан, а серия ошибок может привести к правильному ответу. При решении достаточно сложного задания, учащиеся могут допустить случайную ошибку, вызванную невнимательностью или стрессовым состоянием ученика, что приведет к неправильному ответу, а, следовательно, к нулевой оценке по этому номеру.

4. Чтобы учащиеся смогли поступить в вузы, они должны решить задания второй и некоторые задания третьей части, уровень сложности которых, определен школьной программой как повышенный. Подобных заданий в учебниках встречается мало. Учителя математики основную часть учебного времени тратят на отработку ЗУНов, соответствующих уровню первой и некоторых заданий второй части. На решение заданий повышенной сложности, носящих продуктивно-творческий и развивающий характер, зачастую не хватает времени. Несмотря на это, количество часов, отводимых на математику, уменьшают. Поэтому, для получения большего количества баллов при сдаче ЕГЭ, учащиеся вновь вынуждены будут обратиться к помощи репетиторов.

5. Не получится ли такая ситуация, что все задания предлагаемого тестирования выполнят достаточно много учащихся, большое количество которых выберут для себя один и тот же факультет одного и того же вуза. Как же будет решаться вопрос с поступлением в этом случае, если количество мест ограничено?

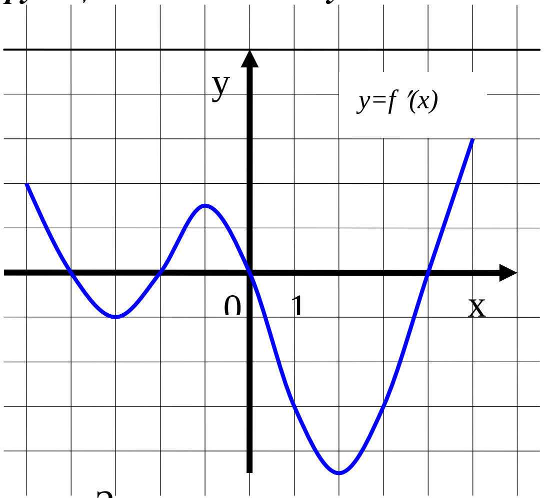
6. Хотелось бы спросить: «А не мало ли времени отводится на решение заданий, достаточных для поступления в выбранный вуз?». Часть заданий требует достаточно объемных математических выкладок, следовательно, затрачивается много времени. Задания третьей части к тому же предусматривают нестандартный подход к решению, найти который удается не сразу.

С учётом заданий ЕГЭ систему задач то теме «Функции» необходимо расширить. Соответственно этому требуется расширение системы методических приёмов решения заданий новых типов.

Рассмотрим некоторые виды уравнений, предлагаемые составителями текстов ЕГЭ.

Рассмотрим

Задание 1. ***Функция y = f(x) задана на промежутке (- 5; 5). График ее производной y = f ’(x) изображен на рисунке. Определите наибольшее из тех значений x, в которых функция имеет минимум.***



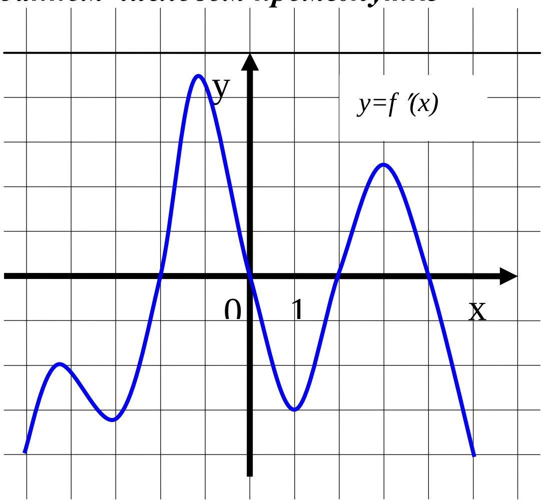
<u>Решение</u>. Производная y = f ’(x) определена во всех точках промежутка (-5; 5), и f ’(x) = 0 в критических точках x = - 4, x = - 2, x = 0, x = 4. Точкой минимума является критическая точка функции, при переходе через которую производная меняет свой знак с отрицательного на положительный. Таких точек две: x = - 2, x = 4. Следовательно, данная функция имеет две точки минимума, а наибольшее из тех значений x, в которых функция имеет минимум, равно 4.

<u>Ответ</u>: 4.

Задания рассмотренного типа требуют следующего приёма: сравнение графиков функции и её производной с последующим анализом графика производной функции. При анализе особое внимание учащихся обращают на факт (мнемоническое правило):

функция – график: экстремум
производная функции – график: перемена знака

Задание 2. ***Функция y = f(x) задана на промежутке (- 5; 5). График ее производной y = f ’(x) изображен на рисунке. Укажите число точек максимума функции y = f(x) на данном числовом промежутке***



<u>Решение</u>. Производная y = f ’(x) определена во всех точках промежутка (-5; 5), и f ’(x) = 0 в критических точках x = - 2, x = 0, x = 2, x = 4. Точкой максимума является критическая точка функции, при переходе через которую производная меняет свой знак с положительного на отрицательный. Таких точек две: x = 0, x = 4.

<u>Ответ</u>: 2.

Содержание (требования) данной задачи целесообразно варьировать, меняя промежуток, на котором рассматривается функция и тип экстремума. Например, можно рассмотреть следующие задания.

Задание 2*. ***Функция y = f(x) задана на промежутке [- 5; 5]. График ее производной y = f ’(x) изображен на рисунке. Укажите число точек максимума функции y = f(x) на числовом промежутке [–2; 4).***

Задание 2.** ***Функция y = f(x) задана на промежутке (- 5; 5). График ее производной y = f ’(x) изображен на рисунке. Укажите число точек минимума функции y = f(x) на числовом промежутке (–2; 4).***

Обобщая материал по теме, которую можно обозначить как «Графики функций и их производных» желательно видоизменять график производной функции, рассматривая не только непрерывные кривые, но и линии с точками разрыва.

Задание 3. ***Найдите наибольшее значение функции*** $y = \dfrac{40}{2^x + 3^x}$ ***на промежутке [1; 7].***

<u>Решение</u>. Заданная функция будет принимать наибольшее значение тогда и только тогда, когда выражение, стоящее в знаменателе достигает наименьшего значения. Рассмотрим функцию $t(x) = 2^x + 3^x$***, – она положительна и возрастает на отрезке [1; 7], следовательно, наименьшее значение эта функция принимает при*** $x = 1$***:*** $t(1) = 5$***. Таким образом, наибольшее значение заданной функции равно*** $y = 40/5 = 8$***.***

<u>Ответ</u>: 8.

Эту задачу учащимся сначала дают на самостоятельное исследование. В случае, когда предложенное решение основано на применении стандартной схемы нахождения наибольшего значения функции с помощью производной (учащиеся должны знать теорему Вейерштрасса о свойстве функции, непрерывной на замкнутом промежутке), необходимо продемонстрировать другой, более рациональный способ решения задачи с применением свойства монотонности обратной пропорциональности.

Задание 4. ***Найдите наибольшее целое значение функции***

$$y = 7 \cdot 2^{3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 5}$$

<u>Решение</u>. Поскольку $y = 7 \cdot 2^{3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - 5} = 7 \cdot 2^{\cos^2 x - 2} = \dfrac{7}{4} \cdot 2^{\cos^2 x}$

а функция $y=2^x$ ***монотонно возрастает, то нас интересует область значений показателя*** $\cos^2 x$***. Это промежуток [0; 1], так что область значений данной функции – промежуток [7/4; 7/2] и наибольшее целое число из этого промежутка есть 3.***

<u>Ответ:</u> 3.

Эта задача относится к группе **С** заданий ЕГЭ и требует от учащегося подробного и обоснованного решения. При работе над задачами такого типа желательно составить программу действий. В данном случае, программа может быть такой: 1) преобразовать (упростить) показатель степени, 2) применить подходящие свойства элементарных функций для решения поставленной задачи, 3) осуществить выборку решения исходя из требования задачи: выбрать наибольшее <u>целое</u>.

Расширение системы учебных задач путём включения заданий, рассмотренных в нашей статье, позволяет развивать аналитическое мышление школьников, формировать математическую культуру и мотивационную основу дальнейшего изучения математики.

Литература

1. *Глазков Ю.А.* Единый государственный экзамен 2001. // Математика в школе. — 2002. — №1. — с. 14-19.

2. *Глазков Ю.А., Рязановский А.Р., Семёнов П.В.* Решение заданий демонстрационной версии контрольно-измерительных материалов ЕГЭ-2004 // Математика в школе. — 2004. — №2. — с. 15-19.

3. *Дорофеев Г.В.* Единый государственный экзамен по математике и тестирование// Математика в школе. — 2002. — №7. — с. 63-69.

4. *Корешков Т.А., Глазков Ю.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Типовые тестовые задания, М.: Экзамен, 2005.

О.М. КУЛИБАБА, Н.В. АНТОНОВА

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ИЗУЧЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ УЧАЩИМИСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В УСЛОВИЯХ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ

Современный уровень развития производства выдвигает перед школой задачу сближения содержания школьного курса математики с достижениями основ современной науки, задачу повышения уровня математической культуры, уровня математического развития школьников.

Решение перечисленных задач в профильных (предпрофильных) классах естественнонаучных направлений возможно в рамках элективного курса (спецкурса) «Диофантовы уравнения».

Содержательно-методическая линия уравнений развертывается на протяжении всего школьного курса математики и составляет значительную его часть. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, при решении разных прикладных задач.

Обычно в школьном курсе математики рассматриваются уравнения только от одной переменной, хотя перед введением понятия системы уравнений с двумя переменными целесообразно ввести понятие уравнения с двумя переменными. Существуют некоторые учебные пособия для средних школ, которые содержат в ознакомительном порядке теоретический материал об уравнениях с двумя переменными и задачи на составление и решение уравнений с двумя переменными в целых числах (такие уравнения называются диофантовыми). Но программа по математике для общеобразовательных школ не предусматривает нахождение целочисленных решений уравнений с двумя неизвестными.

В связи с этим является актуальным вопрос о разработке спецкурса «Диофантовы уравнения», рассчитанного на учащихся десятого класса средней школы.

Представим тематический план разрабатываемого спецкурса.

1. Жизнь и творчество Диофанта.
2. Понятие диофантовых уравнений.
3. Задача Пифагора.
4. Системы диофантовых уравнений.
5. Великая теорема Ферма.
6. Кривая Ферма. Гипотеза Морделла.
7. Кривая третьего порядка. Метод секущих.
8. Рациональные точки эллиптических кривых.
9. Обобщение и повторение материала по теме «Диофантовы уравнения».
10. Игра «Математик – бизнесмен».

Изучение материала в условиях данного спецкурса, расширяющего и углубляющего знания учащихся, предусматривает следующие цели.

1. Дидактические цели:
а) учащиеся должны знать:
− определение диофантового уравнения; пифагоровых троек, способы их нахождения;
− метод спуска при решении диофантовых уравнений первой степени с двумя неизвестными;
− доказательство задачи Пифагора о количестве пифагоровых троек;
− формулировку, частные случаи и историю доказательства великой теоремы Ферма;
− определения алгебраических кривых.
б) учащиеся должны уметь:
− решать диофантовы уравнения первой степени с двумя неизвестными;
− решать нелинейные диофантовы уравнения и их системы;
− решать текстовые задачи на составление диофантовых уравнений и их систем.
2. Развивающие цели:
− развитие математических способностей и формирование у учащихся определенных навыков исследовательского характера;
− развитие у учащихся умения самостоятельно работать с дополнительной литературой;
− формирование у учащихся как отдельных учебных действий, составляющих основу специфической математической деятельности, так и последовательности сформированных действий (сначала по инструкции, затем самостоятельно);
− обучение школьников постановке промежуточных целей в своей учебной работе, планированию отдельных учебных действий и их последовательности;
− формирование навыков самоконтроля и элементов рефлексии.
3. Воспитательные цели:
− воспитание устойчивого осознанного интереса учащихся к математике, к выполняемой ими деятельности;
− содействие в воспитании культуры математического мышления;
− воспитание у учащихся чувства коллективизма и умения сочетать индивидуальную работу с коллективной;
− установление более тесных контактов между учителем и учащимися и на этой основе более глубокое изучение познавательных интересов школьников.

Приступая к рассмотрению проблемы возможности изучения в условиях спецкурса диофантовых уравнений, необходимо исходить из положения, что содержание обучения должно не только отражать современный уровень научного и общественного прогресса, но и способствовать более эффективному развитию личности. «Последнее произойдет лишь тогда, когда средства, содержания, методы обучения и воспитания будут разрабатываться с учетом психологических закономерностей возрастного и индивидуального развития» [1, с.7].

Так как спецкурс «Диофантовы уравнения» предлагается для изучения в старших классах, то рассмотрим особенности психического развития учащихся этого возраста.

Старший школьный возраст, или юношеский возраст, – период жизни человека от 15 до 17 лет. Известный психолог Н.С.Лейтес, опираясь на данные непосредственного наблюдения за деятельностью старших школьников, беседы с учащимися, анализ библиографических данных, отмечает, что у учащихся этого возраста «в психическом облике чаще всего сочетаются активность анализирующей мысли, склонность к рассуждениям и особая эмоциональность, впечатлительность» [5, с. 125].

Психологи, изучавшие этот возрастной период (Л.С. Выготский, В.А. Крутецкий, Н.С. Лейтес, И.С. Кон, А.В. Захарова, Н.Д. Левитов и другие), подчеркивают рост интеллектуальных сил учащихся, что создает благоприятный фон и основу для усложнения всех видов деятельности, разнообразия способов работы.

Мыслительная деятельность учащихся этого возраста характеризуется все более высоким уровнем обобщения и абстрагирования, умением аргументировать и доказывать положения, делать обоснованные выводы. Интеллектуальная продвинутость «позволяет старшеклассникам осуществлять глубокий анализ материала, вскрывать закономерности, выявлять широкие аналогии» [2, с. 19].

Как отмечают психологи С.Л.Рубинштейн [6] и Н.Д.Левитов [4], высокий уровень абстракции и обобщений связан у старшеклассников с развитием теоретического мышления. «Можно ориентировочно сказать, что развитие эмпирического мышления типично по преимуществу для учащихся начальной школы, а развитие теоретического мышления – для учащегося средней школы» [6, с. 399].

Существенные изменения наблюдаются и в стиле умственной деятельности старшеклассника, которая более активна, самостоятельна и носит творческий характер. В старшем школьном возрасте у школьников значительно повышается интерес к учению, который связывается с самоопределением и подготовкой к самостоятельной жизни. Поэтому потребность в знаниях – одна из характерных черт старшеклассника.

Рассмотрим особенности развития учащихся 10 класса, непосредственно на которых рассчитан разрабатываемый элективный курс.

Данные психологических исследований установили, что среди умственных умений в этом возрасте лучше сформированы умения устанавливать аналогии, обобщения, а также пользоваться накопленными знаниями в повседневной практической деятельности. Все это свидетельствует о значительном развитии таких умственных операций, как анализ, синтез, систематизация. Выявлено, что 53% учащихся десятых классов используют в своей интеллектуальной деятельности отвлеченные, абстрактные способы мышления, что свидетельствует о все большем приближении мыслительной деятельности учащихся к понятийному теоретическому мышлению. Исследования В.А.Крутецкого [3] показывают, что математические способности в старшем школьном возрасте включают в себя такие компоненты, как способность к формализованному восприятию математического материала, специальная математическая память и обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении.

У старшеклассников развивается одна из важнейших сторон абстрактного мышления – способность действовать в уме, которая обеспечивает им возможность оперировать с предметами не прямо, а опосредованно, то есть образами.

Большинство десятиклассников обладают достаточно сформированными познавательными интересами, в частности, к математике. Учебные интересы становятся устойчивее, приобретают более личностный и активный характер. По мере приближения к концу школьного обучения многие учащиеся переходят от этапа любознательности (основной формы познавательной деятельности) к целенаправленной познавательной деятельности. Она представляет собой высший уровень познавательной потребности и связана не только с развитием интеллектуальной сферы старшеклассников, но и с формированием их личности в целом.

Подводя итоги изучения психического развития учащихся старшего школьного возраста, следует отметить:

- расположенность учащихся к широкому охвату и систематизации знаний;
- способность учащихся усваивать абстрактный материал;
- сформированность познавательных интересов.

Приведенные выше особенности психического развития учащихся старших классов благоприятствуют постановке достаточно сложных по научному уровню спецкурсов, к числу которых относится и спецкурс «Диофантовы уравнения». Данный спецкурс, систематизирующий, обобщающий и дополняющий школьный курс математики, вполне доступен учащимся старших классов. Кроме того, доступное для учащегося изложение материала курса обогащает его знания, развивает его мышление и является важным условием успешности его обучения.

Более того, обучение, которое опережает развитие учащихся, согласно учению Л.С. Выготского «о зонах ближайшего развития», является наиболее целесообразным, поскольку только в этом случае оно затрагивает личность ребенка и развивает ее.

Развитие личности, ее интеллекта в юности тесно связано с развитием способностей учащихся. Под способностями обычно понимают «свойства или качества человека, делающие его пригодным к успешному выполнению какого-либо из видов общественно-полезной деятельности, сложившегося в ходе общественно исторического развития» [7, с. 228].

Специфика спецкурсов позволяет в большей степени, чем другие формы учебной работы, развивать разнообразные способности учащихся. Однако не всякой деятельностью создаются способности, а в первую очередь такой, которая вызывает глубокий интерес. Чтобы управлять школьниками, надо знать законы их развития. С.Л.Соловейчик [8] выделяет следующие возрастные точки, которые определяют развитие интересов ребенка: от 3 до 5 лет; 3 – 4 классы; 6 – 7 классы; 9 – 10 классы.

В каждом из этих «узелков» происходит обычно смена интересов и качественное их изменение. Последний, четвертый период, самый ответственный, поскольку в это время интерес связывается с будущей профессией и ограничивается сознанием собственных возможностей.

На важность познавательного интереса в успешном овладении материалом указывали педагоги: Р.И.Щукина, Н.Ф.Талызина и другие. Р.И.Щукина приходит к заключению о том, что повысить степень интереса учащихся к материалу можно, раздвигая границы познаваемого на уроке с помощью внеклассных занятий.

Как показывает опыт, спецкурс пользуется успехом у учащихся, если он строится на основе углубления и расширения некоторых разделов школьного курса математики. Предлагаемый спецкурс связан со школьным курсом математики, расширяет и углубляет его, что является главным фактором, обеспечивающим интерес учащихся и к нему, и к предмету в целом.

Таким образом, содержание школьного курса математики, способность учащихся усваивать абстрактный материал, обобщать и систематизировать, активный, самостоятельный стиль умственной деятельности старшеклассников, ее творческое направление, опережающий характер обучения на спецкурсе, потребность учащихся в знаниях, их стремление к осуществлению личных планов и желаний создают психолого-педагогические предпосылки изучения диофантовых уравнений на спецкурсе учащимися старших классов средней школы.

Литература

1. *Борисова Е.М.* Особенности обучения и психического развития школьников 13 – 17 лет / Под ред. И.В. Дубровиной, Б.С. Круглова. – М.: Педагогика, 1988.
2. *Захарова А.В.* Психология обучения старшеклассников. – М.: Знание, 1976.
3. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968.
4. *Левитов Н.Д.* Психология старшего школьника. – М.: Учпедгиз, 1955.
5. *Лейтес Н.С.* Умственные способности и возраст. – М.: Педагогика, 1977.
6. *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии. – М.: Учпедгиз, 1946.
7. *Рубинштейн С.Л.* Проблемы общей психологии. – М.: Педагогика, 1946.
8. *Соловейчик С.Л.* От интересов к способностям. – М.: Знание, 1968.
9. *Талызина Н.Ф.* Управление процессом усвоения знаний. – М.: Издательство МГУ, 1975.
10. *Щукина Р.И.* Проблема познавательного интереса в педагогике. – М.: Педагогика, 1971.

А.В.БУКУШЕВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MS EXCEL ПРИ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Современное состояние развития информационных технологий оказывает всестороннее влияние на современный учебный процесс. Компьютер все более активно стали применять при обучении различным предметам, в частности, математической логике. Наряду с лекциями и практическими занятиями можно проводить лабораторные работы в компьютерном классе. Лабораторные работы способствуют как закреплению теоретических знаний по предмету, так и знакомству с программными средствами. В данной работе показаны приемы преобразования логических формул с помощью мастер-функций Excel.

Рассмотрим логические функции f двух переменных $X_1, X_2 : f_1 = \bar{X}_1$ - отрицание (инверсия) переменной X_1, $f_2 = \bar{X}_2$ - отрицание переменной X_2, $f_3 = X_1 \vee X_2$, $f_4 = X_1 \wedge X_2$. С их помощью можно получить другие функции: $f_5 = X_1 \to X_2$, $f_6 = X_1 \leftrightarrow X_2$, $f_7 = X_1 \downarrow X_2$, $f_8 = X_1 | X_2$.

Воспользуемся известными логическими тождествами [1]:

$$f_5 = X_1 \to X_2 = \bar{X}_1 \vee X_2;\ f_6 = X_1 \leftrightarrow X_2 = (\bar{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2);$$

$$f_7 = X_1 \downarrow X_2 = \bar{f}_3,\ f_8 = X_1 | X_2 = \bar{f}_4. \tag{1}$$

При вычислении логических функций по формулам удобно работать с двумя приложениями одновременно: текстовым редактором Word (в котором представляют результаты) и электронной таблицей Excel (в которой осуществляются вычисления).

В электронной таблице Excel имеются мастер - функции, позволяющие вычислять логические операции [2]. Синтаксис этих операций (как они записываются в формульной строке) выглядит следующим образом:

=ЕСЛИ(И(X_1;X_2);1;0) – вычисление конъюнкции двух переменных;

=ЕСЛИ(ИЛИ(X_1;X_2);1;0) - вычисление дизъюнкции двух переменных;

=ЕСЛИ(НЕ(X_1);1;0) - вычисление отрицания 1-й переменных.

Если логическое выражение принимает истинное значение, то результату присваивается значение 1, а если ложное – то 0.

Цель работы состоит в том, чтобы получить численные значения функций f_5- f_8 через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, а результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1. ***Функции 2-х логических переменных***

	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***	***I***	***J***	***K***	***L***
1	X_1	X_2	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \wedge X_2$	$\bar{X}_1 \vee X_2$	$X_1 \vee \bar{X}_2$	f_5	f_6	f_7	f_8
2	***0***	***0***	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
3	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***
4	***1***	***0***	***0***	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***1***
5	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***0***	***0***

Выполнение работы

1. Включите компьютер.

2. После того, как на экране монитора появится рабочий стол операционной системы Windows, откройте окно Microsoft Excel.

Для вычисления логических функций по формуле (1), ориентируясь на таблицу 1, необходимо:

− заполнить таблицу Excel, записывая в её ячейки значения переменных, где два первых столбца таблицы *A* и *B* заполняются значениями переменных X_1 и X_2 в виде наборов *0* и *1*;

− в столбце C вычисляется $\overline{X}_1$: для этого в ячейку C_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(НЕ(A_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение инверсии, соответствующее переменной X_1; в ячейках C_3 - C_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения (для этого необходимо выделить ячейку C_2, переместить курсор в её правый нижний угол так, чтобы курсор принял вид жирного креста, нажать левую клавишу мыши и, не отпуская клавишу протащить курсор вертикально вниз от ячейки C_3 до ячейки C_5);

− в столбце D вычисляется инверсия $\overline{X}_2$: для этого в ячейку D_2 через формульную строку записывается выражение: = ЕСЛИ(НЕ(B_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение инверсии, соответствующее переменной X_2 ; в ячейках D_3 – D_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце E вычисляется дизъюнкция $f_3 = X_1 \vee X_2$; для этого в ячейку E_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(ИЛИ(A_2;B_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках E_3 – E_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце F вычисляется конъюнкция $f_4 = X_1 \wedge X_2$; для этого в ячейку F_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(И(A_2;B_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках F_3 – F_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце G вычисляется дизъюнкция $\overline{X}_1 \vee X_2$; для этого в ячейку G_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(ИЛИ(C_2;B_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках G_3 – G_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце H вычисляется дизъюнкция $X_1 \vee \overline{X}_2$; для этого в ячейку H_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(ИЛИ(A_2;D_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках H_3 – H_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце I вычисляется дизъюнкция $f_5 = X_1 \rightarrow X_2 = \overline{X}_1 \vee X_2$; для этого в ячейку I_2 через формульную строку записывается выражение: =G_2; после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках I_3 – I_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце J вычисляется конъюнкция $f_6 = X_1 \leftrightarrow X_2 = (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_2)$; для этого в ячейку J_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(И(G_2;H_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение функции, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках J_3 – J_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце К вычисляется инверсия $f_7 = X_1 \downarrow X_2 = \bar{f}_3$; для этого в ячейку K_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(НЕ(E_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение инверсии $f_3 = X_1 \vee X_2$, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках K_3 – K_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения;

− в столбце L вычисляется инверсия $f_8 = X_1 | X_2 = \bar{f}_4$; для этого в ячейку L_2 через формульную строку записывается выражение: =ЕСЛИ(НЕ(F_2);1;0); после нажатия клавиши Enter в ней вычисляется значение инверсии $f_4 = X_1 \wedge X_2$, соответствующее данному набору логических переменных; в ячейках L_3 – L_5 вычисления осуществляются методом автозаполнения.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями, составив их таблицы истинности:

$$а)\ (P \wedge (Q \vee P)) \leftrightarrow P,\ б)\ (P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow P,$$

$$в)\ \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q),\ г)\ \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

2. Докажите, что имеет место следующее логическое следование, руководствуясь определением этого понятия (т.е. составив таблицы истинности обеих формул). Выясните, будут ли верно обратное следование.

$$(P \to Q) \to R \models P \to (Q \to R)$$

3. Расположите формулы так, чтобы из каждой логически следовали все, стоящие после нее:

$$P \vee Q,\ \neg(P \to (Q \to P)),\ \neg(\neg P \wedge \neg Q),\ \neg P \leftrightarrow Q,\ \neg P \wedge Q.$$

Литература

1. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2004.
2. *Культин Н.Б.* Microsoft Excel. Быстрый старт. – СПб., 2002.

Т.А.КАПИТОНОВА, Е.О.КУДАШЕВА

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

Изучение уравнений составляет значительную часть содержания школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики и в решении важных прикладных задач. Кроме того, в процессе решения уравнений учащиеся знакомятся с различными методами и способами, в том числе, эвристическими приёмами рассуждения, что в значительной степени способствует формированию алгоритмической культуры учащихся, развитию аналитического мышления.

Ещё со времён вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений. В Древнем Вавилоне 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третей степени. В XVI веке итальянские алгебраисты решили в радикалах уравнения третьей и четвёртой степеней. Было установлено, что корни любого уравнения не выше четвёртой степени выражаются формулой через коэффициенты уравнения. Общее уравнение степени n при $n \geq 5$ неразрешимо в радикалах.

В школьных учебниках и методико-математической литературе общеобразовательной школы рассматриваются линейные, квадратные, биквадратные и некоторые виды уравнений степени n $(n \geq 3)$, для которых применяются специальные алгоритмы. Уравнениям высших степеней уделено мало времени и внимания, к тому же формулы Кардана и Феррари для уравнений третьей и четвёртой степеней в школе не выводятся и не применяются. Вместе с тем именно решение уравнений высших степеней носит развивающих характер, поскольку эти решения изначально неалгоритмизованы.

По существу, для решения любого уравнения применяются четыре основных метода:

- Метод перехода от равенства, связующего функции, к равенству, связующему аргументы.
- Метод замены переменной.
- Метод разложения на множители.
- Функционально-графический метод и его различные модификации.

Будем рассматривать уравнения, для которых алгоритмы, изучаемые в школе, приводят к трудоёмким вычислениям, а также уравнения, вообще не разрешимые с помощью таких алгоритмов. Эти уравнения в дальнейшим будем называть нестандартными. Для решения таких уравнений следует применять специальные приёмы.

Рассмотрим несколько примеров решения нестандартных уравнений и методы их решения.

Метод замены переменной

Замена переменной – эффективный метод решения достаточно сложных задач. Наиболее простым способом замены переменной является простая непосредственная замена какого либо выражения, имеющегося в условии задачи, на какую-то другую переменную. Такой способ замены рассматривают в школьном курсе при решении биквадратных уравнений (8-9 классы). Как правило, при решении сложных нестандартных уравнений непосредственная замена невозможна и необходимы предварительные преобразования условия задачи, так как выражения для замены сразу не просматривается.

Задание 1. ***Решить уравнение*** $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$

***Решение**. Разделим (убедившись в том, что* $x \neq 0$*) обе части уравнения на* x^2*, получим:*

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 10 = 0$$

Введём новую переменную $y = x - \frac{2}{x}$***, через которую выразим двучлен*** $x^2 + \frac{4}{x^2}$.

Таким образом, уравнение относительно переменной y будет выглядеть так:
$y^2 + 4 - y - 10 = 0$ ***или*** $y^2 - y - 6 = 0.$ ***Корнями этого уравнения будут числа (–2) и 3.***

$$y^2 = x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4$$

Остаётся перейти к исходной переменной x и решить в совокупности два уравнения

$$x - \frac{2}{x} = -2 \text{ и } x - \frac{2}{x} = 3$$

Решением первого уравнения являются числа $(-1 \pm \sqrt{3})$***, а второго – числа*** $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; -1 \pm \sqrt{3}\right\}.$

После демонстрации решения учителю необходимо организовать беседу с учащимися с целью выявления особенностей уравнений, решаемых указанным способом. Внимание учащихся должны привлечь следующие признаки:

- необходимо рассматривать уравнения вида $a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0,$
- $|a_4| = |a_3|^2$ и $|a_1| = |a_0|^2,$
- перед свободным членом должен стоять знак «плюс».

Далее можно организовать групповую работу (в паре) по известной схеме для решения задания на составление уравнения с последующим его решением указанным способом.

Метод разложения на множители

Метод разложения на множители учащимся знаком, однако, способы разложения (выделение полного квадрата, вынесение общего множителя, использование формул сокращённого умножения) позволяют представлять в виде произведения небольшое число видов уравнений. Количество способов можно расширить.

Пусть $P_n(x)$ ***многочлен степени*** $n \geq 1$***, стоящий в левой части уравнения*** $P_n(x) = 0$***. Тогда решение алгебраического уравнения можно осуществить последовательным разложением этого многочлена на множители. При этом степень уравнения можно***

понизить, зная хотя бы один его корень. Способ нахождения корней некоторых уравнений дают следующие теоремы.

Теорема 1. ***Если уравнение*** $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$ ***с целыми коэффициентами*** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ***где*** $a_n \neq 0$ ***имеет целый корень, то этот корень является делителем числа*** a_n.

Теорема 2. ***Если уравнение*** $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$ ***с целыми коэффициентами*** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ***где*** $a_n \neq 0$ ***имеет корень*** x_1, ***то многочлен, стоящий в левой части уравнения, нацело делится на*** $(x - x_1)$.

Работа с теоремами предполагает обоснование заключённых в них утверждений на том уровне строгости, который учащимся доступен.

Далее демонстрируется применение теорем к решению конкретных уравнений.

Задание 2. ***Решить уравнение*** $4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 16x^2 + 9x + 2 = 0$

<u>Решение.</u> ***Обозначим многочлен, стоящей в левой части уравнения*** $P_5(x) = 4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 16x^2 + 9x + 2 = 0$. ***Найдём все целые корни уравнения. Целыми делителями свободного члена, то есть числа 2 являются числа: 1; –1; 2; –2. Проверяем:*** $P_5(1) = 0$, $P_5(-1) = 0$, $P_5(2) = 84 \neq 0$, $P_5(-2) = 0$. ***Итак, многочлен*** $P_5(x)$ ***имеет три целых корня, и его можно записать следующим образом:*** $P_5(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot Q_2(x)$. ***Делим многочлен*** $P_5(x)$ ***на многочлен*** $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ***и получаем, что*** $Q_2(x) = 4x^2 - 4x - 1$. ***Корнями многочлена*** $Q_2(x)$ ***являются числа*** $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$.

Итак, данное уравнение (многочлен пятой степени $P_5(x)$***) имеет пять корней:*** $x_{1,2} = \pm 1; x_3 = -2; x_{4,5} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$.

<u>Ответ</u>: $x \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2}) \right\}$.

После демонстрации примера решения уравнения учащимся предлагается составить *Алгоритм* решения уравнений указанным методом.

Алгоритм

1. Алгебраическое уравнение вида $A(x) = B(x)$ представить в виде $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен, записанный в стандартном виде.
2. Найти все делители свободного члена a_n.
3. Путём подстановки, выяснить какие делители являются корнями уравнения $P_n(x) = 0$.
4. Составить многочлен $K_m(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – найденные корни уравнения $P_n(x) = 0$.
5. Представить многочлен $K_m(x)$ в стандартном виде.
6. Разделить $P_n(x)$ на $K_m(x)$, получив таким образом многочлен $Q_{n-m}(x)$ степени $(n - m)$.
7. Если $Q_{n-m}(x)$ – квадратный трёхчлен, то найти его рациональные или иррациональные корни (если они существуют).
8. Если $Q_{n-m}(x)$ многочлен степени выше второй, то решить его, используя известные методы.
9. Если $Q_{n-m}(x)$ многочлен первой степени, то его можно записать $Q_{n-m}(x) = k \cdot x + b$, и найти корень $x = -b/k$.
10. Выписать корни уравнения.

Затем, учащимся для самостоятельного решения даются несколько уравнений, решаемых вышеописанным методом, среди которых (последним) находится уравнение не имеющее целых корней, например, уравнение $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$. Обсуждается возможность решения такого уравнения. По ходу обсуждения приходим к необходимости обобщения изученных методов.

Разложение на множители методом неопределённых коэффициентов

Иногда разложение на множители не удаётся произвести простейшими способами. В этом случае можно использовать метод неопределённых коэффициентов.

Задание 3. ***Решить уравнение*** $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$.

<u>Решение.</u> Многочлен, стоящий в левой части уравнения разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами, то есть представим в виде $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + rx + s)\cdot(x^2 + px + q)$, ***где коэффициенты*** p,q,r,s ***– целые и пока не определены. Задача состоит в том, чтобы найти их.***

Умножим квадратные трёхчлены, стоящие в правой части равенства, полученный результат запишем в стандартном виде:

$$(x^2 + rx + s)\cdot(x^2 + px + q) = x^4 + (p + r)x^3 + (s + q + pr)x^2 + (ps + qr)x + qs$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получаем: $p + r = -4$, $s + q + pr = -10$, $ps + qr = 37$, $q\cdot s = -14$.

Последнее уравнение показывает, что для q и s возможны следующие значения (но проверить достаточно лишь первые четыре пары):

q	1		2		7	14	– 14	– 7	– 2	– 1
s	– 14		– 7		– 2	– 1	1	2	7	14
$ps + qr = 37$ (*)	$r - 14p = 37$		$2r - 7p = 37$							
$s + q + pr = -10$	$p\cdot r = 3$		$p\cdot r = -5$							
$p + r = -4$	$p + r = -4$		$p + r = -4$							
p	– 1	– 3	– 1	– 5						
r	– 3	– 1	– 3	1						
Проверка условия (*)	не выполняется			выполн.						
результат	–	–	–	+						

Итак, имеем $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + x - 7)\cdot(x^2 - 5x + 2)$. ***Следовательно, исходное уравнение можно записать*** $(x^2 + x - 7)\cdot(x^2 - 5x + 2) = 0$. ***Остаётся решить два квадратных уравнения*** $x^2 + x - 7 = 0$ ***и*** $x^2 - 5x + 2 = 0$. ***Корнями этих уравнений, а, следовательно, и корнями данного уравнения являются иррациональные числа*** $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

<u>Ответ:</u> $x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \right\}$.

Решение уравнение вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

При решении уравнений в ряде случаев нежелательно приводить уравнения к стандартному виду с дальнейшим использованием чисто алгебраических методов. Рациональнее применять свойства элементарных функций. Проиллюстрируем это на примере решения уравнений вида $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Предварительно с учащимися проводится опрос-повторение по теме *Равносильность уравнений* (выясняется, какие уравнения называются равносильными, когда уравнение является следствием другого, и чем эти два понятия отличаются друг от друга?). Далее предлагается проанализировать уравнения и предложить план их решения:

1) $(x^3 + 6)^3 + 6 = x$,
2) $(x^2 - 2001x + 2001)^2 - 2001(x^2 - 2001x + 2001) + 2001 = x$,
3) $7(7x^2 - 151x + 141) - 151(7x^2 - 151x + 141) + 141 = x$,
4) $(x^2 - 5x + 5) - 5(x^2 - 5x + 5) + 5 = x$,
5) $(x^3 - 3x^2 + 3x)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 3x)^2 + 3(x^3 - 3x^2 + 3x) = x$.

В ходе дискуссии приходим к следующим выводам:

- Представление уравнений в стандартном виде нецелесообразно (свободный член имеет много делителей, степень уравнения выше четвертой и т.д.)
- Известные методы «не работают».
- Видим, что это уравнения имеют вид $\varphi(\varphi(x)) = x$ (I), где $\varphi(x)$ – некоторая функция.
- Необходимо исследовать функцию, входящую в уравнение $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Функция $\varphi(x)$ должна строго возрастать на некотором множестве X и должно выполняться условие $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$. Тогда уравнения $\varphi(\varphi(x)) = x$ и $\varphi(x) = x$ равносильны на множестве X.

Задание 4. ***Решить уравнение (1) из предложенного перечня.***

<u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^3 + 6$. Функция $\varphi(x)$ определена и строго возрастает на множестве R, и для любого $x_0 \in R$: $\varphi(x_0) \in R$. Тогда уравнения $(x^3 + 6)^3 + 6 = x$ и $x^3 + 6 = x$ равносильны на множестве R. Осталось решить уравнение $x^3 + 6 = x$, используя один из изученных ранее методов. Это уравнение имеет единственный действительный корень (–2). Следовательно уравнение (1) имеет на множестве R корень $x = -2$.

<u>Ответ</u>: $x \in \{-2\}$.

- Необходимо преобразовать уравнение, упростив его (найти равносильное, но более простое).

Наряду с уравнением $\varphi(\varphi(x)) = x$ можно рассматривать уравнение $\varphi(x) = x$, так как любой корень уравнения $\varphi(x) = x$ является корнем уравнения $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Задание 5. ***Решить уравнение (4) из предложенного перечня.***

<u>Решение.</u> Наше уравнение имеет вид $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 - 5x + 5$. Функция $\varphi(x)$ определена на множестве R, и для любого $x_0 \in R$: $\varphi(x_0) \in R$. Мы определили, что уравнение (4) имеет своими корнями все корни уравнения $x^2 - 5x + 5 = x$, которое в свою очередь имеет два корня 1 и 5. Итак, уравнение (4) также имеет корни 1 и 5. Учитывая это, запишем уравнение (4) в стандартном виде $P_4(x) = 0$, и применим наш* Алгоритм, *начиная с пункта 4. В результате получим уравнение $(x^2 - 6x + 5)\cdot(x^2 - 4x + 1) = 0$, равносильное исходному. Осталось выяснить, имеет ли трёхчлен $x^2 - 4x + 1$ корни; в ходе решения находим корни трёхчлена: $2 \pm \sqrt{3}$.

<u>Ответ</u>: $x \in \{1;5;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$.

Остальные уравнения из предложенного учителем перечня решаются учащимися самостоятельно. Для лучшего усвоения материала целесообразно организовать групповую работу (работу в паре) по известной схеме по составлению и решению уравнений вида $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Выпуклые функции и уравнения

Изучим еще один метод решения алгебраических уравнений с применением свойств функций, которые рассматриваются с учащимися 11 класса при изучении темы «Логарифмическая функция». Необходимо предварительно ввести понятие выпуклой (вогнутой) функции, сформулировать необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции. Кроме того, с учащимися нужно повторить определение сложной функции.

Знакомство с новым методом целесообразно начать с разговора о том, что логарифмы были созданы как средство для упрощения вычислений (вместо того, чтобы работать со степенями (умножение, деление) можно работать с показателями степеней (сложение, вычитание)). Попробуем применить свойства логарифмов к решению алгебраических уравнений. Очевидно, что уравнение должно быть вида $u(x)\cdot v(x) = u_1(x)\cdot v_1(x)$, где $u(x)>0$, $v(x)>0$, $u_1(x)>0$, $v_1(x)>0$.

Рассмотрим вспомогательное утверждение: ***Если функция $f(x)$ является выпуклой на промежутке X, функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $u_1 = u_1(x)$, $v_1 = v_1(x)$, такие, что при всех x из ОДЗ уравнения $f(u) + f(v) = f(u_1) + f(v_1)$, значения $u(x)$, $v(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$, содержатся в X, и выполняется условие $u + v = u_1 + v_1$, то уравнение $f(u) + f(v) = f(u_1) + f(v_1)$ на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $u(x) = u_1(x)$, $u(x) = v_1(x)$.***

Поскольку функция $f(x) = \lg x$ является выпуклой на множестве $(0;+\infty)$, наше утверждение становится основой логарифмического метода решения алгебраических уравнений. Проиллюстрируем суть этого метода на примере..

Задание 6. ***Решить уравнение $(x^2 + x + 2)\cdot(x^2 - 3x + 6) = 5\cdot(2x^2 - 2x + 3)$.***

<u>Решение.</u>

- ***Введём обозначения: $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = x^2 - 3x + 6$, $u_1(x) = 5$, $v_1(x) = 2x^2 - 2x + 3$.***
- ***Убедимся в том, что $u(x)$, $v(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$ – положительны при любом x.***
- ***Проверим выполнимость условия $u + v = u_1 + v_1$.***

$$(x^2 + x + 2) + (x^2 - 3x + 6) = 5 + (2x^2 - 2x + 3)$$
$$2x^2 - 2x + 8 = 2x^2 - 2x + 8$$

- ***Прологарифмируем обе части исходного уравнения***

$$\lg (x^2 + x + 2) + \lg (x^2 - 3x + 6) = \lg 5 + \lg (2x^2 - 2x + 3)$$

- ***Перейдём от полученного уравнения к одной из равносильных ему совокупностей, например, к совокупности двух уравнений $x^2 + x + 2 = 5$ и $x^2 - 3x + 6 = 5$.***
- ***Решим уравнения совокупности. Получим, что $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ и $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.***

<u>Ответ</u>: $x \in \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Литература

1. *Задачи по математике.* Алгебра: Справ. пособие / Вавилов В.В.,Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.-М.: Наука, 1987.

2. *Потапов М.К., Шевкин А.В.* О решении уравнений вида $\varphi(\varphi(x)) = x$ // Математика в школе, 2003, № 7, с. 6-10.

3. *Севрюков П.* Некоторые примеры решения уравнений высших степеней // Математика, 2004, № 37, с.29-31.

4. *Фирстова Н.И.* Методы замены переменной при решении алгебраических уравнений //Математика в школе, 2002, № 5, с.68-71.

5. *Хабибуллин К.* Решение нестандартных задач // «Математика», 2004, № 18, с.13-15.

К.В.МОХНАТКИНА

ИЗУЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В СТАРШИХ КЛАССАХ

Изучение последовательностей в средней школе идёт в три этапа. Первый этап – пропедевтический – приходится на 2-8 классы, здесь идёт знакомство учащихся с некоторыми последовательностями и их свойствами [3, с.26-27]. Второй этап (9 класс) – введение понятия *числовая последовательность*, изучение свойств числовых последовательностей, знакомство с прогрессиями как частными случаями числовых последовательностей. Третий этап (10-11 классы) – применение знаний по теме *Последовательности* к дальнейшему изучению математического материала. Так, например, при овладении методом математической индукции учащиеся вновь обращаются к последовательностям, а именно к формулам нахождения суммы первых n членов числовых последовательностей, при этом решаются задания следующих типов: 1) доказательство тождеств; 2) доказательство тождественных неравенств; 3) доказательство некоторых признаков делимости.

Работу в рамках данной темы можно организовать таким образом, что учащиеся не только изучат новый метод доказательства, но и повторят и систематизируют изученный ранее материал, потренируются в разного рода исследованиях. Покажем, как можно переформулировать учебные задания для решения поставленных образовательных задач.

Авторы учебника для старшеклассников по алгебре и началам математического анализа [1, с. 315-316] предлагают учащимся следующую систему задач:

1) методом математической индукции доказать равенства:

a) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$;

b) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$;

c) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$;

d) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

e) $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$;

f) $2^2+6^2+\ldots+(4n-2)^2=\dfrac{4n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$;

g) $\dfrac{7}{1\cdot 8}+\dfrac{7}{8\cdot 15}+\dfrac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\dfrac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)}=1-\dfrac{1}{7n+1}$;

h) $\dfrac{1}{4\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\dfrac{1}{4n(4n+4)}=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{16(n+1)}$.

2) доказать методом математической индукции неравенство

$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$.

3) доказать методом математической индукции, что для любого натурального n:

A) $6^{2n-1}+1$ кратно ***7*** ***C)*** $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ кратно ***11***

B) $4^{n}+15n-1$ кратно ***9*** ***D)*** 7^{2n-1} кратно ***48.***

На основе этих задач, выстроим следующую систему исследовательских заданий.

Задание 1. ***Проанализируйте алгебраические выражения, стоящие в левой части равенств a – h. Исследуйте свойства соответствующих числовых последовательностей по схеме:***

1. Определение.
2. Рекуррентная формула.
3. Формула n-го члена.
4. Характеристическое свойство.
5. Свойство членов, равноудалённых от концов «прогрессии»
6. Формула суммы первых n членов.
7. Монотонность и ограниченность. График функции.
8. Особые свойства

Следующая группа задач непосредственно закрепляет умение применять математическую индукцию к решению задач на доказательство. Эти задачи можно предложить учащимся решить самостоятельно.

Задание 2. ***Докажите тождества a, c, e, g (или b, d, f, h), используя метод математической индукции.***

Задание 3. ***Проанализируйте тождества e – h. Найдите следующие суммы:***

a) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b) $\frac{4}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}+...+\frac{4}{(n+3)(n+4)}$

c) $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+...+\frac{2^{n}-1}{2^{n-1}}$

d) $1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}\cdot n^2$

Докажите полученные равенства методом математической индукции.

Задачи 4-17 позволяют вернуться к теме ***Последовательности***, по-новому взглянуть на некоторые свойства уже известных числовых последовательностей, доказать те свойства, которые ранее не были доказаны, познакомиться с новыми последовательностями.

Задание 4. ***Выпишите формулу n-го члена последовательности, сумма первых n членов которой фигурирует в неравенстве. Обозначьте эту последовательность (w_n).***

Задание 5. ***Какое свойство последовательности (w_n) иллюстрирует данное неравенство? Сформулируйте это свойство.***

Задание 6. ***Докажите неравенство методом математической индукции.***

Задание 7. ***Сформулируйте утверждения A – D в виде свойств входящих в эти утверждения числовых последовательностей.***

Задание 8. ***Докажите на выбор одно из утверждений A – D.***

Часть заданий 4-8 можно включить в домашнюю работу, с обязательной проверкой и коллективным обсуждением полученных результатов на следующем уроке. Полезно на уроке организовать изучение новой для учащихся последовательности Фибоначчи (задания 9-17), используя групповые виды деятельности, например, работу в парах.

Задание 9. ***Познакомьтесь с последовательностью Фибоначчи.***

К последовательности чисел Фибоначчи приводит решение следующей задачи: «Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не дохнут?» [2, с.8-10].

Данная последовательность имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89, ….

Попробуйте провести исследование последовательности Фибоначчи по известной схеме.

Задание 10. ***Разберите доказательство по индукции следующего свойства последовательности Фибоначчи:*** $u_{n+m} = u_{n-1}\cdot u_m + u_n\cdot u_{m+1}$ ***(*)***

Доказательство будем вести индукцией по m.

При m=1 эта формула принимает вид $u_{n+1} = u_{n-1}\cdot u_1 + u_n\cdot u_2$ ***, что очевидно.***

При m=2 формула также верна, потому что

$$u_{n+2} = u_{n-1}\cdot u_2 + u_n\cdot u_3 = u_{n-1} + 2\,u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n.$$

Предположим, что доказываемая формула справедлива при m = k и при m = k + 1.

Докажем, что она имеет место при m = k + 2, то есть, выполняется равенство $u_{n+k+2} = u_{n-1}\cdot u_{k+2} + u_n\cdot u_{k+3}$.

Итак, пусть $u_{n+k} = u_{n-1}\cdot u_k + u_n\cdot u_{k+1}$,

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}\cdot u_{k+1} + u_n\cdot u_{k+2}.$$

Сложив почленно последние два равенства, мы получим $u_{n+k+2} = u_{n-1}\cdot u_{k+2} + u_n\cdot u_{k+3}$, ***что и требовалось доказать.***

Задание 11. ***Последовательность Фибоначчи обладает следующими свойствами:***

1. ***Для чисел последовательности выполняются следующие равенства***

- $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$;
- $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$;
- $u_n^2 = u_{n-1}\cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}$;

2. ***Если n делиться на m, то и*** u_n ***делиться на*** u_m.

3. ***Каково бы ни было целое число m, среди первых*** m^2***-1 чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m.***

4. ***Соседние числа Фибоначчи взаимно просты.***

Докажите эти свойства. В случае затруднения воспользуйтесь следующими указаниями:

- ***Указания к заданию 11.1.***
  - ***Воспользуйтесь формулой (*), равенством m = n и формулой n+1 члена последовательности Фибоначчи для доказательства первого свойства.***
  - ***Проверьте ход своих рассуждений:*** $u_{n+m} = u_{n-1}\cdot u_m + u_n\cdot u_{m+1}$, $m = n \Rightarrow$

    $u_{2n} = u_{n-1}\cdot u_n + u_n\cdot u_{n+1} \Rightarrow u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$

    $u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$, $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n \Rightarrow u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$, $u_n = u_{n+1} - u_{n-1} \Rightarrow$

    $u_{2n} = (u_{n-1} + u_{n+1})\cdot(u_{n+1} - u_{n-1}) \Rightarrow u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$.
  - ***Дайте словесную формулировку доказанному свойству. // Разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на два, есть снова число Фибоначчи.***
  - ***Второе свойство доказывается аналогично первому (полагая m = 2n).***
  - ***Третье свойство доказывается по индукции. При доказательстве индуктивного перехода используют приём прибавления обеим частям исходного равенства одного и того же числа. В нашем случае это число*** $u_n\cdot u_{n+1}$.
  - ***Проверьте ход своих рассуждений:***

Для n=1 : $u_2^2 = u_1 u_3 - 1$***, что очевидно.***

Предположим теперь формулу доказанной для некоторого n.

Прибавим к обеим её частям число $u_n\cdot u_{n+1}$***, получим***

$u_n^2 + u_n u_{n+1} = u_{n-1}u_{n+!} + u_n u_{n+1} + (-1)^{n+1}$***, или*** $u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}$***, или***

$u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$, ***или*** $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2}$. ***Этот индуктивный переход обоснован, и формула доказана для любого n.***

- ***Указания к заданию 11.2. пусть n делиться на m, тогда справедливо следующее равенство n = m · k. Проведите доказательство индукцией по k.***
- ***Указания к заданию 11.3.***
  - ***Следует ли из формулировки теоремы указания на то, какое именно число Фибоначчи делиться на m?***
  - ***Можно ли сказать, что в сформулированном утверждении говориться о том, что первое число Фибоначчи делящиеся на m не должно быть особенно большим?***
  - ***Используя рассуждения по индукции проверьте выполнимость утверждения для m = 2 ÷ 6. Выписывайте остатки от деления. Выявите закономерность. Результат обобщить.***
- ***Указания к заданию 11.4. Доказать утверждение методом от противного.***

По результатам задания 11.2 формулируются некоторые признаки делимости чисел Фибоначчи. Под признаками делимости будем понимать признак, по которому можно определить делиться или нет то или иное число Фибоначчи на некоторое данное число. Предварительно обсуждается вопрос о возможности свести делимость чисел Фибоначчи к делимости их номеров. Для лучшего восприятия данного факта учащимся предлагается следующее упражнение: ***Проверить признак делимости первых двадцати чисел Фибоначчи на три: число Фибоначчи делиться на три тогда и только тогда, когда его номер делиться на четыре.*** Упражнение желательно оформлять в таблицу.

Номер числа	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***
Числа Фибоначчи	***1***	***1***	***2***	***3***	***5***	***8***	***13***	***21***	***34***	***55***	***89***	***144***	***233***	***377***
Делимость														

Дается обобщение теоремы делимости чисел Фибоначчи: ***u_n делиться на u_m тогда и только тогда, когда n делиться на m.***

Учащимся предлагается сформулировать признаки делимости на 2, на 4, на 5, на 7, на 13:

- ***Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делиться на 3.***
- ***Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 6.***
- ***Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 5.***
- ***Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 8.***
- ***Число Фибоначчи делится на 13 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 7.***

Далее предлагается доказать следующие факты:

- ***Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 17.***
- ***Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 9.***
- ***Нет четных чисел Фибоначчи делящихся на 11.***

Целесообразно организовать работу в парах по выявлению и проверке (доказательству) аналогичных выше перечисленным утверждений касающихся делимости чисел Фибоначчи.

Тем учащимся, кто проявляет интерес к математике, полезно обобщить понятие последовательности Фибоначчи в ходе коллективного (комментированного) решения следующих заданий. Главное, чтобы обобщение материала было осознанным, зафиксировалось в памяти, нашло аналогии в математических теориях (системы счисления), а операция обобщения в дальнейшем широко использовалась.

Задание 12. ***Используя рекуррентную формулу, продолжить последовательность Фибоначчи «влево»: запишите первые 7 чисел. Результаты занесите в таблицу.***

n	*– 7*	*– 6*	*– 5*	*– 4*	*– 3*	*– 2*	*– 1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
U_n									*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*

Задание 13. ***Выберите из предложенного списка верный вариант ответа на задание 12:***

А) …, – 8, – 5, – 3, –2, –1, –1, 0 ***Б) …, – 8, 5, – 3, 2, – 1, 1, 0***

В) …, 8, – 5, 3, – 2, 1, –1, 0

Задание 14. ***Определите последовательность Фибоначчи (U_n) в случае $n \in Z$. Перечислите некоторые свойства последовательности (U_n). // Основное рекуррентное соотношение, определяющее числа Фибоначчи для $n \in Z$, имеет вид $U_{n-2} = U_n - U_{n-1}$, где $U_0 = 0$, $U_1 = 1$.***

Задание 15. ***Запишите формулу нахождения n-го (n <0) члена последовательности Фибоначчи (U_n) с использованием последовательности (u_n).***

В том случае, когда учащиеся предлагают ответ на задание 15 в следующей форме: $U_n = (-1)^{/n/+1} \cdot u_n$ (∴), – им предлагается воспользоваться таблицей для проверки.

n	*-9*	*-8*	*-7*	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
u_n	[redacted]										*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*
U_n	*34*	*-21*	*13*	*-8*	*5*	*-3*	*2*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*
∴	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*		*1*	*-1*	*2*	*-3*	*5*	*-8*	*13*	*-21*	*34*

Вывод. ***Последовательность U_n через u_n выражается следующим образом***

$$U_n = \begin{cases} n > 1, U_n = u_n; \\ n = 0, U_n = 0; \\ n < 1, U_n = (-1)^{|n|+1} \cdot u_n. \end{cases}$$

Задание 16. ***Вывести формулу для вычисления суммы n (n <0) чисел Фибоначчи. // $S_n = -U_{n+1} + 1$.***

Задание 17. ***Проверить равенства (под символом $S_{-3;3}$ следует понимать сумму чисел последовательности Фибоначчи от U_{-3} до U_3 включительно).***

А) $S_{-6} = -4$. ***Б) $S_{-5} = 4$.*** ***Д) $S_{-3} + S_3 = 3 + 3$***

В) $S_{-3;3} = 6$. ***Г) $S_{-3} = S_3$*** ***Е) $S_{-3} + S_3 = S_{-3;3}$***

По окончанию изучения последовательностей и нового метода доказательства (метода математической индукции) целесообразно предложить учащимся написать математическое эссе по пройденному материалу.

Литература

1. *Алгебра* и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын и др.; Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 2001.
2. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1969. – (Популярные лекции по математике. Вып.6).
3. *Лебедева С.В., Мохнаткина К.В.* О некоторых способах развития алгоритмической культуры учащихся./Учитель – ученик: проблемы, поиск, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 2. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2004, с. 22-27.
4. *Мохнаткина К.В.* Последовательности в школьном курсе./ Учитель – ученик: проблемы, поиск, находки: Сборник научных трудов: Выпуск 3 – Саратов: Научная книга, 2005, с. 63 – 67.

С.В.ЛЕБЕДЕВА, В.В.ПИЛИПЕНКО

СТАРИННЫЕ ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Одним из наиболее распространённых способов включения историко-математического материала в содержание уроков математики является решение старинных задач занимательного содержания. Основными условиями включения таких задач в содержание курса математики являются:

(1) соответствие метода (способа) решения задачи уровню знаний учащихся,

(2) возможность сравнить старинный способ решения задачи с современным,

(3) возможность использования наглядности в процессе анализа условия задачи,

(4) информационно-познавательная (в историческом, мировоззренческом, философском плане) компонента содержания задачи,

(5) создание на уроке так называемой ситуации успеха, позволяющей каждому ученику принять посильное участие в решении задачи,

(6) знание учителем не только осовремененной, но и старинной трактовки задачи,

(7) возможность вернуться к задаче при дальнейшем изучении математики.

Проиллюстрируем один из способов работы с исторической задачей.

Задача. ***В одном городе у великой реки люди очень любили кошек. В семи домах этого города держали по стройной изящной гладкошёрстной кошке в каждом. Эти кошки были превосходными охотницами и очень любили ловить мышей. Однажды каждая из них поймала и съела по семь толстых мышек. Каждая из мышек до этого успела уже съесть по семь колосков, каждый из которых, не будь он съеден мышкой, дал бы по семь мер зерна земледельцу. Хотелось бы знать, сколько всего было в семи домах города у великой реки стройных кошек, сколько они однажды съели толстых мышей, сколько всего колосков успели съесть пойманные кошками мышки и сколько мер зерна не досчитались в урожае земледельцы благодаря зловредному аппетиту съеденных грызунов?***

Впервые к этой задаче можно обратиться уже во втором классе, когда изучается умножение чисел, и вырабатываются умения по решению «задач на умножение», имеющих структуру:

Штук в одном объекте – количество объектов – всего штук.

Эту же структуру имеют следующие виды задач: *Цена – количество – стоимость; Скорость – время – расстояние; Производительность – время – объём работ.*

Детей на данном этапе обучения математике учат распознавать задачи указанных видов и использовать для решения следующую таблицу:

Штук в одном объекте	**умножить**	***количество объектов***	**равно**	***всего штук***
а	·	***в***	=	***с***
5	·	***17***	=	***?***
5 · 17 = 85				
?	·	***17***	=	***85***
5	·	***?***	=	***85***
Для того, чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель. 85 : 17 = 5 и 85 : 5 = 17				

В дальнейшем учащимся предлагается использовать сокращенный вариант таблицы:

Штук в одном объекте	***количество объектов***	***всего штук***
а	***в***	***с***
5	***17***	***?***
5 · 17 = 85		
?	***17***	***85***
85 : 17 = 5		
5	***?***	***85***
85 : 5 = 17		

Данная выше историческая задача удовлетворяет всем условиям её включение в содержание школьного курса.

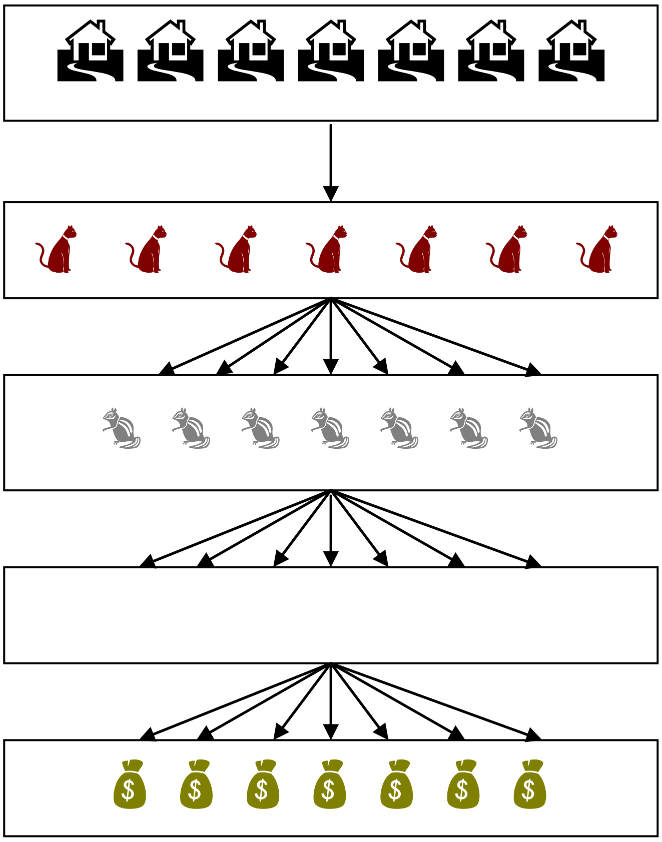
Условие (1) выполняется, поскольку данная задача разбивается на четыре задачи изученного ранее вида (задачи структуры *Штук в одном объекте – количество объектов – всего штук*), решение каждой из которых опирается на результат предыдущей задачи.

Таблица 1		
Штук в одном объекте	***количество объектов***	***всего штук***
Кошек в 1 доме	***количество домов***	***всего кошек***
1	***7***	***?***
1 · 7 = 7 (стройных кошек)		
Мыши, съеденные 1 кошкой	***количество кошек***	***всего съедено мышей***
7	***7***	***?***
7 · 7 = 49 (толстых мышей съели кошки)		
Колоски, съеденные 1 мышью	***количество мышей***	***всего съедено колосков***
7	***49***	***?***
7 · 49 = 343 (колосков успели съесть мыши)		
Мер зерна с 1 колоска	***количество колосков***	***всего мер зерна***
7	***343***	***?***
7 · 343 = 2401 (мер зерна не досчитались в урожае земледельцы)		

Информационно-познавательная компонента присутствует в содержании задачи, и именно с неё начинается (***Эта задачка из очень старого учебника математики, составленного когда-то в Древнем Египте и сохранившегося до наших дней на одном из папирусов. В XVIII веке до нашей эры этот папирус был переписан с какого-то ещё более древнего папируса, оригинал которого не сохранился***) и ею заканчивается знакомство с задачей (***Кроме самой задачки, в папирусе есть и совершенно правильное её решение, которое вполне по силам любому современному школьнику, знакомому с умножением, так что, кто хочет, может убедиться в этом сам. Заметим только, что автор, живший на берегах Нила около четырёх тысячелетий тому назад, придумал эту задачку не просто так. Её решение образует строгую геометрическую прогрессию со знаменателем равным 7. О том, что такое прогрессия мы с вами узнаем только*** составленное с её помощью алгебраическое выражение ***в 8(9) классе. В стране неучей, где не знают математических законов, не овладели навыками арифметики, такой задачи просто не может быть. Из этого легко сделать почти математический по точности вывод: Египет страной неучей не был, и математику там знали совсем неплохо. Да и странно было бы в том усомниться, увидев египетские пирамиды совершенно правильной формы, с чётко выверенными сторонами и углами, где каждый камень лежит на своём месте и всё доведено почти до***

совершенства). Можно сказать, что условие (4) включения задачи в содержание школьного курса математики выполняется.

Задача для второклассников, безусловно, сложна, так как требует выделения ряда подзадач. Объём оперативной памяти в этом возрасте у детей недостаточен для того, чтобы совершить требуемое выделение мысленно. Следовательно, необходимы средства наглядности, помогающие совершить данную операцию. Предлагаем для этого использовать схематическую запись условия задачи и применением стилизованных изображений (рисунков). В схеме стрелками обозначены связи между объектами. Наличие одной стрелки соответствует логической связке «для каждого – одно». Наличие нескольких стрелок соответствует логической связке «для каждого столько сколько стрелок».



Можно использовать другие способы установления вязи между объектами, главное, довести до сознания каждого ученика смысл вводимых условных обозначений.

Процесс «рисования условия» задачи поможет младшим школьникам лучше осознать её суть и понять решение. Кроме того, учащиеся находятся при этом в такой ситуации, когда деятельность (рисование) каждого ученика «по решению задачи» можно считать успешной.

Таким образом, выполняются (3) и (5) условия включения задачи в содержание школьного курса математики.

К данной задаче можно вернуться в 4-6 классах, когда учащиеся решают сложные (в несколько действий) задачи, используя в процессе поиска решения соответствующие таблицы. На этом этапе обучения дети знакомятся с различными математическими (алгебраические выражения, уравнения) и информационными (схемы и таблицы) моделями; учатся представлять данные задачи, используя различные модели; переходить от одних моделей к другим с учётом принципа рациональности решения. Именно теперь становится актуальной идея выбора более рационального (простого, красивого, компактного и т.д.) решения, выполняется условие (2) включения задачи в содержание школьного курса математики.

Итак, учащиеся могут предложить следующие варианты записи условия и решения и обосновать свой выбор (или отметить достоинства и недостатки выбранного способа решения):

- таблица 1 (*самая простая, но уж очень подробная: слишком много строк*);

- схема и решение по действиям (*самое наглядное и простое решение, каждое действие – ответ на вопрос задачи, но запись занимает много времени и места*);
- схема и составленное с её помощью алгебраическое выражение (*это всего лишь два различных способа записи условия задачи, вычислив значение составленного выражения мы найдём ответ на четвёртый вопрос задач, а как же первые три?*),
- таблица 2 и решение по действиям (*таблица – в 2 строки, что удобно, но вопрос в таблице один, а в тексте задачи – четыре вопроса*),
- таблица 2 и составленное с её помощью алгебраическое выражение (*ещё один вариант двух различных способов записи условия задачи, ответов на требования задачи нет*),
- таблица 3 и решение по действиям (*таблица – в 2 строки, но шапку таблицы составить было непросто, зато эта таблица включает в себя все требования задачи, каждое действие – ответ на вопрос задачи, наверное, это и есть самое рациональное решение*),
- таблица 3 и составленное с её помощью алгебраическое выражение (*ещё один вариант двух различных способов записи условия задачи, которую ещё предстоит решить*).

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Меры с 1 колоска</th><th colspan="4">Количество</th><th rowspan="2">Всего мер</th></tr>
<tr><th>колосков, съеденных 1 мышью</th><th>мышей, съеденных 1 кошкой</th><th>кошек в 1 доме</th><th>домов</th></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>1</td><td>7</td><td>?</td></tr>
</table>

Решение.

1) 1 · 7 = 7, – было стройных кошек;

2) 7 · 7 = 49, – было толстых мышей;

3) 49 · 7 = 343, – съедено колосков;

4) 343 · 7 = 2401, – количество мер, которых не досчитались земледельцы .

Количество мер, которых не досчитались земледельцы, записывается с помощью выражения: 7·7·7·1·7=2401.

Таблица 3

<table>
<tr><th rowspan="4">Мер с 1 колоска</th><th colspan="7">Количество колосков</th><th rowspan="4">Всего мер</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Колоски, съеден-ные 1 мышью</th><th colspan="5">Количество мышей</th><th rowspan="3">Всего колосков</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Мыши, съеденные 1 кошкой</th><th colspan="3">Количество кошек</th><th rowspan="2">Всего мышей</th></tr>
<tr><th>Количество кошек в 1 доме</th><th>Домов у реки</th><th>Всего кошек</th></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>1</td><td>7</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>

В девятом классе при изучении геометрической прогрессии о задаче можно вспомнить ещё раз и оценить её содержание с новой точки зрения (условие (6)). Учащиеся вспоминают любой из способов записи условия и составляют новую алгебраическую модель задачи. Теперь, её можно сформулировать по-другому.

Задача*. ***Первый член геометрической прогрессии со знаменателем 7 равен 1, найти второй, третий, четвёртый и пятый члены данной прогрессии.***

Алгебраическая модель представлена системой равенств: $в_1 = 1,\ в_n = 1{\cdot}7^{\,n-1}$, а требования задачи можно записать теперь так: $в_2 = ?,\ в_3 = ?,\ в_4 = ?,\ в_5 = ?$

О.Н.БОДРОВА, О.В.НОВАК

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПОВЕДЕНИЯ ГРУППОВОЙ РАБОТЫ НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ

Формирование и развитие коммуникативных способностей учащихся одна из наиболее проблемных развивающих задач процесса обучения. Доминирование дидактических (образовательных) задач обучения, курс на развитие мышления, интеллектуальных и творческих способностей учащихся, на формирование мировоззрения не позволяет уделять много внимания коммуникативным способностям школьников, развитие которых возлагают на классных руководителей и кураторов. Однако коммуникативность учащихся в учебной и внеучебной деятельности – проявляется по-разному: им гораздо легче найти общий язык, планируя свой досуг, чем организовать деятельность по решению какой-нибудь серьёзной учебной задачи. Неумение учащихся распределить роли и обязанности; осуществить планирование, исполнение, контроль и коррекцию результатов; предотвращать и разрешать конфликтные ситуации, возникающие по ходу деятельности, – вот неполный список того, что можно наблюдать в группе учеников, пытающихся совместно работать над поставленной задачей.

Одним из возможных способов развития коммуникативных способностей учащихся в рамках школьного урока математики можно считать организацию групповой деятельности на различных этапах урока.

Проведём сценарий урока, реализующего групповую работу учащихся (работу в малых группах – в парах) при изучении нового материала.

Тема урока: «Логарифмы и их свойства»

Продолжительность занятия: 80 минут.

Цель урока: изучение нового материала по теме «Показательные и логарифмические функции».

Задачи урока.

- **Образовательная задача:** введение понятия логарифма числа; знакомство с применением основного логарифмического тождества к вычислениям и решению простейших логарифмических уравнений; изучение основных свойств логарифмов и формирование умений их применения для преобразования логарифмических выражений.
- **Развивающая задача:** развитие коммуникативных способностей, мышления и самостоятельности учащихся при решении задач..

Тип урока: урок изучения нового материала.

Учебно-методическое и материально-техническое оснащение:

- Используемый учебник: А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын, Б.М.Ивлев, С.И.Шварцбурд. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 кл. сред. шк.: под ред. А.Н.Колмогорова – М: Просвещение, 1991.
- Оборудование: доска, цветной мел, логарифмические таблицы.
- Дидактический раздаточный материал: карточки для индивидуальной работы и работы в парах.

Структурные этапы урока	Продолжительность этапов	Деятельность		Методы и приемы обучения	Примечания
		учителя	учащихся		
I. Организационный момент (2 минуты)					
II. Изучение нового материала					
1. Повторение.	10 минут	• Читает задания. • Оценивает работу учащихся • Руководит деятельностью учащихся.	• Выполняют задания. • Озвучивают ответ. • Корректируют ответ.	Фронтальный опрос	
2. Введение новых понятий	14 минут	• Читает лекцию, выписывая основные положения на доску. • Организует работу в парах по изучению материала лекции. • Отвечает на вопросы учащихся.	• Слушают, записывают и по ходу усваивают лекционный материал. • Обсуждают лекционный материал, формулируют вопросы. • Задают вопросы.	• Лекция (первый лекционный блок) • Работа в парах • Беседа.	На данном этапе урока в парах идёт работа по усвоению лекционного материала
3. Упражнения на усвоение нового материала	8 минут	Формулирует задание для самостоятельной работы.	Выполняют задания: трое оформляют решения на доске, а остальные у себя в тетрадях, одновременно сверяя ход решения с записями на доске.	Самостоятельная работа с последующей самопроверкой	• Задания записаны на доске и до нужного момента не видны учащимся. • Работа троих учащихся оценивается (поурочный балл)
4. Введение новых понятий.	8 минут	Читает лекцию, выписывая основные положения на доску.	Слушают, записывают и по ходу усваивают лекционный материал	Лекция (второй лекционный блок.)	

Структурные этапы урока	Продолжительность этапов	Деятельность		Методы и приемы обучения	Примечания
		учителя	**учащихся**		
III. Закрепление новых знаний					
5. Закрепление материала посредством решения задач.	10 минут	• Контролирует процесс решения у доски. • Дает рекомендации решающим у доски в случае затруднения	Вслед за отвечающим у доски учеником отрабатывают умения по решению задач данного типа.	Ответ у доски с комментарием	Учитель вызывает последовательно шесть человек для комментирования решения типовых задач. Работа этих учащихся оценивается (поурочный балл)
6. Контроль за усвоением нового материала.	10 минут	• Дает инструкцию по работе в парах. • Раздает тесты. • Дает команду к обмену тетрадями и фиксирует верный ответ на доске. • Контролирует время выполнения теста.	• Выслушивают инструкцию, разрешают возникшие вопросы • Выполняют тест. • Обмениваются тетрадями. • Проверяют ответы. • Выставляют отметки. • Повторно обмениваются тетрадями.	Тестирование Работа в парах	Обязательно оценивается работа пятерых учащихся, отвечавших до этого у доски (поурочный балл)
7. Дидактическая игра (ДИ)	15 минут	• Разбивает на пары учащихся • Озвучивает правила ДИ. • Контролирует выполнение всех условий игры. • Проверяет верность выполнения заданий. • Выписывает домашнее задание на доску.	• Составляют игровые пары • Знакомятся с правилами игры. • Выполняют игровые задания. • Сигнализируют о выполнении задания. • Выполняют письменное задание домашней работы.	Дидактическая игра. Работа в парах	

Структурные этапы урока	Продолжительность этапов	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Методы и приемы обучения	Примечания
IV. Итог урока					
8. Итог урока	3 минуты	• Комментирует домашнее задание. • Оценивает работу класса, групп (пар) и отдельных учащихся (поурочный балл). • Выставляет отметки в журнал и в дневник.	• Записывают домашнее задание в дневник. • Могут задать вопросы по содержанию и ходу урока, по поводу выставляемых оценок • Подают дневники для выставления отметок.		• Все вопросы решаются в индивидуальном порядке на перемене. • Оценивается работа минимум 6 человек

Сформулируем задания к каждому этапу урока.

1. **Повторение**. Устные упражнения, предшествующие введению понятия логарифма.

Задание 1. ***Вычислите:*** 2^4***;*** $2^4=16$***, так как*** $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$.

Задание 2. ***Пусть в равенстве (уравнении $x^4 = 16$) неизвестно основание степени:***

а) Какое число нужно возвести в 4-ю степень, чтобы получить 16?

б) Каким действием его можно найти?

Задание 3. ***Найдите показатель степени:*** $2^x = 16$; $2^x = 64$; $2^x = 1/8$; $2^x = 0,87$; $3^x = 35$.

2. **Введение новых понятий**. Лекционный материал, подлежащий конспектированию.

Определение: ***Логарифмом положительного числа a по основанию b, положительному и не равному единице, называется показатель степени, в которую нужно возвести число b, чтобы получить число a:*** $(a>0,\ b>0,\ b\neq0)$ $(\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a)$.

Основное логарифмическое тождество: $b^{\log_b a}=a$.

Задание 4. ***Найдите показатель степени, используя определение логарифма:***

$2^x = 16$; $2^x = 64$; $2^x = 1/8$; $2^x = 0,87$; $3^x = 35$.

Задание 5. ***Запишите в тетрадь примеры оформления и рассуждения при вычислении значений выражений, содержащих логарифмы:***

- $\log_3 9 = 2$, ***так как*** $9 = 3^2$.
- $\log_{1/3} 9 = -2$, ***так как*** $9 = 3^2 = (3^{-1})^{-2} = (1/3)^{-2}$.
- $\log_{16} 64 = -1,5$, ***так как*** $64 = 4^3 = (4^2)^{3/2} = (16)^{3/2} = 16^{1,5}$
- $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$, ***так как*** $8 = 2^3 = (\sqrt{2})^6$

- $7^{\log_7 11} = 11$
- $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$

! Обратите внимание на рассуждения, проводимые по ходу исследования следующих логарифмических выражений *!* [1]

$\log_{-3}(-9)$ не определён, так как основание логарифма отрицательно $(-3<0)$ и число стоящее под знаком логарифма тоже отрицательно $(-9<0)$.

$\log_1 9$ не определён, так как не выполнено условие $b \neq 1$.

Определение*: **Логарифмы по основанию 10 называются десятичными логарифмами.***

Для десятичного логарифма принято следующее обозначение: $\lg a = \log_{10} a$.

Задание 6. ***Запишите в тетрадь примеры:***

$\lg 10 = 1$ $\quad \lg 0{,}01 = -2$ $\quad -1 < \lg 0{,}35 < 0$

$1 < \lg 35 < 2$

! Обратите внимание на таблицу ***!***

a	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
lg a	*0,30*	*0,48*	*0,60*	*0,70*	*0,78*	*0,85*	*0,90*	*0,95*

Определение*: **Логарифмы по основанию е называются натуральными логарифмами.***

Для натурального логарифма принято следующее обозначение: $\ln a = \log_e a$.

$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \ldots$ – иррациональное число, $e \approx 2{,}7$

! Обратите внимание на таблицу ***!***

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
ln a	0,69	1.10	1.39	1.61	1.79	1,95	2.08	2.20	2.30	4.61	6.91

Свойства логарифмов:

$\log_a 1 = 0$ $\quad \log_a a = 1$ $\quad \log_a a^n = n$

$\log_a \frac{1}{a} = -1$ $\quad \log_{a^m} a = \frac{1}{m}$ $\quad \log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$

3. **Упражнения на усвоение нового материала.** Самостоятельная работа с последующей самопроверкой.

Задание 7. ***Докажите свойства логарифмов.***

Вариант	*I*	*II*	*III*
Свойство	$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^n = n$
Обоснование			
Свойство	$\log_a \frac{1}{a} = -1$	$\log_{a^m} a = \frac{1}{m}$	$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$
Обоснование			

4. **Введение новых понятий (второй лекционный блок).** Лекционный материал подлежащий конспектированию.

! Запишите в тетрадь, оформляя в виде таблицы, следующие логарифмические равенства. Все ячейки таблицы должны быть заполнены. ***!***

[1] Фраза, помещённая между двумя восклицательными знаками – один из способов активизации внимания учащихся на том или ином объекте или способе деятельности

Основные соотношения		
название	*равенство*	*ограничения на переменные*
Логарифм произведения	$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$	
Логарифм частного	$\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$	
Логарифм степени:	$\log_c a^k = k\cdot\log_c a$	
Переход к новому основанию	$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c a}$	
Дополнительные соотношения		
	$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$	
	$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$	
	$\dfrac{\log_m a}{\log_m b} = \dfrac{\log_n a}{\log_n b}$	
	$\log_m a\cdot\log_n b = \log_n a\cdot\log_m b$	
	$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$	
	$Log_b a\cdot\log_a b = 1$	

5. **<u>Закрепление материала</u>** посредством решения задач.

Задание 8. ***Вычислить***

$5^{\frac{3}{\log_6 5}}$ $\qquad \log_8 16 \qquad \log_5 3\cdot\log_{27}25$

$\dfrac{\log_{0,3}16}{\log_{0,3}32} \qquad \sqrt{\log_5 49\cdot\log_7 25} \qquad \log_{121}\sqrt{11^3}$

Задание 9. ***Сравните:***

1) $\log_8 6$ *и* $\log_8 7$

2) $6^{\log_8 4}$ *и* $4^{\log_8 6}$

3) $4^{\log_8 7}$ *и* $6^{\log_8 4}$

6. **<u>Контроль за усвоением нового материала</u>.** ***Работа в парах.*** Ученики выполняют задания теста, затем обмениваются тетрадями, проверяют правильность ответов и выставляют оценки. Если 9-10 правильных ответов, то ставится отметка «5»; если 7-8 правильных ответов, то – «4»; если 5-6 правильных ответов, то – «3», иначе ставится «2».

Вычислите		*Выберите ответ*			
		а	*б*	*в*	*г*
1	$\log_2(-16)$	-4	4	1/4	***не определен***
2	$\log_3 81$	-4	4	1/4	***не определен***
3	$\log_4(1/256)$	-4	4	1/4	***не определен***
4	$\log_{12}3 + \log_{12}4$	1	–1	7	$\log_{12}7$
5	$\log_5 50 - \log_5 2$	–2	2	1/2	$\log_5 48$
6	$\log_{25}125$	2/3	1,5	6	5
7	$\log_2 \sqrt[3]{32}$	3	10	2,5	7
8	$\log_7 x = 3$	21	2187	3/7	343
9	$\log_x 729 = 3$	9	1/9	243	2187
10	$\log_2(x-3) = 4$	5	19	***нет решения***	16

7. **<u>Работа в парах: «Дидактическая игра».</u>** Правила игры. ***! Перед вами шахматное поле, которое нужно быстро перейти по своей дорожке, правильно решив задания. Но каждый из вас идет не один, а с другом («соседом по парте»). Поэтому один из вас решает задания на белой клетке, а другой на черной. Как только пара выполняет все восемь заданий, она сообщает об этом учителю !***

ДОРОЖКИ	**H**	$\log_9 81$	$\log_{216} 6$	$\log_{343} 49$	$\log_{\frac{1}{8}} 512$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_{3\sqrt[3]{3}} 3$	$11^{\log_4 16}$	$5^{\log_{25} 11}$
	G	$\log_8 64$	$\log_{729} 9$	$\log_{216} 36$	$\log_{\frac{1}{7}} 343$	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\log_{4\sqrt[3]{4}} 4$	$11^{\log_5 25}$	$2^{\log_4 11}$
	F	$\log_7 49$	$\log_{512} 8$	$\log_{729} 81$	$\log_{\frac{1}{6}} 216$	$\log_4 \frac{1}{\sqrt{4}}$	$\log_{5\sqrt[3]{5}} 5$	$11^{\log_2 4}$	$3^{\log_9 11}$
	E	$\log_6 36$	$\log_{343} 7$	$\log_{512} 64$	$\log_{\frac{1}{9}} 729$	$\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\log_{2\sqrt[3]{2}} 2$	$11^{\log_3 9}$	$4^{\log_{16} 11}$
	D	$\log_5 25$	$\log_8 2$	$\log_{27} 9$	$\log_{\frac{1}{4}} 64$	$\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}}$	$\log_{7\sqrt[3]{7}} 7$	$11^{\log_8 64}$	$9^{\log_{81} 11}$
	C	$\log_4 16$	$\log_{125} 5$	$\log_8 4$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}$	$\log_{8\sqrt[3]{8}} 8$	$11^{\log_9 81}$	$6^{\log_{36} 11}$
	B	$\log_3 9$	$\log_{64} 4$	$\log_{125} 25$	$\log_{\frac{1}{2}} 8$	$\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\log_{9\sqrt[3]{9}} 9$	$11^{\log_6 36}$	$7^{\log_{49} 11}$
	A	$\log_2 4$	$\log_{27} 3$	$\log_{64} 16$	$\log_{\frac{1}{5}} 125$	$\log_9 \frac{1}{\sqrt{9}}$	$\log_{6\sqrt[3]{6}} 6$	$11^{\log_7 49}$	$8^{\log_{64} 11}$
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	ЗАДАНИЯ								

Правильные ответы: 2,1/3,2/3,–3,–1/2,3/4,121, √11.

8. **<u>Итог урока</u>**

- Выставляются отметки за решение у доски, с учетом работы в паре.
- Домашнее задание:

1) Доказать основные соотношения.
2) Прочитать §37 и сведения из истории возникновения логарифмов – стр.258-259.
3) Выполнить упражнения: № 483, № 486, № 488, № 493, № 497.

Л.Н.РОМАКИНА, В.И.ШТОРМ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Многовековые попытки доказательства V постулата Евклида привели к замечательному математическому открытию в начале XIX века. Это открытие было впервые опубликовано великим русским математиком, профессором Казанского университета Николаем Ивановичем Лобачевским в работе «О началах геометрии» (Казань, 1829). В этой работе Николай Лобачевский заложил основы неевклидовой геометрии, построив её с помощью опровержения V постулата.

Впервые интерпретации плоскости Лобачевского были предложены профессором математики и механики в Болонье и Риме Эудженио Бельтрами (1835-1900) в книге «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии (Неаполь, 1868). В своём «Опыте» Бельтрами показал, что геометрия Лобачевского осуществляется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, называемых им *псевдосферическими поверхностями*. Бельтрами рассматривает геометрию Лобачевского на плоскости внутри круга. В этой модели прямым соответствуют хорды круга. Однако, Бельтрами не дал нам формулы для расстояния между двумя произвольными точками и не уяснил, как в его интерпретации изображаются движения плоскости Лобачевского. Несмотря на это, интерпретация Бельтрами дала первое доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского, так как плоскость Лобачевского целиком изображалась в евклидовой плоскости.

Ответы на вопросы, нерешенные Бельтрами, дал профессор Кембриджского университета Артур Кели (1821-1895). Он ввел понятие о проективной метрике на плоскости. Проективная плоскость с метрикой Кели в случае, когда её «абсолют» – мнимая коника, изометричная сфере радиуса 1, с отождествленными диаметрально противоположными точками в настоящее время носит название эллиптической плоскости или неевклидовой плоскости Римана. Кели не изучает случаев, когда «абсолют» вещественная коника и когда эта коника распадается на пару вещественных точек – такие плоскости в настоящее время называются гиперболической и псевдоевклидовой. Однако сам Кели не усмотрел связи его метрики с геометрией Лобачевского, хотя он был знаком с его трудами.

Связь геометрии Лобачевского с результатами Кели была установлена Феликсом Клейном (1849-1925) в работе «О так называемой неевклидовой геометрии» (Лейпциг, 1871-1872). Клейн показал, что когда абсолют Кели является вещественной кривой, часть проективной плоскости внутри неё изометрична плоскости Лобачевского. Интерпретация Бельтрами в круге является частным случаем модели Клейна в случае, когда коника является кругом. Он дал определение расстояния между двумя точками и угла между двумя прямыми. А также он получил первую классификацию кривых второго порядка в плоскости Лобачевского, которую доработал потом Б.Розенфельд в книге «Неевклидовы геометрии» (Москва, 1955) {см.[2]}.

Позже появились модели знаменитого французского математика Анри Пуанкаре (1854-1912) на полуплоскости и в круге [3].

Линии второго порядка в модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского

Пусть уравнение абсолюта на проективной плоскости с фиксированным репером имеет вид (см. [1]):

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{1}$$

Мы показали, что линия второго порядка, лежащая внутри абсолюта, и имеющая с ним две общие точки, является эквидистантой (рис. 1).

Уравнение эквидистанты при соответствующем выборе проективного репера можно задать в виде:

$$a_{11}x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 =0 \tag{2}$$

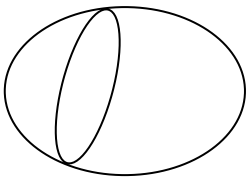


Рис. 1

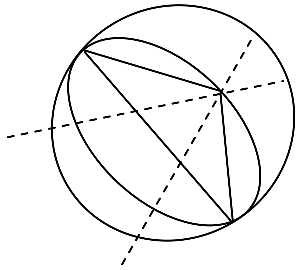


Рис. 2

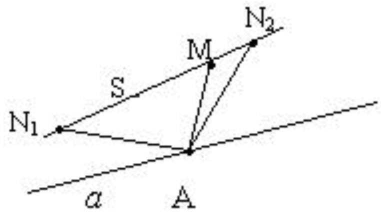


Рис. 3

где коэффициент $a_{11} > 1$. Последнее условие гарантирует попадание всех точек линии внутрь абсолюта, так как при $a_{11} > 1$ для координат точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (2), выполняется условие: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$.

Доказали свойство эквидистанты: ***две прямые, проходящие через каждую её точку параллельны базе эквидистанты, тогда и только тогда, когда они перпендикулярны между собой*** (Рис. 2).

Следовательно, эквидистанта есть геометрическое место точек пересечения двух ортогональных прямых, каждая из которых параллельна некоторой фиксированной прямой (базе эквидистанты).

На плоскости Лобачевского зафиксируем прямую a и точку S, ей не принадлежащую. (см. рис. 3) На каждой прямой пучка с центром в точке S построим точку M так, чтобы для любой точки A прямой a, прямые a и AM гармонически разделяли прямые AN_1 и AN_2, параллельные прямой l. Совокупность всех точек M образуют линию, которую обозначим δ. Прямую a назовем базой линии δ, а точку S – её вершиной.

Найдем каноническое уравнение линии δ в проективных координатах.

Пусть уравнение прямой a имеет вид: $x_2 = 0$.Точку S возьмем на прямой $x_1 = 0$, тогда ей можно присвоить координаты: $S(0:1:s)$.

Если (m_i), $i=1,2,3,$ – переменные координаты текущей точки M, то уравнение прямой MS имеет вид:

$$x_1(m_3 - sm_2) + sm_1x_2 - m_1x_3 = 0. \tag{3}$$

Точки пересечения прямой MS с абсолютом обозначим N_1 и N_2. Их координаты являются решением системы уравнений (1) и (3). Найдем отношения первых двух координат этих точек.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1(m_3 - s\cdot m_2) + s\cdot m_1\cdot x_2 - m_1\cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = x_1\dfrac{m_3 - s\cdot m_2}{m_1} + s\cdot x_2 \end{cases}$$

Первое уравнение системы последовательно приведем к виду:

$$x_1^2 + x_2^2 - \left(x_1\frac{m_3 - s\cdot m_2}{m_1} + s\cdot x_2 \right)^2 = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1^2\frac{(m_3 - s\cdot m_2)^2}{m_1^2} - s^2\cdot {x_2}^2 - 2sx_1x_2\frac{m_3 - s\cdot m_2}{m_1} = 0,$$

$$x_1^2m_1^2 + x_2^2m_1^2 - x_1^2(m_3 - s\cdot m_2)^2 - s^2\cdot {x_2}^2m_1^2 - 2sx_1x_2m_1(m_3 - s\cdot m_2) = 0,$$

$$x_1^2(m_1^2 - (m_3 - s\cdot m_2)^2) + x_2^2m_1^2(1 - s^2) - 2sx_1x_2m_1(m_3 - s\cdot m_2) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_{N1,N2} = \frac{sm_1(m_3 - sm_2) \pm m_1\sqrt{(m_3 - sm_2)^2 + (s^2 - 1){m_1}^2}}{{m_1}^2 - (m_3 - sm_2)^2}.$$

Пусть T - точка пересечения прямых a и MS, тогда $T(1:0:t)$.

По определению линии δ прямые AN_1 и AN_2 гармонически разделяют пару прямых a и AM, следовательно $(MTN_1N_2) = -1$. Запишем это условие:

$${m_1}^2 + sm_2m_3 - {m_3}^2 = 0$$

Каноническое уравнение линии δ имеет вид:

$${x_1}^2 + sx_2x_3 - {x_3}^2 = 0 \qquad (4)$$

Уравнение (4) определяет линию второго порядка, с которой любая прямая пересекается не более чем в двух точках. Определитель левой части уравнения (4) равен нулю только при $s = 0$. Но в этом случае $S(0:1:0)$ является внешней по отношению к абсолюту, т.е. не принадлежат плоскости Лобачевского. Следовательно, линия является вырожденной.

Системы уравнений (1), (4) определяют абсолютные точки линии δ: $K_1(1:0:1)$, $K_2(1:0:-1)$, $H_{1,2}(\pm\sqrt{1-s^2} : s : 1)$

Точки K_1 и K_2, очевидно, принадлежат данной прямой a. Кроме того, полюс прямой a относительно абсолютной квадрики, точка $P(0:1:0)$, принадлежит исследуемой линии, а полюс этой прямой относительно линии δ, точка $Q(0:2:s)$, принадлежит абсолюту при $|s| = 2$ (см. рис. 4.*а*).; является собственной точкой плоскости Лобачевского при $|s| < 2$ (см. рис. 4.*б*); является несобственной точкой плоскости при $|s| > 2$ (см. рис. 4.*в*).

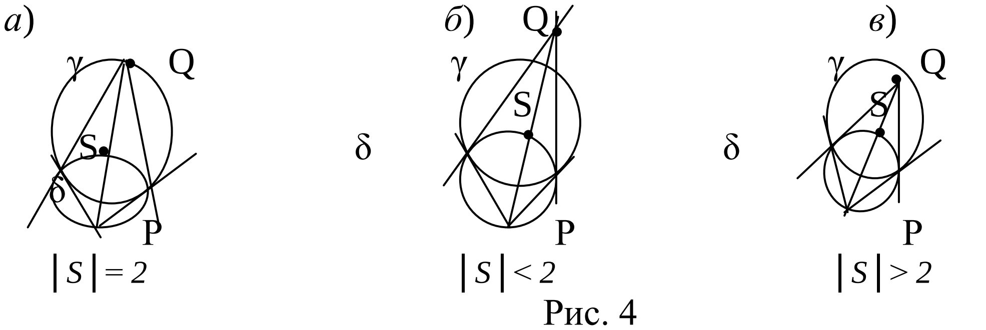


Рис. 4

Очевидно, точка $S(0:1:s)$ тоже принадлежит линии δ.

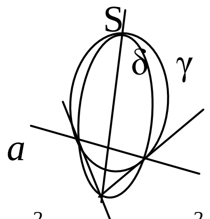
Определим изображения линий для $|S| > 1$.

Прямая PS: $x_1=0$ перпендикулярна прямой a в смысле геометрии Лобачевского (так как проходит через полюс прямой a). Назовем эту прямую осью линии δ. Расстояние от точки S до прямой a равно расстоянию SA_3, где $A_3(0:0:1)$ – точка пересечения прямой a с прямой PS. Величина SA_3 является инвариантом линии. Если $L_{1,2}$ – точки пересечения прямой PS с абсолютом, то они имеют координаты $L_{1,2}(0:1:\pm 1)$ и $(SA_3L_1L_2)=\frac{s-1}{s+1}$.

Возможны три случая.

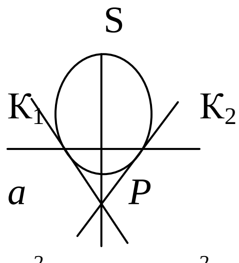
1. Точка S принадлежит плоскости Лобачевского при $(SA_3L_1L_2)>0$, т.е. при $|s| < 1$. Точки H_1 и H_2 в этом случае мнимо сопряженные, следовательно линия (4) имеет две общие действительные точки с абсолютом (Точки K_1 и K_2).
2. Точка S лежит на абсолюте при $(SA_3L_1L_2) = 0$, т.е. при $|s| = 1$. В этом случае прямые указанного в определении пучка являются параллельными (рис.3).
3. Точка S – несобственная точка плоскости Лобачевского при $(SA_3L_1L_2) < 0$, то есть при $|s| > 1$. Этому случаю в определении соответствует пучок расходящихся прямых (рис. 5).

При $|s| = 0$ имеем частный случай – вырожденную квадрику – пару пересекающихся прямых: PK_1 и PK_2 (рис.6).



$x_1^2 - x_2 \cdot x_3 - x_3^2 = 0$

Рис. 5



$x_1^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 = 0.$

Рис. 6

Рассмотрим на проективной плоскости абсолют (1). Возьмем точку $A_3(0:0:1)$ внутри него. Выберем точку $M(m_i)$, где $i = 1,2,3$ (K_1).

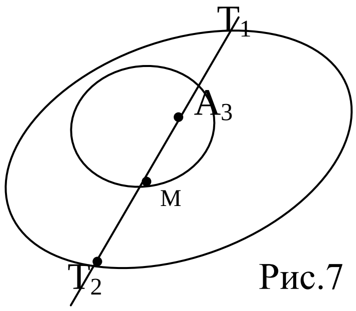


Рис.7

Уравнение окружности с центром в точке $A_3(0:0:1)$ и радиусом AM (рис.7).

$$x_1^2 + x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0 \qquad (5)$$

При $a_{33}<1$ линия (5) лежит внутри линии (1): $x_1^2 + x_2^2 - a_{33}x_1^2 - a_{33}x_2^2 = 0$.

Преобразуя это равенство, получаем: $x_1^2 \cdot (1 - a_{33}) + x_2 \cdot (1 - a_{33}) = 0$ или $(1 - a_{33}) \cdot (x_1^2 + x_2^2) = 0$, где $a_{33} \neq 1$, так как линия (1) не пересекает линию (5).

Литература

1. *В. Е. Подран*. “Модели Плоскости Лобачевского”. – Новгород. 1998.
2. *Б. А. Розенфельд*. “Неевклидовы пространства”. – М.: Наука, 1969.
3. *А.С. Смогоржевский* “Геометрические построения в плоскости Лобачевского” – М.: Гос издательство технико-теоретической литературы. М-Л. 1951

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Коллектив авторов

УЧИТЕЛЬ – УЧЕНИК:
проблемы, поиски, находки

Сборник научных трудов

Выпуск 4

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать 19.12.2005.		Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$
Бумага офсетная	Ризопечать	Гарнитура Times
Усл. печ. л. 5.	Тираж 300 экз.	Заказ №

Издательство «Научная книга». Саратов, ул. Б. Садовая, 127.

Отпечатано в типографии ООО «Инвестстрой»
410000, г. Саратов, ул. Моторная, д. 18