

На правах рукописи



ВЕДЯЙКИНА Ольга Ивановна

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНЫХ
ИЗГИБНЫХ И ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В ЭЛЕМЕНТАХ
КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2013

Работа выполнена в ФГБУН «Институт проблем машиностроения
Российской академии наук»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
ФГБУН «Институт проблем машиностроения
Российской академии наук»

Ерофеев Владимир Иванович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»

Землянухин Александр Исаевич

доктор физико-математических наук, профессор
ФБОУ ВПО «Волжская государственная академия
водного транспорта»

Волков Иван Андреевич

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный
университет имени Н.И. Лобачевского»

Защита состоится « » декабря 2013 г. в _____ часов на заседании совета
Д 212.243.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ФГБОУ
ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г.
Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, IX
корпус, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке
имени В.А. Артисевич Саратовского государственного университета имени
Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

Автореферат разослан « » ноября 2013 г.

Ученый секретарь

кандидат физико-математических наук



Ю.В. Шевцова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы обусловлена достаточно широким интересом к развитию теории упругих волн и ее приложений. Задачи о распространении изгибных, крутильных и изгибно-крутильных волн применяются в следующих областях:

– расчеты при конструировании. В самолето-, ракето- и судостроении некоторые отсеки крыльев, элементы конструкций, а также ракеты большого удлинения рассматриваются как балочные элементы, подверженные изгибу и кручению. При строительстве автомобильных, железных дорог, мостовых сооружений, а также трубопроводов исследуется распространение волн в тонкостенных стержнях. Этому направлению посвящены работы Т.В. Гришаниной, К.С. Колесникова, И.Ф. Образцова, В.В. Новожилова, А.А. Уманского, Ф.Н. Шклярчука, Н.П. Тютюнникова, С.Л. Субботина, Г.И. Михасева, Н.А. Баранова, А.В. Родыгина, А.Н. Кулешовой, И.Г. Петровой, В.В. Егорова и другие.

– методы неразрушающего контроля при проверке на наличие скрытых дефектов, примесей, который применим как на стадии производства материалов, так и на стадии эксплуатации механизмов и конструкций. Направленные упругие волны могут распространяться на значительные расстояния без существенного затухания, что позволяет проводить дефектоскопию в длинномерных конструкциях (например, трубопроводах) и в труднодоступных местах, сравнивая свойства распространения текущей волны с взятыми за эталон.

Данным проблемам посвящены работы Т.Н. Лебедевой, С.А. Мурашова, О.Н. Пчелинцевой, И.Н. Диденкулова, А.Э. Екимова, В.В. Казакова и другие.

Диссертационная работа проводилась в рамках «Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2008 – 2012г.г.» по теме:

– «Разработка моделей и методов расчета нелинейных волновых процессов, хаотической синхронизации и формирования кластерных структур в машинах, создание высокоэффективных адаптивных систем

виброзащиты» (№ Гос.рег. 01200957044; научный руководитель: профессор Ерофеев В.И.)

и при поддержке:

– Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009 – 2013г.г.);

– Гранта Российского фонда фундаментальных исследований «Нелинейная волновая динамика и устойчивость роторных систем» (РФФИ № 11-08-97066-р_поволжье; руководитель: профессор Ерофеев В.И.).

Цель работы состоит в изучении дисперсионных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении изгибных, крутильных и изгибно-крутильных волн в упругих стержнях.

Научная новизна

– Предложена новая математическая модель, описывающая связанные изгибно-крутильные колебания прямолинейного упругого стержня, обладающего геометрической нелинейностью и депланацией поперечного сечения.

– Впервые исследовано влияние связи между изгибными и крутильными типами волн на их дисперсионные свойства.

– Впервые исследованы нелинейные стационарные изгибные волны в предварительно закрученном стержне и нелинейные стационарные крутильные волны в стержне с начальной погибью.

– Впервые описаны процессы взаимодействия изгибных и крутильных волн, приводящие к формированию связанных несинусоидальных стационарных волн.

Практическая значимость

Дисперсионные характеристики и соотношения, связывающие параметры нелинейных волн, могут найти применение при расчете на прочность, устойчивость и определение виброактивности стержневых систем различного назначения, подверженных динамическому воздействию.

Методы исследования

При проведении исследований использованы методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

На защиту выносятся

– Математическая модель, описывающая связанные изгибно-крутильные колебания прямолинейного упругого стержня, обладающего геометрической нелинейностью и деформацией поперечного сечения.

– Результаты исследования дисперсионных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении и взаимодействии изгибных, крутильных и изгибно-крутильных волн в стержне.

Апробация работы

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на: Шестой Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана. 26-28 января 2011г.); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 24-30 августа 2011г.); XXIII международной инновационной конференции молодых ученых и студентов (Москва, Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН. 14-17 декабря 2011г.); IX Всероссийской научной конференции имени Ю.И.Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012г.).

Работа была отмечена почетным дипломом «За наиболее интересное научное сообщение» на XXIII международной инновационной конференции молодых ученых и студентов (Москва, 2011г.)

Публикации

По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, 7 из которых [1-7] статьи из перечня изданий, рекомендуемых ВАК РФ и 1 [8] монография.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения. Общий объем составляет 102 страницы, включая 63 рисунка, 12 страниц библиографии, содержащей 102 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована ее актуальность, сформулированы основные цели и положения выносимые на защиту, определена практическая значимость работы.

Глава 1. Вывод уравнений изгибно-крутильных колебаний стержня.

Обзор публикаций

В **первом параграфе** приведена общая идея приведения трехмерных уравнений теории упругости к одномерным путем выражения напряженно-деформируемого состояния в произвольной точке через величины, заданные вдоль оси стержня, т.к. процессы поперечной деформации можно считать квазистатическими. Возможна аппроксимация смещений по толщине с использованием разложения точного решения задачи для упругого слоя в степенной ряд по параметру kh (k – волновое число, h – толщина пластины).

Основной этап формирования приближенной модели стержня заканчивается на выборе аппроксимации, далее вступают в действие математические аппараты нелинейной теории упругости и вариационного исчисления.

Во **втором параграфе** первой главы дается вывод системы уравнений, описывающих взаимодействие изгибных и крутильных волн в балке с учетом геометрической нелинейности

$$\begin{aligned} \theta_{,tt} - c_\tau^2 \frac{I_s}{I_p} \theta_{,xx} - \frac{I_\psi}{I_p} \square_{c_s} \theta_{,xx} + I_p^{-1} \bar{I}_{\nabla\psi} \square_{c_s} \bar{W}_{,xx} = I_p^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[2c_m^2 \theta_{,x} \bar{W}_{,x}^T \mathbf{J}_R \bar{W}_{,x} + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{\rho_0} \theta_{,x}^3 + 2c_m^2 I_s \theta^2 \theta_{,x} \right] - 2c_m^2 r_p^{-2} \left(\theta^3 + \theta |\bar{W}_{,x}|^2 + \frac{1}{2} \frac{I_s}{F} \theta \theta_{,x}^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{J}}{F} \square_{c_s} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\bar{I}_{\nabla\psi}}{F} \square_{c_s} \theta_{,xx} = 2c_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(\theta^2 + |\bar{W}_{,x}|^2) \bar{W}_{,x} + F^{-1} \theta_{,x}^2 \mathbf{J}_R \bar{W}_{,x} \right],$$

где $\bar{W} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ – вектор-столбец поперечных перемещений, $\theta(x,t)$ – угол

поворота его поперечного сечения, $\square_c = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$ – оператор Даламбера,

$c_m = \sqrt{(\lambda + \mu) / \rho_0}$, I_p – полярный момент инерции, I_s – момент инерции при кручении, I – осевой момент инерции, F – площадь поперечного сечения балки, $I_\psi = \iint \psi^2 dF$ – момент депланации, r_p – полярный радиус инерции,

$\beta = \iint \left[\frac{\lambda}{2} (y^2 + z^2 + \psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2)^2 + \mu (y^2 + z^2)^2 + \mu (\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2)^2 \right] dF$, c_τ – скорость распространения волны сдвига, c_s – скорость распространения продольной волны ρ – плотность материала.

Глава 2. Дисперсионные характеристики изгибно-крутильных волн

Первый параграф посвящен изучению дисперсии изгибно-крутильной волны в стержне, поперечное сечение которого отлично от кругового или кольцевого. Распространение волны рассматривается в плоскости xOz (ось стержня совпадает с осью x). Система уравнений описывающих взаимодействие изгибных и крутильных волн в стержне (1) без учета геометрической нелинейности приводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \theta_0(-\omega^2 + k^2 - \omega^2 k^2 + c^2 k^4) + W_0(\varepsilon \omega^2 k^2 - \varepsilon c^2 k^4) = 0, \\ \theta_0(\varepsilon \omega^2 k^2 - \varepsilon c^2 k^4) + W_0(-\omega^2 - \omega^2 k^2 + c^2 k^4) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

из которой определяем дисперсионное уравнение (3)

$$\begin{aligned} \omega^4(1 + 2k^2 + (1 - \varepsilon^2)k^4) - \omega^2(k^2 + (1 + 2c^2)k^4 + 2c^2(1 - \varepsilon^2)k^6) + \\ + (c^2 k^6 + c^2(1 - \varepsilon^2)k^8) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая уравнение (3), получаем зависимость частоты волны ω от волнового числа k . На рис. 1 показано, что имеются две дисперсионные ветви, описывающие распространения крутильной и изгибной волн. При малых значениях волнового числа кривые стремятся к разным асимптотам, далее при возрастании k дисперсионные кривые сближаются.

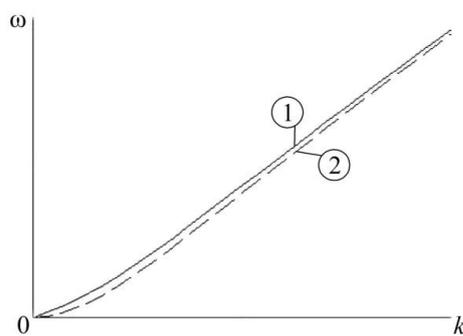


Рис. 1

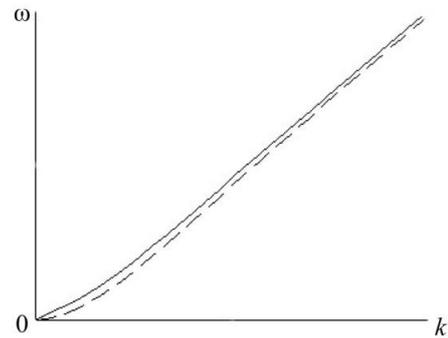


Рис. 2

Если из системы уравнений (2) выделить отдельно уравнения, описывающие крутильные и изгибные волны, то их дисперсионные уравнения будут:

– для крутильной волны: $-\omega^2 + k^2 - \omega^2 k^2 + c^2 k^4 = 0$, (4)

$$- \text{ для изгибной волны: } -\omega^2 - \omega^2 k^2 + c^2 k^4 = 0, \quad (5)$$

На рис. 2 показаны дисперсионные зависимости частоты волны ω от волнового числа k : сплошной линией обозначена дисперсионная зависимость крутильной волны, штриховой – изгибной. Таким образом, видно, что кривая 1 описывает преимущественно крутильные волны, а кривая 2 – изгибные (рис. 1, 2).

Для изгибно-крутильной волны определяем выражения фазовой и групповой скоростей. При малых значениях волнового числа $k \rightarrow 0$ значения скоростей находятся в окрестностях единицы и нуля. При увеличении числа k значения скоростей стремятся к c , через параметр c^2 обозначено отношение $\frac{c_s^2 I_\rho}{c_r^2 I_s}$ (рис. 3, 4).

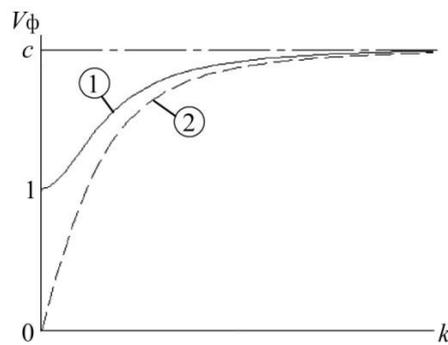


Рис. 3

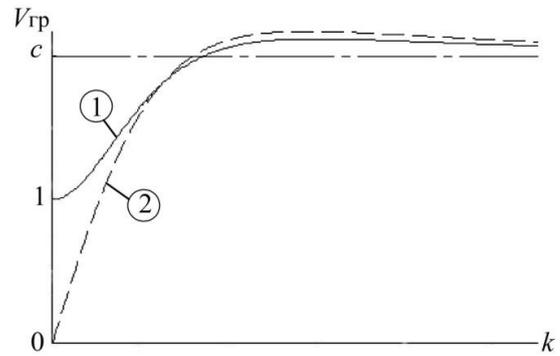


Рис. 4

По графикам фазовых и групповых скоростей отдельно для изгибной и крутильной волн (рис. 5, 6) можно определить принадлежность ветвей графика к типам волн. На рис. 5, 6 сплошной линией обозначены фазовая и групповая скорость крутильной волна, штриховой – изгибной.

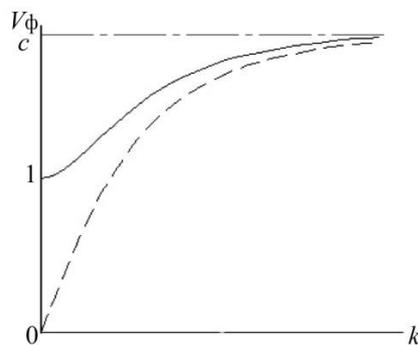


Рис. 5

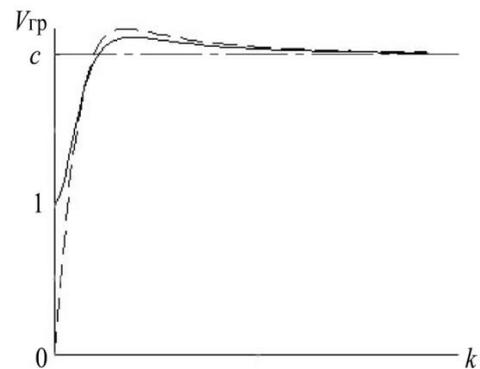


Рис. 6

Для удобства определения дисперсии волны графики фазовых и групповых скоростей изгибно-крутильной волны совмещены на одном рисунке (рис. 7). Сплошными линиями обозначены кривые, описывающие групповую и фазовую скорости преимущественно крутильной волны (в уравнениях; штриховыми – изгибной волны).

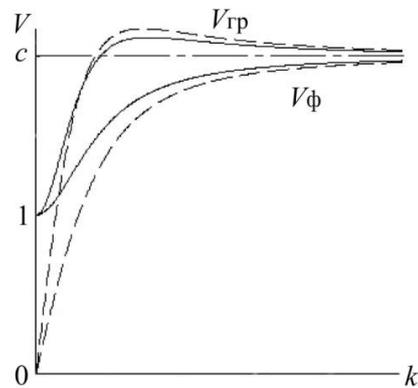


Рис. 7.

Таким образом, видно, что при $k=0$ – дисперсия отсутствует $V_{гр}=V_{ф}$; $k>0$ – дисперсия изгибно-крутильной волны аномальная – $V_{гр}>V_{ф}$.

Совместив дисперсионные графики, построенные для изгибно-крутильной волны и отдельно для изгибной и крутильной волн, становится видно, что ветви графиков близки друг к другу. Влияние связи между крутильной и изгибной волной прослеживается с увеличением волнового числа. Фазовая и групповая скорости изгибно-крутильной волны возрастают по сравнению со скоростями крутильной волны и понижаются по сравнению со скоростями изгибной волны.

Влияние связи между изгибными и крутильными волнами можно определить, изменив коэффициент ϵ , стоящий перед связующим слагаемым, в дисперсионном уравнении (2). При решении данной задачи был предположен порядок переменной $\epsilon \sim 10^{-1}$, которая заменяет соотношения

одного порядка $\frac{I_{\psi z}}{I_{\rho}} \sqrt{\frac{I_{\rho}}{I_{\psi}}}$ и $\frac{I_{\psi z}}{I_{\rho}} \frac{I_{\rho}}{I_{\psi}} \sqrt{\frac{I_{\rho}}{I_{\psi}}}$. Влияние связи при данном значении

коэффициента практически не заметно. При его увеличении влияние связи в изгибно-крутильной волне станет более очевидно даже при небольших значениях волнового числа k . Наибольшее влияние связи на распространение волны можно увидеть, приняв $\epsilon=1$, при этом некоторые

слагаемые уравнения (3) обращаются в нуль, а ветви на дисперсионных кривых займут крайние положения.

Во **втором параграфе** изучено влияние предварительной закрученности стержня на дисперсию изгибных и крутильных волн. Задача рассматривается с учетом геометрической нелинейности, смещения в плоскости xOz , стержень предполагается кругового или кольцевого сечения, что позволяет говорить об отсутствии депланации. Закрученность стержня задается постоянной составляющей (θ_0) и динамическими пульсациями $(\tilde{\theta}(x,t))$, зависящими от координаты и времени: $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(x,t)$.

Систему уравнений (1) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{,tt} - \left(c_\tau^2 \frac{I_s}{I\rho} + (\lambda + \mu)(I\rho + Ig)\theta_0^2 \right) \tilde{\theta}_{,xx} = -2(\lambda + \mu)F(\theta_0^3 + 3\theta_0^2\tilde{\theta}), \\ W_{,tt} + c_0^2 r_y^2 W_{,xxxx} - r_y^2 W_{,xxtt} = 2 \frac{\lambda + \mu}{\rho} \theta_0^2 \cdot W_{,xx}. \end{cases} \quad (6)$$

В линейном приближении изгибные и крутильные волны распространяются независимо друг от друга. Распространение крутильной волны в закрученном стержне описывается уравнением Клейна – Гордона (первое системы уравнение (6)). А распространение изгибной волны в закрученном стержне описывается уравнением (второе уравнение системы (6)), аналогичным уравнению, описывающему распространение изгибной волны в балке с предварительным натягом. Натяг в этом случае пропорционален θ_0 .

Дисперсионное уравнение для крутильной волны

$$\omega = \pm \sqrt{\left(c_\tau^2 \frac{I_s}{I\rho} + (\lambda + \mu)(I\rho + Ig)\theta_0^2 \right) k^2 + 6(\lambda + \mu)F\theta_0^2 + 2(\lambda + \mu)F\theta_0^3}, \quad (7)$$

показывает, что имеется зона непропускания, которая зависит от начального угла поворота и тем больше, чем больше θ_0 .

Зависимость (7) при различных значениях начального угла поворота (θ_0) представлена на рис. 8, где 1 – зависимость при $\theta_0=0$; 2,3 – при значениях $\theta_0>0$, при этом $\theta_{0,3}> \theta_{0,2}$. При возрастании волнового числа ($k \rightarrow \infty$) зависимость в соотношении (7) стремится к линейной, а дисперсионные кривые к прямым.

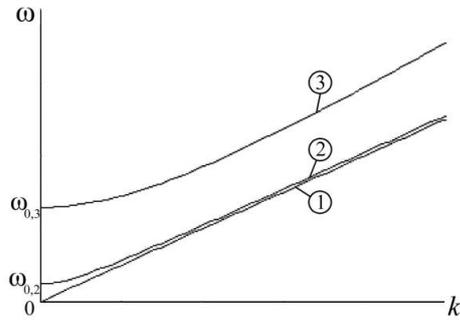


Рис. 8

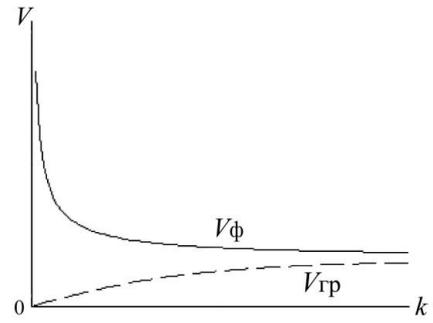


Рис. 9

Фазовая и групповая скорости крутильной волны при отсутствии начального угла поворота ($\theta_0=0$) постоянны и равны $\pm c_\tau \sqrt{I_s/I\rho}$. При больших значениях волнового числа ($k \rightarrow \infty$), значения скоростей также стремятся к одной величине $V_\phi = V_{gp} = \pm \sqrt{c_\tau \frac{I_s}{I\rho} + (\lambda + \mu)(I\rho + I_g)\theta_0^2}$, зависимой от угла поворота (θ_0).

Дисперсия крутильной волны нормальная, если начальный угол поворота отличен от нуля ($\theta_0>0$), при любых значениях k фазовая скорость больше групповой ($V_\phi > V_{gp}$) (рис. 9). При отсутствии начального угла поворота ($\theta_0=0$), значения фазовой и групповой скоростей совпадают, то есть дисперсия отсутствует.

Дисперсионные уравнение для изгибной волны

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{c_0^2 r_y^2 k^2 + 2 \frac{\lambda + \mu}{\rho} \theta_0^2}{1 + r_y^2 k^2}} \quad (8)$$

На рис. 10 показана дисперсионная зависимость частоты волны (ω) от волнового числа (k) при различных значениях начального угла поворота (θ_0): 1 – зависимость при $\theta_0=0$; 2,3 – при значениях $\theta_0>0$, при этом $\theta_{0,3} > \theta_{0,2}$.

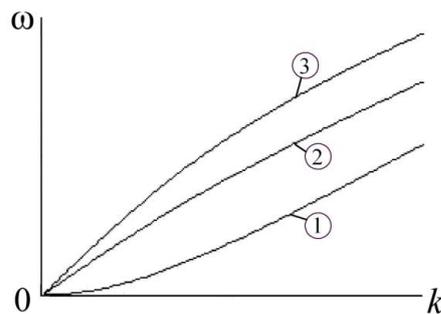


Рис. 10

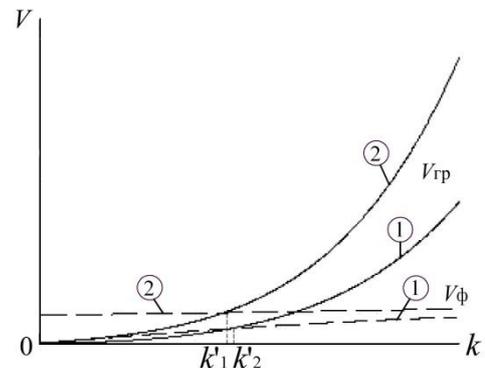


Рис.11

При некотором значении волнового числа k' дисперсия волны отсутствует, а фазовая и групповая скорости равны $V'_{\phi} = V'_{gp}$. При $k < k'$ – дисперсия волны нормальная; при $k > k'$ – дисперсия волны аномальная. На рис. 12 обозначена сплошными линиями групповая скорость, а штриховыми – фазовая; 1 – при $\theta_0=0$; 2 – при $\theta_0>0$.

Исключив из знаменателя дисперсионного соотношения (8) слагаемое $r_y^2 k^2$, получим зависимость соответствующую балке модели Бернулли-Эйлера (техническая теория), пренебрегающей влиянием этого фактора на изгиб. Дисперсионное соотношение (8) соответствует балке модели Релея (уточненная теория), учитывающей инерцию вращения поперечного сечения при изгибе. Сравнивая дисперсионные кривые, следует отметить, что частота (ω), фазовая скорость (V_{ϕ}) по модели Релея возрастает медленнее у рассматриваемой волны, по сравнению с частотами, рассчитанными по модели Бернулли-Эйлера. Групповая скорость изгибной волны возрастает много интенсивнее согласно теории Релея, чем по теории Бернулли-Эйлера при тех же значениях начального угла поворота (θ_0).

Глава 3. Интенсивные изгибные и крутильные волны в упругом стержне

В рамках геометрически нелинейной модели изгибно-крутильных колебаний упругого прямолинейного стержня, имеющего круговое или кольцевое поперечное сечение рассмотрены следующие задачи.

В **первом параграфе** рассмотрена задача о распространении интенсивной изгибной волны в закрученном стержне. Угол поворота сечения стержня состоит из постоянной составляющей и малых динамических пульсаций: $\theta(x, t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x, t)$, где $\theta_0 \gg \tilde{\theta}$. Это позволяет линеаризовать первое уравнение системы (1) относительно $\tilde{\theta}$ и рассматривать его отдельно от первого уравнения. Второе же уравнение системы, остается нелинейным, оно описывает распространение интенсивной изгибной волны в закрученном стержне и сводится к уравнению Дуффинга

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + m_1 W + m_2 W^3 = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{2c_m^2}{c_s^2 r_y^2} \left(\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2 \right), m_2 = -\frac{2c_m^2}{c_s^2 r_y^2}.$$

Коэффициент m_2 всегда отрицателен, а по знаку m_1 можно судить о существовании нелинейных стационарных изгибных волн.

При малых углах закручивания $m_1 > 0$. На фазовой плоскости (рис. 12) уравнения (9) точка $(0,0)$ является устойчивым положением равновесия типа "центр", а точка $(\pm \sqrt{-m_1/m_2}, 0)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа "седло". Фазовый портрет (рис.12) показывает, что в стержне могут существовать как периодические стационарные волны, так и уединенная стационарная волна.

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом, форма которого близка к меандру. Уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) и описывается гиперболическим тангенсом. Отметим, что отношение амплитуды периодической стационарной волны к волновому числу и произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину является величиной постоянной.

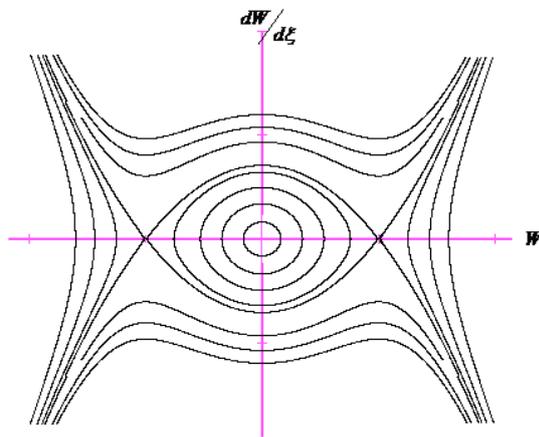


Рис.12

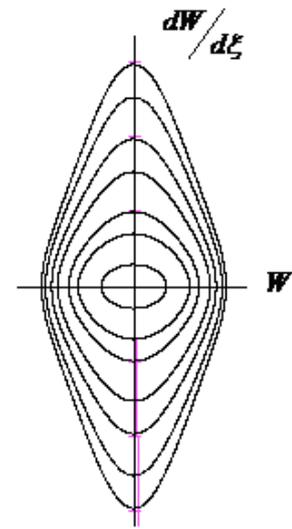


Рис. 13

При больших углах закручивания ($m_1 < 1$) в фазовом портрете уравнения Дуффинга отсутствуют замкнутые фазовые траектории. Нелинейных стационарных волн в этом случае не существует.

Во **втором параграфе** рассмотрена задача о распространении интенсивной крутильной волны в стержне с начальной

погибью $\frac{\partial w}{\partial x} = W_0 + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}$, где $W_0 \gg \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}$ и система (1) сводится к одному нелинейному уравнению, описывающему распространение интенсивной крутильной волны

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left(c_\tau^2 + 2c_m^2 \frac{I_y}{I_p} W_0^2 \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{2c_m^2}{r_p^2} W_0^2 \theta = \\ = \frac{3\beta}{\rho I_p} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c_m^2 \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c_m^2 \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2c_m^2}{r_p^2} \theta^3 \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем уравнение (10) к виду:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 6W_0^2 \theta + 6\theta^3 + 6\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad (11)$$

От нелинейного уравнения Клейна – Гордона уравнение (11) отличается наличием последнего слагаемого. Отыскивая решение в классе стационарных волн $\theta = \theta(\eta)$, где $\eta = z - V\tau$, приходим к уравнению в обыкновенных производных, отличающегося от уравнения Дуффинга наличием последнего слагаемого

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + mW_0^2 \theta + m\theta^3 + m\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 = 0, \quad (12)$$

где $m = \frac{6}{(V^2 - 1)}$. Знак этого параметра определяется величиной скорости

V . Стационарные волны могут существовать лишь при $V > 1$, т.е. при условии, что нелинейная волна движется по стержню быстрее, чем линейная. Эти волны могут быть только периодическими. Фазовый портрет уравнения (12) приведен на рис. 13.

Волновое число увеличивается с ростом амплитуды волны.

В **третьем параграфе** изучаются процессы взаимодействия изгибных и крутильных волн, приводящие к формированию нелинейных периодических и уединенных стационарных волн.

Решение системы (1) найдено в виде бегущих стационарных волн. При упрощении уравнений оцениваем величины входящих в них коэффициентов.

Если стержень изготовлен из алюминиевого сплава Д16, то $\frac{c_m^2}{c_\tau^2} \approx 3$, а $\frac{c_m^2}{c_s^2} \approx 1,125$,

следовательно система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{u}}{d\eta^2} + \tilde{u} &= 2\varepsilon \left[\tilde{u}^3 + \tilde{u}\tilde{\theta}^2 + \tilde{u} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2\tilde{\theta}}{d\eta^2} &= \pm 3\varepsilon \left[4\tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + \tilde{\theta} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2 - 2\tilde{\theta}^3 - 2\tilde{\theta}\tilde{u}^2 \right].\end{aligned}\tag{13}$$

где $\varepsilon \approx \theta_0^2$; $\Lambda \sim r_{\rho,y}$.

Возможные типы стационарных волн можно определить обратившись к свойствам уравнений (13). Положительный параметр ε в обоих уравнениях (13) является устранимым, заменой переменных, и систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\eta} &= X \\ \frac{dX}{d\eta} &= -W + W^3 + W\psi^2 + WY^2 \\ \frac{d\psi}{d\eta} &= Y \\ \frac{dY}{d\eta} &= \pm \frac{3}{2} (4WXY + \psi Y^2 - 2\psi^3 - 2\psi W^2)\end{aligned}\tag{14}$$

Состояниями равновесия уравнений (14) являются точки $O(W_0, X_0, \psi_0, Y_0)$: $O_1(0,0,0,0)$, $O_2(-1,0,0,0)$, $O_3(1,0,0,0)$. В соответствии с заменой переменных состояния равновесия системы (13): $O_1(0,0,0,0)$, $O_2(-(2\varepsilon)^{-1/2}, 0,0,0)$, $O_3((2\varepsilon)^{1/2}, 0,0,0)$.

Множество точек $M(x)$ фазового пространства $G(x)$ динамической системы $\dot{x} = F(x)$ называется интегральным многообразием, если для любой точки $x_0 \in M$ выполняется $x(t) \in M$ для всех t , где $x(t)$ – решение системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Непосредственно из уравнений (14) устанавливаем существование следующих интегральных многообразий системы в фазовом пространстве $G\{W, X, \psi, Y\}$.

$M_1 = \{\psi=0, Y=0\}$ (координатная плоскость (W, X)) является интегральным многообразием системы (13). Траектории системы (13) на многообразии M_1 являются траекториями системы

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\eta} &= X \\ \frac{dX}{d\eta} &= -W + W^3, \end{aligned} \quad (15)$$

с интегралом: $W^4 - 2(W^2 + X^2) = C$. Картина интегральных кривых изображена на рис.14.

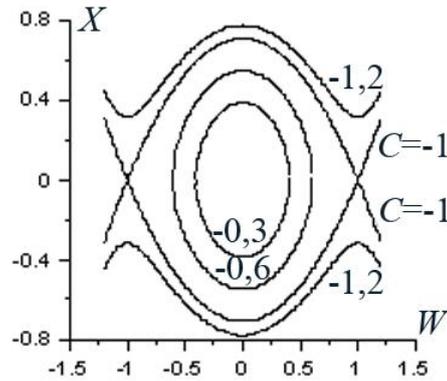


Рис. 14

Интерпретируя этот результат на динамику стержня, заключаем, что при отсутствии кручения возможно существование двух типов стационарных изгибных волн. Солитоны (кинк и антикинк), соответствующие сепаратрисам, идущим из седла $O_2(-1,0,0,0)$ в седло $O_3(1,0,0,0)$ (на рис.14 они соответствуют значению $C=-1$) и периодические стационарные волны, соответствующие периодическим траекториям внутри сепаратрисного контура. Траекториям вблизи сепаратрисного контура соответствуют кноидальные волны, а траекториям, располагающимся вблизи состояния равновесия $O_1(0,0,0,0)$ (центра), – квазигармонические волны.

На рис.15 а, б показаны одна из характерных траекторий системы (13) и ее осциллограмма, полученные в численном эксперименте.

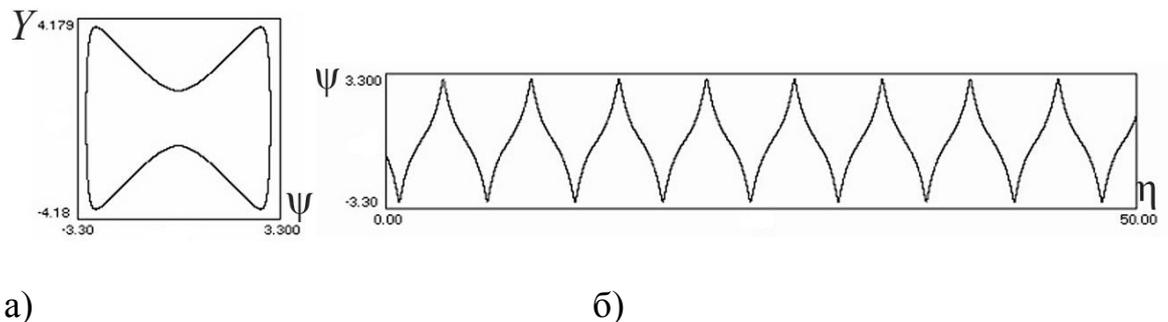


Рис. 15

Таким образом, в отсутствие изгибных возмущений все возможные стационарные крутильные волны являются периодическими (сверхнелинейными) (рис. 15 б).

Как показывает численный эксперимент, стационарные движения осцилляторов в системе (13), происходящие вне разобранных выше многообразий, являются либо периодическими, либо квазипериодическими. Соответственно, эти движения определяют или периодические или квазипериодические изгибно-крутильные стационарные волны.

Четвертый параграф посвящен дисперсионным соотношениям изгибной волны, распространяющейся в стержне, лежащей на нелинейно-упругом основании. Уравнение поперечной волны в стержне на нелинейно-упругом основании имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + hu + h_1 u^3 = 0 \quad (16)$$

где ρ – плотность материала стержня, E – модуль упругости, $u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + A^* e^{-i(\omega t - kx)}$ – уравнение поперечного перемещения в виде гармонической волны в комплексной форме, h , h_1 – коэффициенты, характеризующий жесткость «постели».

Из уравнения (16) можно определить зависимость частоты, волнового числа и модуля амплитуды в квадрате

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{h}{\rho F} + \frac{EI_y}{\rho F} k^4 + \frac{2h_1}{\rho F} |A|^2}. \quad (17)$$

Значение начальной частоты зависит от жесткости «постели», плотности материала балки, ее поперечного сечения и амплитуды. При увеличении амплитуды колебания волны ($|A|^2$) значение начальной частоты увеличивается (рис. 16).

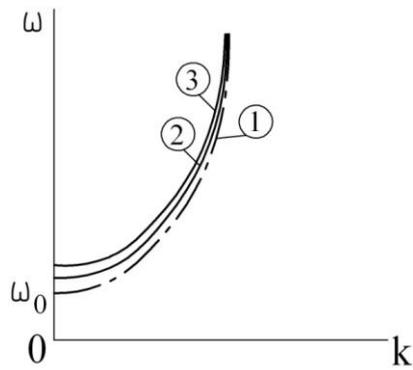


Рис. 16

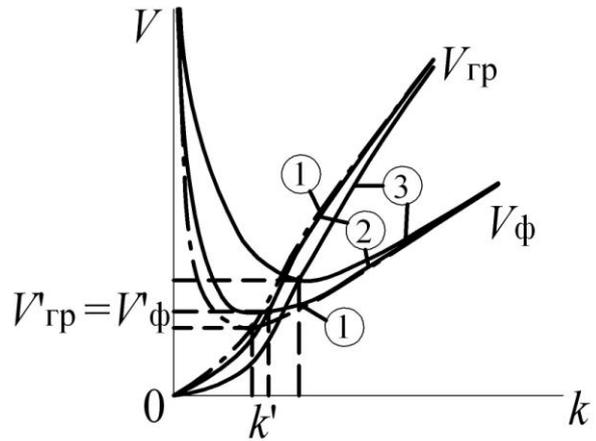


Рис. 17

В случае, при $|A|^2=0$, частота волны соответствует частоте волны в балке на линейно-упругом основании.

На рис. 17 представлены зависимости волновой и групповой скоростей от волнового числа при различных значениях амплитуды: 1 – зависимости скоростей от волнового числа в балке при $|A|^2=0$; 2,3 – при $|A|^2>0$.

При $k' = \sqrt[4]{\frac{h + 2h_1|A|^2}{EJ_y}}$ частота волны равна $\omega' = \sqrt{2\frac{h}{\rho F}} \sqrt{h + 2h_1|A|^2}$ –

дисперсия волны отсутствует, а фазовая и групповая скорости равны, $k < k'$ – дисперсия волны нормальная, $k > k'$ – дисперсия волны аномальная.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе.

Основные результаты работы

1. Предложена математическая модель, описывающая связанные изгибно-крутильные колебания прямолинейного упругого стержня, обладающего геометрической нелинейностью.

2. В линейном приближении исследована дисперсия изгибно-крутильных волн. Проведено сравнение дисперсионных зависимостей связанных волн с дисперсионными зависимостями для изгибных и крутильных волн, распространяющимися автономно, позволившее выявить области параметров, при которых связанностью волн различных типов можно пренебречь. Оценено влияние предварительного закручивания стержня на дисперсионные характеристики изгибно-крутильных волн.

3. Определена область изменения углов закручивания, при которых в стержне могут формироваться нелинейные стационарные изгибные волны.

Такие волны могут быть как периодическими, так и уединенными. Показано, что отношение амплитуды периодической стационарной волны к ее волновому числу, а также произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину, являются постоянными величинами, определяемыми модулями упругости и радиусом поперечного сечения стержня.

4. Показано, что в стержне с начальной погибью могут формироваться нелинейные стационарные крутильные волны. Такие волны могут быть только периодическими, значение их волнового числа увеличивается с ростом амплитуды. На графиках эти зависимости лежат тем выше, чем больше погибь стержня.

5. Исследованы процессы нелинейного взаимодействия изгибных и крутильных волн, приводящие к формированию связанных несинусоидальных стационарных волн. Показано, что взаимодействие изгибных и крутильных волн является слабым в том смысле, что малые возмущения одной из компонент в какой-либо точке остаются таковыми во всех точках профиля волны. В случае близких интенсивностей изгибной и крутильной компонент имеет место их резонансное взаимодействие, приводящее к периодической стационарной волне, или квазипериодической волне со значительной глубиной модуляции одной из компонент.

Основные результаты работы опубликованы в следующих работах

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Ерофеев В.И., Орехова О.И.* Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке. Часть 1 // Приволжский научный журнал. 2011. № 2. С.7-15.
2. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке. Часть 2 // Приволжский научный журнал. 2011. № 3. С.20-26.
3. Орехова О.И. Дисперсия изгибной и крутильной волн в балках цилиндрической формы // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 262 – 263.

* Фамилия сменена на Ведяйкина 13.02.13. Свидетельство П-ТН № 500050.

4. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Орехова О.И. Интенсивные изгибные и крутильные волны в упругом стержне // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 1. С. 11-15.
5. Веричев Н.Н., Ерофеев В.И., Орехова О.И. Нелинейные стационарные изгибно-крутильные волны в упругом стержне // Приволжский научный журнал. 2012. № 2. С.27-34.
6. Ерофеев В.И., Зинченко А.С., Казачек С.В., Орехова О.И. Нелинейное взаимодействие продольных и крутильных квазигармонических волн в стержне // Приволжский научный журнал. 2012. № 3. С.16-20.
7. Байдюсенов Б.Б., Ведяйкина О.И., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А. Определение динамических характеристик эксцентрикового вибратора с использованием программного комплекса ADAMS // Приволжский научный журнал. 2013. №4.

Монография

8. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Нелинейные крутильные и изгибно-крутильные волны в стержнях // LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrucken, Deutschland, 2012. 137 с.

Публикации в сборниках и сборниках материалов конференций

9. Орехова О.И. Дисперсионные соотношения для изгибной волны, распространяющейся в балке, лежащей на нелинейно-упругом основании // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов – Н.Новгород: Издательство общества «Интелсервис», №1(16), 2010. С. 58-63.
10. Орехова О.И. Распространение изгибно-крутильной волны в балке // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Шестой Всероссийской конференции 26-28 января 2011г. (В трех частях) Ч.II.- М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. С. 38-41.
11. Орехова О.И. Дисперсия изгибной и крутильной волн в балках цилиндрической формы // Актуальные проблемы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2011. С.86-87.

12. Орехова О.И. Изгибно-крутильные волны в предварительно закрученной балке // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2011): материалы конференции (Москва, 14-17 декабря 2011 г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2011. С. 70.
13. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия изгибно-крутильной волны в балке, сечение которой отлично от кругового или кольцевого // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов – Н.Новгород: Издательство общества «Интелсервис», №1(18), 2011. С. 25-38.
14. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия крутильных и изгибных волн, распространяющихся в закрученных стержнях // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта – Н.Новгород: Изд-во ФБОУ ВПО «ВГАВТ», № 30, 2012. С.74-86.
15. Орехова О.И. Изгибно-крутильные волны в предварительно закрученной балке // XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2011): избранные труды конференции (Москва, 14-17 декабря 2011 г.). /М: Изд-во ИМАШ РАН, 2012. С. 99-104.
16. Орехова О.И. Нелинейная изгибная волна в закрученном стержне // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н.Новгород, 24-29 сентября 2012г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Н.Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. С. 726-729.
17. Веричев Н.Н., Ерофеев В.И., Зинченко А.С., Орехова О.И. Регулярная и хаотическая динамика нелинейно-упругого стержня, совершающего изгибно-крутильные колебания // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов – Н.Новгород: Издательство общества «Интелсервис», №1(20), 2012. С. 185-198.