На правах рукописи

Хворостухина Екатерина Владимировна

ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2011

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Саратовского государственного социально-экономического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Молчанов Владимир Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Бредихин Дмитрий Александрович

кандидат физико-математических наук, профессор Карташов Владимир Константинович

Ведущая организация: Казанский (Приволжский) федеральный университет

Защита состоится "24"февраля 2011 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете имени Н.Г.Чернышевского по адресу: 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, IX корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского.

Автореферат разослан "____"января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент ______________ В.В.Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Работа посвящена развитию алгебраической теории универсальных гиперграфических автоматов. Теория автоматов представляет собой один из основных разделов математической кибернетики, главными объектами изучения которой являются устройства, предназначенные для управления динамическими системами, изменяющими свои состояния под воздействием сигналов из внешней среды. Примерами таких устройств могут служить электронно-вычислительное, телекоммуникационное оборудование, бытовая техника и т.п. Математической моделью таких устройств является автомат $A = (X, S, \delta)$, который представляет собой двухосновную алгебраическую систему с двумя основными множествами X, S и бинарной операцией $\delta : X \times S \to X$. При этом X называется множеством состояний, S – множеством входных сигналов, δ – функцией переходов автомата. Отображение δ для каждого фиксированного $s \in S$ определяет соответствующее этому входному сигналу s преобразование δ_s множества состояний, которое для каждого $x \in X$ указывает состояние $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, в которое переходит автомат A при входном сигнале s. Последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ реализуется композицией преобразований δ_s, δ_t. В результате множество S можно рассматривать как полугруппу с ассоциативной бинарной операцией $\cdot$, которая взаимосвязана с функцией переходов автомата по формуле: $\delta(x, s \cdot t) = \delta(\delta(x, s), t)$ для любых $x \in X$ и $s, t \in S$.

В зависимости от специфики рассматриваемых задач математической кибернетики, устройства управления динамическими системами могут моделироваться структуризованными автоматами, у которых множества состояний наделены дополнительной математической структурой, сохраняющейся функциями переходов таких автоматов. В качестве таких дополнительных структур могут выступать, например, структуры вероятностного пространства, линейного пространства, топологического пространства, упорядоченного множества и другие. Автоматы, наделенные такими дополнительными структурами, называются [11], соответственно, вероятностными автоматами, линейными автоматами, топологическими автоматами, упорядоченными автоматами. Исследованиям таких автоматов посвящены известные работы Аблаева Ф.М., Бухараева Р.Г., Скорнякова Л.А., Сперанского Д.В., Плоткина Б.И., Ф. Гечега, Акимовой С.А. и многих других. При таком подходе структуризованные автоматы являются объектами исследования алгебраической теории автоматов, которая основывается на фундаментальных понятиях универсальной алгебры и имеет разнообразные приложения к комбинаторным исследованиям автоматов, связанным с их поведением, анализом и синтезом, к теории формальных языков и к другим разделам математической кибернетики [11], [13].

В настоящей работе продолжается исследование структуризованных автоматов: здесь рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы, т.е. автоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа [5]. Поскольку гиперграфы являются естественным обобщением понятий обыкновенного графа, плоскости [6] и разбиения множества, то изучаемые автоматы образуют достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, многообразие которых охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множества состояний разбиваются на классы некоторой эквивалентности. В работе рассматриваются полугрупповые автоматы, поэтому далее под гиперграфическим автоматом будем понимать полугрупповой автомат $A = (X, S, \delta)$, у которого множество состояний X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов $\delta_s : X \longrightarrow X$ является эндоморфизмом гиперграфа H. Основное внимание в работе уделяется гиперграфическим автоматам, у которых множества состояний являются гиперграфами особого вида – эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами. В частности, эффективные гиперграфы с 1-определимыми ребрами - это гиперграфы, ребра которых образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. Кроме того, эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами являются конечные плоскости – специальные комбинаторные конфигурации, которые имеют важные приложения в таких разделах прикладной математики, как теория планирования экспериментов, теория кодирования и многие другие.

Главное внимание в настоящей работе уделяется так называемым универсальным гиперграфическим автоматам. Особый интерес к этой тематике объясняется тем, что понятие универсального объекта играет центральную роль в многочисленных приложениях теории категорий к теории автоматов. Например, минимальные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категориях эквивалентных между собой автоматов. При изучении гиперграфических автоматов универсальным притягивающим объектом в категории гиперграфических автоматов с фиксированным гиперграфом состояний H является автомат $\mathrm{Atm}(H) = (H, \mathrm{End}\, H, \delta)$ с гиперграфом состояний $H = (X, L)$, полугруппой входных сигналов $\mathrm{End}\, H$ (состоящей из эндоморфизмов гиперграфа H) и функцией переходов $\delta(x, \varphi) = \varphi(x)$ (здесь $x \in X, \varphi \in \mathrm{End}\, H$), который называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфом H.

В таком контексте при исследовании автоматов A с гиперграфом состояний H важную роль играет полугруппа $\mathrm{End}\, H$ эндоморфизмов гиперграфа H. Поэтому алгебраическая теория универсальных гиперграфических автоматов тесно связана с одним из основных разделов современной алгебры – обобщенной теорией Галуа, которая посвящена изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отображений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}(H)$, производной алгеброй отображений – его полугруппа входных сигналов $\mathrm{End}\, H$. Таким образом, алгебраическая теория гиперграфических автоматов тесным образом связана с общеизвестной задачей определяемости математических объектов их эндоморфизмами и автоморфизмами, которая сформулирована в числе прочих актуальных математических проблем в известной книге С. Улама [12].

Проведенные в работе исследования следуют традиционному кругу вопросов обобщенной теории Галуа. Принципиальное значение имеет задача о том, как производная алгебра отображений определяет исходный объект; затем исследуется, какими абстрактными свойствами характеризуется такая производная алгебра отображений; наконец, с помощью полученных результатов изучаются взаимосвязи свойств исходного объекта и его производной алгебры отображений. Такие вопросы для полугрупп эндоморфизмов графов, колец линейных преобразований векторных пространств и других алгебр преобразований весьма успешно исследовались Важениным Ю.М., Плоткиным Б.И., Глускиным Л.М., Михалевым А.В. и другими авторами. Особое внимание в этом направлении уделялось изучению групп автоморфизмов и полугрупп эндоморфизмов графов, для которых Д. Кениг в [15] сформулировал следующую задачу: каким условиям должна удовлетворять группа подстановок из n элементов, чтобы существовал n-вершинный граф, группа автоморфизмов которого совпадает с этой группой подстановок? Эта известная и до сих пор не решенная задача является частным случаем сложной проблемы конкретной характеризации [14] производных алгебр отображений в обобщенной теории Галуа, т.е. проблемы описания таких условий, при которых алгебра отображений равна производной алгебре отображений изучаемого математического объекта. В этом направлении отдельные продвижения были сделаны М. Краснером [16], Ляпиным Е.С. [8], Б. Йонсоном [14], Бредихиным Д.А. [3] и другими авторами для полугрупп эндоморфизмов релятивов, групп автоморфизмов и инверсных полугрупп частичных автоморфизмов универсальных алгебр.

Класс универсальных гиперграфических автоматов образует категорию, морфизмами которой являются гомоморфизмы таких автоматов. Изучению таких морфизмов в работе уделяется особое внимание, так как гомоморфизмы автоматов играют важную роль в задачах моделирования автоматов [2], [7], минимизации автоматов [1], факторизации автоматов [2] и многих других.

Принципиальным отличием проведенных в диссертации исследований является положенное в их основу решение задачи конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов. Эта задача формулируется следующим образом:

при каких условиях на множестве состояний X автомата A можно так определить структуру гиперграфа $H = (X, L)$, что будет выполняться равенство $A = \mathrm{Atm}(H)$, т.е. полугруппа входных сигналов автомата A будет совпадать с полугруппой эндоморфизмов $\mathrm{End}\, H$?

Главным инструментом решения сформулированной задачи является разработанная Молчановым В.А. [17] техника канонических отношений полугрупп преобразований, которые определяются в исходных полугруппах формулами языка узкого исчисления предикатов (УИП). Как показывают результаты [10], [17], такое решение поставленной задачи дает эффективный метод последовательного изучения взаимосвязи свойств универсальных структуризованных автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Цель работы. Разработать логико-алгебраические методы исследования гиперграфических автоматов. Решить задачу конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p−определимыми ребрами. Изучить взаимосвязь свойств универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p−определимыми ребрами со свойствами их полугрупп входных сигналов.

Методы исследования. В работе использовались методы теории автоматов, универсальной алгебры, математической логики, теории полугрупп и теории гиперграфов.

Научная новизна и выносимые на защиту положения. Основные результаты диссертации:

1) получено решение задачи конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами, которое позволяет по полугруппе входных сигналов такого автомата восстановить весь автомат;
2) получена абстрактная характеристика универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами;
3) доказана относительно элементарная определимость класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами в классе всех полугрупп;
4) решены задачи абстрактной и элементарной определяемости универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами своими полугруппами входных сигналов;
5) описана взаимосвязь важных проблем алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов эффективных гиперграфов с $p-$определимыми ребрами, классов универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами и классов полугрупп эндоморфизмов таких гиперграфов;
6) описана взаимосвязь эпиморфизмов универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами с морфизмами полугрупп входных сигналов этих автоматов.

Все вышеназванные результаты являются новыми.

Научная и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в алгебраической теории автоматов, универсальной алгебре, теории гиперграфов и теории полугрупп.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения

Куроша А.Г.(г. Москва, МГУ, 2008 г.), XV Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики"(г. Казань, КГУ, 2008 г.), XXI Международной научной конференции "Математические методы в технике и технологиях ММТТ-21"(г. Саратов, СГТУ, 2008 г.), Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Вагнера В.В.(г. Саратов, СГУ, 2008 г.), Международной конференции "Мальцевские чтения", посвященной 100-летию со дня рождения Мальцева А.И.(г. Новосибирск, НГУ, 2009 г.), Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения Кострикина А.И.(г. Нальчик, КБГУ, 2009 г.), Международной научной конференции "Компьютерные науки и информационные технологии"(г. Саратов, СГУ, 2009 г.), Международной конференции "Воображаемая логика"Васильева Н.А. и современные неклассические логики"(г. Казань, КФУ, 2010 г.), ежегодных научных конференциях механико-математического факультета "Актуальные проблемы математики и механики"(г. Саратов, СГУ, 2008, 2009, 2010 гг.), ежегодных конференциях по итогам научно-исследовательской работы Саратовского государственного социально-экономического университета "Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения"(Саратов, СГСЭУ, 2008, 2009, 2010 гг.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [A1]-[A18]. Работы [A1] и [A2] опубликованы в изданиях, содержащихся в Перечне ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, включающего 42 наименования. Общий объем работы составляет 132 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы и описывается краткое содержание диссертации.

В разделах 1.1, 1.2 первой главы приводятся основные понятия теории гиперграфов, алгебры отношений, теории полугрупп и теории автоматов, которые необходимы для последовательного развития алгебраической теории гиперграфических автоматов. В разделе 1.3 описываются обратимые входные сигналы универсальных гиперграфических автоматов, чьи множества состояний являются аффинными или проективными плоскостями малых размерностей.

Согласно [5] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Гиперграф называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре.

Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1. Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\operatorname{End} H$. Гомоморфизм $f : H \longrightarrow H_1$ называется эпиморфизмом гиперграфа H на гиперграф H_1, если образом множества вершин X гиперграфа H является все множество вершин X_1 гиперграфа H_1, то есть $f(X) = X_1$.

Гиперграфы $H = (X, L)$ и $H_1 = (X_1, L_1)$ называются изоморфными, если найдется такая биекция f множества X на множество X_1, которая сохраняет ребра этих гиперграфов.

Под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов $A = (X, S, \delta)$, у которого множество состояний X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов $\delta_s : X \longrightarrow X$ является эндоморфизмом гиперграфа H. Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End} H, \delta)$ с функцией переходов $\delta_\varphi(x) = \varphi(x)$ (где $\varphi \in \mathrm{End} H, x \in X$) является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}(H)$ и называется универсальнымы гиперграфическим автоматом.

Пусть $A = (H, S, \delta)$ и $A_1 = (H_1, S_1, \delta_1)$ – гиперграфические автоматы. Гомоморфизмом автомата A в автомат A_1 называется пара отображений $\pi = (f, g)$, где $f : H \longrightarrow H_1$, $g : S \longrightarrow S_1$ – такие гомоморфизмы гиперграфов и полугрупп соответственно, что для любых $x \in X$, $s \in S$ выполняется равенство $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), g(s))$. Если при этом f и g являются эпиморфизмами гиперграфов H, H_1 и полугрупп S, S_1 соответственно, то гомоморфизм $\pi = (f, g)$ называется также эпиморфизмом автомата A на автомат A_1. Если же f и g – изоморфизмы гиперграфов H, H_1 и полугрупп S, S_1 соответственно, то гомоморфизм $\pi = (f, g)$ называется изоморфизмом автомата A на автомат A_1

Во второй главе диссертации рассматриваются комбинаторные и логико-алгебраические свойства универсальных гиперграфических автоматов.

В разделе 2.1 решена задача об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p−определимыми ребрами своими полугруппами входных сигналов.

Теорема 2.2. Пусть $H = (X, L)$, $H_1 = (X_1, L_1)$ – эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами и $\mathrm{Atm}(H)$, $\mathrm{Atm}(H_1)$ – универсальные гиперграфические автоматы над H, H_1. Тогда полугруппы входных сигналов этих автоматов будут изоморфны в том и только том случае, если изоморфны автоматы $\mathrm{Atm}(H)$ и $\mathrm{Atm}(H_1)$.

В разделе 2.2 излагается центральный результат второй главы, который дает решение задачи конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p−определимыми ребрами.

Пусть X – произвольное непустое множество, p – натуральное число и R – $(p+1)$-арное отношение на множестве X. Согласно [9] отношение R называется p-эквивалентностью на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(T_1) $(x, ..., x, x) \in R$ для любого $x \in X$;

(T_2) для любых $1 \leq i_1, ..., i_p, i_{p+1} \leq p+1$,

$$(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \in R \Longrightarrow (x_{i_1}, ..., x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R;$$

(T_3) для любых попарно различных элементов $x_1, ..., x_p \in X$,

$$(x, x_1, ..., x_{p-1}, x_p), (x_1, ..., x_{p-1}, x_p, y) \in R \Longrightarrow (x, x_1, ..., x_{p-1}, y) \in R.$$

При этом p-эквивалентность R называется квазиполной, если выполняется условие

(T_4) для любых элементов $x_1, ..., x_p \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, .., x_p, x_p) \in R$, найдется такой отличный от всех них элемент $x \in X$, что $(x_1, .., x_p, x) \in R$.

Пусть X – произвольное непустое множество, p – натуральное число и S – произвольная полугруппа преобразований множества X. Тогда S

определяет на X следующие канонические $(p+1)$-арные отношения:

$$\delta_p = \cup\{\varphi^{p+1} : \varphi \in S\};$$

$$R_p = \{(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : X^{p+1} \setminus \triangle_X(p+1) \subset \delta_p^{-1}(x_1, ..., x_p, x_{p+1})\},$$

где $\triangle_X(n) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : x_i = x_j$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n\}$.

Полугруппу S преобразований множества X условимся называть n-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие преобразования φ множества X, что для любого n-элементного R_p-ограниченного множества $Y \subset X$ выполняется равенство $\varphi|Y = \psi|Y$ при некотором $\psi \in S$.

Решение задачи конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами дает следующий результат.

Теорема 2.9. Автомат $A = (X, S, \delta)$ без равнодействующих входных сигналов в том и только том случае будет универсальным гиперграфическим автоматом $\mathrm{Atm}(H)$ для некоторого эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами $H = (X, L)$, если его полугруппа входных сигналов S является $(p+1)$-ограниченно замкнутой полугруппой и ее каноническое отношение R_p является квазиполной p-эквивалентностью на множестве X.

В разделе 2.3 получена абстрактная характеристика исследуемых в работе универсальных гиперграфических автоматов, которая дает необходимые и достаточные условия, при которых автомат изоморфен универсальному гиперграфическому автомату над некоторым эффективным гиперграфом с $p-$определимыми ребрами.

В третьей главе диссертации приведены результаты исследования взаимосвязи свойств универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами и полугрупп входных сигналов этих автоматов.

В разделе 3.1 доказана относительно элементарная определимость [4] класса таких автоматов в классе всех полугрупп.

Терема 3.3. Существуют такие формулы $C(x)$, $L(\bar{x})$, $\mathrm{Eqv}(\bar{x};\bar{y})$, $\mathrm{Ins}(x;\bar{y})$ сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$ (здесь и далее $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, $\bar{y}^i = (y_1^i, \ldots, y_p^i)$), что любой универсальный гиперграфический автомат $A = \mathrm{Atm}(H)$ над эффективным гиперграфом с $p-$определимыми ребрами $H = (X, L)$ и его полугруппа входных сигналов $S = \mathrm{Inp}(A)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) множества $\overline{X} = \{x \in S : C(x)\}$ и $\overline{L} = \{\bar{x} \in S^p : L(\bar{x})\}$ не пусты;

2) формула $\mathrm{Eqv}(\bar{x};\bar{y})$ задает отношение эквивалентности $\overline{\mathrm{Eqv}}$ на множестве $\overline{L}$;

3) формула $\mathrm{Ins}(x;\bar{y})$ задает бинарное отношение $\overline{\mathrm{Ins}}$ между элементами множества $\overline{X}$ и множества $\overline{L}$, которое согласовано с эквивалентностью $\overline{\mathrm{Eqv}}$ по следующей формуле:

$$(x,\bar{x}) \in \overline{\mathrm{Ins}} \ \wedge \ \bar{x} \equiv \bar{y}(\overline{\mathrm{Eqv}}) \quad \Longrightarrow \quad (x,\bar{y}) \in \overline{\mathrm{Ins}};$$

4) автомат $A = ((X, L, \in), S, \delta)$ изоморфен гиперграфическому автомату $\overline{A} = (\overline{H}, S, \overline{\delta})$, где $\overline{H} = (\ \overline{X},\ \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}},\ \overline{\mu}\ )$ для такого бинарного отношения $\overline{\mu} \subset \overline{X} \times \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}}$, что

$$(x, Y) \in \overline{\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,\bar{x}) \in \overline{\mathrm{Ins}}, \ \text{ для всех } \bar{x} \in Y,$$

и отображение $\overline{\delta} : \overline{X} \times S \to \overline{X}$ определяется по формуле $\overline{\delta}(x,\psi) = x\psi$, при любых x $\in \overline{X}$и $\psi \in \mathrm{End}\, H$;

5) для любой формулы Ψ сигнатуры языка элементарной теории гиперграфических автоматов $\mathbf{L_A}$ эффективно строится такая формула $\overline{\Psi}$ сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, что Ψ в том и только том случае истинна на универсальном гиперграфическом автомате A для некоторого эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами, если формула $\overline{\Psi}$ истинна на его полугруппе входных сигналов $\mathrm{Inp}(A)$, т.е. выполняется условие: $A \models \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Inp}(A) \models \overline{\Psi}$.

С помощью этого результата в разделе 3.2 решена задача об элементарной определяемости универсальных гиперграфических автоматов своими полугруппами входных сигналов.

Теорема 3.4. Пусть H, H_1 – эффективные гиперграфы с $p-$определимыми ребрами и $\mathrm{Atm}(H) = A$, $\mathrm{Atm}(H_1) = A_1$ – универсальные гиперграфические автоматы над H, H_1 соответственно. Тогда полугруппы входных сигналов этих автоматов элементарно эквивалентны в том и только том случае, если элементарно эквивалентны автоматы A и A_1.

С помощью полученной в теореме 3.3 относительно элементарной определимости класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами в классе полугрупп в разделе 3.3 исследована взаимосвязь важных проблем алгоритмической разрешимости [4] элементарных теорий классов эффективных гиперграфов с $p-$определимыми ребрами, классов универсальных гиперграфических автоматов над такими гиперграфами и классов полугрупп эндоморфизмов таких гиперграфов.

Для класса гиперграфических автоматов $\mathbf{K}$ символом $\mathrm{Inp}(\mathbf{K})$ обозначается класс полугрупп входных сигналов автоматов класса $\mathbf{K}$.

Теорема 3.6. Для любого класса $\mathbf{K}$ универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами справедливы следующие утверждения:

1) если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп $\mathrm{Inp}(\mathbf{K})$ наследственно неразрешима;

2) если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп $\mathrm{Inp}(\mathbf{K})$ эффективно неотделима.

В разделе 3.4 описано строение сюрьективных гомоморфизмов универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами.

Обозначим через ε_H отношение связности гиперграфа H [5].

Теорема 3.9. Пусть $\mathrm{Atm}(H)$ – универсальный гиперграфический автомат над эффективным гиперграфом с $p-$определимыми ребрами $H = (X, L)$, $\mathrm{Atm}(H_1)$ – универсальный гиперграфический автомат над эффективным гиперграфом с p_1-определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$, f – отображение X в X_1 и g – отображение $\mathrm{End}\, H$ в $\mathrm{End}\, H_1$. Тогда пара отображений $\pi = (f, g)$ в том и только том случае является эпиморфизмом $\mathrm{Atm}(H)$ на $\mathrm{Atm}(H_1)$, если $g = f^2$ и выполняется только одно из следующих условий:

1) $\pi = (f, g)$ – изоморфизм $\mathrm{Atm}(H)$ на $\mathrm{Atm}(H_1)$;

2) g – эпиморфизм полугруппы $\mathrm{End}\, H$ на полугруппу $\mathrm{End}\, H_1$, f – эпиморфизм H на H_1, удовлетворяющий условию $\ker f = \varepsilon_H$ и H_1 – однореберный гиперграф, число вершин которого совпадает с числом компонент связности гиперграфа H.

В разделе 3.5 изучается строение мономорфизмов универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Молчанову Владимиру Александровичу за постановку задач и поддержку в исследованиях.

Список литературы

1. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.

2. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997.

3. Бредихин Д.А. Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов универсальных алгебр // Сибирск. матем. журнал, 1975. т.17, N3. С.490–507.

4. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М., Наука, 1980.

5. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН, 1974. т.29, N6. С. 89–154.

6. Картези Ф. Введение в конечные геометрии: Пер. с англ.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

7. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985.

8. Ляпин Е.С. Полугруппы. – М.: Физматлит, 1960.

9. Молчанов А.В. Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – Саратов, 1998. Вып.2. С.74-84.

10. Молчанов А.В. Полугруппы эндоморфизмов слабых p-гиперграфов // Известия вузов. Математика, 2000. N3(454). С.80-83.

11. Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. – М.:Высшая школа, 1994.

12. Улам С. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964.

13. Eilenberg S. Automata, languages and machines. Vol.B. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1976.

14. Jonsson B. Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math. N250. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer–Verlag, 1972.

15. Konig D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

16. Krasner M. Endotheorie de Galois abstraktion. Semin. Dubriel, Dubriel-Jacotin, Lesieur et Pisot. Fac. sci. Paris, 1968-1969(1970). V. 22, N 1. S. 6/01-6/19.

17. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum **27**, 1983. P.155–199.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

A1. Хворостухина Е.В. О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов гиперграфов //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2009. Т. 9, Вып. 3. С.70-75.

A2. Khvorostukhina E. On concrete characterization of universal hypergraphic automata // Journal of Mathematical Sciences. - New York: Springer New York, 2010. Vol. 164, N2. P.303-308.

A3. Хворостухина Е.В. О конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тезисы докладов. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008. С. 241-242.

A4. Хворостухина Е.В. Об определяемости гиперграфических автоматов полугруппами их входных сигналов // XV международная конференция "Проблемы теоретической кибернетики". Тезисы докладов. – Казань: изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. С.121.

A5. Хворостухина Е.В. О полугруппах эндоморфизмов гиперграфов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тезисы докл. Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. В.В. Вагнера. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С.136-137.

A6. Хворостухина Е.В. О моделировании гиперграфических автоматов // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-21: сб.трудов XXI Международ. науч. конф.: в 10 т. – Саратов: Сарат.гос.техн.ун-т, 2008. Т.1. С.86-88.

A7. Хворостухина Е.В. Об автоморфизмах проективных плоскостей // Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения: сборник науч. трудов по итогам научно-исследоват. работы СГСЭУ в 2007 году. – Саратов: Сарат. гос. соц-экон. ун-т, 2008. Ч.1. С.101-102.

A8. Хворостухина Е.В. О конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Математика. Механика: Сб.науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С.151-154.

A9. Хворостухина Е.В. Об одном классе гиперграфических автоматов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений: сб.науч.тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып.8. С.112-118.

A10. Хворостухина Е.В. Построение плоскости. – М.: ВНТИЦ, 2008. - N 50200802489.

A11. Хворостухина Е.В. О конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Фундаментальная и прикладная математика, 2008. Т.14. N7, С.223-231.

A12. Хворостухина Е.В. Об эпиморфизмах автоматов // Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения: Сборник научных трудов по итогам научно-исследовательской работы СГСЭУ в 2008 г.: в 2-х частях. – Саратов: Сарат. гос. соц-экон. ун-т, 2009. Ч.1. С.41.

A13. Хворостухина Е.В. Об относительно элементарной определимости класса гиперграфических автоматов в классе всех полугрупп // Международная научная конференция "Компьютерные науки и информационные технологии". – Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2009. С.210-212.

A14. Хворостухина Е.В. Об относительно элементарной определимости класса гиперграфов в классе всех полугрупп // Междунар. конференция "Мальцевские чтения", посв. 100-летию со дня рожд. А.И. Мальцева. Тезисы докладов. – Новосибирск, 2009. С.170.

A15. Хворостухина Е.В. О хопфовости полугрупп эндоморфизмов гиперграфов // Алгебра и ее приложения: труды Междун. алгебр. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина. – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2009. С.130-132.

A16. Хворостухина Е.В. Об эпиморфизмах гиперграфических автоматов // Математика. Механика: Сб.науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С.82-84.

A17. Хворостухина Е.В. О мономорфизмах гиперграфических автоматов // Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения: Сборник научных трудов по итогам научно-исследовательской работы СГСЭУ в 2009 г.: в 2-х частях. – Саратов: Сарат. гос. соц-экон. ун-т, 2010. Ч.1. С.119-120.

A18. Хворостухина Е.В. О мономорфизмах автоматов // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции "Воображаемая логика"Н.А. Васильева и современные неклассические логики". - Казань: Казан. мат. об-во, 2010. Т.41. С.103-105.

Подписано в печать 19.01.2011г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага типогр. N1. Печать RISO.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ .

410003, г. Саратов, ул. Радищева, 89. СГСЭУ.