

На правах рукописи



ЕМЕЛЬЯНОВА Юлия Павловна

**СИНХРОНИЗАЦИЯ И СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ
АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
С НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

01.04.03 – Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2012

Работа выполнена на базовой кафедре динамических систем факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Кузнецов Александр Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Астахов Владимир Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор Пономаренко Владимир Иванович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет»

Защита состоится 22 марта 2012 года в 15³⁰ на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. В.А. Артисевич Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан 03 февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Аникин В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов (автогенераторов) является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике. Описание различных систем в терминах взаимодействующих осцилляторов используется в радиофизике, микроволновой электронике, биофизике, химии. Простейшей такой системой, имеющей универсальный для теории колебаний характер, являются связанные осцилляторы ван дер Поля¹. Популярны также модели типа классического брюсселятора², разнообразных радиофизических генераторов: Анищенко–Астахова³ и его модификаций⁴, Кислова–Дмитриева⁵, других оригинальных конструкций генераторов и т.д. Особый интерес проявляется к исследованию различных биофизических систем: нефронов⁶, нейронов⁷ и т.д.

Оказывается, что даже два связанных автоколебательных элемента демонстрируют весьма разнообразную картину возможных эффектов, которая продолжает выясняться и дополняться. Прежде всего, это такие классические эффекты, как биения (квазипериодические колебания) и взаимный захват осцилляторов с различным соотношением частот. В случае диссипативной связи также возможен эффект гашения («гибели») колебаний, который состоит в том, что диссипативная связь подавляет автоколебания осцилляторов так, что состояние равновесия в начале координат из неустойчивого становится устойчивым. При этом осцилляторы должны быть достаточно отстроены друг от друга по частоте, так как в противном случае диссипация не может скомпенсировать воздействие одного осциллятора на другой, и возникает режим синхронизации. Эффект гибели колебаний обнаружен экспериментально в системах связанных осцилляторов разной природы: электронных, термо-оптических, химических, электробиологических. С другой стороны, в случае реактивной связи этот эффект невозможен, однако, для этого типа связи уже в фазовом приближении наблюдается бистабильность (синфазная и противофазная синхронизация). Комбинированное действие нескольких факторов, а именно, диссипативной и реактивной связи в фазовом и квазигармоническом приближениях рассматривалось Р. Рандом и П. Холмсом⁸, с учетом небольшой неидентичности по управляющим параметрам – М.В. Иванченко с соавторами⁹, а с учетом неизохронности малых колебаний – А.П. Кузнецовым с соавторами¹⁰. Некоторые ас-

¹ Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.

² Yu P., Gumel A.B. // Journal of Sound and Vibration, 2001, Vol. 244, No. 5, p. 795.

³ Анищенко В.С. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.; Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2010, т. 18, № 2, с. 79.

⁴ Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. // Phys. Rev. E, 2006, Vol. 73, p. 056202.

⁵ Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

⁶ Mosekilde E. Topics in nonlinear dynamics: applications to physics, biology and economic systems. World Scientific, Singapore, 2003. 380 p.; Laugesen J.L., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H. // Chaos, 2011, Vol. 21, No. 3, p. 033128; Laugesen J.L., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H. // Interface Focus, 2011, Vol. 1, p. 132 и др.

⁷ Postnov D.E. et al. // J. Biol. Phys., 2009, Vol. 35, p. 425.

⁸ Rand R., Holmes P.J. // Int. J. Non-Linear Mechanics, 1980, Vol. 15, p. 387.

⁹ Ivanchenko M.V. et al. // Physica D, 2004, Vol. 189, No 1-2, p. 8.

¹⁰ Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2008, т. 16, № 4, с. 101; Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. // Physica D, 2009, Vol. 238, № 14, p. 1203.

пекты картины, такие как мультистабильность, возможность хаоса и роль неизохронности в терминах исходной системы обсуждались в статьях¹¹. В ряде работ установлено влияние различных факторов на характер динамики, таких как нелинейный тип связи¹², действие «запаздывающей» связи¹³, связь через дополнительную третью переменную («*via a bath*»)¹⁴ и т.д. В частности, показано, что эффект гибели колебаний возможен и в идентичных по частотам осцилляторах за счет запаздывающей связи¹⁵ или за счет ее нелинейности¹⁶. Бифуркационные механизмы различных режимов связанных осцилляторов исследованы достаточно подробно в работах¹⁷.

Недавно были обнаружены новые интересные эффекты для задач о синхронизации двух осцилляторов внешней силой, а также для задач о трех связанных осцилляторах. Так в статье В.С. Анищенко, С.В. Астахова и Т.Е. Вадивасовой¹⁸ в фазовом приближении исследована задача о возбуждении двух диссипативно связанных осцилляторов, в другой работе этих авторов¹⁹ представлен соответствующий эксперимент, а в статье А.П. Кузнецова, И.Р. Сатаева и Л.В. Тюрюкиной²⁰ для анализа пространства параметров использован метод ляпуновских карт, выявляющий области двух- и трехчастотной квазипериодичности. В работах В.С. Анищенко и его соавторов²¹ в терминах исходных уравнений исследуется случай реактивной связи, а в работе К. Би²² – случай параметрического возбуждения осцилляторов. Три реактивно связанных осциллятора ван дер Поля в контексте приложения к анализу биологических циркадных (суточных) ритмов исследуются в статье К. Ромпалы, Р. Ранда и Х. Хоуланда²³. В работе Б.Г. Репина и А.Е. Дубинова²⁴ три связанных осциллятора ван дер Поля исследуются в контексте задачи микроволновой электроники о синхронной генерации трех связанных виркаторов – генераторов СВЧ излучения. В статье А.П. Кузнецова, И.Р. Сатаева и Л.В. Тюрюкиной²⁵ для анализа трех и четырех диссипативно связанных в цепочку фазовых осцилляторов применяется метод ляпуновских карт. Следует отметить также, что для задач о ди-

¹¹ Storti D.W., Rand R.H. // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1982, Vol. 17, No. 3, p. 143; Pastor I. *et al.* // *Phys. Rev. E*, 1993, Vol. 48, p. 171; Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. // *Phys. Rev. A*, 1991, Vol. 44, p. 3452; Кузнецов А.П., Паксютов В.И. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2003, т. 11, № 6, с. 48.

¹² Rajasekar S., Murali K. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, Vol. 19, No. 4, p. 925; Pikovsky A., Rosenblum M. // *Physica D*, 2009, Vol. 238, No. 1, p. 27.

¹³ Reddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L. // *Physica D*, 1999, Vol. 129, No. 1-2, p. 15; Wirkus S. // *Nonlinear Dynamics*, 2002, Vol. 3, No. 3, p. 205.

¹⁴ Camacho E., Rand R., Howland H. // *International Journal of Solids and Structures*, 2004, Vol. 41, No. 8, p. 2133.

¹⁵ Prasad A. *et al.* // *Phys. Rev. E*, 2010, Vol. 81, p. 027201.

¹⁶ Reddy R.D.V., Sen A., Johnston G.L. // *Phys. Rev. Lett.*, 1998, Vol. 80, p. 5109.

¹⁷ Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике*. М.: Наука, 1989. 280 с.; Астахов В.В. и др. // *Успехи современной радиоэлектроники*, 2008, вып. 9, с. 61.

¹⁸ Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. // *Europhysics Letters*, 2009, Vol. 86, p. 30003.

¹⁹ Анищенко В.С. и др. // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237.

²⁰ Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2010, № 4, с. 17.

²¹ Анищенко В.С., Николаев С.М. // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 1, с. 39; Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. // *Chaos*, 2008, Vol. 18, p. 037123.

²² Bi Q. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, Vol. 39, No. 1, p. 33.

²³ Rompala K., Rand R., Howland H. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, Vol. 12, No. 5, p. 794.

²⁴ Репин Б.Г., Дубинов А.Е. // *ЖТФ*, 2006, т. 76, вып. 4, с. 99.

²⁵ Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 693.

намике связанных автоколебательных осцилляторов в рамках фазового приближения возникают определенные аналогии с системами фазовой автоподстройки, см. работу В.В. Матросова и В.Д. Шалфеева²⁶ и цитированную там литературу.

Столь широкое поле для исследований обусловлено как многообразием физических эффектов и механизмов, так и тем, что динамика системы связанных осцилляторов может обсуждаться на разных уровнях: в терминах исходной системы, в рамках квазигармонического приближения для медленных комплексных амплитуд и в рамках фазового приближения. В то же время в подавляющем большинстве работ исследуются случаи идентичных взаимодействующих подсистем, которые отличаются лишь значением собственных частот осцилляторов. Однако осцилляторы могут отличаться и по параметрам, отвечающим за степень возбуждения (отрицательное трение), а также по параметрам, ответственным за нелинейное насыщение автоколебаний. Важность такого случая обусловлена рядом причин. Во-первых, в реальных условиях создать две идентичные копии системы практически невозможно. Это особенно заметно при экспериментальной схемной радиофизической реализации связанных автогенераторов. Во-вторых, введение неидентичности указанных типов приводит к появлению новых эффектов, таких как доминирование того или иного осциллятора, что существенно сказывается на устройстве пространства параметров. Еще более многоплановой становится задача в случае трех (и более) осцилляторов. Действительно, увеличение диссипативной связи в этом случае будет последовательно выводить из автоколебательного режима разные осцилляторы, которые, к тому же, могут занимать различное положение в цепочке, что, как мы увидим, является существенным.

В то же время возможен случай связи разнотипных автоколебательных систем. Такие системы могут быть сконструированы искусственно, например, когда связываются два разнотипных автогенератора. С другой стороны, если говорить о синхронизации в природе, например, в биофизических процессах, важность случая взаимодействия разнотипных систем вполне понятна. Пусть две такие системы слабо возбуждены, так что порог бифуркации Андронова–Хопфа превышен незначительно. В этом случае поведение систем будет описываться универсальными для такой бифуркации моделями, однако параметры таких автоколебаний будут, скорее всего, различными в силу разного типа подсистем. Поэтому в случае связи разнотипных систем можно ожидать проявление эффектов и особенностей устройства пространства параметров, характерных для неидентичных подсистем. Таким образом, исследование связанных неидентичных и разнотипных автоколебательных осцилляторов является важной задачей радиофизики.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании особенностей колебаний связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными управляющими параметрами и параметрами нелинейной диссипации, а также связанных однотипных и разнотипных автоколебательных систем.

²⁶ Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 258 с.

Для достижения поставленных целей в работе решаются следующие **основные задачи**:

1. Теоретическое и экспериментальное исследование двух связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными управляющими параметрами и параметрами нелинейной диссипации, выявление особенностей устройства пространства параметров таких систем и их физическое объяснение.

2. Выявление аналогичных особенностей для связанных разнотипных автоколебательных систем на примере связанных с осциллятором ван дер Поля Брюсселятора и генератора Кислова–Дмитриева.

3. Выявление особенностей устройства пространства параметров для связанных однотипных автоколебательных осцилляторов на примере модели парных нефронов.

4. Исследование условий доминирования различных осцилляторов и особенностей устройства пространства параметров трех связанных в цепочку неидентичных по параметрам возбуждения осцилляторов ван дер Поля.

Методы исследования. В ходе выполнения диссертационной работы был использован спектр различных аналитических и численных методов. Так, при теоретическом исследовании систем связанных осцилляторов, а также при построении модели трех фазовых осцилляторов применялось аналитическое решение дифференциальных уравнений в квазигармоническом приближении методом медленно меняющихся амплитуд. При численном исследовании для получения информации об устройстве пространства параметров использовался метод построения карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей. Для анализа динамики систем связанных осцилляторов в фазовом пространстве использовался метод построения фазовых портретов и сечений Пуанкаре. Для идентификации областей хаотической динамики среди наблюдаемых областей непериодических режимов использовался метод вычисления старшего ляпуновского показателя. Для демонстрации сценария перехода к хаосу при изменении одного из управляющих параметров использовался метод построения бифуркационных деревьев. При проведении численного анализа бифуркаций в исследуемых системах использовалась программа *Matcont*. Решение нелинейных дифференциальных уравнений проводилось с помощью метода Рунге–Кутты 4 порядка и метода Рунге–Кутты 4 порядка с переменным шагом. Программирование осуществлялось на языках *Delphi* и *C#*.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Для двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами нелинейной диссипации и отрицательного трения возможны ситуации доминирования как одного, так и второго осцилляторов, а также смена доминирующего осциллятора. Это приводит, во-первых, к возникновению на плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» характерной области широкополосной синхронизации и, во-вторых, дополнительной полосы области основной синхронизации, образующей S-образный «выступ» в сторону больших частотных расстроек. Указанные эффекты обнаружены в рамках аналитического рассмотрения, численного моделирования и радиофизического эксперимента.

2. Эффекты, связанные с широкополосной синхронизацией, доминированием одного осциллятора над другим и сменой доминирующего осциллятора, являются типичными для разнотипных автоколебательных систем, например, для связанных осцилляторов ван дер Поля – брюсселятора и осциллятора ван дер Поля – генератора Кислова–Дмитриева.

3. Широкополосная синхронизация наблюдается в модели парных нефронов (структурные элементы почки), что связано с неидентичностью размахов колебаний нормированных радиусов артериол взаимодействующих нефронов, а также с затухающим характером зависимости размаха колебаний отдельного нефрона от общего времени задержки реакции.

4. Для системы трех диссипативно связанных в цепочку неидентичных осцилляторов ван дер Поля картина синхронизации зависит от соотношения управляющих параметров, а также от того, на краю или в центре цепочки оказывается наиболее протемпфированный связью осциллятор. В такой системе возможен режим полной широкополосной синхронизации, когда захват всех трех осцилляторов наблюдается в сколь угодно широком диапазоне частотных расстроек первого и второго осцилляторов. При этом режим полной широкополосной синхронизации возникает в ситуации, когда за счет диссипативной связи оказываются протемпфированными два осциллятора. Кроме того, возможен режим широкополосной двухчастотной синхронизации, при котором сильно подавленным связью оказывается только один осциллятор.

Аргументированность, обоснованность и достоверность результатов диссертации. Достоверность полученных результатов численного исследования обеспечивается использованием при расчетах апробированных и широко используемых численных методов, а также соответствием результатов, полученных различными методами (карты динамических режимов, карты ляпуновских показателей, фазовые портреты и др.). Результаты теоретического анализа полностью согласуются с численными экспериментами. Численные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментальными. Кроме того, результаты исследования совпадают с известными для предельных случаев.

Научная новизна работы. В диссертационной работе получены новые результаты, в частности, впервые:

1. Установлено, что для двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами нелинейной диссипации и отрицательного трения возможны ситуации доминирования как одного, так и второго осцилляторов, а также смена доминирующего осциллятора. Это приводит к определенным качественным перестройкам плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи». В частности, возможна синхронизация в сколь угодно большом интервале частот – широкополосная синхронизация – и возникновение дополнительной полосы области основной синхронизации, образующей S-образный «выступ» в сторону больших частотных расстроек.

2. На основе фазового приближения и представления о доминировании того или иного осциллятора получены теоретические оценки для границ областей основной и широкополосной синхронизации в случае неидентичных управ-

ляющих параметров и разного уровня нелинейной диссипации, согласующиеся с результатами численного моделирования.

3. Проведено экспериментальное исследование особенностей синхронизации связанных радиофизических автогенераторов с неидентичными управляющими параметрами и параметрами нелинейной диссипации, обнаружено качественное соответствие результатов эксперимента результатам численного моделирования, теоретического исследования и бифуркационного анализа.

4. Выявлена возможность широкополосной синхронизации для диссипативно связанных осцилляторов с неквадратичным потенциалом даже в случае идентичных управляющих параметров.

5. Для связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора подробно изучена картина колебательных режимов в зависимости от соотношения управляющих параметров взаимодействующих подсистем. Обнаружены режимы широкополосной синхронизации, «пульсирующей генерации» и «слабого хаоса».

6. Проведено исследование трансформации картины колебательных режимов для системы связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева при вариации управляющих параметров, отвечающих за режим колебаний в автономных подсистемах. На примере такой системы показано, что взаимодействие разнотипных осцилляторов может не только стабилизировать хаос, но и наоборот, инициировать его за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе.

7. На картах динамических режимов, построенных для модели парных нефронов на плоскости параметров «общее время задержки реакции во втором нефроне – параметр васкулярной связи», выявлена область широкополосной синхронизации. Установлен механизм возникновения широкополосной синхронизации в такой системе, даны соответствующие иллюстрации.

8. Для системы трех диссипативно связанных в цепочку неидентичных осцилляторов ван дер Поля изучена зависимость картины режимов от положения осцилляторов с большим (меньшим) управляющим параметром в цепочке. Обнаружено, что режимы широкополосной синхронизации могут отвечать как полной синхронизации осцилляторов, так и двухчастотным колебаниям, связанным с подавлением связью одного осциллятора.

9. Проведены аналитические оценки радиусов орбит осцилляторов внутри области полной широкополосной синхронизации, которые хорошо согласуются с результатами численного исследования.

10. Получены фазовые уравнения для системы трех осцилляторов с неидентичными управляющим параметрами. В рамках фазового приближения установлены границы области полной синхронизации в зависимости от положения наиболее подавленного связью осциллятора, в частности, выявлена возможность ее исчезновения.

11. Исследовано устройство плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» в цепочке трех неидентичных по управляющим параметрам диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга, выявлены области полной и двухчастотной широкополосной синхронизации, а также режимы, отвечающие резонансам высоких порядков.

Научно-практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы для широкого круга задач радиофизики, биофизики, нейродинамики и т.д. Научно-практическая значимость результатов первой главы состоит в установлении принципиальной роли даже малой неидентичности по управляющим параметрам в устройстве плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» взаимодействующих подсистем. С другой стороны, варьируя управляющие параметры подсистем и параметры нелинейной диссипации, можно в определенной мере изменять характеристики синхронных режимов взаимодействующих автогенераторов. Ансамбли связанных генераторов находят широкое практическое применение в радиофизике и электронике, например, в случае, когда нужно обеспечить сложение мощностей нескольких генераторов, работающих на общую нагрузку (в системах радиолокации). В этом случае важно обеспечить синхронную работу этих генераторов, для чего может быть полезен обнаруженный эффект широкополосной синхронизации. Возможность биофизических приложений обусловлена широким распространением ситуаций синхронизации разнотипных подсистем (включая классические известные примеры). Для изучения динамики нефронов важным является выяснение ситуаций, когда возможна, а когда невозможна широкополосная синхронизация. Результаты четвертой главы выявляют широкий спектр возможных колебательных режимов трех взаимодействующих автоколебательных осцилляторов, которые могут управляться за счет, например, выбора позиции наиболее (наименее) протемпированного связью осциллятора в цепочке. Развитая в этой главе методология анализа и подходы могут быть распространены на ансамбли с большим числом неидентичных элементов, включая цепочки, кольца и сети.

Результаты, полученные в работе, использованы в учебном процессе на факультете нелинейных процессов СГУ в рамках курса «Теория синхронизации» и в учебном пособии [10]. Результаты могут быть также использованы в учебном процессе в рамках курсов по радиофизике и теории колебаний в других вузах.

Личный вклад. Все основные результаты, представленные в диссертации и вошедшие в работы [1-14], получены лично автором. Автором разработаны математические модели и выполнены все численные эксперименты с помощью им же разработанного комплекса программ. Постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами совместных работ. Радиофизический эксперимент (п. 1.3 диссертации) был выполнен совместно с Е.П. Селезевым [6].

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертационной работе, докладывались на школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (Саратов, 2005 – 2008, 2010, 2011 гг.), I – VI конференциях молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2006 – 2011 гг.), VIII и IX международных школах «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2007, 2010 гг.), конференции молодых ученых «Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики» в рамках XIV всероссийской школы «Нелинейные волны» (Ниж-

ний Новгород, 2008 г.), XIV международной школе-конференции «Foundations and advances in nonlinear science» (Беларусь, Минск, 2008 г.), XIV зимней школе-семинаре по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, 2009 г.), международной школе-семинаре «Статистическая физика и информационные технологии (StatInfo-2009)» (Саратов, 2009 г.), международной конференции «Exploring Complex Dynamics in High-Dimensional Chaotic Systems: From Weather Forecasting to Oceanic Flows» (Германия, Дрезден, 2010 г.), международной 36-й конференции центрально-европейского сотрудничества в области статистической физики «МЕСО 36» (Украина, Львов, 2011 г.), XXXI международной конференции «Dynamics Days Europe 2011» (Германия, Ольденбург, 2011 г.), на научных семинарах базовой кафедры динамических систем СГУ и лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, а также на семинаре группы биологических систем и теории сложных систем физического факультета Датского технического университета (Дания, Лингби).

Результаты диссертации были использованы при выполнении НИР, поддержанных аналитической ведомственной целевой программой Министерства образования и науки Российской Федерации «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/1738), проектами РФФИ (гранты №№ 06-02-16773-а, 09-02-00707-а, 11-02-91334-ННИО_а), стипендиальной программой Фонда некоммерческих программ «Династия» (2008 – 2009 гг.), программой «Лучшие аспиранты РАН» Фонда содействия отечественной науке за 2010 г. по направлению «Инженерные и технические науки». Результаты диссертации, представленные в третьей главе, получены в ходе визита автора в группу профессора Э. Мозекилде в Датском техническом университете.

По результатам диссертации опубликовано 28 работ, из них 1 учебное пособие [10], 8 статей в российских и международных журналах, входящих в список журналов, рекомендованных ВАК РФ для публикации материалов кандидатских и докторских диссертаций [1-3,5-9], а также 1 статья в рецензируемом журнале [4] и 18 публикаций в тезисах докладов и материалах конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 127 наименований, изложена на 200 страницах, содержит 70 рисунков и 1 таблицу.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы ее цели и задачи, научная новизна, практическая значимость и положения, выносимые на защиту.

В **Главе 1** рассмотрена динамика системы двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - \gamma_1 x^2) \dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma_2 y^2) \dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x и y – динамические переменные первого и второго осцилляторов, λ_1 и λ_2 – параметры, характеризующие превышение над порогом бифуркации Анд-

ронова–Хопфа в автономных осцилляторах (отрицательное трение), γ_1 и γ_2 – параметры нелинейной диссипации, Δ – частотная расстройка автономного второго осциллятора относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи. Один из параметров нелинейной диссипации может быть убран перенормировкой, так что можно полагать $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = \gamma$.

В п. 1.1 проведено численное исследование динамики в случае неидентичных параметров, отвечающих за бифуркацию Андронова–Хопфа в каждом осцилляторе. На рис. 1 представлены карты динамических режимов на плоскости параметров «частотная расстройка Δ – величина связи μ » для случая идентичных и неидентичных по параметрам λ_1 и λ_2 осцилляторов ван дер Поля. На этих и на всех последующих картах динамических режимов разными оттенками серого цвета обозначаются периоды колебаний наблюдающихся режимов. Эти периоды определялись численно с помощью метода сечений Пуанкаре²⁷ и обозначены цифрами на картах. В качестве сечения Пуанкаре выбиралось условие равенства нулю скорости второго осциллятора $\dot{y}=0$.

В ходе построения карт динамических режимов обнаружено, что граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов является не линией, как на рис. 1, а в случае идентичных параметров λ_1 и λ_2 , а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки осцилляторов, рис. 1, б. Наличие синхронизации системы при сколь угодно больших значениях расстройки собственных частот осцилляторов предложено называть «широкополосной синхронизацией» (*Broadband Synchronization*) [1,2,5].

Можно дать следующее объяснение возможности режима широкополосной синхронизации. Оно существенно опирается на неидентичность осцилляторов. Если величина диссипативной связи μ превышает оба управляющих параметра λ_1 и λ_2 , то оба осциллятора находятся за порогом эффекта «гибели колебаний». В диапазоне же $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ существенно протемпированным связью оказывается только второй осциллятор. При этом первый осциллятор является

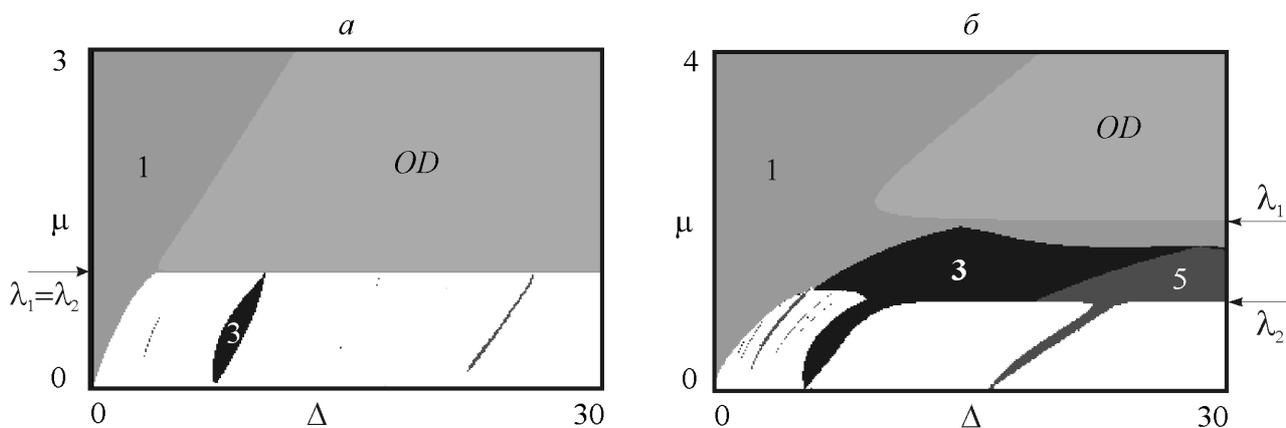


Рис. 1. Карты динамических режимов системы (1) в случае идентичных управляющих параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (а); в случае неидентичных управляющих параметров $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ (б). Значения параметров нелинейной диссипации $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. *OD* – область гибели колебаний. Белый цвет соответствует области квазипериодических режимов. Цифрами обозначены периоды колебаний.

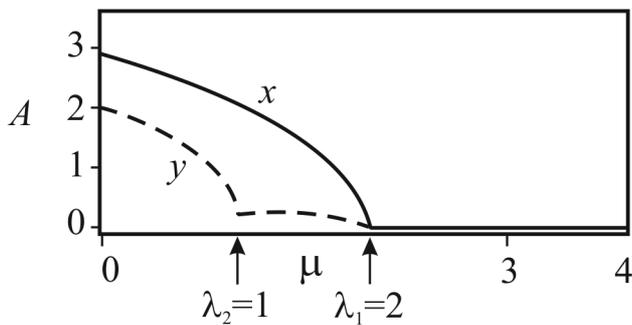


Рис. 2. Зависимость амплитуды (A) колебаний координаты первого (сплошная линия) и второго (пунктирная линия) осциллятора от параметра связи, построенная для системы (1) при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \Delta = 18, \gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

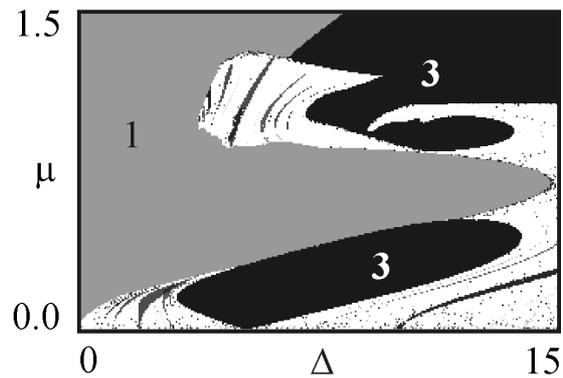


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1) при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.015$. Белый цвет соответствует области квазипериодических режимов. Цифрами обозначены периоды колебаний.

«ведущим» и, в определенной мере, доминирует над вторым. Этот факт отражает построенная зависимость амплитуды колебаний переменных осцилляторов ван дер Поля (1) от параметра связи, рис. 2.

В п. 1.2 рассмотрен случай неидентичности по параметрам нелинейной диссипации, отвечающим за ограничение неустойчивости в системе. Показано, что данный вид неидентичности приводит к существенному изменению формы и структуры системы языков синхронизации. У них происходит образование выступов в сторону больших частотных расстроек, причем размер выступа вдоль линии частотной расстройки увеличивается по мере уменьшения параметра нелинейной диссипации γ . В результате, возникает специфическая форма границы основного языка синхронизации с «перетяжкой», напоминающая букву S, рис. 3.

Физический механизм влияния неидентичности параметров нелинейной диссипации на картину синхронизации состоит в возможности смены доминирующего осциллятора.

Выявленные особенности картины синхронизации связанных осцилляторов ван дер Поля проиллюстрированы в рамках теоретической модели при анализе укороченных уравнений исследуемой системы (1) в п. 1.2.1 диссертации, а также при проведении бифуркационного анализа в п. 1.2.3.

В п. 1.3 представлены результаты экспериментального исследования особенностей синхронизации двух резистивно связанных генераторов ван дер Поля с неидентичными управляющими параметрами в случае одинакового (п. 1.3.1) и разного (п. 1.3.2) уровня нелинейной диссипации. Результаты радиофизического эксперимента представлены на рис. 4, при этом в качестве частотной расстройки выступает величина, равная отношению емкостей генераторов, а в качестве параметра диссипативной связи — величина, обратная общему сопротивлению. Результаты радиофизического эксперимента хорошо согласуются с результатами численного и аналитического исследования системы (1).

В п. 1.4 рассмотрен эффект широкополосной синхронизации в системе связанных осцилляторов, характеризующихся неквадратичным потенциалом. При этом наблюдается система языков синхронизации на плоскости «параметр,

²⁷ Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2006. 356 с.

управляющий относительной крутизной потенциальных ям осцилляторов, –

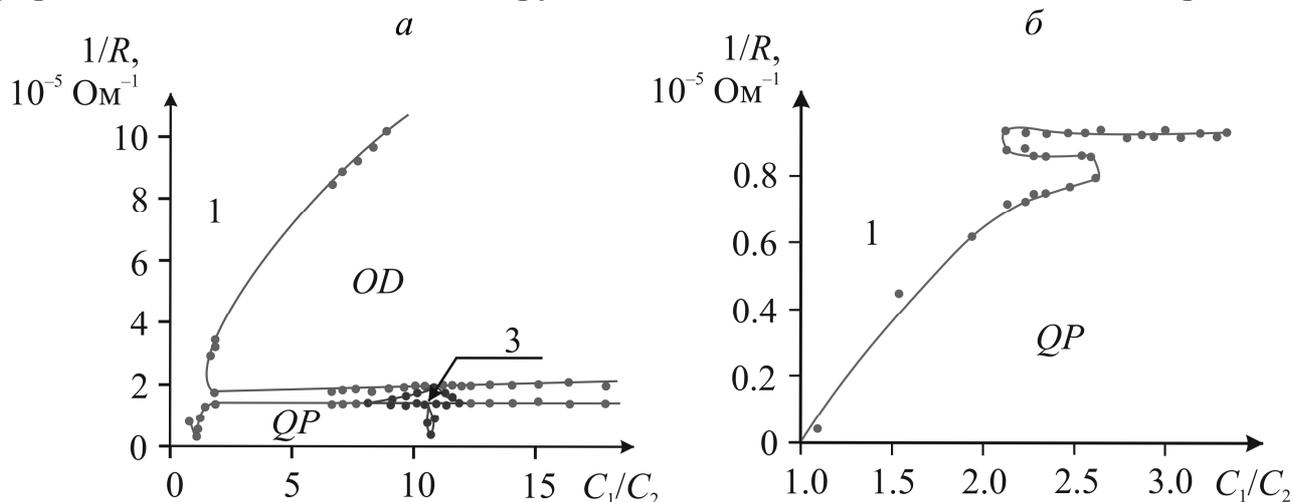


Рис. 4. Экспериментально полученные карты динамических режимов для двух неидентичных генераторов ван дер Поля с одинаковым (а) и разным (б) уровнем нелинейной диссипации. *OD* – область гибели колебаний. *QP* – область квазипериодических режимов.

параметр связи». Кроме того происходит исчезновение эффекта гибели колебаний, а также модификация языков синхронизации в области большой связи.

В **Главе 2** рассмотрена задача о взаимодействии автоколебательных элементов разной природы на примере связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора, а также связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева.

П. 2.1 посвящен обсуждению вопроса о введении связи в системе связанных разнотипных автоколебательных осцилляторов, в частности, о наличии диссипативной компоненты, которая необходима для наблюдения эффектов широкополосной синхронизации, в модели связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b + 1)x + x^2 y + \mu(\dot{z} - x + a), \\ \dot{y} &= bx - x^2 y, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta)z &= \mu(x - a - \dot{z}), \end{aligned} \quad (2)$$

где x и y – динамические переменные брюсселятора, z – динамическая переменная осциллятора ван дер Поля, a , b – параметры брюсселятора, λ – параметр, характеризующий превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в осциляторе ван дер Поля, Δ – параметр, имеющий смысл частотной расстройки брюсселятора и осциллятора ван дер Поля, μ – коэффициент диссипативной связи.

В п. 2.2 проведено численное исследование системы связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора в случае, когда их собственные частоты отличаются не очень сильно. Выявлена картина смены доминирующего осциллятора при увеличении параметра связи. Указаны области различных типов динамики в пространстве параметров, включая область гибели колебаний и режим широкополосной синхронизации.

П. 2.3 посвящен рассмотрению случая существенно разных собственных частот осциллятора ван дер Поля и брюсселятора. Обнаружено, что области ги-

бели колебаний и синхронных режимов периода один разделены областью долгопериодических и хаотических режимов. Для последних характерны стадии медленной и быстрой эволюции. На первой стадии вторая переменная брусслетора нарастает, в то время как первая близка к нулю. Осциллятор ван дер Поля в этом случае вращается с собственной частотой, медленно приближаясь к началу координат. Затем наступает быстрая фаза, когда обе подсистемы быстро уходят от описанных состояний, а затем процесс повторяется. При этом возникает характерный режим «пульсирующей генерации», а вид аттрактора ван дер Поля качественно отвечает ситуации разрушения гомоклинической петли. С ростом уровня связи наблюдаются режимы «слабого хаоса» с малыми значениями ляпуновского показателя.

В п. 2.4 представлены результаты численного исследования системы связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева:

$$\begin{aligned} T\dot{x} + x &= Mz \exp(-z^2), \\ \ddot{z} + \frac{1}{Q}\dot{z} + z + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= x, \\ \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

где x – сигнал на выходе инерционного элемента, z – сигнал на входе усилителя, T – время релаксации инерционного элемента, Q – добротность RLC-фильтра, M – коэффициент усиления генератора Кислова–Дмитриева, w – динамическая переменная осциллятора ван дер Поля, λ – параметр, характеризующий превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в осцилляторе ван дер Поля, Δ – параметр, имеющий смысл частотной расстройки генератора Кислова–Дмитриева и осциллятора ван дер Поля, μ – коэффициент диссипативной связи.

В такой системе выявлен режим широкополосной синхронизации, который оказывается грубым по отношению к изменению параметров и может наблюдаться, даже если автономная динамика генератора Кислова–Дмитриева хаотическая.

Если управляющий параметр осциллятора ван дер Поля очень большой, то может возникать режим доминирования этого осциллятора. При этом с ростом управляющего параметра аттрактор генератора Кислова–Дмитриева демонстрирует увеличение петель, характерное для ведомого осциллятора даже при нулевой частотной расстройке осцилляторов. Причина такого эффекта состоит в неизохронности колебаний осциллятора ван дер Поля в области больших значений управляющего параметра, что приводит к уменьшению периода его колебаний и проявляется в динамике ведомого осциллятора. С другой стороны, в такой системе с ростом коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева возникает специфический хаотический режим, когда вид хаотического аттрактора существенно отличается от автономного. При этом порог возникновения хаотического режима существенно меньше, чем порог хаоса в автономной системе. В этом случае сложная структура аттрактора возникает за счет действия ведущего осциллятора, а небольшое увеличение коэффициента усиления приводит к хаосу. Таким образом, взаимодействие разнотипных сис-

тем может не только стабилизировать хаос, но и наоборот, инициировать его за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе, если управляющие параметры систем существенно отличаются.

С целью обнаружения эффектов широкополосной синхронизации в системе однотипных автоколебательных осцилляторов более сложной по сравнению с осциллятором ван дер Поля природы, в **Главе 3** рассмотрена динамика нефронов.

В п. 3.1 представлен вывод основных уравнений традиционной модели индивидуального нефрона²⁸, а также приведены значения параметров, используемых при численном исследовании этой модели.

В п. 3.2 представлены результаты исследования возможных режимов колебаний давления P_i внутри проксимального канальца и нормированного радиуса r артериолы отдельного нефрона, полученные с помощью компьютерного моделирования происходящих в нефроне процессов. Исследование проводилось как для медленной, так и для быстрой моды колебаний. Были построены карты динамических режимов на плоскости параметров «общее время задержки T – усиление цепи обратной связи α ». Сечение Пуанкаре задавалось условием $P_i = 1.73$ кПа для медленной и условием $\dot{r} = 0$ для быстрой моды колебаний. На картах динамических режимов, построенных как для медленной, так и для быстрой мод колебаний отдельного нефрона, обнаружены структуры типа *crossroad area*, которые располагаются парами, слегка перекрывая друг друга.

Результаты исследования динамики модели парных нефронов с симметричной васкулярной связью²⁹ представлены в п. 3.3. На картах динамических режимов на плоскости параметров «общее время задержки реакции во втором нефроне T_2 – параметр васкулярной связи γ » обнаружена область широкополосной синхронизации, расположенная между областью гибели колебаний и областью неперидических режимов, рис. 5. Наличие режима широкополосной синхронизации оказывается обусловлено неидентичностью размахов колебаний нормированных радиусов артериол связанных нефронов, а также затухающим характером зависимости размаха колебаний нормированного радиуса артериолы от общего времени задержки реакции в индивидуальном нефроне. Такой характер зависимости приводит к установлению постоянной разницы размеров

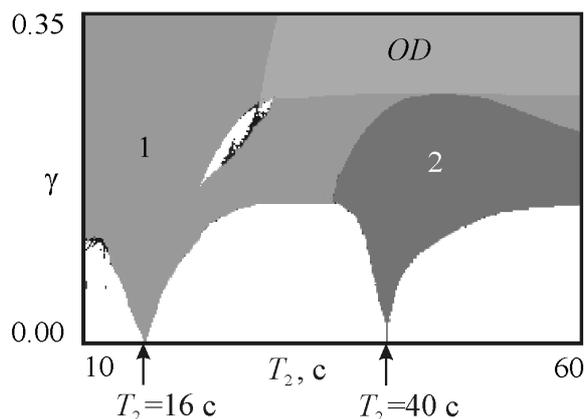


Рис. 5. Карта динамических режимов модели парных нефронов, построенная для медленной моды колебаний первого нефрона. Значения параметров: $T_1 = 16$ с, $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 18$. Цифры на карте режимов соответствуют периодам колебаний. *OD* – область гибели колебаний. Белый цвет соответствует области квазипериодических режимов.

²⁸ Barfred M., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H. // Chaos, 1996, Vol. 6, No. 3, p. 280; Mosekilde E., Maitrenko Y., Postnov D. Chaotic synchronization. Applications to living systems. World scientific series on nonlinear science, Series A, 2002. 440 p.

²⁹ Laugesen J.L., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H. // Chaos, 2011, Vol. 21, No. 3, p. 033128.

предельных циклов связанных нейронов в широком диапазоне значений по параметру, отвечающему за общее время задержки реакции в одном из нейронов.

Наличие широкополосной синхронизации выявляется также в ходе бифуркационного анализа модели парных нейронов.

В Главе 4 проведено исследование синхронизации в цепочке трех неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x, y, z – динамические переменные первого, второго и третьего осцилляторов, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – управляющие параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах, Δ_1 и Δ_2 – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи.

Как показано в п. 4.1, в зависимости от соотношения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и величины связи μ могут оказаться протемпфированными один, два или три осциллятора.

В п. 4.2 представлены результаты компьютерного моделирования в случае малых значений управляющих параметров осцилляторов. Продемонстрировано существенное влияние на картину синхронизации положения в цепочке наиболее протемпфированного осциллятора (в центре или на краю цепочки).

В системе трех связанных осцилляторов возможны режимы как двухчастотной, так и трехчастотной квазипериодичности, которым отвечают двумерный и трехмерный торы в фазовом пространстве. Следовательно, для достаточно полной классификации режимов трех осцилляторов одной традиционной карты динамических режимов недостаточно. В связи с этим были построены карты ляпуновских показателей, на которых разными оттенками серого цвета обозначены области гибели колебаний, периодических режимов, двух- и трехчастотных квазипериодических режимов. На картах ляпуновских показателей обнаруживаются две разновидности режима широкополосной синхронизации: полная широкополосная синхронизация (*Complete Broadband Synchronization*), когда наблюдается захват всех трех осцилляторов, а подавленными связью (протемпфированными) оказываются два осциллятора, и двухчастотная широкополосная синхронизация, когда сильно протемпфированным оказывается один осциллятор.

На рис. 6 приведена карта ляпуновских показателей для системы трех неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля в случае большой частотной расстройки крайних осцилляторов. На карте заметно возникновение дополнительной области гибели колебаний, что связано с «парным» характером взаимодействия осцилляторов и с выполнением резонансных частотных условий.

В п. 4.3 проведено аналитическое исследование системы (4) в рамках квазигармонического приближения. В п. 4.4 найдено приближенное аналитическое решение для режима полной широкополосной синхронизации.

В рамках фазовых уравнений в п. 4.5 установлен вид области полной синхронизации в ситуации, когда наиболее протемпированный осциллятор находится с краю цепочки. Обосновано исчезновение этой области в ситуации, когда такой осциллятор находится в центре цепочки. Проведено обсуждение основных бифуркаций. Выявлены режимы частичного захвата центрального осциллятора с одним из крайних.

В п. 4.6 рассмотрен случай трех идентичных связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля. Продемонстрировано отсутствие режима полной широкополосной синхронизации и наличие режима двухчастотной широкополосной синхронизации, что обусловлено выделенной ролью центрального осциллятора, который даже в случае равенства управляющих параметров оказывается более протемпированным за счет связи.

В п. 4.7 представлены результаты численного исследования синхронизации в цепочке трех неидентичных осцилляторов с большими значениями управляющих параметров, когда квазигармоническое приближение уже несправедливо. Выявлено возникновение языков двухчастотных торов внутри областей трехчастотной квазипериодичности на плоскости параметров.

В п. 4.8 проведено численное исследование влияния дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга на наблюдаемую картину синхронизации в цепочке трех осцилляторов. Обнаружено возникновение структур *crossroad area* и областей хаоса.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Для двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами, управляющими бифуркацией Андронова–Хопфа, выявлен режим широкополосной синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи». Введение неидентичности по параметру нелинейной диссипации приводит к трансформации нижней границы области основной синхронизации: она приобретает S-образную форму. Причина возникающих особенностей картины синхронизации связана с доминирующим действием одного осциллятора на другой, а также с возможностью смены доминирующего осциллятора с ростом параметра диссипативной связи.

2. Аналитические оценки для границ областей основной и широкополосной синхронизации, полученные на основе фазового приближения в случае неидентичных управляющих параметров и разного уровня нелинейной дисси-

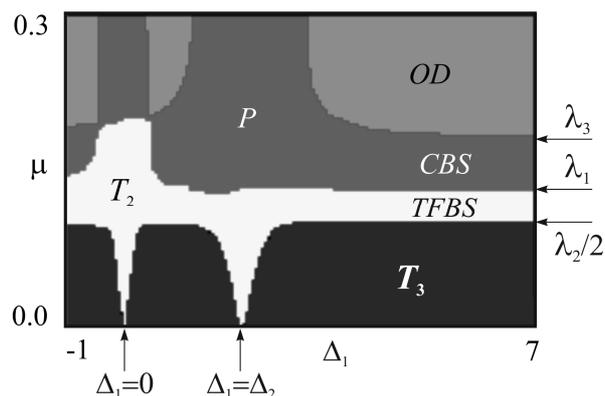


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей системы (4) при $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.19$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_2 = 2$. P – область периодических режимов; T_2 – двухчастотный квазипериодический режим; T_3 – трехчастотный квазипериодический режим; OD – область гибели колебаний; CBS – область полной широкополосной синхронизации; $TFBS$ – область двухчастотной широкополосной синхронизации. Указаны условия резонансов между первым и вторым $\Delta_1 = 0$, а также между вторым и третьим осцилляторами $\Delta_1 = \Delta_2$.

пации, согласуются с результатами численного моделирования, а также с результатами радиофизического эксперимента.

3. Выявлена возможность широкополосной синхронизации для диссипативно связанных осцилляторов с неквадратичным потенциалом.

4. Продемонстрирована типичность эффектов, связанных с доминированием одного осциллятора над другим и сменой доминирующего осциллятора, при взаимодействии разнотипных автоколебательных систем на примере связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора, связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева.

5. Для связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора в случае, когда их собственные частоты существенно различаются, возникает характерный режим «пульсирующей генерации».

6. На примере связанных осциллятора ван дер Поля и генератора Кислова–Дмитриева показано, что взаимодействие разнотипных осцилляторов может не только стабилизировать хаос, но и наоборот, инициировать его за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе, если управляющие параметры систем существенно отличаются.

7. Выявлен режим широкополосной синхронизации в модели парных нефронов на плоскости параметров «общее время задержки реакции во втором нефроне – параметр васкулярной связи». Результаты, полученные в ходе численного исследования методом карт динамических режимов, хорошо согласуются с результатами бифуркационного анализа. Возникновение режима широкополосной синхронизации в модели парных нефронов оказывается связано с неидентичностью размахов колебаний нормированных радиусов артериол взаимодействующих нефронов, а также с затухающим характером зависимости размаха колебаний нормированного радиуса артериолы отдельного нефрона от общего времени задержки реакции.

8. Для системы трех диссипативно связанных в цепочку неидентичных осцилляторов ван дер Поля картина синхронизации зависит от соотношения управляющих параметров осцилляторов, находящихся по краям и в центре цепочки. В такой системе возможны режимы полной широкополосной синхронизации и широкополосной двухчастотной синхронизации. При большой частотной расстройке крайних осцилляторов происходит возникновение дополнительной области гибели колебаний, что связано с «парным» характером взаимодействия осцилляторов и с выполнением резонансных частотных условий.

9. В рамках фазового приближения установлены границы области полной синхронизации в зависимости от положения наиболее подавленного связью осциллятора, обосновано исчезновение этой области в ситуации, когда такой осциллятор находится в центре цепочки. Выявлены режимы частичного захвата различных пар осцилляторов.

10. Добавление в цепочку осцилляторов нелинейности по типу осциллятора Дуффинга не приводит к исчезновению областей полной и двухчастотной широкополосной синхронизации. Кроме того, возникают режимы, отвечающие резонансам высоких порядков.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.³⁰ Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15-21.
2. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3-15.
3. Кузнецов А.П., Роман Ю.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Синхронизация импульсами и синхронизация в связанных системах: новые аспекты классической задачи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 3. С. 88-111.
4. Kuznetsov A.P., Roman Ju.P. Synchronization of coupled anizochronous auto-oscillating systems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2009. Vol. 12, No. 1. P. 54-60.
5. Kuznetsov A.P., Roman Ju.P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D. 2009. Vol. 238, No 16. P. 1499-1506.
6. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П. Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С. 62-78.
7. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П. Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы на примере системы ван дер Поля и брюсселятора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 5. С. 55-67.
8. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П. Синхронизация связанных автогенераторов Ван-дер-Поля и Кислова–Дмитриева // ЖТФ. 2011. Т. 81, вып. 4. С. 7-14.
9. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 76-90.
10. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 256 с.
11. Роман Ю.П. Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // Статистическая физика и информационные технологии: Материалы Международной школы-семинара «StatInfo-2009». Саратов, Россия, 2-5 июня 2009 г. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2009. С. 54-57.
12. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П. Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы на примере системы осциллятора Ван-дер-Поля и брюсселятора // Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур». Саратов, 4-9 октября 2010 г. Саратов, 2010. С. 114-115.
13. Emelianova Yu.P. Non-identity in system of coupled elements // Programme and abstracts of the 36-th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics «MECO 36». Lviv, Ukraine, April 5-7, 2011. Львов: Институт физики конденсированных систем НАН Украины, 2011. P. 82.

³⁰ До 2009 года включительно автор диссертационной работы носила фамилию Роман.

14. Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P. Oscillations and synchronization in the chain of three coupled self-oscillating oscillators with non-identical control parameters // Dynamics Days Europe 2011. Abstracts and Participants. Oldenburg, Germany, September 12-16, 2011. P. 135-136.

Научное издание

ЕМЕЛЬЯНОВА Юлия Павловна

**СИНХРОНИЗАЦИЯ И СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ
АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С
НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Специальность 01.04.03 – Радиофизика

Автореферат

Подписано в печать 02.02.2012 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,16.

Тираж 100 экз. Заказ № 31-Т

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография СГУ

410012, г. Саратов, ул. Большая Казачья, 112а, корпус 8