На правах рукописи

Агафонова Нина Юрьевна

Мультипликаторы и наилучшие приближения по системам Виленкина

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2011

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Волосивец Сергей Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Рубинштейн Александр Иосифович
	кандидат физико-математических наук, доцент Сахно Людмила Владимировна
Ведущая организация:	Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита состоится 1 декабря 2011 в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете им. Н. Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская 83, IX корп.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан «____» октября 2011 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент В. В. Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена преобразованиям рядов Фурье по мультипликативным системам с диагональной матрицей, а также односторонним и двусторонним оценкам наилучших приближений по этим системам. В качестве приложения теории мультипликаторов получаются результаты о Λ —суммируемости рядов Фурье.

Первым примером мультипликативной системы, отличной от комплексной тригонометрической системы, является система Дж. Уолша, введенная им в 1923 году. В 1947 году Н.Я. Виленкин изучил системы характеров коммутативных компактных нульмерных групп со второй аксиомой счетности. При отображении группы на промежуток $[0,1)$ эти системы переходят в мультипликативные системы ортонормированных функций, называемых системами Виленкина или Виленкина-Прайса. Свойства рядов по этим системам напоминают свойства тригонометрических рядов, хотя есть и важные отличия.

Ряд вопросов теории рядов по мультипликативным системам, такие как абсолютная и равномерная сходимость, теория приближений и теоремы вложения, единственность разложений, изучены достаточно подробно. Среди авторов, внесших значительный вклад в их разработку, можно отметить С.В. Бочкарева, П. Бутцера, Д. Ватермана, Н.Я. Виленкина, Б.И. Голубова, А.В. Ефимова, Т. Квека, С.Ф. Лукомского, К. Оневира, А.И. Рубинштейна, М.Ф. Тимана, Н. Файна, Л. Япа.

Вместе с тем отметим, что теория мультипликаторов рядов Фурье (т.е. преобразований из одного пространства в другое, имеющих диагональный вид в пространстве коэффициентов Фурье) и задача оценки сверху или снизу наилучших приближений и модулей непрерывности в терминах коэффициентов Фурье для мультипликативных систем были изучены в малой степени. Для мультипликаторов можно отметить работу Дж. Моргенталера [1], в которой ряд классических результатов из монографии А. Зигмунда [2] перенесен на случай рядов Фурье—Уолша, и цикл работ Т. Квека и Л. Япа, связанных с мультипликаторами обобщенных классов Липшица.

Теория мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье началась с работы М. Фекете[3]. Ряд фундаментальных результатов

[1] *G. W. Morgenthaler* On Walsh—Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol.87, №2.— Pp.452–507.

[2] *А. Зигмунд* Тригонометрические ряды // Мир. — 1965. — Т.1.

[3] *M. Fekete* Über die Faktorfolgen welche die "klasse" einer Fourierschen Reihen unverändert lassen // Acta Sci. Math. — 1923. — Vol.1, №1.— Pp.148–166.

получен С. Верблюнским, Г. Гезом, А. Зигмундом, С. Качмажем, Ю. Марцинкевичем, И. Стейном. Задача о мультипликаторах, переводящих ряд Фурье функции из пространства X в равномерно сходящийся ряд Фурье, изучалась для разных видов пространств X Р. Бояничем, Г. Гёзом, Р. ДеВором, Й. Караматой, С.А. Теляковским, М. Томичем, Ф. Харшиладзе.

Оценки наилучших приближений и модулей непрерывности $2\pi-$периодических функций в терминах коэффициентов Фурье получали С. Алянчич, Н.К. Бари, В.М. Кокилашвили, А.А. Конюшков, Л. Лейндлер, Г. Лоренц, М. Томич.

Очень важной оказалась идея Р. ДеВора—С.А. Теляковского о сужении класса последовательностей, определяющих мультипликатор до более удобного множества, например, класса коэффициентов Фурье—Стилтьеса.

Результаты, полученные для мультипликаторов, можно применять к проблеме $\Lambda-$суммируемости рядов Фурье с помощью прямоугольной матрицы общего вида. Здесь можно отметить работы Й. Караматы, М. Катаямы, М. Томича.

Предметом исследования являются мультипликаторы рядов Фурье по системам Виленкина и их наилучшие приближения.

Цель работы — построить критерии $\{\lambda\}_{n=0}^{\infty} \in (X, Y)$ для некоторых функциональных пространств X и Y, а также односторонние и двусторонние оценки наилучших приближений по системам Виленкина, а именно:

- Описать подпространства, в которых ряд Фурье по мультипликативной системе сходится по норме большего пространства и дать приложения общей теории к конкретным пространствам мультипликаторов;
- Охарактеризовать поведение рядов Фурье—Виленкина борелевских мер и получить аналоги результатов С.А. Теляковского и В.Р. Почуева для мультипликативных систем;
- Получить описание классов мультипликаторов из пространств Орлича и Лоренца в пространства обобщенно непрерывных функций и функций ограниченной вариации;
- Найти условия равномерной сходимости средних рядов Фурье—Виленкина, полученных с помощью общих матричных преобразований;

- Найти условия принадлежности классам с заданной последовательностью наилучших приближений по системам Виленкина в терминах коэффициентов Фурье по этим системам. Получить аналоги теорем А.А. Конюшкова и Л. Лейндлера об эквивалентности $O-$ и $\asymp-$соотношений.

Методы исследования. При решении поставленных задач применяются общие методы функционального и действительного анализа, теории приближений и методы теории ортогональных рядов.

Научная новизна результатов. В работе доказаны критерии для мультипликаторов равномерной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам для некоторых пространств. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательностей $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ классу (X, Y), где в качестве X берутся пространства L_Φ, $L^{p,q}$, B, L^1, а в качестве $Y-$ пространства H_∞^ω, B, MC, а также пространства V и AC функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций на $[0,1)$; получены необходимые и достаточные условия равномерной $\Lambda-$суммируемости рядов Фурье функций из пространств Орлича и L^1, а также критерии равномерной $\Lambda-$суммируемости и $\Lambda-$суммируемости на группе G. Получены также некоторые следствия для матриц с обобщенно-монотонными коэффициентами. Доказаны аналоги критериев Теляковского и Почуева о мультипликаторах равномерной сходимости и сходимости в интегральной метрике для мультипликативных систем с ограниченной образующей последовательностью.

Все результаты, полученные соискателем и вошедшие в диссертационную работу, являются новыми и строго доказанными.

Практическая значимость полученных результатов. Основные результаты работы носят теоретический характер и могут найти применения в теории ортогональных рядов, теории приближений, гармоническом анализе. Они могут быть также использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов.

Личный вклад. Все научные результаты, вошедшие в диссертационную работу, получены ее автором лично и самостоятельно. В совместных публикациях [8] научному руководителю принадлежит постановка задачи, в работе [1] — руководителю принадлежит постановка задачи и теоремы 3 и 4, не вошедшие в диссертацию.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры теории функций и приближений;
- научно-практических конференциях сотрудников Саратовского государственного университета "Актуальные проблемы математики, механики и их приложения"(Саратов, 2006-2011);
- 13-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения"(Саратов, 2006);
- 15-ой Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения посвящённой 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 2010).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах, из которых четыре [1–4]— в научных изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов диссертации на соискание учёной степени кандидата наук.

Результаты, выносимые на защиту.

- критерий мультипликаторов равномерной сходимости функций из равномерного пространства Гёльдера и интегрального пространства Гёльдера;
- критерий мультипликаторов из пространств Орлича и Лоренца в равномерное пространство Гёльдера;
- оценки сверху наилучших приближений и модулей непрервности через коэффициенты Фурье по мультипликативным системам;
- эквивалентность $O-$ и $\asymp-$соотношений для рядов по мультипликативным системам с обобщенно-монотонными коэффициентами;
- критерии равномерной $\Lambda-$суммируемости интегрируемых, непрерывных функций из пространств Орлича.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав и библиографии, включающей 67 наименований. Каждая глава разбита на разделы, всего в диссертации 10 разделов. Общий объем работы 115 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, определена ее цель, описана структура диссертации, при этом введены основные определения.

Пусть задана последовательность натуральных чисел $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $2 \leqslant p_n \leqslant N$, при всех $n \in \mathbb{N}$. С помощью этой последовательности построим новую последовательность $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяя ее элементы следующим образом: $m_0 = 1, m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n,\ 0 \leqslant x_n < p_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим группу $G(\mathbf{P})$, состоящую из элементов $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in \mathbb{Z}(p_i) = \{0, 1, 2, \dots, p_i - 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, и снабженную операцией $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y} = \widetilde{z}$, где $\widetilde{z} = (z_1, z_2, \dots) \in G(\mathbf{P})$ и $z_i = x_i + y_i \pmod{p_i}$, $i \in \mathbb{N}$. Операция $\widetilde{x} \ominus \widetilde{y}$ вводится аналогично. Для $\widetilde{x} \in G(\mathbf{P})$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанного в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, определим

$$\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x}) = \exp\left(2\pi i \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\Big)\right).$$

Функции $\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x}), k \in \mathbb{Z}_+$, составляют систему характеров группы $G(\mathbf{P})$, т.е. являются непрерывными в топологии группы $G(\mathbf{P})$ и обладают свойствами

$$\widetilde{\chi_n}(\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}) = \widetilde{\chi_n}(\widetilde{x})\widetilde{\chi_n}(\widetilde{y}), \qquad \widetilde{\chi_n}(\widetilde{x} \ominus \widetilde{y}) = \widetilde{\chi_n}(\widetilde{x})\overline{\widetilde{\chi_n}(\widetilde{y})},$$

для всех $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $k, l \in \mathbb{Z}_+$ можно определить

$$k \oplus l := r = \sum_{i=1}^{\infty} r_i m_{i-1},$$

где $r_i = k_i + l_i \pmod{p_i}$, $k_i \in \mathbb{Z}(p_i)$. Аналогично определяется $k \ominus l$.

Для системы $\{\widetilde{\chi_k}(\widetilde{x})\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы равенства

$$\widetilde{\chi_k}(\widetilde{x})\widetilde{\chi_l}(\widetilde{x}) = \widetilde{\chi}_{k\oplus l}(\widetilde{x}), \qquad \widetilde{\chi_k}(\widetilde{x})\overline{\widetilde{\chi_l}(\widetilde{x})} = \widetilde{\chi}_{k\ominus l}(\widetilde{x}),$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $\widetilde{x} \in G(\mathbf{P})$. Другими словами, система $\{\widetilde{\chi_k}(\widetilde{x})\}_{k=0}^{\infty}$ является мультипликативной, т.е. произведение двух функций системы снова принадлежит системе.

С помощью отображения группы $G(\mathbf{P})$ на полуинтервал $[0,1)$ [4] свойства системы $\{\widetilde{\chi_k}(\widetilde{x})\}_{k=0}^{\infty}$ переносятся на систему $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, которую и называют системой Виленкина-Прайса.

[4] *Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения // М.— Наука. — 1987.

Пространство $M(G)$ есть пространство борелевских мер на G, пространство $C(G)$ непрерывных функций на G и пространство $B(G)$ ограниченных измеримых функций на G с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\widetilde{x}\in G}|f(\widetilde{x})|$, а также пространства $L^p(G)$ интегрируемых в p—й степени на G функций с нормой

$$\|f\|_p = \Bigl(\int\limits_G |f(\widetilde{x})|^p d\,\widetilde{x}\Bigr)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Для $f \in L^1(G)$ или $\mu \in M(G)$ можно определить коэффициенты Фурье формулами

$$\hat{f}(n) = \int\limits_G f(\widetilde{x})\overline{\chi_n(\widetilde{x})}d\,\widetilde{x}; \qquad \hat{\mu}(n) = \int\limits_G \overline{\chi_n(\widetilde{x})}d\,\mu(\widetilde{x}),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем в рассмотрение

$$\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0,\ k \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0<h<1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

При $p = \infty$ рассматриваем $f \in MC[0,1))$.

Пространства Гёльдера определяются следующим образом

$$H_p^\omega[0,1) = \{f \in L^p[0,1) : \omega_k(f)_p \leqslant C\omega_k;\ k \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$h_p^\omega[0,1) = \{f \in L^p[0,1) : \omega_k(f)_p = o(\omega_k);\ k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где последовательность $\omega = \{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ положительна и убывает к нулю, а C зависит от f, но не от k.

Для функций f, определенных на группе G, указанные определения аналогичны.

Пространство $B[0,1)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ есть множество измеримых и ограниченных на $[0,1)$ функций. Его подпространством с той же нормой является множество $MC[0,1)$ **P**—непрерывных функций f, удовлетворяющих соотношению $\lim\limits_{h\to 0}\|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$. Будем рассматривать также пространство $UC[0,1)$ — пространство функций, ряды Фурье которых по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ сходятся равномерно. Класс борелевских мер на $[0,1)$ обозначим $M[0,1)$

Определим пространства Орлича и Лоренца.

Определение 1. N-функцией называется возрастающая, непрерывная на $[0,\infty)$ выпуклая функция $\Phi(u)$, такая что

$$\Phi(0)=0, \quad \lim_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{u}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=0.$$

Функция $\Phi(u)$ может быть представлена в виде $\Phi(u) = \int\limits_0^u p(t)\,dt$, где $p(t)$—правосторонняя производная $\Phi(u)$, неубывающая и непрерывная справа на $[0,\infty)$.

Рассмотрим обобщенную обратную к неубывающей функции $p(t)$ функцию $q(s)=\sup\{t : p(t)\le s\}$, $s\in\mathbb{R}_+$.

Определение 2. Функцией, сопряженной по Юнгу к $\Phi(u)$, называется функция $\Psi(v)=\int\limits_0^v q(s)\,ds$, $v\in\mathbb{R}_+$.

При этом Ψ выпукла и обладает теми же свойствами, что и Φ.

Определение 3. Пусть $\Phi(x)$ — N—функция. Тогда пространство Орлича $L_\Phi[0,1)$ состоит из измеримых на $[0,1)$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_\Phi = \left\{\sup\left|\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| : \int\limits_0^1 \Psi(|g(x)|)\,dx) \le 1\right\},$$

где $\Psi(x)$ — сопряженная по Юнгу функция к $\Phi(x)$. Относительно этой нормы $L_\Phi[0,1)$ является банаховым пространством.

Говорят, что Φ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\Phi(2u)\le C\Phi(u)$, $u\in[0,\infty)$.

Определение 4. Пусть $1\leqslant p,q\leqslant\infty$. Пространство Лоренца $L^{pq}[0,1)$ состоит из измеримых функций f на $[0,1)$, для которых $\|f\|_{pq}<\infty$, где

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^1 [t^{1/p}f^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1\le p<\infty,\ \ 1\le q<\infty; \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p}f^*(t), & 1\le p\le\infty, \qquad q=\infty. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_f(y)=|\{x\in[0,1) : |f(x)|>y\}|$, а $f^*(t)=\inf\{y>0 : \lambda_f(y)\le t\}$, $t>0$, $|E|$ обозначает меру множества E.

Пусть X и Y— некоторые функциональные пространства на $[0,1)$ (группе G), непрерывно вложенные в $L^1[0,1)$ ($L^1(G)$).

Определение 5. Последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что для любой функции или меры из X ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n)\chi_n(x) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n)\widetilde{\chi}_n(\widetilde{x})\right)$$

является рядом Фурье (по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($\{\widetilde{\chi}_n\}_{n=0}^{\infty}$)) функции или меры из Y, называется мультипликатором класса (X, Y), $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in (X, Y)$.

Первая глава содержит результаты относительно мультипликаторов, связанных с пространствами E_F для $E = L^1[0,1)$ и $E = MC[0,1)$ (в последнем случае $E_F = UC[0,1)$), где E — банахово пространство функций на $[0,1)$, $E \subset L^1[0,1)$, а $E_F = \{f \in E : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_E = 0\}$.

Здесь дается критерий принадлежности ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \widetilde{\chi}_k$ множеству рядов Фурье борелевских мер на G в терминах $S_{m_n} = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k \widetilde{\chi}_k$ и аналогичный результат для пространства $M[0,1)$ борелевских мер на $[0,1)$, изучаются мультипликаторы классов (L_Φ, E) и $(L^{p,q}, E)$, где L_Φ — пространство Орлича, $L^{p,q}$ — пространство Лоренца, а в роли E выступают пространства обобщенно-непрерывных, ограниченных функций, функций ограниченной вариации, абсолютно-непрерывных функций и пространства Гёльдера для равномерной метрики. Важным средством для описания таких классов являются критерии принадлежности ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ классу рядов Фурье функций из L_Φ, $L^{p,q}$, H_Φ^ω или $H_{p,q}^\omega$. Основными результатами раздела 1.2 являются

Теорема 1.2.1. *Пусть* $l_n(f) = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \hat{f}(\nu)$ *для* $f \in L^1[0,1)$. *Для того, чтобы последовательность* $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *принадлежала* (E_F, UC), *необходимо и достаточно, чтобы нормы функционалов* $l_n(f)$ *в* E_F *были ограничены.*

Теорема 1.2.4. *Пусть* $E = L_\Phi[0,1)$, *где* Φ *удовлетворяет* Δ_2 — *условию,* $E = L^1[0,1)$ *или* $E = MC[0,1)$. *Тогда* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (L, E_F)$, *в том и только в том случае, когда нормы* $\|\Lambda_n\|_E := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \chi_k(x)$ *ограничены.*

Теорема 1.2.5. *Пусть пространства* E *те же, что в теореме 1.2.4. Включение* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (E, UC)$ *справедливо тогда и только тогда, когда нормы* $\|\Lambda_n\|_{E^*}$ *ограничены.*

Здесь E^* —сопряженное к E пространство при $E \neq MC[0,1)$ и $E^* = L[0,1)$ при $E = MC[0,1)$.

Результаты данного параграфа опубликованы в [8].

В разделе 1.3 дается критерий принадлежности ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\widetilde{\chi}_k$ множеству рядов Фурье борелевских мер на G в терминах $S_{m_n} = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k\widetilde{\chi}_k$ и аналогичный результат для пространства $M[0,1)$ борелевских мер на $[0,1)$.

Основным результатом является

Теорема 1.3.2. *Пусть $1 \le p \le \infty$, последовательность $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю. Для того, чтобы последовательность $\{\lambda_k\} \in (M, H_p^{\omega})$ необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x)$$

был рядом Фурье функции $g(x) \in H_p^{\omega}$.

Аналогичное утверждение верно для $(M(G), H_p^{\omega}(G))$.

Результаты данного параграфа опубликованы в [7].

В разделе 1.4 изучаются мультипликаторы классов (L_Φ, E) и $(L^{p,q}, E)$, где L_Φ —пространство Орлича, $L^{p,q}$ — пространство Лоренца, а в роли E выступают пространства обобщенно-непрерывных, ограниченных функций, функций ограниченной вариации, абсолютно-непрерывных функций и пространства Гёльдера для равномерной метрики. Важным средством для описания таких классов являются критерии принадлежности ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ классу рядов Фурье функций из L_Φ, $L^{p,q}$, H_Φ^{ω} или $H_{p,q}^{\omega}$.

Типичным результатом данного раздела является

Теорема 1.4.4. *Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$— убывающая к нулю последовательность.*

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу (E, H_∞^{ω}) тогда и только тогда, когда

1) при $E = L[0,1)$ существует $g(f) \in H_\infty^{\omega}$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) при $E = B[0,1)$ существует $g \in H_1^{\omega}$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

3) при $E = L_\Phi[0,1)$, где Φ— N–функция, существует $g \in H_\Psi^{\omega}$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

4) при $E = L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, существует $g \in H_{p',q'}^{\omega}$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Результаты раздела 1.4 опубликованы в [6].

В разделе 1.5 содержатся основные результаты главы, относящиеся к мультипликаторам классов Гёльдера.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность коэффициентов Фурье-Стилтьеса борелевской меры* μ *по системе* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. *Тогда* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in (H^{\omega}, UC)$ *в том и только в том случае, когда* $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k \|\Lambda_k\|_1 = 0$.

Здесь $\varphi_k = \omega_k$ при $m_n \le k < m_{n+1}$.

Теорема 1.5.3. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность коэффициентов Фурье функции* $\Lambda(t) \in B[0,1)$. *Тогда* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in (H_1^{\omega}, UC)$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k \|\Lambda_k\|_{\infty} = 0$.

Теорема 1.5.5. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/p + 1/q = 1$, ω *и* δ — *положительные, убывающие к нулю последовательности, такие что* $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\omega_k/\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ *тоже убывает к нулю и удовлетворяет условию* $\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-1}\gamma_{\nu} = O(\gamma_n)$.

Тогда последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *принадлежит классу* $(H_p^{\delta}, H_{\infty}^{\omega})$ *тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{\chi}_k$ *является рядом Фурье функции* $f \in H_q^{\gamma}(G)$.

Теоремы 1.5.1—1.5.4 опубликованы в [1], а теоремы 1.5.5 и 1.5.6 в [4].

Вторая глава диссертации содержит оценки наилучших приближений функций из $L_p[0,1)$ в терминах коэффициентов Фурье этих функций, а также описание классов функций, наилучшие приближения которых удовлетворяют одностороннему или двустороннему неравенству.

Рассматриваются ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым специальным условиям.

Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in A_{\tau}, \tau \ge 0$, если $\{a_k k^{-\tau}\}_{k=1}^{\infty}$ убывает, и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, соответственно, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in A_{\tau}, \tau < 0$, если $\{a_k k^{|\tau|}\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Будем говорить, что последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$ если 1) $a_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}$; 2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$; 3) $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \le C a_m$, для любого $m \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что убывающая к нулю последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (B), если выполняется $\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_{\nu} = O(\varphi_n)$.

Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\varphi_n \le C\varphi_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Основными результатами являются следующие теоремы.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\{a_n\} \in A_\tau, \tau \in \mathbb{R}$, *или* $\{a_n\} \in RBVS, 1 < p < \infty$, *и*

$$\sum a_n^p n^{p-2} < \infty.$$

Тогда сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *принадлежит* $L^p[0,1)$ *и*

$$E_n(f)_p \leq C\Big(n^{1-1/p} a_n + \Big(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2}\Big)^{1/p}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть* $a_n \in A_\tau, \tau \in \mathbb{R}$, *или* $a_n \in RBVS$, $1 < p < \infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1/p} < \infty.$$

Тогда сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *принадлежит* $L^p[0,1)$ *и*

$$E_n(f)_p \leq C\Big(n^{1-1/p} a_n + \sum_{i=n}^{\infty} a_i i^{-1/p}\Big).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (Δ_2) *и* $(B), 1 < q < p < \infty$, $a_n \in A_\tau, \tau \in \mathbb{R}$, *или* $a_n \in RBVS$. *Пусть существует* $f \in L^p[0,1)$, *такая что* $\hat{f}(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$. *Тогда следующие 6 условий попарно эквивалентны*

$$E_n(f)_p = O(\varphi_n),$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} = O(\varphi_n^p),$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{p'} = O(\varphi_n^{p'}), \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/p} a_k = O(\varphi_n),$$

$$a_n = O(n^{1/p-1}\varphi_n),$$

$$E_n(f)_q = O(n^{1/p-1/q}\varphi_n).$$

В теореме 2.3.2 аналогичные утверждения устанавливаются для $\asymp$— соотношений.

Результаты этой главы опубликованы в [2].

Третья глава диссертации посвящена изучению проблемы $\Lambda-$ суммируемости рядов Фурье функций из некоторых пространств.

Пусть $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ — бесконечная матрица.

Определение 6. Если для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn} \hat{f}(k) \widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$$

сходится равномерно к функции $g_n(f)(\widetilde{x})$, а $\{g_n(f)(\widetilde{x})\}_{n=0}^{\infty}$, в свою очередь, сходится равномерно к функции $g(f)(\widetilde{x})$, то будем говорить, что ряд Фурье функции $f(\widetilde{x})$ равномерно $\Lambda-$суммируем к $g(f)(\widetilde{x})$ (аналогично на $[0, 1)$).

Если же для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{f}(k) \widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$$

сходится равномерно к функции $g_n(f)(\widetilde{x})$, а последовательность $\{g_n(f)(\widetilde{x})\}_{n=0}^{\infty}$ сходится в $L^1(G)$ к функции $g(f)(\widetilde{x})$, то ряд Фурье функции $f(\widetilde{x})$ $\Lambda-$суммируем в $L^1(G)$ к функции $g(f)(\widetilde{x})$ (аналогично на $[0, 1)$).

В разделе 3.1 даются условия равномерной $\Lambda-$суммируемости функций из пространств $L_\Phi[0, 1)$, $L^1[0, 1)$. Основными результатами данного раздела являются критерии равномерной $\Lambda-$суммируемости для таких пространств.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\Phi(x)-$ $N-$ функция, удовлетворяющая Δ_2- условию вместе с дополнительной по Юнгу функцией $\Psi(x)$. Для того чтобы ряды Фурье всех функций $f \in L_\Phi[0, 1)$ были равномерно Λ — суммируемы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ существует для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ существует $K_n(t) \in L_\Psi[0, 1)$, такое что $\hat{K_n}(i) = \lambda_{in}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и $\|K_n\|_\Psi = O(1)$.

Теорема 3.1.2. *Для того чтобы ряды Фурье всех функций $f \in L^1[0, 1)$ были равномерно $\Lambda-$суммируемы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ существует для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $\left|K_{in}(t)\right| := \left|\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{jn} \chi_j(t)\right| \le M_n$ для всех $t \in [0, 1)$ и $i \in \mathbb{N}$;

3) Существуют ограниченные функции $K_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, такие что $\hat{K_n}(i) = \lambda_{in}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и $\left\|K_n\right\|_\infty = O(1)$.

В разделе 3.2 доказан аналог теорем 3.1.1 и 3.1.2 для пространства $C(G)$ и приведен критерий Λ—суммируемости в $L^1(G)$.

Теорема 3.3.2. *Для того, чтобы ряды Фурье всех функций* $f \in L^1(G)$ *были* $\Lambda-$*суммируемы в* $L^1(G)$ *к* f, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ *верно* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 1$;

2) при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ *нормы* $\|\Lambda_{in}\|_\infty := \left\|\sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_{jn}\widetilde{\chi}_j(\widetilde{x})\right\|_\infty \leqslant M_n$, *где* M_n *не зависит от* i;

3) существуют $K_n \in B(G)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *такие что* $\hat{K}_n(i) = \lambda_{in}$ *для всех* $i \in \mathbb{Z}_+$ *и нормы* $\|K_n\|_1$ *ограничены.*

Результаты главы опубликованы в [4].

В заключение автор выражает глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Волосивцу Сергею Сергеевичу за научное руководство, постановку задачи и постоянную помощь и поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Агафонова, Н. Ю.* Мультипликаторы сходимости по норме рядов по мультипликативным системам / Н. Ю. Агафонова, С. С. Волосивец // *Матем. заметки.* — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 483–494.

[2] *Агафонова, Н. Ю.* О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье / Н. Ю. Агафонова // *Analysis Math.* — 2007. — Т. 33, № 4. — С. 247–262.

[3] *Агафонова, Н. Ю.* О равномерной сходимости преобразованных рядов Фурье по мультипликативным системам / Н. Ю. Агафонова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика.* — 2009. — Вып. 9, № 1. — С. 3–8.

[4] *Агафонова, Н. Ю.* О равномерной сходимости преобразованных рядов Фурье по мультипликативным системам / Н. Ю. Агафонова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика.* — 2011. — Вып. 11, № 2. — С. 3–8.

[5] *Агафонова, Н. Ю.* Λ—суммируемость рядов Фурье по системам характеров / Н. Ю. Агафонова // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 15-ой Сарат. зимней школы, посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 4–5.

[6] *Агафонова, Н. Ю.* Мультипликаторы рядов Фурье из пространств Орлича и Лоренца по мультипликативным системам / Н. Ю. Агафонова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. Сб. научн. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — Вып. 6. — С. 3–24.

[7] *Агафонова, Н. Ю.* О мультипликаторах рядов борелевских мер / Н. Ю. Агафонова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. Сб. научн. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. — Вып. 4. — С. 3–10.

[8] *Волосивец, С. С.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам / С. С. Волосивец, Н. Ю. Агафонова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. Сб. научн. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. — Вып. 3. — С. 3–23.

Работы [1–4] опубликованы в журналах, включённых в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук.