На правах рукописи

Бондаренко Наталья Павловна

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики и вычислительной математики Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Юрко Вячеслав Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Султанаев Яудат Талгатович
	кандидат физико-математических наук, доцент Рыхлов Виктор Сергеевич
Ведущая организация:	Воронежский государственный университет

Защита состоится «17» марта 2011 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан «   » февраля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета ДМ 212.243.15,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.В. Корнев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория обратных задач спектрального анализа является интенсивно развивающейся на протяжении последних десятилетий областью математики. Обратные задачи состоят в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют важную роль в математике и имеют приложения в различных областях естествознания и техники, в частности, в квантовой механике, геофизике, электронике, метеорологии. Метод обратной задачи используется для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики.

Значительный вклад в развитие теории обратных спектральных задач внесли В.А. Амбарцумян, Р. Билс, Г. Борг, М.Г. Гасымов, М.Г. Крейн, Н. Левинсон, Б.М. Левитан, З.Л. Лейбензон, В.А. Марченко, Л.А. Сахнович, А.Н. Тихонов, Л.Д. Фаддеев, И.Г. Хачатрян, В.А. Юрко и другие математики. Наиболее полные результаты в этой области получены для уравнения Штурма-Лиувилля [1, 2, 3]

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \tag{1}$$

Впоследствии изучались обратные задачи для уравнений высших порядков, систем дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с особенностями и точками поворота, дифференциальных уравнений на геометрических графах и других классов дифференциальных операторов, возникающих в приложениях. Обратные задачи являются нелинейными, и поэтому — достаточно трудными для исследования. В теории обратных задач до сих пор остается много нерешенных вопросов.

В диссертации исследуется обратная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля, определяемого уравнением

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0. \tag{3}$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — матричный потенциал из класса $L_2((0,\pi), \mathbb{C}^{m\times m})$, т. е. $m \times m$ матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями из $L_2(0,\pi)$. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$,

[1]Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова Думка, 1977.

[2]Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. — М.: Наука, 1984.

[3]Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.

$H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа. Уравнение (2) представляет собой обобщение классического уравнения (1). Однако при исследовании матричных операторов возникает ряд существенных трудностей по сравнению со скалярным случаем ($m = 1$).

Наиболее полно изученным вопросом для матричных операторов Штурма-Лиувилля является обратная задача рассеяния на полуоси[4]. Обратные задачи для уравнения (2) на конечном интервале изучены в гораздо меньшей степени, поскольку в случае конечного интервала возникают значительные трудности, вызванные спецификой поведения спектра. Спектр матричного оператора, определяемого уравнением (2) и краевыми условиями (3), может быть кратным и, даже более того, содержать бесконечное количество групп кратных собственных значений. В связи с этими трудностями до настоящего времени без априорных ограничений на спектр были получены только теоремы единственности решения обратных задач[5, 6, 7, 8]. Попытки дальнейшего изучения обратных задач для оператора (2)-(3) предпринимались лишь с наложением жестких ограничений на поведение спектра. В работе В.А. Юрко[9] была получена конструктивная процедура решения обратной задачи для матричного оператора Штурма-Лиувилля для случая простого спектра. Д. Челкак и Е. Коротяев[10] получили необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для случая с другим существенным ограничением, заключающимся в асимптотической простоте спектра. Поэтому весьма актуальным остается вопрос об исследовании обратной задачи для матричного оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале в общем случае: при произвольном поведении спектра.

Цель работы.

1. Получить конструктивное решение обратной задачи спектрального анализа для матричного оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале.
2. Получить необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, т.е. характеристические свойства спектральных данных исследуемого матричного оператора.
3. Исследовать устойчивость решения обратной задачи.

[4] Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1960.

[5] Carlson R. An inverse problem for the matrix Schrödinger equation // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 267. — Pp. 564—575.

[6] Chabanov V. M. Recovering the M-channel Sturm-Liouville operator from M+1 spectra // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45, no. 11. — Pp. 4255—4260.

[7] Malamud M. Uniqueness of the matrix Sturm-Liouville equation given a part of the monodromy matrix, and Borg type results. Sturm-Liouville Theory. — Basel: Birkhäuser, 2005. — Pp. 237—270.

[8] Yurko V. A. Inverse problems for matrix Sturm-Liouville operators // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 111—118.

[9] Yurko V. A. Inverse problems for the matrix Sturm-Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems. — 2006. — Vol. 22. — Pp. 1139—1149.

[10] Chelkak D., Korotyaev E. Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm- Liouville operators on the unit interval // J. Funct. Anal. — 2009. — Vol. 257. — Pp. 1546—1588.

Методы исследования. Для исследования обратной задачи применяется развитие идей метода спектральных отображений[11], в основе которого лежит метод контурного интегрирования Коши-Пуанкаре. Также в работе используются асимптотические методы, аппарат теории целых и мероморфных функций, теории интегральных уравнений, теории операторов в банаховых пространствах и другие методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:
1. Получена конструктивная процедура восстановления матричного оператора Штурма-Лиувилля по спектральным данным.
2. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.
3. Исследована устойчивость решения обратной задачи в норме пространства L_2 и в равномерной норме.
Все результаты справедливы при произвольном поведении спектра изучаемого матричного оператора.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории операторов и ее приложениях. На основе разработанной конструктивной процедуры могут быть построены численные методы решения обратных спектральных задач для матричных дифференциальных операторов. Развитие идей метода спектральных отображений, данное в работе с целью изучения матричного оператора Штурма-Лиувилля, может быть использовано при исследовании обратных задач для других классов операторов, в частности, матричных операторов на оси и полуоси, дифференциальных операторов на графах. Также результаты диссертации могут быть применены в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на 15-ой Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2010), на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения — XXI» (Воронеж, 2010), на апрельских конференциях механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2009, 2010), на студенческой научной конференции СГУ (Саратов, 2010), на объединенном научном семинаре математических

[11]Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач.

кафедр СГУ (под руководством профессора А.П. Хромова), на научных семинарах кафедры математической физики и вычислительной математики (под руководством профессора В.А. Юрко). За работу, содержащую часть результатов диссертации, автору было присуждено первое место в «Конкурсе Мёбиуса» — всероссийском конкурсе студенческих и аспирантских научных работ по математике, проводимом Независимым Московским Университетом.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 7 работах. Статья [1] опубликована в журнале, включенном в список ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, и списка литературы, содержащего 90 наименований. Общий объем работы — 117 страниц.

Содержание работы

Во **введении** дается обоснование актуальности темы, приведен краткий обзор литературы и перечислены основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена исследованию спектральных характеристик матричного оператора Штурма-Лиувилля (параграфы 1.1, 1.2) и конструктивному решению обратной задачи (параграфы 1.3, 1.4).

Будем обозначать через $L = L(Q(x), h, H)$ краевую задачу (2)-(3). В работе исследуется самосопряженный случай, когда $Q(x) = Q^*(x)$ при п. в. $x \in (0, \pi)$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Введем $\varphi(x, \lambda) = [\varphi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — матричное решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = I_m$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, где I_m — единичная $m \times m$ матрица.

Определение 1.1. Функция $\Delta(\lambda) := V(\varphi)$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L.

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет счетное множество нулей. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями задачи L с учетом кратностей. Таким образом, краевая задача L имеет счетное множество вещественных собственных значений $\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}}$, $\lambda_{01} \leqslant \lambda_{02} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0m} \leqslant \lambda_{11} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n1} \leqslant \lambda_{n2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{nm} \leqslant \ldots$ При этом

$$\rho_{nq} := \sqrt{\lambda}_{nq} = n + O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Определение 1.3. *Решением Вейля* задачи L называется решение уравнения (2) $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$, удовлетворяющее условиям $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (здесь и далее 0_m — нулевая матрица). Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L.

Матрица Вейля представляет собой обобщение функции Вейля для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля[12]. Функции Вейля и их обобщения часто возникают в математике и ее приложениях, они являются естественными спектральными характеристиками в теории обратных задач для различных классов дифференциальных операторов.

Матрицы-функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ мероморфны по λ, их полюсы простые и совпадают с нулями характеристической функции. При этом ранги вычетов матрицы $M(\lambda)$ относительно ее полюсов совпадают с кратностями соответствующих собственных значений задачи L.

Введем в рассмотрение *весовые матрицы* $\alpha_{nq} := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda)$.

Определение 1.4. Будем называть *спектральными данными* задачи L величины $\Lambda := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0,\, q=\overline{1,m}}$.

В диссертации решается следующая

Обратная задача 1.1. По заданным спектральным данным Λ построить Q, h и H.

Данная постановка задачи сохраняет преемственность по отношению к одной из классических постановок для скалярного случая[13]. В случае $m = 1$ исследуется задача восстановления оператора по собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$ и весовым числам $\alpha_n := \left(\int\limits_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx \right)^{-1}$. Введенные таким образом величины α_n характеризуют нормы собственных функций $\varphi(x, \lambda_n)$. С другой стороны, весовые числа могут быть введены эквивалентным образом как вычеты функции Вейля, и именно такой вариант оказывается более удобным для обобщения на матричный случай.

В параграфе 1.2 получены точные асимптотические формулы для собственных значений и весовых матриц.

Пусть $\omega = \omega^*$ — некоторая эрмитова матрица размера $m \times m$. Будем говорить, что задача $L(Q(x), h, H)$ принадлежит классу $A(\omega)$, если $h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(x)\, dx = \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D} = \{\omega \colon \omega = \operatorname{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}, \omega_1 \leqslant \ldots \leqslant \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением к задаче L унитарного преобразования.

Теорема 1.5. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D}$. Тогда верны асимптотические формулы:*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \quad \{\varkappa_{nq}\}_{n \geqslant 0} \in l_2,\ q = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Пусть $\{\lambda_{n_k q_k}\}_{k \geqslant 0}$ — все различные собственные значения из набора

[12]Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач.

[13]Там же.

$\{\lambda_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}}$. Обозначим

$$\alpha'_{n_k q_k} := \alpha_{n_k q_k},\ k \geqslant 0, \quad \alpha'_{nq} = 0_m,\ (n,q) \notin \{(n_k, q_k)\}_{k\geqslant 0}.$$

Пусть $\omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} \in \mathcal{D}$. Обозначим через $\{\omega_{r_s}\}_{s=\overline{1,p}}$ все различные значения среди $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$, причем

$$1 = r_1 < \ldots < r_{p+1} = m+1,$$
$$\omega_{r_s} = \omega_{r_s+1} = \ldots = \omega_{r_{s+1}-1}, \quad s = \overline{1,p}$$

Введем обозначение

$$\alpha_n^{(s)} = \sum_{q=r_s}^{r_{s+1}-1} \alpha'_{nq}, \quad s = \overline{1,p}.$$

Теорема 1.6. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D}$. Тогда справедливо соотношение*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \quad \{\|\varkappa_n^{(s)}\|\}_{n\geqslant 0} \in l_2,\ s = \overline{1,p}. \tag{5}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & r_s \leqslant j = k \leqslant r_{s+1} - 1, \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

и $\|.\|$ — норма матрицы.

Параграф 1.3 посвящен выводу основного уравнения обратной задачи 1.1, иначе говоря, сведению нелинейной обратной задачи к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве.

Предположим, что $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ — спектральные данные некоторой краевой задачи $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D}$. Выберем модельную задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}) \in A(\omega)$ того же вида, что и L, но с другими коэффициентами (например, можно взять $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = 0_m$, $\tilde{H} = 0_m$). Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$.

Введем величины

$$\xi_n := \sum_{q=1}^{m} |\rho_{nq} - \tilde{\rho}_{nq}| + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\rho_{nq} - \rho_{nm_s}| +$$
$$+ \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\tilde{\rho}_{nq} - \tilde{\rho}_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p} \|\alpha_n^{(s)} - \tilde{\alpha}_n^{(s)}\|,$$

$$\Omega := \left(\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)\xi_n)^2 \right)^{1/2}.$$

Задача $\tilde{L}$ выбирается в классе $A(\omega)$ для того, чтобы ее собственные значения также удовлетворяли асимптотическим формулам (4) и выполнялось соотношение $\Omega < \infty$.

Обозначим

$$D(x, \lambda, \mu) = \frac{\varphi^{*\prime}(x, \bar{\mu})\varphi(x, \lambda) - \varphi^*(x, \bar{\mu})\varphi'(x, \lambda)}{\lambda - \mu}.$$

Лемма 1.11. *Справедливо соотношение*

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{m} \bigl\{ \varphi(x, \lambda_{kr}) \alpha'_{kr} \tilde{D}(x, \lambda, \lambda_{kr}) - \\ - \varphi(x, \tilde{\lambda}_{kr}) \tilde{\alpha}'_{kr} \tilde{D}(x, \lambda, \tilde{\lambda}_{kr}) \bigr\}, \quad (6)$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, \pi]$ и λ на компактах.

Лемма 1.11 позволяет получить бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \lambda_{nq}) = \varphi(x, \lambda_{nq}) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{m} \bigl\{ \varphi(x, \lambda_{kr}) \alpha'_{kr} \tilde{D}(x, \lambda_{nq}, \lambda_{kr}) - \\ - \varphi(x, \tilde{\lambda}_{kr}) \tilde{\alpha}'_{kr} \tilde{D}(x, \lambda_{nq}, \tilde{\lambda}_{kr}) \bigr\}, \\ \tilde{\varphi}(x, \tilde{\lambda}_{nq}) = \varphi(x, \tilde{\lambda}_{nq}) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{m} \bigl\{ \varphi(x, \lambda_{kr}) \alpha'_{kr} \tilde{D}(x, \tilde{\lambda}_{nq}, \lambda_{kr}) - \\ - \varphi(x, \tilde{\lambda}_{kr}) \tilde{\alpha}'_{kr} \tilde{D}(x, \tilde{\lambda}_{nq}, \tilde{\lambda}_{kr}) \bigr\}, \end{aligned} \quad (7)$$

относительно $\varphi(x, \lambda_{nq})$ и $\varphi(x, \tilde{\lambda}_{nq})$ при каждом фиксированным $x \in [0, \pi]$.

Однако систему (7) неудобно использовать в качестве основного уравнения обратной задачи, поскольку ряды в (7) сходятся лишь «со скобками». Дальнейшие действия направлены на преобразование условно сходящихся рядов к абсолютно сходящимся и вывод из (7) уравнения в соответствующем банаховом пространстве.

Существенная трудность здесь заключается в том, что суммы в (7) вообще говоря могут содержать различное количество слагаемых со знаком «+» и со знаком «-» (поскольку часть матриц α'_{kr} и $\tilde{\alpha}'_{kr}$ могут быть нулевыми в зависимости от кратности спектров). Это обстоятельство затрудняет группировку слагаемых, и поэтому оказывается удобным разбить собственные значения на группы по асимптотике, как описано ниже.

Разобьем собственные значения двух задач L и $\tilde{L}$ на группы

$$G_n^0 := \{\lambda_{nq}, \tilde{\lambda}_{nq}\}_{q=\overline{1,m}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а их, в свою очередь, на меньшие группы G_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$:

$$G_{np+t-1} := \{\lambda_{nq}, \tilde{\lambda}_{nq}\}_{q=\overline{r_t, r_{t+1}-1}}, \quad t = \overline{1, p}, \quad G_n^0 = \bigcup_{t=1}^{p} G_{np+t}.$$

Здесь p — количество различных чисел в наборе $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$, $\omega_{r_t} = \omega_q$, $r_t < q < r_{t+1}$. Пусть $m_{np+t-1} := r_{t+1} - r_t$ (размер группы G_{np+t-1}). Переобозначим элементы групп G_s следующим образом:

$$G_s = \{\lambda_{sq0}, \lambda_{sq1}\}_{q=\overline{1,m_s}}, \quad s \geqslant 0, \quad \lambda_{s1i} \leqslant \lambda_{s2i} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{sm_si}, \quad i = 0, 1.$$

Здесь λ_{sq0} — собственные значения L, λ_{sq1} — собственные значения $\tilde{L}$, содержащиеся в группе G_s. Пусть $\rho_{sqi} = \sqrt{\lambda_{sqi}}$, α_{sqi} — весовые матрицы, соответствующие λ_{sqi}. Введем α'_{sqi} аналогично тому, как вводятся α'_{nq} в параграфе 1.2.

Обозначим

$$\varphi_{sqi}(x) = \varphi(x, \lambda_{sqi}), \quad \tilde{\varphi}_{sqi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \lambda_{sqi}),$$
$$F_{rlj,sqi}(x) = \alpha'_{rlj} D(x, \lambda_{sqi}, \lambda_{rlj}), \quad \tilde{F}_{rlj,sqi}(x) = \alpha'_{rlj} \tilde{D}(x, \lambda_{sqi}, \lambda_{rlj}),$$
$$s, r \geqslant 0, \quad q = \overline{1, m_s}, \ l = \overline{1, m_r}, \quad i, j = 0, 1.$$

Рассмотрим векторы-строки с матричными компонентами

$$\varphi_s(x) = [\varphi_{s10}(x), \varphi_{s11}(x), \varphi_{s20}(x), \varphi_{s21}(x), \ldots, \varphi_{sm_s0}(x), \varphi_{sm_s1}(x)],$$

и определяемые аналогично $2m_r \times 2m_s$ матрицы $F^-_{r,s}(x)$, $r, s \geqslant 0$, $F^-_{rlj,sqi}(x) = (-1)^j F_{rlj,sqi}(x)$. Аналогично введем $\tilde{\varphi}_s(x)$ и $\tilde{F}^-_{r,s}(x)$. Тогда соотношение (7) может быть записано в виде

$$\tilde{\varphi}_s = \varphi_s + \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r \tilde{F}^-_{r,s}, \quad s \geqslant 0, \tag{8}$$

Введем обозначение $\chi_n := \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \neq 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ определим $\psi_{sqi}(x)$ по формулам

$$\psi_{s10}(x) = \chi_n(\varphi_{s10}(x) - \varphi_{s11}(x)), \quad \psi_{s11}(x) = \varphi_{s11}(x),$$
$$\psi_{sqi}(x) = \chi_n(\varphi_{sqi}(x) - \varphi_{s1i}(x)),$$
$$s \geqslant 0, \quad G_s \subset G_n^0, \quad q = \overline{2, m_s}, \quad i = 0, 1.$$

Иначе говоря,

$$\psi_s(x) = [\psi_{s10}(x), \psi_{s11}(x), \psi_{s20}(x), \psi_{s21}(x), \ldots, \psi_{sm_s0}(x), \psi_{sm_s1}(x)] = \varphi_s(x) X_s.$$

Также введем $R_{r,s}(x) = X_r^{-1} F^-_{r,s}(x) X_s, \quad s, r \geqslant 0$, где

$$X_s = \begin{bmatrix} \chi_n & 0 & -\chi_n & 0 & \ldots & -\chi_n & 0 \\ -\chi_n & 1 & 0 & -\chi_n & \ldots & 0 & -\chi_n \\ 0 & 0 & \chi_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_n & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \chi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \chi_n \end{bmatrix}, \ X_r^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_k & 0 & \xi_k & 0 & \ldots & \xi_k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \xi_k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_k & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \xi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi_k \end{bmatrix},$$

т. е. X_s — числовая $m_s \times m_s$ матрица, $G_s \subset G_n^0$, $G_r \subset G_k^0$. Умножение элементов X_s на компоненты φ_s и $F_{r,s}^-$ понимается как умножение чисел на матрицы. Аналогично введем $\tilde{\psi}_s(x)$ и $\tilde{R}_{r,s}(x)$.

Уравнение (8) может быть переписано в виде

$$\tilde{\psi}_s = \psi_s + \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r \tilde{R}_{r,s}.$$

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей вида $a = [a_s]_{s \geqslant 0}$, где

$$a_s = [a_{s10}, a_{s11}, a_{s20}, a_{s21}, \dots, a_{sm_s0}, a_{sm_s1}],$$

a_{sqi} — $m \times m$ матрицы, с нормой

$$\|a\|_B = \sup_{s \geqslant 0} \|a_s\| = \sup_{s \geqslant 0} \max_{\substack{q=\overline{1,m_s} \\ i=0,1}} \|a_{sqi}\|.$$

При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ вектор $\psi(x) = [\psi_s(x)]_{s \geqslant 0}$ является элементом пространства B, и будем рассматривать $R(x) = [R_{r,s}(x)]_{r,s \geqslant 0}$ как линейный ограниченный оператор, действующий из B в B.

Теорема 1.7. *При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет уравнению*

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(I + \tilde{R}(x)) \tag{9}$$

в банаховом пространстве B. Здесь I — единичный оператор в B.

Уравнение (9) называется *основным уравнением* обратной задачи.

В параграфе 1.4 доказана однозначная разрешимость основного уравнения (9). Далее по решению основного уравнения, модельной задаче $\tilde{L}$ и известным спектральным данным Λ восстанавливается искомая задача L. В результате доказана следующая

Теорема 1.10. *Обратная задача 1.1 имеет единственное решение, которое может быть найдено по следующему алгоритму:*

Пусть даны величины $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}}$ — спектральные данные краевой задачи $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D}$.

(1) Выбираем $\tilde{L} \in A(\omega)$ и вычисляем $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$.

(2) Находим $\psi(x)$ из уравнения (9) и вычисляем $\varphi_{sqi}(x)$.

(3) Строим $Q(x)$, h и H по формулам

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \tilde{h} - \varepsilon_0(0), \quad H = \tilde{H} + \varepsilon_0(\pi).$$

где

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_r} \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \varphi_{rlj}(x) \alpha'_{rlj} \tilde{\varphi}^*_{rlj}(x), \quad \varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x).$$

Вторая глава посвящена необходимым и достаточным условиям разрешимости обратной задачи 1.1.

Будем говорить, что величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, если λ_{nq} — вещественные числа, $\lambda_{01} \leqslant \lambda_{02} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0m} \leqslant \lambda_{11} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n1} \leqslant \lambda_{n2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{nm} \leqslant \ldots$, α_{nq} — $m \times m$ матрицы и $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ всегда соответствуют $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Основной результат второй главы представляет собой

Теорема 2.1.

Пусть $\omega \in \mathcal{D}$. Для того, чтобы величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in Sp$ были спектральными данными некоторой краевой задачи $L \in A(\omega)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) Верны асимптотические формулы (4) *и* (5).

2) $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$ и ранги матриц α_{nq} равны кратностям λ_{nq} (под кратностью здесь понимается количество раз, которое λ_{nq} встречается в наборе $\{\lambda_{nq}\}$).

3) Для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и удовлетворяет оценке

$$\gamma(\lambda) = O(\exp(|\,Im\sqrt{\lambda}|\pi)), \quad |\lambda| \to \infty,$$

из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \geqslant 0$, $q = \overline{1,m}$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Отметим, что в скалярном случае выполнение условия 3 следует из первых двух условий теоремы 2.1. Однако в матричном случае оно существенно и не может быть опущено. Это показывает пример, приведенный в параграфе 2.1 диссертации. Также в параграфе 2.1 приведено доказательство необходимости условий теоремы 2.1.

Параграфы 2.2–2.4 посвящены доказательству достаточности в теоремы 2.1, центральную роль в котором играют основное уравнение (9) и алгоритм из теоремы 1.10.

В **третьей главе** исследуется устойчивость решения обратной задачи 1.1.

Будем говорить, что величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geqslant 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}^+$, если λ_{nq} — вещественные числа, $\lambda_{01} \leqslant \lambda_{02} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0m} \leqslant \lambda_{1m} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n1} \leqslant \lambda_{n2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{nm} \leqslant \ldots$, α_{nq} — $m \times m$ матрицы, $\alpha_{nq} = \alpha_{nq}^* \geqslant 0$, $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$, если $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ и ранги матриц α_{nq} совпадают с кратностями соответствующих λ_{nq}. Под кратностью в данном случае понимается количество раз, которое число λ_{nq} встречается в наборе. Определим α'_{nq} как в параграфе 1.2.

Пусть дана задача $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ и $\tilde{\Lambda}$ — ее спектральные данные. Пусть $\Lambda \in \mathrm{Sp}^+$ — некоторые величины. Далее мы будем рассматривать разбиение чисел $\{\lambda_{nq}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_{nq}\}$ на группы

$$G_n^0 = \{\lambda_{nq}, \tilde{\lambda}_{nq}\}_{q=\overline{1,m}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Так как для собственных значений задачи $\tilde{L}$ верны асимптотические формулы (4), существует такое n^*, что при $n \geqslant n^*$ значение $\tilde{\lambda}_{nq}$ не может совпадать ни с каким $\tilde{\lambda}_{kl}$, $k \neq n$. Условимся обозначать через n^* наименьший из таких индексов и отметим, что n^* зависит только от $\tilde{L}$ и определяется по $\tilde{L}$ однозначно.

При изучении устойчивости необходимо учесть, что при малых возмущениях спектра могут изменяться кратности собственных значений. С этой целью рассматриваются разбиения собственных значений на группы $\{G_s\}$, сходные с разбиением, введенным в параграфе 1.3. Однако теперь мы будем изучать достаточно произвольные разбиения $\{G_s\}$, удовлетворяющие определенным свойствам.

Определение 3.1. Будем называть разбиение чисел $\{\lambda_{nq}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_{nq}\}$ на группы G_s, $s = 0, 1, 2, \dots$, *корректным*, если оно удовлетворяет условиям:

1. Каждая группа G_s содержит одинаковое количество чисел из λ_{nq} и $\tilde{\lambda}_{nq}$ с учетом кратностей. Введем нумерацию $G_s = \{\lambda_{sq0}, \lambda_{sq1}\}_{q=\overline{1,m_s}}$, m_s — размер группы, $0 < m_s \leqslant m$. Здесь λ_{sq0} — значения из Λ, λ_{sq1} — значения из $\tilde{\Lambda}$, содержащиеся в группе G_s. Обозначим $\{\alpha_{sq0}, \alpha_{sq1}\}_{q=\overline{1,m_s}}$ — соответствующие весовые матрицы. Введем α'_{sqi} и $\alpha^s_i = \sum_{q=1}^{m_s} \alpha'_{sqi}$.
2. Каждая группа кратных значений из $\{\lambda_{nq}\}$ (или из $\{\tilde{\lambda}_{nq}\}$) целиком содержится в некоторой группе G_s.
3. Существует s^* такое, что $\bigcup\limits_{s=0}^{s^*} G_s = \bigcup\limits_{n=0}^{n^*-1} G^0_n$ и для любого $s > s^*$ группа G_s целиком содержится в некоторой группе G^0_n (s^* определяется однозначно по разбиению $\{G_s\}$). В свою очередь $G^0_n = \bigcup\limits_{G_s \subset G^0_n} G_s$ при всех $n \geqslant n^*$.

Для каждой группы G_s определим диаметр d_s по формуле

$$d_s := \sum_{q=1}^{m_s} |\rho_{sq0} - \rho_{sq1}| + \sum_{q=1}^{m_s} \sum_{j=0}^{1} |\rho_{sqj} - \rho_{s1j}| + \|\alpha^s_0 - \alpha^s_1\|.$$

и для разбиения $\{G_s\}$ введем величину Ω

$$\Omega := \sum_{s=0}^{s^*} d_s + \left(\sum_{n=n^*}^{\infty} ((n+1)\xi_n)^2 \right)^{1/2}, \quad \xi_n = \sum_{G_s \subset G^0_n} d_s, \; n \geqslant n^*.$$

Определение 3.2. Будем говорить, что величины $\Lambda \in \mathrm{Sp}^+$ *δ-близки* со спектральными данными $\tilde{\Lambda}$ краевой задачи $\tilde{L}$, если существует такое корректное разбиение чисел $\{\lambda_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}}$ и $\{\tilde{\lambda}_{nq}\}_{n \geqslant 0, q=\overline{1,m}}$ на группы G_s, $s = 0, 1, 2, \dots$, что $\Omega < \delta$.

Определение 3.2 позволяет говорить о близости двух наборов спектральных данных, вообще говоря с различным поведением спектров (в смысле кратностей).

Следующая теорема утверждает локальную разрешимость обратной задачи 1.1 и устойчивость ее решения.

Теорема 3.1. *Пусть дана задача* $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$. *Существует* $\delta > 0$ *(зависящее от* $\tilde{L}$*) такое, что если величины* $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q = \overline{1,m}} \in Sp^+$ δ*-близки с* $\tilde{\Lambda}$*, то существует единственная краевая задача* $L(Q(x), h, H)$*, для которой* Λ *являются спектральными данными, причем*

$$\|Q(x) - \tilde{Q}(x)\|_{L_2((0,\pi), \mathbb{C}^{m \times m})} = \max_{j,k = \overline{1,m}} \|Q_{jk}\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant C\Omega,$$
$$\|h - \tilde{h}\| \leqslant C\Omega, \quad \|H - \tilde{H}\| \leqslant C\Omega,$$

где C *зависит только от* $\tilde{L}$.

В параграфе 3.2 налагаются более жесткие ограничения на близость спектральных данных двух краевых задач и исследуется устойчивость решения обратной задачи 1.1 в равномерной норме.

Для разбиения $\{G_s\}$ определим

$$\Omega_1 := \sum_{s=0}^{s^*} d_s + \left(\sum_{n=n^*}^{\infty} ((n+1)^2 \xi_n)^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема 3.2. *Пусть дана задача* $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$. *Существует* $\delta > 0$ *(зависящее от* $\tilde{L}$*) такое, что если для величин* $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geqslant 0, q = \overline{1,m}} \in Sp^+$ *существует корректное разбиение на группы* G_s*, при котором* $\Omega_1 < \delta$*, то существует единственная краевая задача* $L(Q(x), h, H)$*, для которой* Λ *являются спектральными данными, причем элементы матрицы* $Q(x) - \tilde{Q}(x)$ *непрерывны на* $[0, \pi]$ *и*

$$\max_{x \in [0,\pi]} \|Q(x) - \tilde{Q}(x)\| \leqslant C\Omega_1, \quad \|h - \tilde{h}\| \leqslant C\Omega_1, \quad \|H - \tilde{H}\| \leqslant C\Omega_1,$$

где C *зависит только от* $\tilde{L}$.

Отметим, что все полученные результаты являются обобщением соответствующих результатов для скалярного случая[14].

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Вячеславу Анатольевичу Юрко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС) и Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

[14] Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации

[1] Бондаренко Н. П. Обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма-Лиувилля / Н. П. Бондаренко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2010. — Т. 10, №4. — С. 3—13.

[2] Бондаренко Н. П. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма-Лиувилля / Н. П. Бондаренко // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. — Вып. 11. — С. 3—5.

[3] Бондаренко Н. П. Локальная разрешимость обратной задачи для матричного уравнения Штурма-Лиувилля / Н. П. Бондаренко // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — Вып. 12. — С. 3—6.

[4] Бондаренко Н. П. Обратная задача для матричного уравнения Штурма-Лиувилля / Н. П. Бондаренко // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 15-й Сарат. зимней школы. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 32—33.

[5] Бондаренко Н. П. Устойчивость решения обратной задачи для матричного уравнения Штурма-Лиувилля / Н. П. Бондаренко // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXI». — Воронеж: ВГУ, 2010. — С. 42—43.

[6] Бондаренко Н. П. Устойчивость решения обратной задачи для матричного уравнения Штурма-Лиувилля в равномерной норме / Н. П. Бондаренко // Научные исследования студентов Сарат. гос. ун-та: Материалы итог. студ. науч. конф. — 2010. — С. 18—20.

[7] Bondarenko N. Spectral analysis for the matrix Sturm-Liouville operator on a finite interval / N. Bondarenko — Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik, SM-DU-715, Universität Duisburg Essen, 2010. — 20pp.

Подписано в печать 07.02.2011. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать RISO. Объем 1 печ. л. Тираж 100 экз. Заказ №007.

Отпечатано с готового оригинал-макета
Центр полиграфических и копировальных услуг
Предприниматель Серман Ю.Б. Свидетельство №3117
410600, Саратов, ул. Московская, д.152, офис 19, тел. 26-18-19, 51-16-28