

На правах рукописи

Астахов Сергей Владимирович

**ОТНОСИТЕЛЬНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ
ЭНТРОПИЯ КАК МЕРА СТЕПЕНИ
ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ И
ХАОТИЧЕСКИХ ЗАШУМЛЕННЫХ
СИСТЕМАХ**

01.04.03 – Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики
Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, Анищенко Вадим Семенович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Безручко Борис Петрович доктор физико-математических наук, профессор, Осипов Григорий Владимирович
Ведущая организация:	Саратовский государственный техни- ческий университет

Защита состоится «9» сентября 2010 г. в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.243.01 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, расположенном по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. В.А. Артисевич Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан «_____» _____ 2010 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Аникин В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Процесс заполнения некоторой области фазового пространства изображающими точками, стартовавшими из малой окрестности друг друга, называют *перемешиванием*. В ходе эволюции в системе с перемешиванием две сколь угодно близкие по начальным условиям фазовые траектории, спустя определенное время, могут оказаться в различных, удаленных друг от друга областях фазового пространства. В результате получается, что, хотя эволюция произвольной фазовой точки полностью детерминирована, для описания эволюции любой сколь угодно малой области в фазовом пространстве системы с перемешиванием нужно использовать статистический, вероятностный подход. А.Н. Колмогоров показал, что введенная им метрическая энтропия в динамических системах с перемешиванием будет иметь конечное положительное значение. Именно отличное от нуля значение метрической энтропии динамической системы является главным критерием наличия режима детерминированного хаоса. При этом для большинства базовых моделей динамического хаоса величина метрической энтропии (энтропии Колмогорова-Синяя) может быть вычислена как сумма положительных характеристических показателей Ляпунова. Таким образом, в силу того, что прямое вычисление энтропии Колмогорова-Синяя по определению затруднено, на практике критерием хаотичности аттрактора стало наличие у него хотя бы одного положительного ляпуновского характеристического показателя.

Итак, перемешивающим свойством могут обладать нелинейные системы, характеризующиеся ненулевым значением энтропии Колмогорова-Синяя. Однако, любая реальная система находится под действием неустраняемых шумов различной природы, которые, безусловно, вносят свою роль в перемешивание в фазовом пространстве такой системы. При этом, с точки зрения строгого определения, величина энтропии Колмогорова-Синяя при добавлении в систему шума становится бесконечной, даже если в отсутствие шумов система демонстрирует регулярные движения с нулевой метрической энтропией, а интенсивность шума ничтожно мала. В таких случаях для оценки степени перемешивания в системе прибегают к оценке величины старшего характеристического показателя Ляпунова. Тем не менее, как будет показано в первой главе, такая оценка не всегда может точно передать информацию о степени перемешивания в системе, поскольку с увеличением интенсивности шумового воздействия старший характеристический показатель Ляпунова может убывать. Кроме того, в ряде случаев вычисление ляпуновских характеристических показателей зашумленных систем затруднено. Так, если отсутствует информация о виде уравнений, описывающих модель системы, и в руках исследователя находится только временной ряд, вычисление характеристических показателей Ляпунова становится сложной и нетривиальной задачей. В связи

с этим представляется целесообразным сформулировать критерий степени перемешивания в зашумленной системе, который в отсутствие шумового воздействия давал бы значения, соответствующие величине метрической энтропии (и сумме положительных характеристических показателей Ляпунова), а при наличии шума был бы способен адекватно отразить степень перемешивания, вносимого шумом, зависящую от интенсивности шумового воздействия. При этом оценка должна сводиться к анализу фазовой траектории без использования уравнений системы. Особый интерес такой критерий может вызвать при работе с системами, в которых реализуется так называемый хаотический случайный аттрактор: новая мера перемешивания должна регистрировать индуцированный шумом переход к хаосу в таких системах.

Введение такого критерия позволит решить еще одну важную проблему. Явление синхронизации периодических автоколебаний интуитивно воспринимается как увеличение степени порядка в динамике объединенной системы. Тем не менее, классическая мера степени порядка в динамике системы (речь идет об энтропии Колмогорова-Синяя) демонстрирует нулевые значения, поскольку, как в отсутствие синхронизации, так и в синхронизированном режиме, движения системы остаются регулярными. Действительно, ни о каком перемешивании в этом случае говорить нельзя. Если же подать малое шумовое воздействие, то энтропия такой системы обратится в бесконечность (опять же, как в режиме синхронизации, так и в асинхронном режиме). Таким образом, классическое понятие метрической энтропии не дает никакой информации об упорядочивающем влиянии явления синхронизации. Использование новой меры степени перемешивания позволит решить задачу об упорядочивающем эффекте синхронизации, как снижении степени перемешивания, вносимого источником шума.

Говоря о синхронизации, следует отметить, что на сегодняшний день сформулирована строгая бифуркационная теория синхронизации периодических автоколебаний. Также обнаружены и исследованы механизмы синхронизации хаотических автоколебаний, в том числе и в присутствии задержки в канале связи [1–5]. При этом строгая теория синхронизации квазипериодических, многочастотных автоколебаний на сегодняшний день еще не сформирована. Существуют недавние результаты, где в численном эксперименте с использованием сечений Пуанкаре показано, что в основе бифуркационного механизма синхронизации такого типа автоколебаний лежат седло-узловые бифуркации инвариантных торов. В рамках второй главы данной работы решается задача построения бифуркационной теории синхронизации квазипериодических автоколебаний в фазовом приближении (по аналогии с синхронизацией периодических автоколебаний) на примере трехчастотных колебаний. Теоретические результаты подтверждаются в радиофизическом эксперименте.

Явление синхронизации квазипериодических автоколебаний играет важную роль при осуществлении взаимодействия в цепочках осцилляторов. Поэтому представляется весьма важным обобщить теоретические результаты, полученные для синхронизации трехчастотных автоколебаний на случай синхронизации в цепочке из большого количества квазигармонических автогенераторов. Очевидно, новый критерий степени перемешивания может быть использован и применительно к распределенным системам. В цепочках генераторов и активных средах, как и в случае сосредоточенных систем, перемешивание может реализовываться за счет собственной динамики парциальных элементов в отсутствие шума. При этом хаотическая динамика может наблюдаться как во всей системе, так и локально, в некоторых точках или на определенных интервалах пространственной координаты. Особый интерес представляет пространственный переход от регулярных колебаний к хаотическим вдоль пространственной координаты такой распределенной системы. Существуют работы, в которых в цепочке однонаправленно связанных генераторов с инерционной нелинейностью реализуется пространственный переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Тем не менее, в такой модели не может реализоваться непрерывный пространственный каскад бифуркаций удвоения периода. Количество удвоений ограничено числом элементов цепочки и невозможно локализовать бифуркацию в пространстве. Таким образом, чтобы говорить о непрерывном по пространственной координате переходе к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, необходимо сформулировать модель активной среды, реализующей такое поведение. В качестве критерия хаотичности динамики в подобной среде и меры степени перемешивания в фазовом пространстве ее элементов также можно использовать новую меру, введенную для зашумленных сосредоточенных систем.

Целью диссертационной работы являлась разработка количественной меры степени перемешивания в зашумленных системах и исследование с ее помощью влияния на перемешивание, вызванное шумом, нелинейных эффектов, таких как стохастический резонанс, синхронизация периодических и квазипериодических автоколебаний, индуцированный шумом хаос, а также исследование перемешивания в среде, демонстрирующей переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода вдоль пространственной координаты.

Научная новизна результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые в качестве характеристики перемешивания предложена относительная метрическая энтропия, использующая понятие физически бесконечно малого объема фазового пространства, величина которого определяется конечной точностью регистрации движений исследуемой

системы.

2. Впервые исследован бифуркационный механизм явления фазовой синхронизации предельного цикла на двумерном торе гармоническим воздействием.
3. С помощью относительной метрической энтропии впервые показано, что эффект синхронизации квазигармонических и квазипериодических автоколебаний в присутствии шума уменьшает степень перемешивания в системе.
4. Впервые предложена модель непрерывной активной среды в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, реализующая пространственный переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода и применен метод относительной метрической энтропии для оценки степени перемешивания в различных точках среды.

Достоверность научных выводов работы подтверждается взаимным соответствием аналитических результатов, результатов численного анализа и моделирования, а также результатов радиофизического эксперимента.

Научно-практическая значимость результатов. Научные результаты, представленные в диссертационной работе, существенно развивают и дополняют представления современной статистической радиофизики и теории колебаний. Введенное в данной работе понятие относительной метрической энтропии расширяет понятие метрической энтропии Колмогорова на случай систем, находящихся под действием шума, каковыми являются все реальные системы (физические, химические, биологические, социальные, экономические и т.д.). Разработанная теория фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний существенно дополняет современную теорию колебаний в рамках теории синхронизации. Результаты исследования степени перемешивания в зашумленных и распределенных системах представляют практическую ценность для исследователей, поскольку могут быть использованы при анализе временных рядов, полученных для систем различной природы.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Введено понятие относительной метрической энтропии зашумленной системы, значение которой зависит от величины конечного масштаба ошибки регистрации, которая может служить критерием степени перемешивания в системе с шумом.
2. Установлено, что спектр характеристических показателей Ляпунова зашумленной фазовой траектории в общем случае не дает полного представления о степени перемешивания в зашумленной системе.

3. Построена теория фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний вблизи резонанса $1 : 1$. Показано, что в основе механизма потери синхронизации автоколебаний такого типа лежат седло-узловые бифуркации инвариантных кривых, что соответствует касательным бифуркациям седловых и притягивающих торов в полной системе, установленным ранее.
4. Явления синхронизации и стохастического резонанса приводят к снижению степени перемешивания в зашумленных системах. При этом в случае синхронизации периодических и квазипериодических автоколебаний шум фиксированной интенсивности оказывает большее перемешивающее действие на предельный цикл, лежащий на поверхности тора, чем на предельный цикл, не являющийся резонансом на торе. Данный вывод справедлив и для торов: шум вызывает большее перемешивание в случае, если режиму колебаний системы соответствует эргодический тор, отвечающий резонансу на торе большей размерности.

Апробация работы. Результаты научных исследований по теме диссертационной работы были представлены на следующих научных конференциях:

- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2005);
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов-2006” (Москва, 2006);
- Международная научная школа-конференция “Конструктивная роль шума в сложных системах” (Constructive Role of Noise in Complex Systems) (Германия, Дрезден, 2006);
- Международная конференция “Критические явления и диффузия в сложных системах” (Critical Phenomena and Diffusion in Complex Systems) (Нижний Новгород, 2006);
- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2006);
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов-2007” (Москва, 2007);
- Международная школа-конференция “Хаотические автоколебания и образование структур” (Хаос-2007) (Саратов, 2007);
- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2007);

- Международная научная конференция “Нелинейная динамика в электронных системах” (Nonlinear Dynamics in Electronic Systems) (Нижний Новгород, 2008);
- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2008);
- Международная школа-семинар “Статистическая физика и информационные технологии” (STATINFO-2009) (Саратов, 2009);
- Международная школа-конференция “Нелинейная динамика в электронных системах” (Nonlinear Dynamics in Electronic Systems) (Швейцария, Рапперсвиль, 2009),

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 9 статей в рецензируемых журналах (8 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [3, 4, 6–8, 10–12]), 10 статей в сборниках трудов конференций и 2 публикации в сборниках тезисов докладов.

Личный вклад автора. В представленной работе все данные численного и физического экспериментов, а также аналитические результаты были получены лично соискателем. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем.

Структура и объем диссертации. Материалы диссертации изложены на 127 страницах, содержит 44 рисунка и список цитированной литературы из 64 наименований. Диссертационная работа состоит из введения, трех содержательных глав и списка цитированной литературы.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе вводится концепция относительной метрической энтропии, обосновывается связь введенного понятия с метрической энтропией Колмогорова-Синяя. Приводятся примеры расчета относительной метрической энтропии различных систем, находящихся под действием белого гауссова шума. Проводится сравнительный анализ результатов вычисления относительной метрической энтропии и старшего характеристического показателя Ляпунова зашумленных систем.

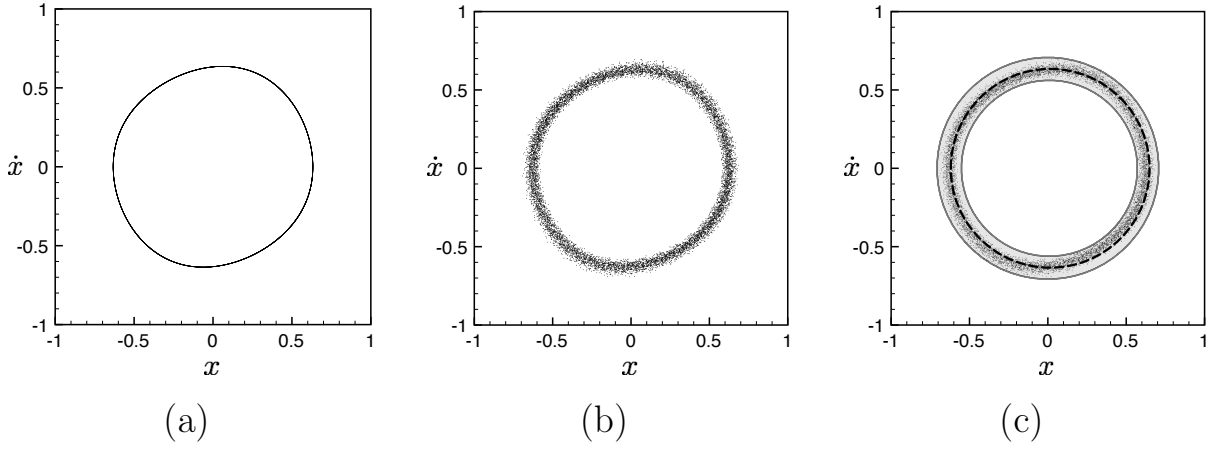


Рис. 1. Фазовая траектория системы (1). (a) – в отсутствие шума ($D = 0$); (b) – под действием белого гауссова шума ($D = 0.0001$); (c) – под действием шума, но с конечной точностью регистрации.

Относительная метрическая энтропия вводится на примере осциллятора Ван дер Поля, находящегося под действием белого гауссова шума:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1)$$

где α – параметр нелинейности или возбуждения, $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ – частота колебаний, $\xi(t)$ – белый δ -коррелированный шум интенсивности D . В отсутствие шума ($D = 0$) решение системы (1) соответствует предельному циклу в фазовом пространстве (см. рис. 1, а). Добавление шума переводит систему (1) в класс стохастических и решению в этом случае отвечает “зашумленный предельный цикл”, изображенный на рис. 1, б. В первом случае решение характеризуется полной предсказуемостью и имеет соответственно нулевую метрическую энтропию. Во втором случае система стохастическая и теоретически характеризуется бесконечным значением энтропии Колмогорова-Синяя. Это означает, что точное предсказание $x(t)$ для $t > t_0$ отсутствует. Однако, если нас интересует предсказание с конечной точностью, обусловленной точностью экспериментальных измерений, то положение дел меняется. Усреднив “зашумленный предельный цикл” в пределах заданной точности (см. рис. 1, с), мы получим предельный цикл, эволюцию траекторий на котором на некоторое время можно предсказать с некоторой точностью и в этом смысле энтропия Колмогорова-Синяя также должна стать конечной. Очевидно, здесь речь идет о другом понимании и другом определении метрической энтропии, которую мы будем называть относительной метрической энтропией. Математически реализовать предложенный подход позволяет метод оценки энтропии Колмогорова-Синяя, базирующийся на анализе так называемых *отображений возврата* (Recurrence Plots). Сравнение вели-

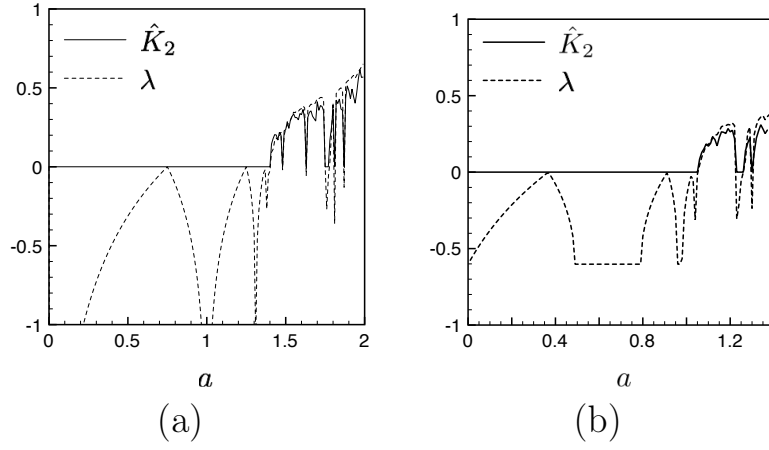


Рис. 2. Сравнение величин старшего характеристического показателя Ляпунова (пунктирная линия) и оценки энтропии Колмогорова-Синая (сплошная линия) в случае (a) – логистического отображения и (b) – отображения Эно.

чины, даваемой указанным методом с положительным характеристическим показателем Ляпунова хаотических отображений (рис. 2) свидетельствует о точности выбранного метода.

Результаты расчета величины относительной метрической энтропии $\hat{K}_2$ системы (1) в зависимости от ошибки регистрации (ε) представлены на рис. 3, а. Видно, что в отсутствие шума ($D = 0$) данная величина не зависит от точности регистрации и близка к нулю. При шумовом воздействии ненулевой интенсивности ($D = 0.01$) $\hat{K}_2$ равномерно увеличивается с увеличением точности регистрации ε . Однако, исследование относительной метрической энтропии хаотической системы отражает наличие перемешивания, вызванного динамикой самой системы (рис. 3, b): в отсутствие шума в зависимости $\hat{K}_2(\varepsilon)$ присутствует плато, которое приобретает наклон при внесении источника шума в систему. При этом величина наклона тем больше, чем больше интенсивность шумового воздействия. Таким образом, при фиксированной точности регистрации, в отсутствие шума величина относительной метрической энтропии имеет ненулевое значение, характеризующее перемешивание, вызванное хаотической динамикой системы, а при добавлении шума эта величина становится тем больше, чем больше интенсивность шума. Данный результат свидетельствует о преимуществе анализа введенной меры степени перемешивания перед анализом старшего характеристического показателя Ляпунова, поскольку последний может не отражать увеличение степени перемешивания в системе, вызванного увеличением интенсивности шумового воздействия (рис. 3, c).

Результаты первой главы опубликованы в работах [6, 7, 13–16].

Во второй главе описывается бифуркационный сценарий синхронизации предельного цикла на двумерном торе гармоническим воздействием в

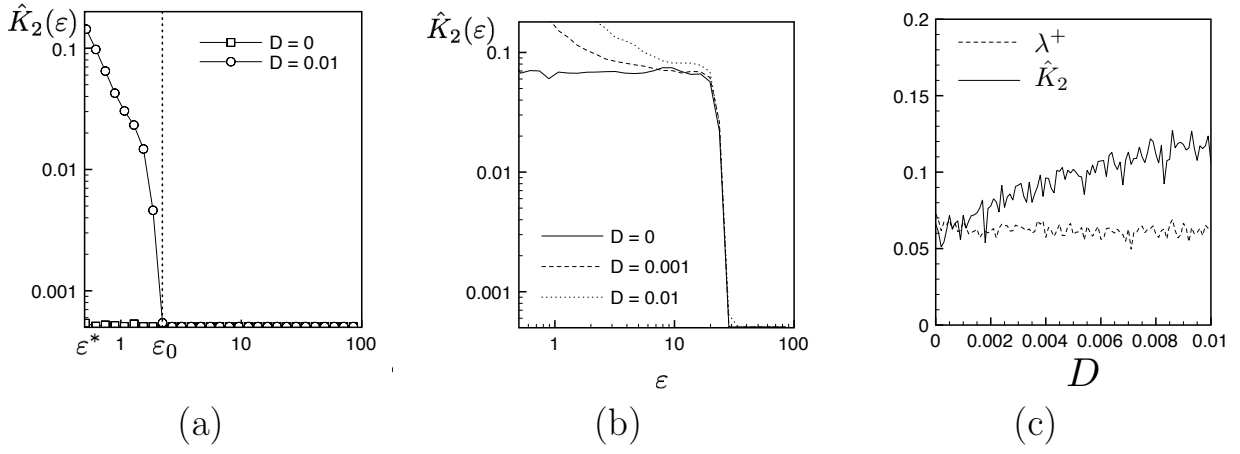


Рис. 3. Результаты исследования относительной метрической энтропии: (а) – величина относительной метрической энтропии ($\hat{K}_2$) системы (1) в зависимости от точности регистрации (ε) в отсутствие шума ($D = 0$) и под действием белого гауссова шума (интенсивность $D = 0.01$); (б) – зависимость относительной метрической энтропии системы Рёсслера в режиме спирального хаоса от точности регистрации при различных интенсивностях шумового воздействия; (с) – сравнение величин относительной метрической энтропии (при фиксированной точности регистрации) и старшего характеристического показателя Ляпунова системы Рёсслера в зависимости от интенсивности шумового воздействия.

фазовом приближении. Аналитические и численные результаты сравниваются с результатами радиофизического эксперимента. Предлагаемый сценарий синхронизации распространяется на случай цепочки связанных генераторов квазигармонических автоколебаний.

Явление синхронизации предельного цикла на торе рассматривается на модели связанных осцилляторов Ван дер Поля, имеющих расстройку по частоте, один из которых находится под действием гармонической внешней силы:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = (\varepsilon - x_1^2) \dot{x}_1 + \gamma (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_0 \cos(\omega_{ex} t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = (\varepsilon - x_2^2) \dot{x}_2 + \gamma (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (2)$$

Для данной системы получены укороченные уравнения в фазовом приближении:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \Delta_1 + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{\omega_1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \Delta_2 + \delta - g \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (3)$$

где $g = \frac{\gamma}{2}$, $C = \frac{C_0}{2\omega_{ex}\sqrt{\varepsilon}}$, $\Delta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_{ex}}$, $\delta = \omega_2 - \omega_1$. Бифуркационный анализ системы в фазовом приближении позволил сформировать теорию фазовой синхронизации, результаты которой представлены на рис. 4. В режиме синхронизации система демонстрирует одночастотные периодические автоколебания, характеризующиеся устойчивым предельным циклом в фазовом

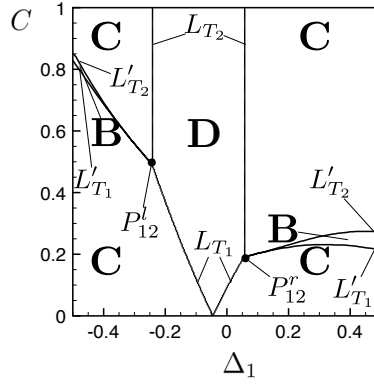


Рис. 4. Линии бифуркаций коразмерности 1 и точки бифуркаций коразмерности 2 системы (3) на плоскости параметров (Δ_1, C) при фиксированных значениях $g = 0.15$, $\delta = 0.1$. L_{T_1} – линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(3)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L_{T_2} – линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(3)}$ и $\varphi^{(2)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L'_{T_1} и L'_{T_2} – линии касательных бифуркаций устойчивых и седловых инвариантных замкнутых кривых.

пространстве (что соответствует наличию четырех состояний равновесия в фазовом приближении – одного устойчивого, одного репеллера и двух седловых, область **D** на рис. 4). С изменением частоты внешнего гармонического воздействия происходит седло-узловая бифуркация устойчивого и седлового предельных циклов с образованием устойчивого двумерного тора, который лежит на гиперповерхности трехмерного тора. Одновременно происходит седло-репеллерная бифуркация двух предельных циклов с образованием седлового двумерного тора, который лежит на гиперповерхности того же трехмерного тора. Эти бифуркации в фазовом приближении соответствуют седло-узловой и седло-репеллерной бифуркациям состояний равновесия с образованием устойчивой и седловой инвариантных замкнутых кривых (рис. 4, линии L_{T_1} и L_{T_2}). При дальнейшем изменении частоты воздействия в полной системе происходит касательная бифуркация устойчивого и седлового двумерных торов (что соответствует касательной бифуркации устойчивой и неустойчивой инвариантных замкнутых кривых в фазовом приближении). В результате система демонстрирует трехчастотные квазипериодические колебания.

Результаты теории фазовой синхронизации подтверждаются в радиофизическом эксперименте, в том числе и для случая синхронизации в окрестности резонанса $1 : 3$. Полученные результаты распространены на цепочку взаимосвязанных осцилляторов Ван дер Поля. Получены укороченные уравнения в фазовом приближении:

$$\dot{\varphi}_i = \Delta_i + \frac{\gamma}{2} (\sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \sin(\varphi_i - \varphi_{i+1})). \quad (4)$$

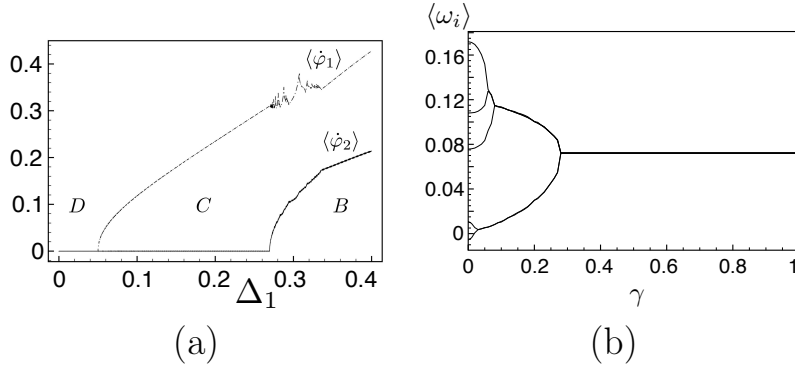


Рис. 5. Зависимость средних частот осцилляторов: (а) – в системе (3) от величины расстройки; (б) – в системе (4) от коэффициента связи.

Для наглядности представления седло-узловых бифуркаций удобно наблюдать за средними частотами фазовых осцилляторов:

$$\langle \omega_i \rangle = \langle \dot{\varphi}_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}_i(t) dt. \quad (5)$$

Сравним результаты, полученные для систем (3) (рис. 5, а) и (4) (рис. 5, б). Из рис. 5, а видно, что седло-узловой бифуркации предельных циклов в фазовом пространстве полной системы соответствует рождение одной частоты, отличной от частоты внешнего воздействия. Касательной бифуркации двумерных инвариантных торов соответствует рождение второй частоты, отличной от частоты внешнего воздействия. Таким образом, связывая появление новой частоты с касательной бифуркацией инвариантных торов, можно сделать вывод, что в основе механизма синхронизации квазипериодических автоколебаний в цепочке осцилляторов Ван дер Поля лежит последовательность касательных бифуркаций инвариантных торов, размерность которых увеличивается на 1 при появлении новой частоты.

Результаты второй главы опубликованы в работах [8–10, 17–19].

В третьей главе введенное в первой главе понятие относительной метрической энтропии используется для оценки степени перемешивания в различных сосредоточенных системах, находящихся под действием шума. На примере осциллятора Крамерса показана возможность диагностики индуцированного шумом хаоса с помощью относительной метрической энтропии. В передемпфированном бистабильном осцилляторе имеет место существенное снижение относительной метрической энтропии, а значит и степени перемешивания, в режиме стохастического резонанса. Установлен факт снижения степени перемешивания, вносимого шумом, при синхронизации зашумленных периодических и квазипериодических автоколебаний. Вводится модель непрерывной активной среды, в которой реализуется пространственный переход к

хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. С помощью относительной метрической энтропии исследуется изменение степени перемешивания вдоль среды.

Диагностика индуцированного шумом хаоса производилась на примере осциллятора Дуффинга, находящегося под действием белого гауссова шума:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = \sqrt{2D}\xi(t). \quad (6)$$

Возникновение хаотического поведения в такой системе связывают с появлением положительного характеристического показателя Ляпунова при увеличении интенсивности шума и малой диссипации (рис. 6, а). На рис. 6, б представлены результаты исследования зависимости наклона плато графика $\hat{K}_2(\varepsilon)$ от интенсивности шума. Увеличивая интенсивность шума, можно наблюдать приобретение графиком $\hat{K}_2(\varepsilon)$ наклона, его возрастание, а затем – образование плато, наклон которого уменьшается, а высота – растет. Поскольку хаотическую динамику мы связываем с наличием плато на графике $\hat{K}_2(\varepsilon)$, то его возникновение свидетельствует о появлении хаотического аттрактора. Более того, тот факт, что наклон плато убывает, а его высота увеличивается, говорит о том, что доля перемешивания, обусловленная внутренней динамикой системы, увеличивается по отношению к перемешиванию, вызванному шумом.

Влияние стохастического резонанса на степень перемешивания в фазовом пространстве системы исследуется на примере передемпфированного бистабильного осциллятора, находящегося под действием белого гауссова шума:

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\Omega t + \varphi) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (7)$$

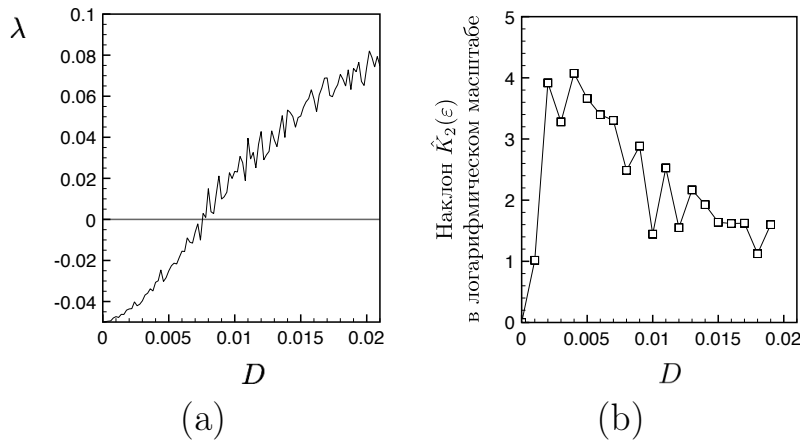


Рис. 6. Индуцированный шумом хаос в системе (6): (а) – зависимость старшего характеристического показателя Ляпунова от интенсивности шума; (б) – зависимость наклона плато на графике $\hat{K}_2(\varepsilon)$ в логарифмическом масштабе от интенсивности шума.

где A и Ω – соответственно амплитуда и частота внешнего сигнала. На рис. 7, а представлена зависимость величины относительной метрической энтропии от интенсивности шума. Относительная метрическая энтропия имеет минимум при интенсивности шума, соответствующей режиму стохастического резонанса в (7).

Для исследования влияния явления синхронизации в присутствии шума на перемешивание в фазовом пространстве системы рассматривались две модели. Первая модель представляла собой систему двух взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля, первый из которых находится под действием белого гауссова шума:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 + (\alpha - x_1^2) y_1 + \gamma (y_2 - y_1) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 x_2 + (\alpha - x_2^2) y_2 + \gamma (y_1 - y_2). \end{cases} \quad (8)$$

На рис. 7, б представлена зависимость величины относительной метрической энтропии от собственной частоты второго осциллятора ω_2 . В области синхронизации $\hat{K}_2$ имеет величину, значительно меньшую, чем в отсутствие эффекта синхронизации. Чтобы получить вторую модель, в первый осциллятор системы (8) добавлено внешнее гармоническое воздействие с амплитудой C_0

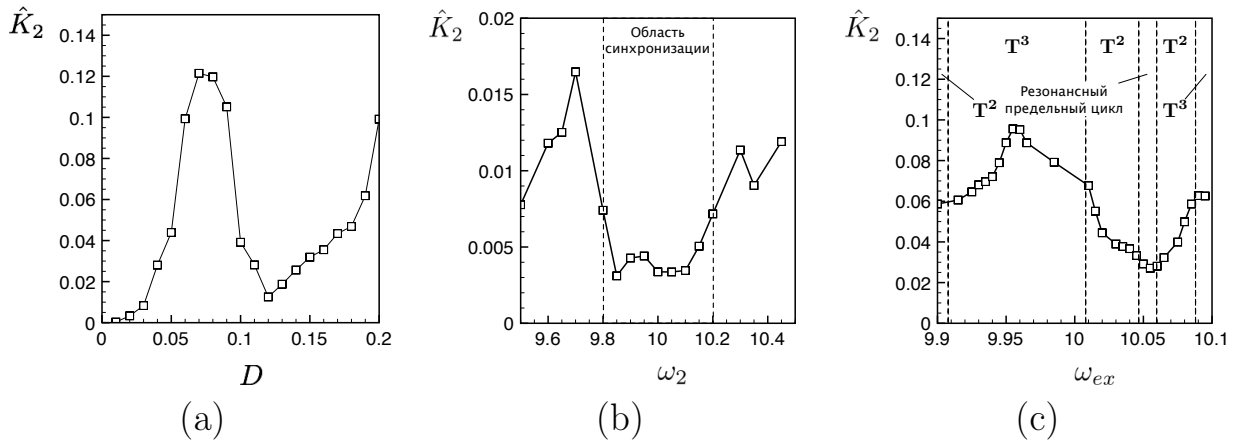


Рис. 7. Влияние нелинейных эффектов на перемешивание: (а) – величина относительной метрической энтропии в зависимости от интенсивности шума в (7); (б) – величина относительной метрической энтропии системы (8) в зависимости от собственной частоты второго осциллятора при $D = 0.001$; (с) – зависимость величины относительной метрической энтропии в системе (9) от частоты внешнего воздействия ω_{ex} при $D = 0.001$.

и частотой ω_{ex} :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 + (\alpha - x_1^2) y_1 + \gamma (y_2 - y_1) + C_0 \cos(\omega_{ex} t) + \sqrt{2D} \xi(t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 x_2 + (\alpha - x_2^2) y_2 + \gamma (y_1 - y_2). \end{cases} \quad (9)$$

С изменением частоты внешнего воздействия наблюдается вначале увеличение относительной метрической энтропии (рис. 7, с, трехчастотные колебания), затем ее уменьшение при переходе к двухчастотным автоколебаниям, уменьшение до минимума при полной фазовой синхронизации, последующее увеличение при выходе в область двухчастотных автоколебаний и достижение ею максимума при трехчастотных колебаниях в системе.

Таким образом, перемешивающее влияние внешнего шумового воздействия на взаимодействующие регулярные автоколебательные системы существенно уменьшается при возникновении синхронизации. Кроме того, перемешивающее влияние шума на динамику системы зависит от размерности соответствующего предельного множества (чем выше размерность – тем сильнее влияние), а сравнение результатов на рис. 7, b и с позволяет сделать вывод о том, что на цикл, лежащий на поверхности двумерного тора, который, в свою очередь, лежит на поверхности трехмерного тора, шум оказывает большее перемешивающее воздействие, чем в случае, когда цикл лежит на поверхности двумерного тора, не являющегося резонансом на торе более высокой размерности. Аналогичная ситуация наблюдается и с торами: в случае двумерного тора, лежащего на поверхности трехмерного, шум вносит большее перемешивание, чем в случае двумерного тора, реализующегося в фазовом пространстве системы (8).

В качестве модели активной среды, демонстрирующей пространственный переход к хаосу предлагается следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = mu(x, t) + v(x, t) - u(x, t)w(x, t) + \gamma \int_0^x H(x', x)u(x', t)dx', \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -u(x, t), \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -gw(x, t) + gI(u(x, t))u(x, t)^2, \end{cases} \quad (10)$$

при этом

$$H(x', x) = \begin{cases} 1, & x - x' \leq 0.1, \\ 0, & x - x' > 0.1, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь u , v , w – фазовые переменные, m , g и γ – управляющие параметры, а $H(x', x)$ – некоторая функция, определяющая характер взаимодействия

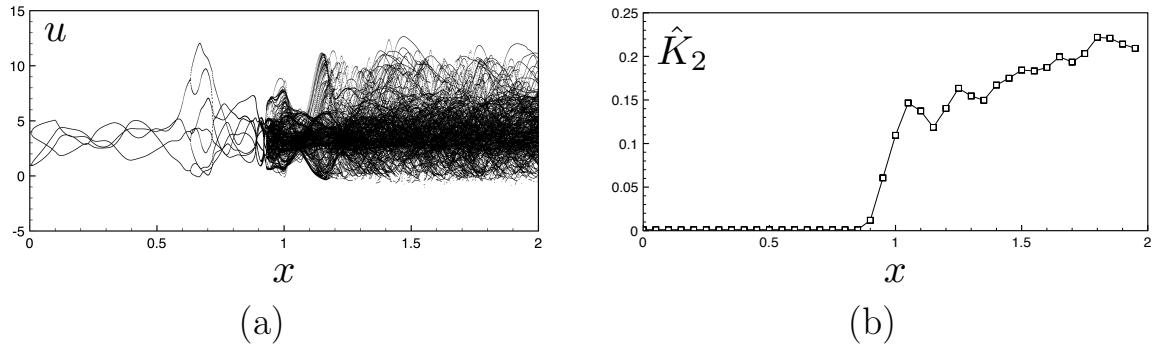


Рис. 8. (a) – сечение фазового пространства активной среды (10) при $m = 0.85$, $g = 0.65$, $\gamma = 5.2$, (b) – величина метрической энтропии элементов среды вдоль пространственной координаты.

элементов среды, находящиеся в координатах x и x' . Для наблюдения пространственного развития хаоса будем использовать следующее сечение. На плоскости (x, u) ставится точка с координатами $(x_0, u(t_0, x_0))$, если в данный момент времени t_0 $v(t_0, x_0) = 0$. Сечение среды (10) при значениях параметров $m = 0.85$, $g = 0.65$, $\gamma = 5.2$ представлено на рис. 8, а. Результаты, представленные на рисунке, свидетельствуют о наличии пространственных бифуркаций удвоения периода в системе (10). Причем мы можем говорить о координатах бифуркаций – точках на оси пространственной координаты x , в которых наблюдается плавный переход от неподвижной точки (во введенном нами отображении) кратности k к неподвижной точке кратности $2k$. К данной среде также был применен метод оценки степени перемешивания в фазовом пространстве, предложенный в первой главе. В отсутствие источников шума величина, даваемая данным методом, соответствует метрической энтропии данной системы. Результаты исследования величины метрической энтропии вдоль пространственной координаты среды представлены на рис. 8, б. Следует отметить, что с увеличением пространственной координаты величина метрической энтропии вначале быстро нарастает, а затем наблюдается ее насыщение.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [11, 12, 20, 21].

В Заключение сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты и выводы

1. В фазовом пространстве динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, реализуется явление перемешивания. Степень перемешивания определяется величиной метрической энтропии Колмогорова-Синая и, в случае динамического хаоса, задается собственной динамикой системы. Однако, любая реальная физическая система всегда находится под влиянием неустраняемых внешних шумов.

Строгое определение энтропии Колмогорова-Синя требует обращения данной величины в бесконечность при добавлении к системе шума сколь угодно малой интенсивности. Введенное в первой главе понятие относительной метрической энтропии позволяет количественно определить степень перемешивания, вызванного шумом относительно данной точности измерений состояния системы.

2. В отсутствие шума введенная величина дает оценку энтропии Колмогорова-Синя динамической системы. При конечном значении точности измерений полученная величина достаточно близка к истинному значению KS-энтропии и может быть связана с характеристическими показателями Ляпунова через неравенство Маргулиса-Рюэля и теорему Песина.
3. Исследование зависимости величины относительной метрической энтропии от точности измерений показало, что хаотической динамике системы в отсутствие шума соответствует плато на графике такой зависимости, причем при добавлении шума в систему данное плато приобретает наклон, который увеличивается с увеличением интенсивности шума, а правая граница плато практически не претерпевает изменений. Таким образом, с помощью введенного понятия относительной метрической энтропии становится возможным отделить перемешивающее влияние шума от перемешивания, вызванного собственной динамикой системы по одной временной реализации.
4. В случае зашумленной системы относительная метрическая энтропия дает более правильную оценку степени перемешивания, чем положительные характеристические показатели Ляпунова. Так, в зашумленной системе Ресслера в режиме хаоса наблюдается уменьшение старшего характеристического показателя Ляпунова с увеличением интенсивности шумового воздействия. При этом относительная метрическая энтропия такой системы увеличивается с увеличением интенсивности шума.
5. Разрушение эффекта синхронизации в системе двух связанных генераторов Ван дер Поля, находящихся под внешним гармоническим воздействием происходит через следующую последовательность касательных бифуркаций. В режиме синхронизации система демонстрирует одночастотные периодические автоколебания, характеризующиеся устойчивым предельным циклом в фазовом пространстве. С изменением частоты внешнего гармонического воздействия происходит седло-узловая бифуркация устойчивого и седлового предельных циклов с образованием устойчивого двумерного тора, который, в свою очередь, лежит на гипер-

поверхности трехмерного тора. Одновременно происходит седло-репеллентная бифуркация двух предельных циклов с образованием седлового двумерного тора, который лежит на гиперповерхности того же трехмерного тора. При дальнейшем изменении частоты воздействия происходит касательная бифуркация устойчивого и седлового двумерных торов. В результате система демонстрирует трехчастотные квазипериодические колебания.

6. Проведенный радиофизический эксперимент полностью подтверждает выводы построенной теории фазовой синхронизации предельного цикла на двумерном торе в окрестности резонанса $1 : 1$.
7. Результаты радиофизического эксперимента по синхронизации предельного цикла на двумерном торе в окрестности резонанса $1 : 3$ позволяют распространить выводы теории фазовой синхронизации на случаи резонансов кратности, отличной от $1 : 1$. Построенная по результатам эксперимента бифуркационная диаграмма качественно повторяет полученную аналитически для резонанса $1 : 1$.
8. В основе механизма потери фазовой синхронизации в цепочке осцилляторов Ван дер Поля также лежит последовательность касательных бифуркаций. Отличие состоит в том, что количество седло-узловых бифуркаций и размерность участвующих в бифуркациях предельных множеств определяются количеством осцилляторов в цепочке.
9. Введенная в первой главе относительная метрическая энтропия позволяет диагностировать возникновение индуцированного шумом хаоса в нелинейной диссипативной системе. На примере осциллятора Дуффинга, находящегося под действием шума, показано возникновение плато в зависимости величины относительной метрической энтропии от точности регистрации. Данное плато характерно для зашумленных хаотических автоколебаний и не наблюдается в случае зашумленных регулярных колебаний.
10. Явление стохастического резонанса снижает степень перемешивания в зашумленной нелинейной системе. На примере передемпфированного бистабильного осциллятора, находящегося под действием шума, в численном эксперименте показано наличие минимума в зависимости величины относительной метрической энтропии от интенсивности шума. При этом минимум наблюдается при том же значении интенсивности шума, что и максимум отношения сигнал/шум, то есть при стохастическом резонансе.

11. Синхронизация гармонических автоколебаний в присутствии шума снижает степень перемешивания в фазовом пространстве системы. В численном эксперименте показано, что в системе двух связанных генераторов Ван дер Поля, находящихся под действием белого гауссова шума, при переходе от не синхронных автоколебаний к режиму синхронизации наблюдается уменьшение величины относительной метрической энтропии. Более того, при синхронизации предельного цикла на торе внешним гармоническим воздействием в присутствии шума наблюдается максимум относительной метрической энтропии при трехчастотных колебаниях системы, уменьшение величины энтропии при захвате одной частоты и минимум относительной метрической энтропии в режиме одночастотных колебаний.
12. Шум фиксированной интенсивности оказывает большее перемешивающее действие на предельный цикл, лежащий на поверхности тора, чем на предельный цикл, не являющийся резонансом на торе. Данный вывод справедлив и для торов: шум вызывает большее перемешивание в случае, если фазовый портрет системы представляет собой эргодический тор, являющийся резонансом на торе большей размерности.
13. Введена модель непрерывной активной среды, демонстрирующей пространственный переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Предложенная модель демонстрирует локализованные в пространстве бифуркации удвоения периода. Развитие хаоса вдоль пространственной координаты также подтверждается результатами исследования относительной метрической энтропии.

Список публикаций

1. Неходцева Е.И., Астахов С.В. Влияние запаздывания связей на эффекты синхронизации хаоса во взаимодействующих кубических отображениях // Нелинейные дни в Саратове для молодых 2005: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ГосУНЦ Колледж, 2005. С. 154–157.
2. Неходцева Е.И., Астахов С.В. Бифуркационный анализ синхронных движений в системе двух взаимодействующих с задержкой кубических отображений // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2006: Материалы научной школы-конференции. Саратов: РИО журнала "Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика", 2007. С. 183–186.
3. Астахов В.В., Неходцева Е.И., Астахов С.В., Шабунин А.В. Влияние задержки в канале связи на режимы полной синхронизации хаотических систем с дискретным временем // Изв. вузов ПНД. 2007. Т. 15, № 5. С. 61–67.

4. Астахов В.В., Астахов С.В., Неходцева Е.И., Шабунин А.В. Влияние задержки в канале связи на полную синхронизацию // Известия Саратовского университета. 2008. Т. 8, № 2. С. 30–34.
5. Неходцева Е.И., Астахов С.В. Синхронизация взаимодействующих с задержкой генераторов с инерционной нелинейностью // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2007: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ “Наука”, 2008. С. 136–139.
6. Анищенко В.С., Астахов С.В. Относительная энтропия как мера степени перемешивания зашумленных систем // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, № 21. С. 1–8.
7. Anishchenko V., Astakhov S. Relative Kolmogorov Entropy of a Chaotic System in the Presence of Noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, no. 9. Pp. 2851–2855.
8. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
9. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Coupled oscillators under periodic force // Europhysics News. 2009. Vol. 40, no. 5. P. 8.
10. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237–252.
11. Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Исследование пространственного перехода к временному хаосу в активной среде с однонаправленной связью // Изв. вузов ПНД. 2008. Т. 16, № 2. С. 122–130.
12. Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E. Diagnostics of the Degree of Noise Influence on a Nonlinear System Using Relative Metric Entropy // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. Vol. 15, no. 2-3. Pp. 261–273.
13. Астахов С.В. Численная оценка энтропии Колмогорова в хаотических системах // Нелинейные дни в Саратове для молодых 2005: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ГосУНЦ Колледж, 2005. С. 100–103.
14. Астахов С.В. Численная оценка энтропии Колмогорова в хаотических системах // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов-2006” секция “Физика”. Сборник тезисов. Т. 1. Москва: Физический факультет МГУ, 2006. С. 139.
15. Астахов С.В. Численное исследование статистических характеристик хаотических систем в присутствии шума // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2006: Материалы научной школы-конференции. Саратов: РИО журнала “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика”, 2007. С. 81–84.
16. Астахов С.В. Относительная метрическая энтропия зашумленной хаотической системы // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” [Электронный ресурс] / МГУ им. М.В. Ломоносова. Издательский центр Факультета журналистики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.

17. Feoktistov A., Astakhov S., Anishchenko V. Experimental Analysis of the Bifurcation Mechanism of Synchronization of a Resonant Limit Cycle on a Torus // 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Rapperswil, Switzerland: 2009. Pp. 114–117.
18. Anishchenko V., Nikolaev S., Astakhov S., Kurths J. Phase and Frequency Synchronization of Quasy-Periodic Oscillations // NDES' 2008 Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NWP-1) / Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences. Nizhny Novgorod, Russia: Институт прикладной физики РАН, 2008. Pp. 6–7.
19. Феоктистов А.В., Астахов С.В. Экспериментальное исследование эффекта внешней синхронизации квазипериодических автоколебаний // Статистическая физика и информационные технологии: Материалы Международной школы-семинара "StatInfo-2009". Саратов: ООО ИЦ "Наука", 2009. С. 107.
20. Астахов С.В. Диагностика хаотической динамики в нелинейной системе с шумом по временной реализации // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2007: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ "Наука", 2008. С. 82–85.
21. Астахов С.В. Исследование влияния шума на поведение нелинейных систем по временной реализации методом относительной метрической энтропии // Статистическая физика и информационные технологии: Материалы Международной школы-семинара "StatInfo-2009". Саратов: ООО ИЦ "Наука", 2009. С. 30.