На правах рукописи

Тышкевич Сергей Викторович

Решение экстремальных задач теории приближений в комплексной плоскости

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Лукашов Алексей Леонидович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Арестов Виталий Владимирович
	доктор физико-математических наук, профессор Лукомский Сергей Фёдорович
Ведущая организация:	Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН

Защита состоится «18» ноября 2010 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ212.243.15 при Саратовском государственном университете им. Н. Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская 83, IX корп.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан «____» октября 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент В. В. Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена проблемам приближения многочленами и их обобщениями на замкнутых подмножествах единичной окружности. Один из важнейших кругов вопросов теории приближений на замкнутых множествах объединяется названием "полиномы и рациональные дроби, наименее уклоняющиеся от нуля" и берёт начало с мемуара П. Л. Чебышёва "Теория механизмов, известных под названием параллелограммов", представленного в Академию Наук в 1853 году.

Рассматриваются "рациональные тригонометрические" функции вида

$$r_N(\varphi) = \\ = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \quad (1)$$

$N \in \mathbb{N}; A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 \neq 0,$ — фиксированные числа;
$\mathcal{A}(\varphi)$ — фиксированный действительный тригонометрический полином порядка $a \leq N$, положительный на заданной конечной системе отрезков

$$\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2] \cup \ldots \cup [\alpha_{2l-1}, \alpha_{2l}],$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2l},\ 0 < \alpha_{2l} - \alpha_1 < 2\pi;$$

их алгебраические аналоги

$$\frac{x^N + c_1 x^{N-1} + \ldots + c_N}{\sqrt{A(x)}}, \quad (2)$$

где $A(x)$ — фиксированный действительный многочлен степени $a \leq N$, положительный на $E \subset [-1, 1]$.

Дроби вида (2), наименее уклоняющиеся от нуля на $[-1, 1]$, были найдены П. Л. Чебышёвым[1] и А. А. Марковым[2]. Различным их обобщениям посвящена обширная литература. Среди авторов, внесших существенный вклад в развитие этой теории, отметим Н. И. Ахиезера, А. Б. Богатырёва, Е. И. Золотарёва, В. И. Лебедева, А. Л. Лукашова, В. А. Малышева, Н. Н. Меймана, Ф. Пехерсторфера, М. Л. Содина, П. М. Юдицкого.

Тригонометрический аналог дробей Чебышёва-Маркова был найден впервые, по-видимому, Г. Сегё [3] (для $\mathcal{E} = [0, 2\pi]$). Различные их обобщения

[1] *Чебышёв, П. Л.* Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.

[2] *Марков, А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и функций, наименее уклоняющихся от нуля. — М., Л.: Гостехтеориздат, 1948.

[3] *Szegö, G.* On a Problem of the best Approximation // Abh. Math. Univ. Hamburg. — 1964. — Vol.27. — Pp.193–198.

рассматривали В. С. Виденский, Э. Крупицкий, А. Л. Лукашов, А. П. Петухов, Ф. Пехерсторфер, Р. Штайнбауер.

Полное описание решения задачи Чебышёва-Маркова на нескольких отрезках для фиксированного знаменателя, являющемся произвольным многочленом, степень которого меньше степени числителя, положительным на этой системе отрезков, а также со знаменателем, представляющим собой квадратный корень из многочлена, положительного на выпуклой оболочке системы отрезков, дано в ряде работ А. Л. Лукашова[4]. Там же получены представления решений аналога задачи Чебышёва-Маркова для тригонометрических полиномов на нескольких отрезках.

Вопросы приближения функций комплексного переменного получили свое развитие несколько позже, чем аналогичные вопросы для функций действительного переменного. Среди математиков, получивших значительные в этом направлении результаты, следует отметить В. С. Виденского, К. Дэтея, А. Н. Колмогорова, Ф. Пехерсторфера, Е. Я. Ремеза, Дж. П. Тирана, Дж. Л. Уолша, Р. Фройнда, П. М. Юдицкого и др.

Известно, что полиномы Чебышёва, нули которых расположены на фиксированном компакте комплексной плоскости, применяются, например, при изучении свойств его трансфинитного диаметра, для оценки оптимальной ошибки экстраполяции с конечного множества целых функций из класса Винера. Поэтому задачи о многочлене с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на нескольких дугах единичной окружности, нули которого расположены на этих дугах, и их рациональных аналогах весьма актуальны.

И. В. Беляковым[5] была рассмотрена задача наименьшего уклонения от нуля отображений Чебышёва, свойства которых во многом повторяют свойства классических многочленов Чебышёва, на дельтоиде (области Штейнера). В связи с этим представляют интерес аналоги таких отображений для рациональных функций с фиксированным знаменателем - так называемые квазиполиномы.

Предметом исследования являются многочлены и их обобщения, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах единичной окружности.

---

[4] *Lukashov, A. L.* On Chebyshev-Markov rational function over several intervals // J. Approx. Theory. — 1998. — Vol.24. — Pp.333–352.

Лукашов, А. Л. Алгебраические дроби Чебышёва и Маркова на нескольких отрезках // Analysis Math. — 1998. — Vol.24. — Pp.111–130.

[5] *Беляков, И. В.* Минимальное отклонение от нуля отображений Чебышёва, соответствующих равностороннему треугольнику // Матем. заметки. — 1996. — Т.59, № 6. — С.919–921.

Цель работы — решение некоторых экстремальных задач теории приближений в комплексной плоскости, а именно:

- найти многочлен с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля на нескольких дугах единичной окружности, нули которого расположены на этих дугах;
- найти рациональную функцию с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющуюся от нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах;
- найти многочлен с фиксированными старшим и свободным коэффициентами, наименее уклоняющийся от нуля на произвольной дуге окружности;
- построить представляющий собой линейную комбинацию произведений Бляшке обобщённый полином (квазиполином), наименее уклоняющийся от нуля на единичной окружности;
- найти комплексный многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на двух отрезках и удовлетворяющий дополнительному интерполяционному условию.

Методы исследования. При решении поставленных задач применяются общие методы функционального анализа, теории функции комплексного переменного, теории потенциала и теории приближений.

Научная новизна результатов. В работе впервые найден явный вид многочлена с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля на нескольких дугах единичной окружности, нули которого расположены на этих дугах (в случае рациональности равновесных мер дуг); этот результат обобщён на случай рациональных функций с фиксированным знаменателем, т.е. найден явный вид рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах при дополнительных условиях на взаимное расположение дуг и нулей знаменателя; найден многочлен с фиксированными старшим и свободном коэффициентами, наименее уклоняющийся от нуля на произвольной дуге окружности; построен обобщённый полином, представляющий собой линейную комбинацию произведений Бляшке, наименее уклоняющийся от нуля на единичной окружности; найден многочлен чётной степени, наименее уклоняющийся от нуля на двух отрезках и удовлетворяющий дополнительному интерполяционному условию.

Все результаты, полученные соискателем и вошедшие в диссертационную работу, являются новыми и строго доказанными.

Практическая ценность полученных результатов. Основные результаты работы носят теоретический характер и могут найти применения в теории приближений, теории ортогональных многочленов и рациональных функций; они могут быть также использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов.

Личный вклад. Все научные результаты, вошедшие в диссертационную работу, получены ее автором лично и самостоятельно. В совместных публикациях [3, 4] научному руководителю принадлежит постановка задачи, в работе [2] — явное представление полиномов для случая одной дуги ($l = 1$).

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры теории функций и приближений и научно-практических конференциях сотрудников Саратовского государственного университета (Саратов, 1998-2009);
- Международной конференции по теории приближений и её приложениям, посвящённой памяти В. К. Дзядыка (Киев, 1999);
- Международной конференции “Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании” (Саратов – Энгельс, 2002);
- 11-ой и 13-ой Саратовских зимних школах “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 2002, 2006);
- Международной конференции “Крымская осенняя математическая школа–симпозиум” (Симферополь, Севастополь, 2004);
- 15-ой Саратовской зимней школе “Современные проблемы теории функций и их приложения”, посвящённой 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 2010).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах, из которых 3 — в научных изданиях, рекомендованных ВАК.

Положения, выносимые на защиту.

- точное решение задачи о многочлене с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на нескольких дугах единичной окружности, нули которого расположены на этих дугах (в случае рациональности равновесных мер дуг);
- явный вид рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от

нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах при дополнительных условиях на взаимное расположение дуг и нулей знаменателя;

- параметрическое представление многочлена с фиксированными старшим и свободном коэффициентами, наименее уклоняющийся от нуля на произвольной дуге окружности;
- точное решение задачи об обобщённом полиноме, представляющем собой линейную комбинацию произведений Бляшке, наименее уклоняющемся от нуля на единичной окружности;
- явный вид многочлена чётной степени, наименее уклоняющийся от нуля на двух отрезках и удовлетворяющий дополнительному интерполяционному условию.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав и библиографии, включающей 82 наименования. Каждая глава разбита на разделы, всего в диссертации 8 разделов. Общий объем работы 104 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, определена ее цель, описана структура диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер и посвящена представлениям экстремальных в смысле равномерной нормы тригонометрических полиномов на нескольких отрезках. В ней приводятся необходимые сведения из теории потенциала и некоторые результаты работ А. Л. Лукашова, Ф. Пехерсторфера и Р. Штайнбауера[6], используемые в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена решениям двух экстремальных задач: о многочлене с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на нескольких дугах окружности, с нулями на этих дугах (в случае рациональности равновесных мер дуг), и о рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких дугах окружности, при ограничении на расположение нулей и дополнительных условиях на взаимное расположение дуг окружности и нулей знаменателя. В разде-

[6] *Лукашов, А. Л.* Неравенства для производных рациональных функций // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т.68, № 3. — С.115–138.

Lukashov, A. L., Peherstorfer, F. Zeros of polynomials orthogonal on two arcs of the unit circle // J. Approx. Theory. — 2005. — Vol.132. — Pp.42–71.

Peherstorfer, F., Steinbauer, R. Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle. Orthogonal polynomials with periodic reflection coefficients // J. Approx. Theory. — 1996. — Vol.87. — Pp.60–102.

ле 2.1 этой главы рассматривается первая из задач, её решение приводится в теореме 5.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2l}$ таковы, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2l},\ 0 < \alpha_{2l} - \alpha_1 < 2\pi,$$

и

$$\begin{aligned} &\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{E}_k,\ \mathcal{E}_k = [\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]\,, \\ &\Gamma_{\mathcal{E}} = \{z = e^{i\varphi} : \varphi \in \mathcal{E}\}, \\ &\Gamma_{\mathcal{E}_k} = \{z = e^{i\varphi} : \varphi \in \mathcal{E}_k\}. \end{aligned}$$

На множестве $\Gamma_{\mathcal{E}}$ будем рассматривать многочлены

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Класс таких многочленов обозначим $\mathbf{P}_N(\mathcal{E})$.

Теорема 5. *Если гармонические меры дуг $\Gamma_{\mathcal{E}_k}$, $k = \overline{1, l}$, — рациональные числа вида $\frac{p}{N}$, то минимум в экстремальной задаче*

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |P_N^*(z)| = \min_{P_N \in \mathbf{P}_N(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |P_N(z)|$$

доставляют многочлены

$$P_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N}{2}\varphi} \cos\left(\frac{\pi N}{2} \int\limits_{\mathcal{E} \cap [0, \varphi]} \Big(\overline{\omega}(\infty, \xi) + \overline{\omega}(0, \xi) \Big)\, d\xi \right),$$

где

$$\overline{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega\left(z,\ \Gamma_{\mathcal{E}} \cap \{e^{i\varphi} :\ b \le \varphi \le x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}\right)$$

— плотность гармонической меры, $|\varepsilon| = 1$, A_N^* — подходящая положительная константа.

В разделе 2.2 второй главы изучается задача о рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких дугах окружности, при ограничении на расположение нулей и дополнительных условиях на взаимное расположение дуг окружности и нулей знаменателя. Её решение даёт теорема 6.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2l}$ таковы, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2l},\ 0 < \alpha_{2l} - \alpha_1 < 2\pi,$$

и

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{E}_k,\ \mathcal{E}_k = [\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}],$$
$$\Gamma_{\mathcal{E}} = \{z = e^{i\varphi} : \varphi \in \mathcal{E}\},$$
$$\Gamma_{\mathcal{E}_k} = \{z = e^{i\varphi} : \varphi \in \mathcal{E}_k\}.$$

На множестве $\Gamma_{\mathcal{E}}$ будем рассматривать функции

$$R_N(z) = \frac{P_N(z)}{\sqrt{D(z)}},$$

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_{\mathcal{E}}, \quad j = \overline{1, N},$$

$D(z)$ — многочлен степени $2a$,

$$z^{-a} D(z) > 0 \text{ при } z \in \Gamma_{\mathcal{E}};$$

ветвь корня выбирается таким образом, что

$$\sqrt{z^{-a} D(z)} > 0 \text{ при } z \in \Gamma_{\mathcal{E}}.$$

Класс таких функций обозначим $\mathbf{R}_N^D(\mathcal{E})$.

Теорема 6. *Если для каждого j, $j = 1, \ldots, l$, удвоенная сумма гармонических мер дуги $\Gamma_{\mathcal{E}_j}$ относительно нулей многочлена*

$$D(z) = \prod_{j=1}^{m^*} (z - z_j)^{m_j}$$

является натуральным числом, точнее

$$(N - a)\omega_j(\infty) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m^*} m_k \omega_j(z_k) = q_{j-1}^{(N)},$$

$$q_{j-1}^{(N)} \in \mathbb{N}, \quad j = 2, \ldots, l,$$

то минимум в экстремальной задаче

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |R_N^*(z)| = \min_{R_N \in \mathbf{R}_N^D(\mathcal{E})} \max_{z \in \Gamma_{\mathcal{E}}} |R_N(z)|$$

доставляют функции

$$R_N^*(e^{i\varphi}) = A_N^* \varepsilon e^{i\frac{N-a}{2}\varphi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \int\limits_{\mathcal{E}\cap[b,\varphi]} \Big((N-a)(\overline{\omega}(\infty,\xi)+\overline{\omega}(0,\xi))+\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \overline{\omega}(z_j,\xi)\Big)\, d\xi\right),$$

$|\varepsilon| = 1$, A_N^* — *подходящая положительная константа.*

Третья глава диссертации посвящена следующим задачам: о наименее уклоняющемся от нуля на произвольной дуге окружности многочлене с фиксированными старшим и свободным коэффициентами, о наименее уклоняющихся от нуля на окружности квазиполиномах, т.е обобщённых полиномах, представляющих собой линейную комбинацию произведений Бляшке, и о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на двух отрезках и удовлетворяющем интерполяционному условию. Первая из названных задач рассматривается в разделе 3.1 этой главы.

На множестве

$$\Gamma_{\mathcal{E}} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\},$$

где

$$\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2],\ 0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi,$$

будем рассматривать многочлены

$$p_N(z) = az^N + a_{N-1}z^{N-1} + \ldots + a_1 z + b,$$

$$a,\ b,\ a_{N-1}, \ldots, a_1 \in \mathbb{C},\ a = \bar{b},\ a \neq 0.$$

Класс таких многочленов обозначим $\mathbf{P}_N^{(a)}$.

Опишем решение $p_N^*(z)$ задачи

$$\max_{z\in\Gamma_{\mathcal{E}}} |p_N^*(z)| = \min_{p_N \in \mathbf{P}_N^{(a)}} \max_{z\in\Gamma_{\mathcal{E}}} |p_N(z)| \tag{3}$$

в зависимости от

$$\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2].$$

Определим число κ

$$\kappa^2 = (e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}, e^{i\alpha_4}),$$

где

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

— ангармоническое отношение четырёх точек z_1, z_2, z_3, z_4.

Обозначим:

$$K = K(\kappa) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода с модулем κ, $0 < \kappa < 1$;

$$K' = K'(\kappa') = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(\kappa')^2 x^2)}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода с модулем κ', $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$;

$snz = sn(z, \kappa)$, $cnz = cn(z, \kappa) = \sqrt{1 - sn^2 z}$, $dnz = dn(z, \kappa) = \sqrt{1 - \kappa^2 sn^2 z}$

— эллиптические функции Якоби.

Рассмотрим частично открытый прямоугольник

$$\square = \{u \in \mathbb{C} : -K < \operatorname{Re} u < 0, -K' < \operatorname{Im} u \leq K'\}.$$

Известно, что конформное отображение прямоугольника $\square$ на область

$$\mathbb{C} \setminus ([-1, \alpha] \cup [\beta, 1]), \ -1 < \alpha < \beta < 1,$$

задаётся формулой

$$w(u) = \frac{sn^2 u \ cn^2 a + cn^2 u \ sn^2 a}{sn^2 u - sn^2 a} = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2(sn^2 u - sn^2 a)},$$

где

$$\alpha = 1 - 2sn^2 a,$$

$$\beta = 2sn^2(K + a) - 1 = 2\frac{cn^2 a}{dn^2 a} - 1,$$

$$0 < a < K.$$

Отображение

$$z = \frac{w - i \tan \frac{\alpha_1}{2}}{w + i \tan \frac{\alpha_1}{2}}$$

переводит верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга, при этом отрезки $[-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$ перейдут в дуги $\Gamma_{\mathcal{E}_1} \cup \Gamma_{\mathcal{E}_2}$, где

$$\mathcal{E}_1 = [\alpha_1, \alpha_2], \ \mathcal{E}_2 = [\alpha_3, \alpha_4].$$

Поэтому конформное отображение $z = \phi(u)$, представляющее собой композицию отображений $w = w(u)$ и $z = z(w)$, переводит прямоугольник $\square$ на область $\mathbb{C} \setminus \Gamma_{\mathcal{E}}$ и задаётся формулой

$$z = \phi(u) = \frac{2sn^2 u \sin\frac{\alpha_1}{2} e^{i\alpha_2/2} + (\alpha - 1)e^{i\alpha_1/2}}{2sn^2 u \sin\frac{\alpha_1}{2} e^{-i\alpha_2/2} + (\alpha - 1)e^{-i\alpha_1/2}}, \tag{4}$$

где

$$\alpha = -\tan\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_2}{2} = 1 - 2sn^2 a,$$
$$\beta = -\tan\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2} = 2\frac{cn^2 a}{dn^2 a} - 1.$$

Функция $z = \phi(u)$, определяемая по формуле (4), является чётной эллиптической функцией второго порядка с примитивными периодами $2K$ и $2iK'$ и простыми полюсами $\pm\zeta$ в параллелограмме периодов

$$\{u \in \mathbb{C} : -K \le \operatorname{Re} u < K, -K' < \operatorname{Im} u \le K'\},$$

где $\zeta \in \square$ определяется соотношением

$$sn^2\zeta = \frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} e^{i\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}}{\sin\alpha_1 \sin\frac{\alpha_2}{2}}.$$

По теореме о представлении эллиптических функций через тэта-функции H функция $\phi(u)$ может быть записана в виде

$$\phi(u) = c\frac{H(u-\overline{\zeta})H(u+\overline{\zeta})}{H(u-\zeta)H(u+\zeta)},$$

где константа c определяется из равенства $\phi(0) = e^{i\alpha_1}$.

Основной результат этого раздела сформулирован в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть $p_N^*(z)$ — решение задачи* (3).

1) Если отрезок $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$, содержит N точек

$$\varphi_{k,N} = -\frac{2\gamma}{N} + \frac{2\pi k}{N},\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos\gamma = \frac{Re\, b}{|b|},\ \sin\gamma = -\frac{Im\, b}{|b|},$$

взятых подряд, то

$$p_N^*\left(e^{i\varphi}\right) = M_N e^{i\frac{N}{2}\varphi}\cos\left(\frac{N}{2}\varphi + \gamma\right).$$

2) Если отрезок $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$, таков, что существуют $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ и v, при которых

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = u_k - v, \\ &\alpha_2 \ge u_k + 2\arcsin\left(\sin\frac{v}{2}\cos\frac{\pi}{N}\right), \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = u_k + v, \\ &\alpha_1 \le u_k + 2\arcsin\left(\sin\frac{v}{2}\cos\frac{\pi(N-1)}{N}\right), \end{aligned}$$

то

$$p_N^*\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{M_N}{2^{N-1}} e^{i\frac{N}{2}\varphi} \sin^N\frac{v}{2}\cos\left(N\arccos\frac{\sin\frac{\varphi-u_k}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\right),$$

где

$$u_k = \frac{2}{N} sign\left(-\frac{Im\, b}{|b|}\right)\arccos\frac{Re\, b}{|b|} + \frac{4\pi k}{N},\ k = \overline{0, N-1}.$$

3) Если условия ни одного из вышеперечисленных вариантов не выполняются, то найдутся α_3 и α_4,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4,$$

$$0 < \alpha_4 - \alpha_1 < 2\pi,$$

такие, что выполняется равенство

$$2N\, Re\,\zeta = -(N-1)K,$$

и

$$p_N^*\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{M_N}{2}\left(F_N(u) + F_N(-u)\right),$$

где

$$F_N(u) = \varepsilon_N\left(\frac{H(u+\overline{\zeta})}{H(u-\zeta)}\right)^N,$$

$|\varepsilon_N| = 1$, M_N — подходящая положительная константа, $z = e^{i\varphi} = \phi(u)$ задаётся формулой (4).

Задача о наименее уклоняющихся от нуля на окружности обобщённых полиномах, представляющих собой линейную комбинацию произведений Бляшке (квазиполиномах) рассматривается во втором разделе третьей главы. Решение этой задачи даёт, опираясь на критерий Колмогорова, теорема 8.

Пусть

$$c_i,\ c_i' \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, N-1,\ N = 1, 2, \ldots;\ c_0 = 1,\ c_0' = 1;$$
$$a_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \ldots, N;$$
$$S = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = 1\}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_N$ при фиксированных числах a_k множество функций $R_N(z)$ вида

$$R_N(z) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \prod_{k=1}^{N-i} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z} + \sum_{i=0}^{N-1} c_i' \prod_{k=1}^{N-i} \frac{1 - \overline{a}_k z}{z - a_k}. \tag{5}$$

Теорема 8. *Среди функций вида* (5) *минимум в экстремальной задаче*

$$\max_{z\in S} |R_N^*(z)| = \min_{R_N \in \mathbf{R}_N} \max_{z \in S} |R_N(z)|$$

достигается только для функции

$$R_N^*(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z} + \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - \overline{a}_k z}{z - a_k}.$$

Раздел 3.3 третьей главы посвящён задаче о комплексном многочлене чётной степени, наименее уклоняющемся от нуля на двух отрезках и удовлетворяющем интерполяционному условию.

Пусть Π — некоторое множество многочленов степени не выше $2N$, заданных на системе отрезков $E = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$, т.е. $\Pi \in \mathbf{P}_{2N}$,

$$\mathbf{P}_{2N} = \left\{ c_{2N} z^{2N} + c_{2N-1} z^{2N-1} + \ldots + c_0:\ c_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, \ldots, 2N,\ z \in E \right\}.$$

Рассмотрим задачу аппроксимации вида

$$\max_{z \in E} \left| p_{2N}^*(z) \right| = \min_{p_{2N}(z) \in \mathbf{P}_{2N},\ p_{2N}(a) = 1} \max_{z \in E} \left| p_{2N}(z) \right|, \tag{6}$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus E$.

Теорема 9. *Пусть* $a = iR,\ R \in \mathbb{R}$.

Среди многочленов класса $\mathbf{P}_{2N}$ *минимум в экстремальной задаче* (6) *достигается только для многочлена*

$$p_{2N,a}^*(z) = \frac{T_N\left(\frac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right)}{T_N\left(\frac{-2R^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right)},$$

причём

$$\min_{p_{2N}(z)\in\mathbf{P}_{2N},\ p_{2N}(a)=1}\ \max_{z\in E}\big|p_{2N}(z)\big| = c_{2N,a},$$

где

$$c_{2N,a} = \frac{1}{2^{N-1}\left|T_N\left(\frac{-2R^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\right|}.$$

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Тышкевич, С. В.* О чебышёвских полиномах на дугах окружности / С. В. Тышкевич // *Матем. заметки.* — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 952–954.

[2] *Лукашов, А. Л.* Экстремальные полиномы на дугах окружности с нулями на этих дугах / А. Л. Лукашов, С. В. Тышкевич // *Известия НАН Армении. Математика.* — 2009. — Т. 44, № 3. — С. 5–14.

[3] *Лукашов, А. Л.* Экстремальные рациональные функции на дугах окружности с нулями на этих дугах / А. Л. Лукашов, С. В. Тышкевич // *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика.* — 2009. — Т. 9, № 1. — С. 8–13.

[4] *Лукашов, А. Л.* Многочлены с фиксированными старшим и свободным коэффициентами, наименее уклоняющиеся от нуля на дуге окружности / А. Л. Лукашов, С. В. Тышкевич // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 15-й Сарат. зимней школы, посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 106–108.

[5] *Тышкевич, С. В.* Чебышёвские полиномы на дугах единичной окружности / С. В. Тышкевич // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. — Т. 8. — С. 141–143.

[6] *Тышкевич, С. В.* О квазиполиномах, наименее уклоняющихся от нуля на заданных множествах / С. В. Тышкевич // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. — Т. 5. — С. 118–121.

[7] *Тышкевич, С. В.* Задача аппроксимации комплексными полиномами на $[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1]$ с интерполяционным условием / С. В. Тышкевич // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы, посвящённой памяти выдающихся профессоров МГУ Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. — Саратов: Изд-во ГосУНЦ Колледж, 2002. — С. 212–213.

[8] *Тышкевич, С. В.* Задача аппроксимации комплексными полиномами на заданном множестве с интерполяционным условием / С. В. Тышкевич // Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании. Тр. междунар. конф. — Саратов: Научная книга, 2002. — С. 125–126.

Работы [1–3] опубликованы в журналах, включённых ВАК в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание учёной степени доктора и кандидата наук.

Подписано в печать 08.10.10.
Формат 60× 84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Компьютер Модерн.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 120. Заказ 86.

Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.