

На правах рукописи

ЗАХАРОВА Анна Сергеевна

АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРАХ ХАОСА
И ЗАШУМЛЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ

01.04.03 - радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов - 2010

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Вадивасова Т.Е.,

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент Короновский А.А.
кандидат физико-математических наук,
доцент Розанов А.В.

Ведущая организация: Саратовский государственный
технический университет.

Защита состоится 9 сентября 2010 г. в 15 часов 30 мин. на заседании специализированного диссертационного совета Д.212.243.01 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан июня 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Аникин В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность работы

Процессы, протекающие в реальных системах любой природы, в большинстве случаев нельзя рассматривать как чисто случайные (стохастические) или чисто детерминированные (динамические). Они, как правило, являются результатом совместного действия детерминированных и случайных сил. Воздействие случайных сил порождает флуктуации – случайные отклонения физических величин от их средних значений. Впервые проблема влияния шума на процессы в нелинейных динамических системах стала рассматриваться в рамках статистической радиофизики. В классических трудах представителей радиофизической школы (Р.И. Стратоновича, А.Н. Малахова, С.М. Рытова и др.) была развита теория зашумленного автогенератора, исследовано явление синхронизации в присутствии шума, рассмотрен ряд других нелинейных стохастических задач. В классической теории зашумленного квазигармонического генератора широко применяется амплитудно-фазовый подход к описанию колебаний. Задачи, связанные с расчетом характеристик зашумленных колебаний, их синхронизацией, бифуркациями в присутствии шума и различными вызванными шумом эффектами, типичны не только для статистической радиофизики, но могут быть отнесены к широкому классу нелинейных динамических систем. Исследование флуктуаций в нелинейных динамических системах различной природы и анализ влияния случайных воздействий на наблюдаемые режимы поведения, бифуркации и статистические характеристики колебаний составляют важную задачу, как с точки зрения фундаментальной теории, так и в свете практических приложений. Этим вопросам посвящены монографии Н.Г. Ван Кампена, К.В. Гардинера, В. Хорстхемке и Р. Лефевра, Л. Арнольда, А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина, Z. Risken.

Одним из важных вопросов, касающихся поведения нелинейных зашумленных систем, является вопрос о том, как повлияет шум на бифуркации режимов системы и что собой собственно представляют бифуркации в присутствии шума. Имеется немало работ, посвященных исследованию стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций динамических систем в присутствии шума (монографии В. Хорстхемке и Р. Лефевра, Л. Арнольда, (работы L. Schimansky-Geier и H. Herzel, K. Wiesenfeld, R. Lefever и J. Turner, L. Franzoni, N. Sri Namachshivaya, G. Hu, T. Ditzinger, L. Arnold, N. Sri Namachshivaya, K. R. Schenk-Yoppé, P.S. Landa, A.A. Zaikin, B. Lindner, L. Schimansky-Geier, I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko и др.) Однако целост-

ная картина стохастических бифуркаций в нелинейных системах с различной статистикой шума пока еще не сложилась. В описании стохастических бифуркаций до настоящего времени остается много неясного, начиная с формальных определений и кончая наблюдаемыми эффектами. Само определение стохастической бифуркации, как качественного изменения вероятностного распределения, не является однозначным. Так в ряде случаев можно наблюдать качественные изменения вероятностного распределения мгновенной амплитуды колебаний, в то время как вероятностное распределение для исходных динамических переменных не претерпевает заметных изменений. Не ясно, можно ли считать качественное изменение распределения мгновенной амплитуды особым случаем Р-бифуркации и какие наблюдаемые эффекты могут быть с ней связаны.

Известно, что в бистабильных генераторах периодических колебаний с аддитивным белым шумом вблизи седло-узловой бифуркации с ростом интенсивности шума можно наблюдать рост меры когерентности (работы G. Hu, T. Ditzinger, B. Lindner, O.V. Ushakov et al.). Мере когерентности принято оценивать отношением высоты спектрального пика к его относительной ширине. Такой эффект обнаружен и в окрестности других типов бифуркаций, таких как суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа и бифуркация удвоения периода (работы K. Wiesenfeld, A. Neiman et al.). Однако только в бистабильном генераторе с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа и касательной бифуркацией предельных циклов шум может вызвать “истинный” эффект когерентного резонанса, заключающийся в сужении спектральной линии с ростом интенсивности шума. Возникает вопрос, можно ли связать данный эффект с качественным изменением стационарного распределения амплитуды? Не выяснено также, что произойдет в случае воздействия на систему цветного шума и как повлияет на наблюдаемые явления неизохронность системы? Ответить на эти вопросы представляется особенно важным, так как бистабильное поведение, связанное с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, как и свойство неизохронности колебаний, типичны для широкого класса динамических систем, например, для моделей генных осцилляторов (например, моделей, рассмотренных Этот эффект объясняют особенностями поведения J. Nasty et al., A. Koseska et al.).

Кроме нерегулярного поведения, вызванного действием шума, автоколебательная система сама, в силу свойств нелинейного детерминированного оператора эволюции, может порождать шумоподобные (хаотические) колебания. Хаотические колебания обладают рядом общих черт с зашумленными периодическими колебаниями. Особенно заметным сходством с

зашумленным периодическим режимом обладают хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора. Такое сходство отмечалось многими авторами, например, в работах J.D. Farmer, А.С. Пиковского, М.Г. Розенблюма, J. Kurths и стало предметом специального исследования в работах В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасовой, Г.И. Стрелковой и др. Спиральный хаотический аттрактор представляет собой очень распространенный пример негиперболического хаотического аттрактора, типичный для широкого класса динамических систем. Для спирального хаотического аттрактора характерно почти регулярное вращение фазовой траектории вокруг состояния равновесия седло-фокусного типа и наличие четко выраженного спектрального максимума на частоте, соответствующей средней частоте вращения. К спиральному аттрактору можно успешно применить амплитудно-фазовое описание. Переход к амплитудно-фазовому представлению позволяет не только качественно, но и количественно сопоставить хаотические автоколебания со случайным процессом, протекающим в квазигармоническом автогенераторе с шумом. Недавно полученные в работах В.С. Анищенко и соавторов результаты компьютерного моделирования и натурных экспериментов показывают, что несмотря на сложное поведение мгновенной амплитуды хаотических колебаний в режиме спирального аттрактора, многие их важнейшие характеристики определяются поведением именно мгновенной фазы. Хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора с точки зрения корреляционно-спектральных характеристик могут приближенно рассматриваться как узкополосный (гармонический) шум. В то же время гармонический шум является классической моделью автоколебаний квазигармонического генератора под действием шума. Важной характеристикой колебаний, как в случае зашумленного генератора, так и в случае хаотического генератора является коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы. Именно он в основном определяет скорость спада корреляций и ширину основной спектральной линии колебаний, как в хаотическом, так и в зашумленном генераторах и, таким образом, является важной характеристикой скорости перемешивания. Несмотря на вышесказанное, аналогия между генератором спирального хаоса и периодическим генератором в присутствии шума исследована еще не до конца. Можно выделить целый ряд нерешенных проблем. Не было установлено, как повлияют на динамику мгновенной фазы достаточно быстрые флуктуации амплитуды, имеющиеся в генераторе спирального хаоса, а также в зашумленном периодическом генераторе в негармоническом режиме. Не было также установлено, в какой степени в этом случае для фазы применима модель винеровского процесса.

Общей чертой, характерной для зашумленных генераторов регулярных сигналов с одной стороны, и для хаотических генераторов с другой, является существование порога синхронизации. При вынужденной синхронизации – это минимальное значение амплитуды внешнего воздействия, при котором становится возможным наблюдать эффект захвата фазы автоколебаний. При взаимной синхронизации порогом служит соответствующее минимальное значение параметра связи. Известно, что порог синхронизации зашумленного квазигармонического генератора определяется шириной спектральной линии автономных колебаний, которая, в свою очередь, связана с коэффициентом диффузии фазы. Возникает вопрос, существует ли взаимосвязь порога синхронизации хаоса с коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы автономной хаотической системы? Синхронизация шумящего генератора на разных гармониках основной частоты при одной и той же интенсивности шума имеет разный порог (монография П.С. Ланды). В связи с этим необходимо выяснить, будет ли хаотический автогенератор и в этом отношении подобен генератору с шумом? Если предположить, что такое сходство имеет место, то следует ожидать, что порог синхронизации на гармониках средней частоты будет выше, чем порог синхронизации на основной частоте.

Не рассматривавшейся ранее в научной литературе, проблемой является применимость фазового подхода и такой характеристики, как коэффициент эффективной диффузии фазы, для описания взаимодействующих генераторов спирального хаоса с различными базовыми частотами. Не был исследован также вопрос о том, возможно ли ввести парциальные коэффициенты диффузии фазы взаимодействующих хаотических генераторов? Если ввести такие коэффициенты возможно, то возникает задача анализа их взаимосвязи со спектрами колебаний. Известно, что в силу явления фазового захвата коэффициент диффузии разности фаз взаимодействующих хаотических генераторов, начиная с некоторого значения коэффициента связи, обращается в ноль. В связи с этим представляет интерес задача исследования поведения парциальных коэффициентов диффузии фазы при переходе в область взаимной синхронизации хаотических автогенераторов.

Известно, что наиболее заметным влияние шума может оказаться при анализе динамики структурно неустойчивых систем, например, в точках бифуркаций или в режимах негиперболического хаоса (работы Ю.А. Кравцова, А.С. Пиковского, В.С. Анищенко и М.А. Сафоновой, L. Jaeger и H. Kants, Ch.G. Schroer, E. Ott и J.A. Yorke и др.). Спиральный аттрактор является одним из примеров негиперболического аттрактора. Влияние шума на хаотический автогенератор в режиме спирального аттрактора уже

исследовалось в ряде работ В.С. Анищенко и соавторов. Однако в этом направлении есть ряд нерешенных проблем. Очевидно, что добавленный в хаотическую систему шум увеличивает скорость перемешивания. Однако не было установлено количественной закономерности в изменении и скорости перемешивания. В связи с этим можно поставить вопрос, как будет меняться коэффициент эффективной диффузии фазы генератора в режиме спирального хаоса в зависимости от интенсивности добавленного в систему белого шума.

Представляет интерес и практически не исследована задача о влиянии на хаотический автогенератор цветного шума. Так, если внутренние источники шума в динамической системе можно считать δ - коррелированными (белыми), то внешние случайные воздействия чаще представляют собой узкополосный шум. Наличие характерной частоты в спектре шума (частоты спектрального максимума) является важным фактором, если учесть частотные свойства самой динамической системы. Для динамической системы в режиме спирального аттрактора узкополосный характер шумового воздействия может оказаться особенно существенным, поскольку в этом случае хаотические автоколебания имеют свою характерную частоту в спектре. Однако исследований эффектов воздействия цветного шума на хаотическую систему в режиме спирального аттрактора до настоящего времени не проводилось. В частности, не было установлено, как влияет на характеристики хаоса расстройка характерных частот хаотической системы и шумового воздействия. Узкополосный шум, как известно, может синхронизовать частоту периодических автоколебаний (монографии А.Н. Малахова, П.С. Ланды). До настоящего времени еще не исследовался вопрос, возможно ли наблюдать эффект синхронизации при воздействии на хаотический генератор шума с достаточно узкой спектральной линией и будет ли он одинаково проявляться для шумовых воздействий с одинаковыми спектральными характеристиками, но разными вероятностными распределениями?

Обозначенные выше вопросы и проблемы определили **цель диссертационной работы**, которая заключается в решении актуальной задачи радиофизики, состоящей в исследовании амплитудных и фазовых флуктуаций в детерминированных генераторах хаоса и зашумленных автоколебательных системах различной природы. В рамках данной общей задачи целями диссертационной работы являются: изучение эффектов шумового воздействия на бистабильные генераторы различной природы, сравнительный анализ свойств фазы периодических генераторов с шумом и детерминированных генераторов хаоса, исследование порога синхронизации хао-

тических генераторов и его взаимосвязи с коэффициентом эффективной диффузии фазы, а также изучение влияния белого и цветного шума на характеристики хаотических автоколебаний.

Научная новизна результатов. В диссертационной работе впервые получены следующие научные результаты:

1. В бистабильных генераторах периодических колебаний с аддитивным белым и цветным шумом установлено наличие стохастических бифуркаций стационарного распределения амплитуды. Показано, что эффект когерентного резонанса, возникающий в зашумленных бистабильных генераторах в некотором интервале значений интенсивности шума, имеет место не только в случае белого шума, но также и при цветном шуме. Показано, что в неизохронном режиме колебаний эффект когерентного резонанса невозможен.
2. Показано, что общим свойством, присущим динамике мгновенной фазы для широкого класса автоколебательных систем, включающего как зашумленные периодические режимы, так и режим спирального аттрактора, является близкий к линейному рост во времени дисперсии фазы, который можно характеризовать коэффициентом эффективной диффузии фазы. В то же время установлено, что такие статистические характеристики, как законы распределения мгновенной фазы и мгновенной частоты, а также корреляционные свойства мгновенной частоты сильно зависят от исследуемой системы и режима автоколебаний, а также от конкретного способа определения мгновенной фазы колебаний.
3. Обнаружено, что коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы может служить критерием разделения режимов хаотического аттрактора на спиральный и винтовой, в то время как старший показатель Ляпунова не позволяет различить данные режимы.
4. Установлено, что порог синхронизации хаотических генераторов в режиме спирального аттрактора, подобно порогу эффективной синхронизации зашумленных генераторов, зависит от коэффициентов диффузии фазы взаимодействующих генераторов.
5. Показано, что при взаимодействии двух автогенераторов спирального хаоса с разными базовыми частотами можно ввести парциальные коэффициенты диффузии фазы, которые определяют ширину основной спектральной линии в каждой из двух парциальных систем.
6. Установлено, что аддитивный гауссовский белый шум при воздействии на хаотический генератор в режиме спирального аттрактора приводит к тому, что к собственной эффективной диффузии фазы хаотических коле-

баний добавляется слагаемое, зависящее от интенсивности шума. Причем, вносимая шумом диффузия фазы растет с интенсивностью шума по закону, близкому к линейному.

7. Показано, что в случае воздействия на хаотический генератор цветного шума с частотой спектрального максимума, совпадающей с базовой частотой хаотических автоколебаний, коэффициент эффективной диффузии фазы хаотических колебаний существенно зависит от ширины спектра шума. Эта зависимость является немонотонной: сначала коэффициент эффективной диффузии фазы увеличивается с ростом ширины спектральной линии, а затем, достигнув максимума, убывает.

8. Открыт и исследован эффект синхронизации хаотических автоколебаний узкополосным шумовым сигналом. Показано, что эффект синхронизации значительно различается для узкополосных шумовых воздействий с различными вероятностными распределениями.

Научно - практическая значимость результатов.

Совокупность научных результатов диссертации развивает и дополняет фундаментальные представления современной теории колебаний, нелинейной динамики и статистической радиофизики. Научно-практическая значимость работы состоит в следующем:

- о Установлен новый вид стохастической бифуркации в бистабильных автотенераторах с аддитивным шумом, с которой связан эффект типа когерентного резонанса.
- о Показана многосторонняя аналогия между зашумленными генераторами периодических сигналов и определенным типом детерминированных генераторов хаоса, имеющая в основе сходство в поведении мгновенной фазы автоколебаний. Эта аналогия проявляется в близком к линейному росту во времени дисперсии фазы, в характере спада автокорреляционной функции, в форме основной спектральной линии, ширина которой определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы, в наличии порога синхронизации, высота которого также связана с диффузией фазы, и в увеличении порога синхронизации при воздействии на гармониках основной частоты.
- о Проведено исследование влияния белого и цветного шума на хаотическую автоколебательную систему со спиральным аттрактором и показано, как изменяются при этом коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы и спектры хаотических колебаний. Установлено явление синхронизации хаоса узкополосным внешним шумом, также подтверждающее аналогию между хаотическими автоколебаниями и колебаниями периодического генератора.

Полученные результаты могут быть применены при создании новых радиофизических устройств, в которых существенную роль могут играть случайные воздействия, а также при интерпретации натуральных экспериментов и создании моделей нелинейных систем с источниками шума в широкой области научных исследований от радиофизики до биофизики и биологии. Материалы диссертационного исследования частично используются в курсах лекций по теории нелинейных колебаний, нелинейной динамике и статистической радиофизике. Предполагается дальнейшее применение результатов работы в учебном процессе.

Достоверность научных выводов работы подтверждается соответствием результатов, полученных численными и аналитическими методами, а также качественным совпадением эффектов, наблюдаемых в численных экспериментах с различными моделями динамических систем. Достоверность результатов работы обосновывается также тем, что полученные новые результаты согласуются с уже известными из научной литературы и не противоречат существующим теоретическим представлениям.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Генератор периодических колебаний, находящийся в режиме бистабильности, демонстрирует сильную чувствительность к воздействию аддитивного шума, проявляющуюся в качественном изменении стационарного распределения амплитуды колебаний. Для изохронного режима колебаний, как при белом, так и при цветном шуме, в определенном интервале значений интенсивности шума наблюдается сужение спектральной линии - эффект, подобный когерентному резонансу. В неизохронном случае данный эффект отсутствует.
2. Значение коэффициента эффективной диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний может служить критерием, позволяющим различить области спирального и винтового хаотических аттракторов.
3. Порог синхронизации хаоса по порядку величины соответствует значению коэффициента эффективной диффузии фазы, отнесенной к средней частоте колебаний.
4. Для взаимодействующих хаотических генераторов в режиме спирального аттрактора можно ввести парциальные коэффициенты эффективной диффузии фазы, которые определяют ширину основной спектральной линии в каждом из двух генераторов.

5. Эффективная синхронизация может иметь место при воздействии узкополосного шума не только на периодический генератор, но и на хаотическую автоколебательную систему. Эффект синхронизации значительно различается для двух типов узкополосных сигналов с близкими спектральными характеристиками, но различными законами распределения.

Апробация работы и публикации

Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых”, Россия, Саратов, 2004; 2005; 2006; конференция научно-образовательных центров “Pan-REC 2005”, Россия, Санкт-Петербург, 2005; конференция “Ломоносов – 2006”, Россия, Москва, 2006; international conference “Constructive Role of Noise in Complex Systems”, Germany, Dresden, 2006; international conference “Critical Phenomena and Diffusion in Complex Systems” Russia, Nizhny Novgorod, 2006; конференция научно-образовательных центров “Pan-REC 2007”, Россия, Пермь, 2007; международная школа “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС 2007)”, Россия, Саратов, 2007; international conference “Progress in Electromagnetics Research Symposium”, Russia, Moscow, 2009; international conference “International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems”, Switzerland, Rapperswil, 2009. Результаты работы обсуждались на научных семинарах кафедры Радиофизики и Нелинейной Динамики Саратовского Государственного Университета и научных семинарах на физическом факультете Потсдамского университета (Германия).

По теме диссертационной работы в международной и российской печати опубликовано 16 работ (из них 8 статей в реферируемых журналах и 8 тезисов докладов на конференциях). Результаты работы использовались в рамках программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы”, а также при выполнении совместного гранта Министерства образования РФ (No E02-3.2-345) и американского фонда гражданских исследований и развития (Award No. SR-006-XI) и гранта РФФИ N 04-02-16283.

Личный вклад автора

В ряде публикаций, выполненных совместно с другими авторами, соискателю принадлежит основная роль в проведение теоретического анализа и численных экспериментов. Во всех работах автор принимал непосредственное участие в постановке задач, проведении исследований и интерпретации полученных результатов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 141 страницу и 43 иллюстрации. Библиографический список содержит 119 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, определяются цели исследования, формулируются основные задачи, раскрывается научная новизна полученных результатов и приводятся положения, выносимые на защиту.

В первой главе исследуется стохастическая бифуркация, связанная с изменением распределения амплитуды. Рассмотрены два примера бистабильных генераторов, которые в отсутствие шума в некоторой области параметров характеризуются сосуществованием устойчивых автоколебаний и устойчивого состояния равновесия. Это – осциллятор Дуффинга-Ван дер Поля с жестким возбуждением и модель синтетического генного осциллятора. Область бистабильности в данных системах ограничена касательной бифуркацией предельных циклов с одной стороны и субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа с другой стороны. Гауссов шум объединяет бассейны притяжения аттракторов системы. В окрестности седло-узловой бифуркации предельных циклов с ростом шума наблюдается эффект, подобный когерентному резонансу – в некотором интервале значений интенсивности шума ширина спектральной линии колебаний уменьшается (O.V. Ushakov et al.). Исследуется связь данного явления со стохастическими бифуркациями. Рассматривается влияние неизохронности генератора на вызванные шумом эффекты.

Для генератора Дуффинга-Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + x + \beta x^3 = \sqrt{2D}n(t), \quad \beta \geq 0, \quad (1)$$

($n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума, D – константа, задающая интенсивность шума) применялся метод усреднения и получена система стохастических уравнений для мгновенной амплитуды и флуктуаций фазы. Для данной системы построена бифуркационная диаграмма, приведенная на рис.1(а). Диаграмма построена на плоскости параметров (ε, D) , где ε – параметр управления режимом генерации, D – интенсивность внешнего шумового воздействия. В затонированной области стационарное распределение амплитуды является бимодальным. Бимодальное распределение для генератора с шумом является аналогом бистабильности в нешумящем генераторе. Область бимодальности при $D \neq 0$ и область бистабильности при $D = 0$ не совпадают, а интенсивность шума являет-

ся бифуркационным параметром. Линии, ограничивающие область бимодального распределения, соответствуют стохастическим P -бифуркациям¹ распределения амплитуды. С ростом интенсивности шума область бимодальности смещается в сторону меньших значений ε и становится всё более узкой. При сильном шуме ($D > D_{cr} \approx 0.036$) P -бифуркаций с изменением ε больше не наблюдается и область бимодальности перестает существовать.

В изохронном генераторе (при $\beta = 0$) при некотором шуме (ближе к центру области бимодального распределения амплитуды) ширина спектра колебаний становится минимальной (рис.1(б)). Механизм данного явления отличается от механизма классического когерентного резонанса (КР) и заключается в следующем: если шум очень мал, то основную часть времени траектория проводит в окрестности точки равновесия. Как следует из линейного анализа, спектр малых колебаний вблизи точки равновесия имеет форму лоренциана, ширина которого на уровне половинной мощности определяется величиной $|\varepsilon|$. Ширина спектра колебаний в окрестности предельного цикла определяется интенсивностью шума и может быть меньше, чем $|\varepsilon|$. В результате, в связи с изменением распределения амплитуды при увеличении шума, наблюдается сужение спектральной линии. При $\varepsilon < -1/8$ (т.е. вне области бистабильности нешумящего генератора) такое поведение может наблюдаться только после стохастической бифуркации на линии l_1 . Наиболее узкий спектр соответствует не слабому шуму, а шуму средней интенсивности.

Исследования, проведенные в рамках данной главы показывают, что в том случае, когда колебания в (1) неизохронны (при $\beta > 0$), в спектре происходит перераспределение мощности между двумя спектральными линиями и эффекте когерентного резонанса не возможен. Кроме того, показано, что эффекты, рассмотренные в данной главе, являются достаточно грубыми по отношению к характеристикам аддитивного шума. Проведенные нами численные исследования показывают наличие P -бифуркаций и эффекта когерентного резонанса в изохронном генераторе Дуффинга-Вандар Поля в случае, когда шум является узкополосным и ограниченным по амплитуде.

Вторая из рассмотренных автоколебательных систем представляет собой математическую модель синтетического генного осциллятора, исследованную в работе (J. Nasty et al.). Она задается следующими уравнениями:

$$\dot{x}(t) = \frac{1 + x^2 + \alpha\sigma x^4}{(1 + x^2 + \sigma x^4)(1 + y^4)} - \gamma_x x + \sqrt{2D}n(t),$$

¹ P -бифуркации означают качественное изменение вероятностного распределения

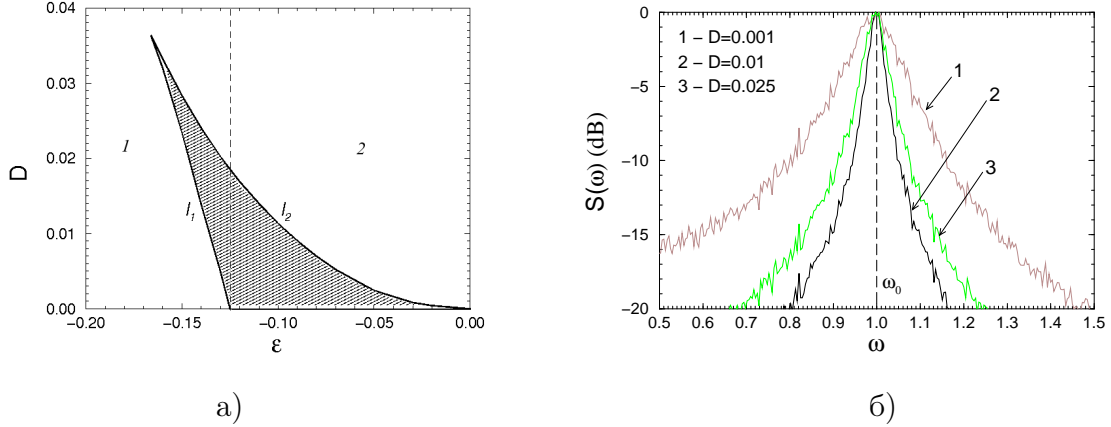


Рис. 1: а) Бифуркационная диаграмма системы Дуффинга-Ван дер Поля с аддитивным белым шумом на плоскости управляющих параметров (ε, D) . Затонированная область соответствует бимодальному распределению; линии l_1 и l_2 - соответствуют появлению и исчезновению одного из максимумов распределения амплитуды. Вертикальной пунктирной линией отмечена граница бистабильности по параметру ε для генератора без шума (область 2 соответствует бистабильности в детерминированной модели). б) Графики нормированной спектральной плотности мощности колебаний в изохронном генераторе Дуффинга-Ван дер Поля при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности белого шума D

$$\tau_y \dot{y}(t) = \frac{1 + x^2 + \alpha \sigma x^4}{(1 + x^2 + \sigma x^4)(1 + y^4)} - \gamma_y y, \quad (2)$$

где $n(t)$ - нормированный источник гауссова белого шума, D - константа, задающая интенсивность шума. Безразмерная система (2) описывает эволюцию концентраций двух протеинов $x(cI)$ и $y(lac)$, где временной масштаб для y определяется величиной τ_y , которая в то же время является проектным параметром. Параметр α представляет собой степень увеличения скорости транскрипции, σ - сродство димера, а γ_x и γ_y характеризуют скорость деградации.

Полученные для (2) условные распределения амплитуды $p_c(a)$ (при условии для фазы: $\Phi(t) \approx \pi/2$) качественно повторяют стационарные распределения амплитуды, полученные для генератора (1) в квазигармоническом приближении. С ростом интенсивности шума наблюдаются стохастические бифуркации: переход от унимодального распределения к бимодальному и, затем, снова к унимодальному. Эволюция спектра мощности с ростом интенсивности шума, наблюдаемая в (2), свидетельствует о неизохронном характере колебаний и не позволяет говорить об эффекте типа КР.

Во второй главе рассматривается круг вопросов, связанных с описанием свойств хаотических автоколебаний, основанным на поведении мгновенной фазы. В частности, показана полезность для многих задач такой характеристики, как коэффициент эффективной диффузии фазы. Анализируется

ряд свойств хаотических генераторов в режиме спирального аттрактора, которые присущи также периодическим генераторам с шумом. Проводится сравнение статистических свойств мгновенной фазы зашумленных периодических и детерминированных хаотических автоколебаний. Устанавливается взаимосвязь порога синхронизации хаотических автоколебаний с коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы. Исследуется зависимость порога синхронизации хаоса от номера гармоники, на которой оказывается внешнее воздействие. Проводится детальный спектрально-корреляционный анализ связанных хаотических автогенераторов в режиме спирального аттрактора с расстройкой базовых частот и параметров, управляющих режимом колебаний, и устанавливается связь ширины спектральных линий и скорости спада корреляционных функций с парциальными коэффициентами диффузии фазы генераторов.

Во второй главе исследуется спиральный хаотический аттрактор в детерминированной системе Рёсслера

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - m) \quad (3)$$

($\alpha = \beta = 0.2$, m – управляющий параметр) и генераторе Анищенко-Астахова

$$\dot{x} = mx + y - xz - \delta x, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + g\frac{x}{2}(x + |x|) \quad (4)$$

($g = 0.21$, $\delta = 0.0001$, m – управляющий параметр).

Проведенные исследования показывают, что коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы не только определяет скорость спада автокорреляционной функции колебаний, но и может служить критерием разделения хаотического режима на спиральный и винтовой. На Рис.2 совместно представлены результаты расчета приведенного коэффициента эффективной диффузии мгновенной фазы B_{eff}/Ω для системы (3), где Ω – средняя частота колебаний, и старшего ляпуновского показателя. Для удобства сравнения значения ляпуновского показателя уменьшены в 10 раз. На рисунке отчетливо видны две области, соответствующие режимам спирального и винтового аттрактора. Данные области различаются порядком величины коэффициента диффузии, значение которого для винтового хаоса оказывается существенно больше. В то же время старший ляпуновский показатель слабо зависит от типа аттрактора. Аналогичные результаты получены для системы (4).

Порог синхронизации хаоса для обеих исследованных моделей хаотического генератора по порядку величины соответствует значению B_{eff}/Ω .

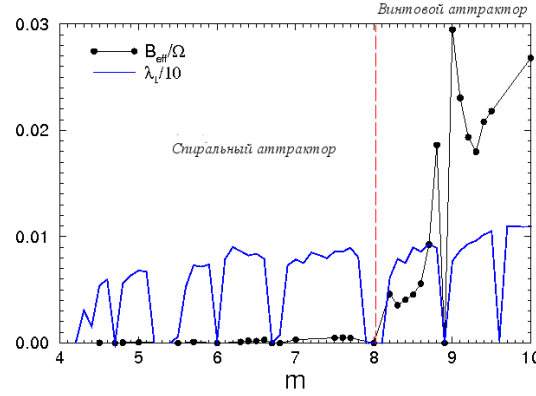


Рис. 2: Зависимость приведенного коэффициента эффективной диффузии мгновенной фазы автоколебаний B_{eff}/Ω и старшего ляпуновского показателя $\lambda_1/10$ от управляющего параметра m в системе Рёсслера

При переходе к винтовому аттрактору порог, так же как и B_{eff} , резко возрастает. Однако в пределах каждой из областей хаоса строго однозначной взаимосвязи порога и значения B_{eff} не наблюдается. Для спирального аттрактора имеет место как взаимная, так и вынужденная синхронизация хаоса, причем значения порога взаимной синхронизации γ_0 и приведенного порога вынужденной синхронизации $C_0/\langle A \rangle$ совпадают в пределах ошибки расчетов. В области винтового хаоса (для больших B_{eff}) вынужденная синхронизация отсутствует.

Проведенное для осциллятора Рёсслера исследование синхронизации хаотических автоколебаний при воздействии на гарониках базовой (средней) частоты выявило еще одну аналогию между зашумленным периодическим генератором и хаотическим автогенератором: так же как для зашумленного генератора, порог синхронизации хаотических автоколебаний при воздействии на гарониках оказывается выше, чем в случае воздействия на базовой частоте.

Были исследованы особенности поведения мгновенных фаз и спектрально-корреляционные характеристики колебаний в двух взаимодействующих хаотических автогенераторах в режиме спирального хаоса с различными средними частотами и различной “степенью хаотичности”. В качестве модели рассматривалась система связанных осцилляторов Рёсслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), & \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha_1 y_1, & \dot{y}_2 &= (1 - \Delta)x_2 + \alpha_2 y_2, \\ \dot{z}_1 &= \beta_1 + z_1(x_1 - m_1), & \dot{z}_2 &= \beta_2 + z_2(x_2 - m_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) исследовалась при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0.2$; $m_1 = 6.5$; $m_2 = 4.5$. Параметр Δ , управляющий

расстройкой базовых частот парциальных осцилляторов и параметр связи γ менялись в ходе проведения численных экспериментов.

Полученные результаты показывают, что при взаимодействии двух автогенераторов спирального хаоса можно ввести парциальные коэффициенты эффективной диффузии фазы B_{eff1} и B_{eff2} для каждого из генераторов. Так же как и в отдельно взятом генераторе, соответствующие коэффициенты эффективной диффузии фазы определяют ширину основной спектральной линии в каждой из двух парциальных систем. Режим несинхронного хаоса подобен квазипериодическим колебаниям взаимодействующих периодических генераторов с источниками шума. В спектрах имеются две независимые линии конечной ширины. В окрестности каждого из спектральных максимумов форма спектральной линии близка к лоренциану с шириной, определяемой одним из парциальных коэффициентов диффузии фазы B_{effi} ($i = 1, 2$):

$$S(\omega) = \frac{2CB_{effi}}{B_{effi}^2 + (\omega - \Omega_i)^2}, \quad (6)$$

где Ω_i ($i = 1, 2$) - частота спектрального максимума, равная средней частоте одного из генераторов, C - константа, определяемая дисперсией колебаний, связанной с флуктуациями фазы. Характерный вид спектров в несинхронном режиме приведен на рис.3.

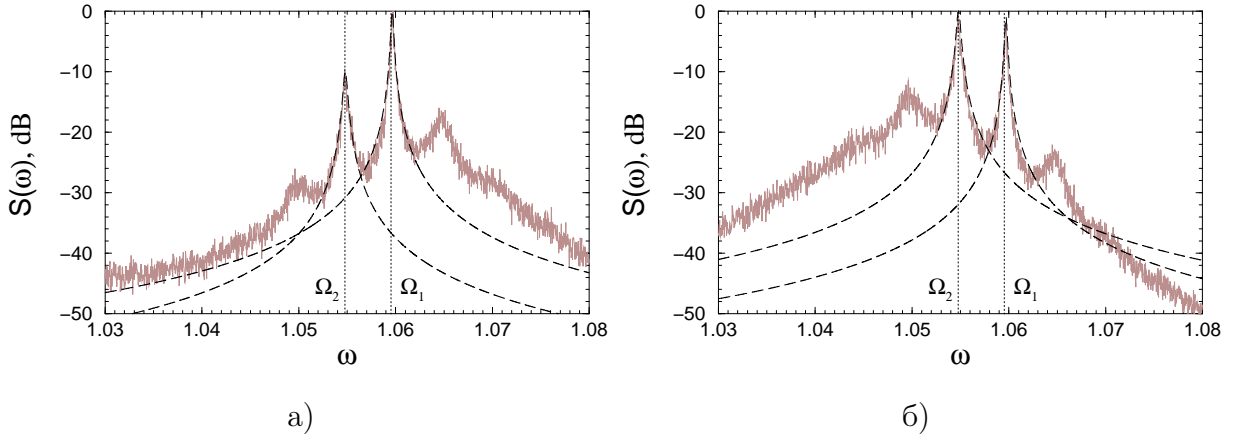


Рис. 3: Фрагменты нормированных спектров мощности в системе двух связанных осцилляторов Рёсслера, соответственно для первой (а) и второй (б) парциальных систем. Пунктиром даны аппроксимации спектральных линий на средних частотах генераторов по формуле (6)

Третья глава посвящена исследованию влияния белого и цветного шума на динамику автогенератора в режиме спирального хаоса. Рассматриваются коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы и спектры хаотических колебаний зашумленного автогенератора. Установлено и исследо-

вано явление синхронизации хаоса узкополосным внешним шумом. Сравниваются эффекты синхронизации при воздействии узкополосных шумовых сигналов с одинаковыми спектрами и разными плотностями вероятности. В качестве хаотического генератора со спиральным аттрактором был выбран осциллятор Рёсслера (3). В первое уравнение добавлялся аддитивный источник шума $\xi(t)$, который мог иметь различные характеристики. Был рассмотрен белый гауссов шум, цветной гауссов шум, моделируемый двумерным процессом Орнштейна-Уленбекка, и цветной негауссов шум, представляющий собой сигнал зашумленного квазигармонического генератора. Показано, что аддитивный гауссов белый шум приводит к тому, что к собственной эффективной диффузии фазы хаотических колебаний добавляется слагаемое, зависящее от интенсивности шума. Причем, вносимая шумом диффузия фазы, растет с интенсивностью шума по закону, близкому к линейному.

В результате проведенных исследований было установлено и исследовано явление синхронизации хаотических автоколебаний узкополосным внешним шумом. На рис.4а приведены зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}}{\Omega}$ от расстройки $\Delta = \Omega - \bar{\omega}_0$, полученные для случая негауссова шума при заданной интенсивности шума и двух различных значениях ширины спектра шума. Здесь Ω – частота спектрального максимума шумового воздействия, $\bar{\omega}$ – средняя частота возмущенного автогенератора, а $\bar{\omega}_0$ – средняя частота невозмущенного автогенератора. На графике хорошо видна “полочка”, соответствующая эффективному захвату средней частоты автоколебаний. Подобные зависимости наблюдаются и для гауссова шума. Таким образом, явление эффективной синхронизации хаотических автоколебаний имеет место для обоих типов узкополосного шума. Однако, несмотря на идентичные спектральные характеристики шумовых сигналов, эффект синхронизации проявляется для них в различной степени: он значительно сильнее в случае негауссова шума. Области синхронизации для двух шумовых сигналов значительно различаются (рис. 4б). Величина τ_{ex} , отложенная по оси абсцисс на графике, примерно равна времени корреляции воздействия и обратно пропорциональна полуширине его спектра. Из рисунка очевидно, что область синхронизации для негауссова шума (область 2 на рис.4б) оказывается значительно шире, чем для гауссова (область 1 на рис.4б).

Спектры мощности зашумленных хаотических автоколебаний наглядно демонстрируют два различных механизма синхронизации. В случае воздействия на автогенератор гауссова шума характерным является механизм подавления основной частоты в спектре хаотических автоколебаний. Для негауссова шума более типичным является захват частоты.

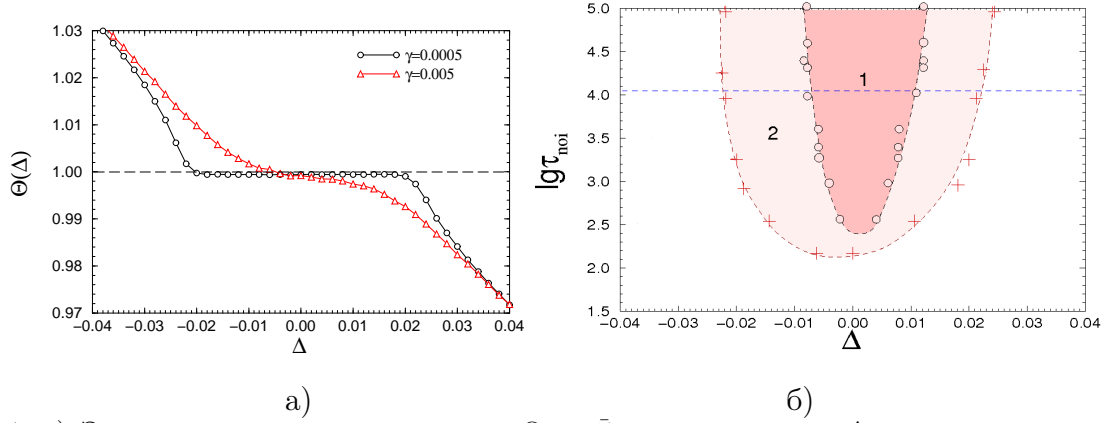


Рис. 4: а) Зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}}{\Omega}$ от расстройки Δ , полученные для системы Рёсслера под воздействием негауссова шума при $D = 0.05$ и двух значениях γ : $\gamma = 0.0005$ и $\gamma = 0.005$; б) Области синхронизации осциллятора Рёсслера на плоскости параметров Δ, τ_{ex} , полученные для гауссова шума (область 1) при $D = 0.01$ и негауссова шума (область 2) при $D = 0.05$. Горизонтальной пунктирной линией отмечено значение, соответствующее времени корреляции системы Рёсслера без шума

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты работы

1. В бистабильных генераторах периодических колебаний с аддитивным источником шума установлено наличие стохастической бифуркации P -типа, заключающейся в качественном изменении стационарного распределения амплитуды. Перестройка закона распределения приводит к изменениям в спектре мощности колебаний. В изохронном генераторе обнаружена немонотонная зависимость ширины спектральной линии от интенсивности шума, подобная той, что имеет место при когерентном резонансе. Для неизохронных колебаний в спектре происходит перераспределение мощности между двумя спектральными линиями и, следовательно, в этом случае когерентный резонанс невозможен. Установленные эффекты наблюдаются как для белого шума, так и в случае, когда шум является узкополосным и ограниченным по амплитуде.

2. Показана аналогия ряда свойств и эффектов, присущих динамике мгновенной фазы для широкого класса автоколебательных систем, включающего как зашумленные периодические автогенераторы, так и генераторы в режиме спирального хаоса. Для рассмотренных режимов автоколебаний (хаотических или зашумленных) наблюдается близкий к линейному рост во времени дисперсии фазы, который можно охарактеризовать коэффициентом эффективной диффузии фазы B_{eff} . Коэффициент эффективной диффузии фазы и средняя частота автоколебаний в режиме спирального аттрактора в пределах точности вычислений не зависят от способа опреде-

ления мгновенной фазы. В то же время такие статистические характеристики, как законы распределения мгновенной фазы и мгновенной частоты, а также корреляционные свойства мгновенной частоты оказываются зависимыми от исследуемой системы и режима автоколебаний. Более того, они могут зависеть от конкретного способа введения мгновенной фазы колебаний.

3. Установлено, что коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы B_{eff} является важной характеристикой хаотических автоколебаний. Значение B_{eff} может служить критерием разделения режимов хаотического аттрактора на спиральный и винтовой. При этом показатели Ляпунова не позволяют различить данные режимы. Порог синхронизации хаоса по порядку величины соответствует значению коэффициента эффективной диффузии фазы, отнесенному к средней частоте автоколебаний. При переходе к винтовому аттрактору порог, так же как и B_{eff} , резко возрастает. Для спирального аттрактора имеет место как взаимная, так и вынужденная синхронизация хаоса, причем значения порога взаимной синхронизации и приведенного порога вынужденной синхронизации совпадают в пределах ошибки расчетов. В области винтового хаоса (для больших B_{eff}) вынужденная синхронизация отсутствует. Общие свойства шумящего генератора и хаотического автогенератора проявляются и в отношении порога синхронизации на гармониках основной частоты. Порог синхронизации хаоса при воздействии на гармониках оказывается выше, чем при воздействии на базовой частоте.

4. Показано, что при взаимодействии двух автогенераторов спирального хаоса с разными базовыми частотами, и разными по величине положительными ляпуновскими показателями, можно ввести парциальные коэффициенты эффективной диффузии фазы, которые определяют ширину основной спектральной линии в каждой из двух парциальных систем. Так, в режиме несинхронного хаоса (за исключением близкой окрестности границы синхронизации), как и в области квазипериодических колебаний взаимодействующих периодических генераторов с источниками шума, в спектрах наблюдаются две независимые линии конечной ширины. Ширина линий определяется парциальными коэффициентами диффузии фазы. Синхронный хаос, подобно хаосу в невзаимодействующих генераторах, является фазово-когерентным. Парциальные колебания характеризуются одним и тем же коэффициентом диффузии фазы, что является следствием фазового захвата. В спектрах, синхронизация хаоса проявляется не только в захвате средних частот, но и в установлении одной и той же ширины спектральных линий обоих автогенераторов.

5. Показано, что аддитивный гауссов белый шум приводит к тому, что к собственной эффективной диффузии фазы хаотических колебаний добавляется слагаемое, зависящее от интенсивности шума. Причем, диффузия фазы, вносимая шумом, растет с интенсивностью шума по закону, близкому к линейному. Линейная зависимость коэффициента диффузии фазы от интенсивности шума характерна для квазигармонических генераторов. Таким образом, влияние белого гауссовского шума на квазигармонический генератор и на генератор хаоса с точки зрения спектрально-корреляционных характеристик во многом аналогично.

6. Для случая воздействия на хаотический генератор цветного шума показано, что коэффициент эффективной диффузии фазы B_{eff} хаотических колебаний зависит как от ширины спектра шума, так и от расстройки частот спектральных максимумов хаоса и шума. При синхронном воздействии цветным шумом B_{eff} нелинейным образом изменяется с ростом ширины спектральной линии шума: сначала B_{eff} увеличивается с ростом ширины спектральной линии, а затем, достигнув максимума, убывает. В случае цветного шума наиболее существенное увеличение B_{eff} наблюдается тогда, когда частота спектрального максимума шумового воздействия совпадает со средней частотой хаотических автоколебаний. При увеличении расстройки частот спектральных максимумов хаоса и шума влияние шума на хаотический режим проявляется в меньшей степени.

7. Установлено и изучено явление синхронизации хаотических автоколебаний узкополосным шумовым сигналом. Показано, что данный эффект значительно различается для двух рассмотренных типов узкополосного шумового воздействия, имеющих одинаковый спектр мощности, но разные вероятностные распределения. Следовательно, в плане синхронизации важное значение имеет не только ширина спектральной линии шума, но и другие его характеристики.

Публикации по теме диссертации

Статьи в реферируемых журналах

1. Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко, Г.А. Окрокверцхов, А.С. Захарова, Статистические свойства мгновенной фазы зашумленных периодических и хаотических автоколебаний // Радиотехника и электроника. 2006. Т.51(5). С. 580–592.
2. А.С. Захарова, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко, Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т.14(5). С. 44–61.
3. A.S. Zakharova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, Influence of noise on a self-sustained oscillator producing spiral chaos // Fluctuation and Noise Letters. 2007. Vol. 7(1). L1–L12.
4. Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, Спектральный анализ колебаний в системе взаимодействующих хаотических автогенераторов // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная

динамика. 2007. Т.15(4). С. 16–25.

5. А.С. Захарова, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко, Взаимосвязь порога синхронизации с коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4(2). С. 169–180.

6. A. S. Zakharova, T. E. Vadivasova, V. S. Anishchenko Spectral-correlation analysis of coupled chaotic self-sustained oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, Vol.18 , P. 2877–2882.

7. Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, В.С.Анищенко, Индуцированные шумом бифуркации в бистабильном генераторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17(2). С. 114–122.

8. A. Zakharova, T. Vadivasova, V. Anishchenko, A. Koseska, and J. Kurths, Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 011106(1–6).

Статьи в научных сборниках

9. А.С. Захарова, Статистические характеристики мгновенной фазы и мгновенной частоты спирального хаоса // Труды научной студенческой конференции физического факультета. Сборник научных статей под ред. С.Г. Сучкова: Изд-во Сар. ун-та, 2004, С. 24–26.

10. А.С. Захарова, Статистические характеристики мгновенной фазы и мгновенной частоты в режиме детерминированного спирального хаоса и в присутствии шума // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2004: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2004, С. 70–73.

11. А.С. Захарова, Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2005: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2005, С. 60–63.

12. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, Синхронизация хаотических колебаний узкополосным шумом // Наука и образование 21 века: тенденции развития центрального региона России как части исследовательского и образовательного пространства (Пенза, 28-30 сентября 2006 г) сборник материалов научной конференции. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2006, С. 8–14.

13. А.С. Захарова, Автогенератор спирального хаоса под действием белого и цветного шума // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам “Ломоносов 2006”, секция “Физика”, сборник тезисов, С. 25–26.

14. А.С. Захарова, Корреляционные характеристики взаимодействующих хаотических автогенераторов // Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2006: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: РИО журнала “Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика”, 2007, С. 77–80.

15. A.S. Zakharova, T. E. Vadivasova, V. S. Anishchenko, J. Kurths, Stochastic Bifurcations and CR-like Effect in Bistable Self-sustained Noisy Oscillators // Progress In Electromagnetics Research Symposium Abstracts, Moscow, Russia, August 18-21, 2009, P. 428–429.

16. A. Zakharova, J. Kurths, T. Vadivasova, V. Anishchenko, Noise-Induced Bifurcations and CR-like Effect by the Example of Synthetic Gene Oscillator // Proceedings of the 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Rapperswil, Switzerland, June 21-24, 2009, P. 18–21.

ЗАХАРОВА Анна Сергеевна

АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРАХ ХАОСА
И ЗАШУМЛЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Автореферат

Ответственный за выпуск доцент, д.ф.-м.н. А.Н. Павлов

Подписано в печать 25 мая 2010 г.

Тираж 120 экз.

Объем 1.5 усл. печ. листа