На правах рукописи

Савина Татьяна Федоровна

ГОМОМОРФИЗМЫ И КОНГРУЭНЦИИ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2011

Работа выполнена на кафедре геометрии Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Розен Виктор Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Молчанов Владимир Александрович
	кандидат физико-математических наук Акимова Светлана Александровна
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится «10» ноября 2011 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского по адресу: 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, IX корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

Автореферат разослан «____» 2011 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент ____________ В. В. Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В классической теории игр целевая структура задается при помощи числовых функций (функций выигрыша, функций полезности). В последние десятилетия значительное внимание исследователей, как в нашей стране, так и за рубежом, было привлечено к играм, в которых целевая структура задается не функциями выигрыша, а отношениями предпочтения. Это объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, понятие предпочтения является первичным, в то время как понятие целевой функции – производным. Во-вторых, построение целевой функции в практических задачах требует большого объема дополнительной информации и связано с преодолением значительных трудностей как технического, так и принципиального характера.

Для построения отношения предпочтения на множестве объектов первичная информация должна быть задана в виде результатов измерений их существенных признаков в порядковых или ранговых шкалах, а также необходимо фиксировать некоторое решающее правило; важнейшими из них являются доминирование по Парето, модифицированное доминирование по Парето и предпочтение по решающей системе коалиций.

Первые результаты об играх с отношениями предпочтения появились в конце 50-х–начале 60-х годов в работах Р. Фаркуарсона [1], Р. Аумана [2,3], Б. Пелега [4], П. Фишберна [5]. В дальнейшем различные аспекты теории игр с отношениями предпочтения исследовались в работах отечественных ученых; отметим среди них работы Э. И. Вилкаса [6,7], Е. Б. Яновской [8,9], О. Н. Бондаревой [10], Т. Е. Кулаковской [11], Б. Г. Миркина [12], В. В. Подиновского [13, 14], В. В. Розена [15–21].

Можно выделить следующие направления, активно развивающиеся в последние десятилетия в теории игр с отношениями предпочтения: выработка принципов оптимальности для классов игр с отношениями предпочтения; нахождение условий существования решений игр как в чистых, так и в смешанных стратегиях; разработка кооперативной теории для игр с отношениями предпочтения; перенос важнейших понятий теории игр с функциями выигрыша игроков на игры с отношениями предпочтения (нижняя и верхняя цена игры, обобщение соотношения максимина, ситуации равновесия, характеристическая функция игры, построение смешанного расширения игры и другие). В работах В. В. Розена [15–24] была построена теория игр с упорядоченными исходами, для которых важнейшим свойством предпочтения является его транзитивность. В то же время некоторые типы решающих правил приводят к предпочтениям, не обладающим свойством транзитивности. Из сказанного ясно, что разработка теории игр с отношениями предпочтения общего вида является весьма актуальной.

Цель диссертационной работы состоит в переносе принципов оптимальности классической теории игр на игры с отношениями предпочтения общего вида и описании оптимальных решений игр с отношениями предпочтения на базе понятия гомоморфизма игр.

Методы исследований. При выполнении работы использовались методы теории игр с функциями выигрыша, общей алгебры и теории упорядоченных множеств, отдельные результаты и методы алгебры бинарных отношений и теории графов.

Научная новизна и выносимые на защиту положения. Рассмотрен новый класс игр, в которых целевая структура задается произвольными рефлексивными бинарными отношениями (отношениями предпочтения). Для этого класса игр введены следующие типы оптимальных решений: равновесие общего вида, равновесие по Нэшу, допустимые, а также вполне допустимые ситуации и исходы. При сужении на подкласс стратегических игр с функциями выигрыша игроков эти принципы оптимальности переходят в известные принципы оптимальности классической теории игр. При этом, как и в теории игр с функциями выигрыша игроков, оптимальные ситуации всех введенных типов характеризуются тем, что они могут быть стабилизированы с помощью простых угроз.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту:

1) для игр с отношениями предпочтения введены гомоморфизмы различных типов и доказаны структурные теоремы о факторизациях, приводящих к гомоморфизмам введенных типов;

2) найдены достаточные условия непустоты множества допустимых исходов для игры с отношениями предпочтения общего вида;

3) для различных типов оптимальных решений (общее равновесие, рав-

новесие по Нэшу, допустимые и вполне допустимые ситуации или исходы) найдены ко- и контравариантные гомоморфизмы;

4) для антагонистических игр с транзитивной структурой предпочтений, а также для игр общего вида с упорядоченными исходами дано полное описание их оптимальных решений с помощью ковариантно полных семейств контравариантных гомоморфизмов.

Все вышеназванные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты могут быть использованы при анализе социально-экономических моделей конфликтов и в менеджменте.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях: на Международной конференции «Теория игр и менеджмент» (Санкт-Петербург, 2009-2011 гг.); на X Международном семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» (Москва, 2010); на Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры» (Саратов, 2008); на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2009); на ежегодных научных конференциях механико-математического факультета Саратовского государственного университета «Актуальные проблемы математики и механики» в 2009-2011 гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [A1] – [A12]. Работы [A1], [A2] опубликованы в издании, содержащемся в Перечне ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 65 наименований. Общий объем диссертации составляет 139 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткое описание основных направлений теории игр с отношениями предпочтения игроков. Указаны основные способы выявления предпочтений.

В **главе 1** вводятся различные типы гомоморфизмов для структур предпочтения, а затем для игр с отношениями предпочтения: строгие, реверсивные, взаимные, точные. При этом указана связь между введенными типами гомоморфизмов.

Игра игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ с отношениями предпочтения в нормальной форме определяется как система объектов

$$G = \langle (X_i)_{i \in N}\,,\, A,\, (\rho_i)_{i \in N}\,,\, F \rangle, \tag{1.18}$$

где X_i — множество *стратегий* игрока i $(i \in N)$, A — множество *исходов*, ρ_i — рефлексивное бинарное отношение на A, выражающее предпочтения игрока i, F — отображение множества *ситуаций* $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ в множество исходов A, называемое *функцией реализации*.

Наряду с игрой G рассматривается игра тех же игроков с отношениями предпочтения $\Gamma = \langle (Y_i)_{i \in N}\,,\, B,\, (\sigma_i)_{i \in N}\,,\, \Phi \rangle$.

Определение 1.5. Набор отображений $\boldsymbol{f} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$, где $\varphi_i \colon X_i \to Y_i$ $(i \in N)$ и $\psi \colon A \to B$, называется *гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если для любого индекса $i \in N$, любых элементов $a_1, a_2 \in A$ и любой ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняются следующие два условия:

$$\begin{aligned} &Hom1\colon \quad \psi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)), \\ &Hom2\colon \quad a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2). \end{aligned}$$

Определение 1.6. Гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ игры G в игру Γ называется

- *строгим,* если для каждого $i \in N$ отображение ψ является строгим гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ в структуру предпочтений $\langle B, \sigma_i \rangle$, т.е. дополнительно выполняется условие

$$Str\colon \quad a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{<} \psi(a_2);$$

- *реверсивным,* если для каждого $i \in N$ отображение ψ является реверсивным гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ в структуру предпочтений $\langle B, \sigma_i \rangle$, т.е. выполняются следующие условия:

$$\begin{array}{lll} Rev1: & & \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{<} \psi(a_2) \ \Rightarrow\ a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2, \\ Rev2: & \psi(a_1) \neq \psi(a_2), & \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\sim} \psi(a_2) \ \Rightarrow\ a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2; \end{array}$$

- *взаимным,* если для каждого $i \in N$ отображение ψ является взаимным гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ на структуру предпочтений $\langle B, \sigma_i \rangle$;

- *точным,* если для каждого $i \in N$ отображение ψ является точным гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ в структуру предпочтений $\langle B, \sigma_i \rangle$.

Построение для заданной игры G гомоморфной ей игры Γ делается на базе понятия факторизации игры по конгруэнции. При этом конгруэнции различных типов могут быть охарактеризованы как ядра гомоморфизмов соответствующих типов.

Определение 1.7. Набор эквивалентностей $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n,\ \varepsilon)$, где $\varepsilon_i \subseteq X_i^2\ (i \in N), \varepsilon \subseteq A^2$, называется *конгруэнцией* в игре G, если для него выполнено *условие согласованности,* которое имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ccc} x'_1 & \overset{\varepsilon_1}{\equiv} & x_1 \\ x'_2 & \overset{\varepsilon_2}{\equiv} & x_2 \\ & \cdots & \\ x'_n & \overset{\varepsilon_n}{\equiv} & x_n \end{array}\right\} \Rightarrow F(x'_1, \ldots, x'_n) \overset{\varepsilon}{\equiv} F(x_1, \ldots, x_n).$$

Определение 1.8. Конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ в игре G называется *str-конгруэнцией*, если для каждого $i \in N$ выполняется дополнительное условие:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & \overset{\rho_i}{\lesssim} & a_2 \\ a'_1 & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_1 \\ a'_2 & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_2 \\ a'_2 & \overset{\rho_i}{\lesssim} & a'_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2.$$

Конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ в игре G называется *rev-конгруэнцией*, если для любого

$i \in N$ выполняются следующие два условия

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 & \overset{\varepsilon}{\not\equiv} & a_2 \\ a_1 & \overset{\rho_i}{<} & a_2 \\ a_1' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_1 \\ a_2' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1' \overset{\rho_i}{<} a_2',$$

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 & \overset{\varepsilon}{\not\equiv} & a_2 \\ a_1' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1'' \\ a_2' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_2 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2'' \\ a_1' & \overset{\rho_i}{\lesssim} & a_2' \\ a_2'' & \overset{\rho_i}{\lesssim} & a_1'' \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2.$$

Конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ в игре G называется *rec-конгруэнцией*, если для любого $i \in N$ выполняется следующее условие

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 & \overset{\rho_i}{\lesssim} & a_2 \\ a_1' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_1 \\ a_2' & \overset{\varepsilon}{\equiv} & a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1' \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2'.$$

Теорема 1.1. О каноническом гомоморфизме игры с отношениями предпочтения

Пусть G — игра с отношениями предпочтения вида (1.18) и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — конгруэнция в игре G. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Можно построить фактор-игру $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ с отношениями предпочтения в виде:

$$G/\boldsymbol{\varepsilon} = \langle X_1/\varepsilon_1, \ldots, X_n/\varepsilon_n,\ A/\varepsilon,\ \rho_1/\varepsilon, \ldots, \rho_n/\varepsilon,\ F_\varepsilon\rangle,$$

где X_i/ε_i — фактор-множество, полученное факторизацией множества стратегий X_i игрока i по соответствующему отношению эквивалентности ε_i; A/ε — фактор-множество по эквивалентности ε; ρ_i/ε — фактор-отношение на A/ε $(i \in N)$; F_ε — функция реализации, которая корректно определена равенством $F_\varepsilon([x_1]_{\varepsilon_1}, \ldots, [x_n]_{\varepsilon_n}) \overset{df}{=} [F(x_1, \ldots, x_n)]_\varepsilon$.

2) Набор отображений $\boldsymbol{f_\varepsilon} = (\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_n},\ \psi_\varepsilon)$, где φ_{ε_i} есть каноническое

отображение $X_i \to X_i/\varepsilon_i$ $(i \in N)$ и ψ_ε есть каноническое отображение $A \to A/\varepsilon$, является сюръективным гомоморфизмом игры G на фактор-игру $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ (этот гомоморфизм называется <u>каноническим</u>).

3) Канонический гомоморфизм $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ будет строгим тогда и только тогда, когда конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ является str-конгруэнцией.

4) Канонический гомоморфизм $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ будет реверсивным тогда и только тогда, когда конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ является rev-конгруэнцией.

5) Канонический гомоморфизм $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ будет взаимным тогда и только тогда, когда конгруэнция $\boldsymbol{\varepsilon}$ является rec-конгруэнцией.

Найдены необходимые и достаточные условия, накладываемые на конгруэнцию $\boldsymbol{\varepsilon}$, при которых фактор-отношения игроков обладают «хорошими» свойствами.

Теорема 1.3. Пусть G — игра с отношениями предпочтения вида (1.18) и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — конгруэнция в игре G.

1. Для того чтобы фактор-игра $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ была игрой с транзитивной структурой предпочтений, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in N$ из условий

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \\ a_2 &\overset{\varepsilon}{\equiv} a_2' \\ a_2' &\overset{\rho_i}{\lesssim} a_3 \end{aligned}\right\}$$

следовало $a_1'' \overset{\rho_i}{\lesssim} a_3''$ для некоторых $a_1'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1, a_3'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_3$.

2. Для того чтобы фактор-игра $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ была игрой с ацикличной структурой предпочтений, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in N$ отношение $\rho_i \cup \varepsilon$ было ацикличным относительно ε, т.е. чтобы выполнялась импликация:

$$a_0 \overset{\rho_i\cup\varepsilon}{\lesssim} a_1 \overset{\rho_i\cup\varepsilon}{\lesssim} \ldots \overset{\rho_i\cup\varepsilon}{\lesssim} a_m \overset{\rho_i\cup\varepsilon}{\lesssim} a_0 \Rightarrow a_0 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} \ldots \overset{\varepsilon}{\equiv} a_m.$$

3. Для того чтобы фактор-игра $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ была игрой с линейной структурой предпочтений, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in N$ и любых $a_1, a_2 \in A$ существовали $a_1', a_1'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1$, $a_2', a_2'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$ такие, что $a_1' \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2' \vee a_2'' \overset{\rho_i}{\lesssim} a_1''$.

4. Для того чтобы фактор-игра $G/\boldsymbol{\varepsilon}$ была игрой с упорядоченными

исходами, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in N$

1) из условий

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \\ a_2 &\overset{\varepsilon}{\equiv} a_2' \\ a_2' &\overset{\rho_i}{\lesssim} a_3 \end{aligned}\right\}$$

следовало $a_1'' \overset{\rho_i}{\lesssim} a_3''$ для некоторых $a_1'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1, a_3'' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_3$;

2) из условий

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \\ a_1' &\overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \\ a_1' &\overset{\rho_i}{\gtrsim} a_2' \\ a_2 &\overset{\varepsilon}{\equiv} a_2' \end{aligned}\right\}$$

следовало $a_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$.

Указаны условия вложимости игры с отношениями предпочтения в класс игр с функциями выигрыша. В частности, справедлив следующий результат.

Теорема 1.6. Для того чтобы игра G с конечным множеством исходов была вложима в класс игр с функциями выигрыша, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i отношение ρ_i было слабо ацикличным.

В **главе 2** для изучаемого класса игр введены следующие типы оптимальных решений: общее равновесие, равновесие по Нэшу, допустимые и вполне допустимые исходы и ситуации.

Определение 2.8. Ситуация $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i \in N} \in X$ в игре G называется

- *ситуацией общего равновесия*, если для любых $x_i \in X_i$ выполнено условие
$$F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\not>} F(x^0);$$

- *ситуацией равновесия по Нэшу*, если выполняется
$$F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\lesssim} F(x^0).$$

Определение 2.9. В игре G вида (1.18) исход a называется

- *допустимым для игрока* i, если

$$\neg\left(\exists x_i \in X_i\right)\left(\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}\right) F\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \overset{\rho_i}{>} a,$$

- *вполне допустимым для игрока* i, если

$$\left(\exists x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}\right)\left(\forall x_i \in X_i\right) F\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \overset{\rho_i}{\not>} a.$$

Следующая теорема устанавливает связь между введенными типами оптимальных решений.

Теорема 2.3. В любой игре G вида (1.18) с отношениями предпочтения выполнены включения:

$$NEq\left(G\right) \subseteq Eq\left(G\right) \subseteq qAc\left(G\right) \subseteq Ac\left(G\right).$$

Найдены достаточные условия непустоты множества допустимых исходов игры с отношениями предпочтения, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть G — игра с отношениями предпочтения вида (1.18) с конечными множествами стратегий игроков и ацикличной структурой предпочтений. Тогда в ней существует ситуация, допустимая для всех игроков, т.е. $Ac\left(G\right) \neq \varnothing$.

Для антагонистических игр предложен метод нахождения допустимых и вполне допустимых исходов.

Определение 2.11. Зафиксируем некоторый класс H гомоморфизмов из игр класса K в игры класса $\mathscr{K}$. Гомоморфизмы класса H называются *ковариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in \mathrm{K}$ и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\boldsymbol{f}$–образ оптимального решения игры G есть оптимальное решение в игре Γ.

Определение 2.12. Зафиксируем некоторый класс H гомоморфизмов из игр класса K в игры класса $\mathscr{K}$. Гомоморфизмы класса H называются *контравариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in$ K и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\quad \boldsymbol{f}$–прообраз оптимального решения игры Γ есть оптимальное решение в игре G.

Для всех вышеперечисленных типов оптимальных решений найдены ковариантные и контравариантные гомоморфизмы.

Теорема 2.5. В классе K игр с отношениями предпочтения с фиксированным множеством игроков N имеют место следующие утверждения.

1. Для принципа равновесия:

   a) строгие гомоморфизмы являются контравариантными,

   b) реверсивные сюръективные гомоморфизмы являются ковариантными.

2. Для равновесия по Нэшу:

   сюръективные гомоморфизмы являются ковариантными.

3. Для принципов допустимости и вполне допустимости:

   a) строгие сюръективные гомоморфизмы являются контравариантными,

   b) реверсивные сюръективные гомоморфизмы являются ковариантными.

Для некоторых видов оптимальных решений построены полные семейства гомоморфизмов, что позволяет дать точное описание оптимальных решений игр одного класса через оптимальные решения игр другого класса. Сформулируем две теоремы о полных семействах гомоморфизмов.

Пусть K — класс игр с упорядоченными исходами, $\mathscr{K}$ — класс игр с линейно упорядоченными исходами. В качестве оптимальных решений игры $G = \langle (X_i)_{i \in N}\,, A, (\rho_i)_{i \in N}\,, F \rangle \in$ K возьмем множество ее ситуаций равновесия, в качестве оптимальных решений игры $\Gamma = \langle (Y_i)_{i \in N}\,, B, (\sigma_i)_{i \in N}\,, \Phi \rangle \in \mathscr{K}$ — множество ее ситуаций равновесия по Нэшу:

$$Opt\, G = Eq\,(G)\,, Opt\, \Gamma = NEq\,(\Gamma)\,.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются контравариантными.

2. Для каждой игры $G \in \mathrm{K}$ семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса $\mathscr{K}$ является ковариантно полным.

Пусть K — класс игр с упорядоченными исходами игроков N, в которых множества стратегий игроков конечны, $\mathscr{K}$ — класс игр того же множества игроков с функциями выигрыша. В качестве оптимальных решений игры $G \in \mathrm{K}$ возьмем множество ее допустимых исходов, а в качестве оптимальных решений игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ — множество ее индивидуально рациональных исходов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.10.

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие сюръективные гомоморфизмы являются контравариантными.

2. Для каждой игры $G \in \mathrm{K}$ семейство всех ее строгих сюръективных гомоморфизмов в игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ является ковариантно полным.

В **главе 3** рассматривается кооперативный аспект игр с отношениями предпочтения. Предполагается, что фиксировано некоторое правило согласования предпочтений, которое для каждой коалиции $S \subseteq N$ и набора отношений предпочтения $(\rho_i)_{i \in S}$ задает отношение предпочтения ρ_S коалиции S. Множество стратегий коалиции S в игре G вида (1.18) задается в виде $\prod\limits_{i \in S} X_i$. Пусть Σ — некоторое семейство коалиций. Введенные в главе 2 принципы оптимальности естественным образом распространяются на семейство коалиций Σ, приводя к понятиям: ситуации Σ–равновесия, ситуации Σ–равновесия по Нэшу, Σ–допустимого и вполне Σ–допустимого исхода.

Гомоморфизм $\boldsymbol{f} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ игры G в игру Γ называется *коалиционным гомоморфизмом,* если для любой коалиции $S \subseteq N$ выполнено

$$a_1 \overset{\rho_S}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_S}{\lesssim} \psi(a_2).$$

Понятия сюръективного, строгого и реверсивного гомоморфизма естественным образом переносятся на коалиционные гомоморфизмы. Для указанных выше принципов оптимальности найдены ковариантные и контравариантные гомоморфизмы. В частности, доказаны следующие результаты.

Теорема 3.2. Пусть в качестве правила согласования предпочтений взято Парето-согласование или модифицированное Парето-согласование предпочтений игроков. Тогда для Σ-равновесия по Нэшу всякий сюръективный гомоморфизм является ковариантным.

Теорема 3.3. Пусть в качестве правила согласования предпочтений взято Парето-согласование или модифицированное Парето-согласование предпочтений игроков. Тогда для Σ-равновесия всякий строгий сюръективный гомоморфизм является контравариантным.

Теорема 3.4. Пусть в качестве правила согласования предпочтений взято Парето-согласование или модифицированное Парето-согласование предпочтений игроков. В качестве оптимального решения игры рассмотрим Σ-допустимый исход. Тогда всякий строгий сюръективный гомоморфизм является контравариантным.

Список литературы

1. Farquharson R. *Sur une generalisation de la notion d'equilibrium.* C.r. Acad. sci. Paris, 1955, 240, №1. P. 46–48.

2. Aumann R. J. *Utility theory without the completeness axiom.* — Econometrica, 1962, v. 30, №3. P. 445–462.

3. Aumann R. J. *Utility theory without the completeness axiom: a correction.* — Econometrica, 1964, v. 32, №1-2. P. 210–212.

4. Peleg B. *The independence of Game theory of utility theory.* Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 72, №6, 1966. P. 995–999.

5. Fishburn Peter C. *The Theory of Social Choice.* — Princeton University Press. 1973. — 264 p.

6. Вилкас Э. Й. *Оптимальность в играх и решениях.* — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 256 с.

7. Вилкас Э. Й. *Понятия оптимальности в теории игр.* // Современные направления теории игр. — Вильнюс, МОКСЛАС, 1976. С. 25–43.

8. Яновская Е. Б. *Ситуации равновесия в играх с неархимедовыми полезностями.* // Матем. модели в социальных науках. — Вильнюс, изд. ин-та физики и математики АН Лит. ССР. С. 98–118.

9. Яновская Е. Б. *Ситуации равновесия в общих бескоалиционных играх и их смешанных расширениях.* // Теоретико-игровые вопросы принятия решений. — Л.: Наука ЛО, 1978. С. 43–64.

10. Бондарева О. Н. *Решение и ядро ациклического отношения на компакте.* // Успехи теории игр. — Вильнюс, 1973. С. 127-130.

11. Кулаковская Т. Е. *Классические принципы оптимальности для бесконечных кооперативных игр.* // Современные направления теории игр. — Вильнюс, МОКСЛАС, 1976. С. 94–108.

12. Миркин Б. Г. *Проблема группового выбора.* — М.: Наука, 1979.

13. Подиновский В. В. *Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, №6. С. 1436–1450.

14. Подиновский В. В. *Общие антагонистические игры.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, №5. С. 1140–1153.

15. Розен В. В. *Гомоморфизмы игр с упорядоченными исходами.* // Матем. модели поведения. — Саратов, изд. СГУ, 1981. С. 90–104.

16. Розен В. В. *Игры с упорядоченными исходами.* — Изв. АН СССР, Технич. кибернетика, №5, 1977. С. 31–37.

17. Розен В. В. *Нахождение оптимальных рещений методом построения ковариантно полных семейств контравариантных гомоморфизмов.* Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 1994. — 371 с. С. 349–350.

18. Розен В. В. *Применение теории бинарных отношений к общей теории игр.* // Матем. методы решения экономических задач. — Новосибирск: Наука СО. С. 127–152.

19. Розен В. В. *Редуцируемость оптимальных решений игр с упорядоченными исходами.* // Теория полугрупп и ее приложения. Вопросы аксиоматизации. 1988. С. 50–60.

20. Розен В. В. *Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами.* // Современные направления теории игр. — Вильнюс: МОКСЛАС, 1976. С. 115–118.

21. Розен В. В. *Смешанные расширения игр с упорядоченными исходами.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, №6. С. 1436–1450.

22. Rozen V. V. *Cooperative games with ordered outcomes.* // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2009. P. 221–222.

23. Rozen V. V. *Equilibrium points in games with ordered outcomes.* // Contributions to game theory and management. Vol. III. Collected papers on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 368–386.

24. Rozen V. V. *Nash equilibrium points in games with ordered outcomes.* // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 190–191.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

A1. Савина Т. Ф. *Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения.* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 66-70.

A2. Савина Т. Ф. *Оптимальные решения в играх с отношениями предпочтения.* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 32–36.

A3. Савина Т. Ф. *Ситуации равновесия в играх с отношениями предпочтения.* // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. В. В. Вагнера. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 131–132.

A4. Savina T. F. *Mathematical Models for Games, Based on Preference Relations.* // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2009. P. 227–228.

A5. Савина Т. Ф. *Гомоморфизмы и конгруэнтности игр с транзитивной структурой предпочтений.* // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов, Россия, 1–4 июля 2009г. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 157–160.

A6. Савина Т. Ф. *Гомоморфизмы и конгруэнтности игр с отношениями предпочтения.* // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 63–66.

A7. Савина Т. Ф. *Гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения.* // Дискретная математика и ее приложения: материалы X Международного семинара, Москва, МГУ, 1–6 февр. 2010. — М.: Изд-во мех.-мат. фак. Моск. ун-та, 2010. С. 426–428.

A8. Savina T. F. *Homomorphisms and Congruence Relations for Games with Preference Relations.* // Contributions to game theory and management. Vol. III. Collected papers on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 387–398.

A9. Savina T. F. *Coalition Homomorphisms of Games with Preference Relations.* // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Fourth International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 197–199.

A10. Савина Т. Ф. *Равновесные и допустимые исходы для коалиций в игре с отношениями предпочтения.* // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 74–78.

A11. Savina T. F. *Cooperative Optimality Concepts for Games with Preference Relations.* // Contributions to game theory and management. Vol. IV. Collected papers on the Fourth International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2011. P. 421–432.

A12. Savina T. F. *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Inclusion Map of Game with Preference Relations into Game with Payoff Functions.* // Game Theory and Management. Collected abstracts of papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2011. P. 204–205.