

На правах рукописи



Дьяченко Юрий Петрович

**Нестационарная задача динамики
пластин переменного сечения
в уточненной постановке**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Автореферат

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Саратов — 2008

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Радаев Юрий Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Ковалев Владимир Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор
Козлов Владимир Анатольевич

Ведущая организация: Чувашский государственный педагогический
университет им. И.Я. Яковлева

Защита состоится 25 декабря 2008 г. в 15³⁰ час. на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при ГОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского” по адресу: 410026, г. Саратов, ул. Астраханская 83, учебный корпус №9, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке библиотеке ГОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”.

Автореферат разослан 24 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук



Ю.В. Шевцова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Решение нестационарных задач динамики для составных конструкций с распределенными параметрами в замкнутой форме представляет актуальную проблему современной механики. Условия надежности и экономичности при создании рациональных инженерных конструкций приводят к необходимости проведения динамических исследований на основе более сложных расчетных моделей при обеспечении высокой точности получаемых результатов. Актуальным представляется исследование уточненных моделей по отношению к классической теории стержней, пластин и оболочек. В настоящей работе используется неклассическая модель, основанная на кинематических гипотезах выдающегося отечественного ученого-механика С.П. Тимошенко, для исследования недостаточно изученного процесса нестационарного деформирования в пластинах, в том числе и переменного сечения. Проблема разработки и теоретического обоснования новых алгоритмов динамического расчета таких конструкций, моделируемых в виде систем с бесконечном числом степеней свободы, и создание на их основе универсальных программных модулей является актуальной.

Целью работы является изучение нестационарных динамических процессов в упруго закрепленных круглых и прямоугольных пластинах, включая пластины ступенчато-переменного сечения, определение частот и форм свободных колебаний на основе построения замкнутых аналитических решений.

Методика исследования. В работе используется вектор-матричная форма метода конечных интегральных преобразований, особенность которой заключается в том, что в процессе решения определяются все компоненты его структуры из рассмотрения соответствующих подзадач без какой-либо априорной информации о форме решения.

Научная новизна работы заключается в следующем: указанным методом получены точные аналитические решения нестационарных задач для прямоугольных и круглых пластин типа Тимошенко при наиболее общих граничных условиях для широкого класса динамических нагрузок. Использован новый подход исследования в замкнутой форме нестационарных динамических задач пластин ступенчатого сечения с конечной сдвиговой жесткостью. Эффективность предлагаемого решения обеспечивается значительно меньшим, по сравнению с методами конечной аппроксимации, порядком разрешающей системы уравнений и высокой точностью получения частот и форм свободных колебаний конструкции.

Практическая ценность и внедрение результатов:

- Получены эффективные расчетные соотношения, позволяющие исследовать напряженно-деформированные состояния пластин Тимошенко при наиболее общих условиях их опирания и динамического нагружения.
- Полученные в работе замкнутые решения могут быть использованы при

оценке погрешностей различных приближенных алгоритмов и методов, при расчете сложных фундаментов, дорожных плит покрытия, перекрытий сооружений, подпорных стенок гидротехнических сооружений.

- Результаты работы по договору о творческом содружестве с АО “Проектно-изыскательский институт Самарагидропроект” использованы в составе технико-экономического обоснования расширения Волжской ГЭС им. В.И. Ленина. Были выполнены расчеты (в соавторстве с Э.Я. Еленецким) по определению несущей способности пространственного блока перекрытия здания ГЭС при действии статических и динамических нагрузок. Ожидаемый экономический эффект 67000 тонн арматурной стали.

Достоверность полученных результатов исследования обеспечивается корректностью постановки и строгостью математического метода решения рассматриваемых начально-краевых задач, сравнением полученных решений в частных случаях с классическими решениями, а также соответствием качественных результатов общей физической картине исследуемых процессов.

На защиту выносятся:

- новые точные аналитические решения нестационарных задач для круглой и прямоугольной (в том числе и переменного сечения) пластин при произвольных динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований для общих граничных условий;
- новая интерпретация метода начальных параметров для получения аналитического решения пластин ступенчатого сечения в виде, не содержащем быстро возрастающих и убывающих частей, что позволяет исследовать частотный спектр системы в более широком диапазоне;
- новая форма метода конечных интегральных преобразований, дополненная операцией суммирования по элементам составной конструкции;
- результаты численного анализа напряженно-деформированного состояния, спектра частот и форм колебаний составной конструкции.

Апробация работы. Основные положения и работа в целом докладывались и обсуждались на следующих международных, всероссийских, региональных научных конференциях и симпозиумах, семинарах и школах:

- Научный семинар на кафедре “Математической теории упругости и биомеханики” Саратовского государственного университета под руководством доктора физико-математических наук, профессора Л.Ю. Коссовича, Саратов, СГУ, 12 ноября 2008 г.
- Научный семинар “Современные проблемы математики и механики” под руководством доктора физико-математических наук, профессора Ю.Н. Радаева. Самара, СамГУ, 2005–2008 гг.;

- Научный семинар “Актуальные проблемы механики, математики и информатики” под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.А. Ковалева. Москва, Московский городской университет управления Правительства Москвы, 15 мая 2008 г.;
- Международная научная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”. Стерлитамак, МГУ, АН Республики Башкортостан, 24–28 июня 2008 г.;
- Семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физико-математических наук, профессора Д.Д. Ивлева. Чебоксары, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 28 июня 2007 г.;
- 15-я Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, 26 февраля – 3 марта 2007 г.;
- Второй Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике “Нелинейное моделирование и управление” (летняя сессия). г. Самара, 1–6 июля 2001 г.;
- Международная конференция “Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики”. Нальчик, НАН Украины, Институт математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, 2–6 июня 1997 г.;
- Шестая межвузовская научная конференция “Математические модели и краевые задачи”. Инженерная Академия России, Самарский государственный технический университет. Самара, 29–31 мая 1996 г.;
- Региональные научно-технические конференции “Актуальные проблемы в строительстве и архитектуре. Образование. Наука. Практика” под руководством доктора технических наук, профессора Ю.Э. Сеницкого. Самара, СамГАСА, 1994–2004 гг.;

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 19 печатных работ. Работы с соавторами выполнены на паритетных началах.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы – 162 страницы машинописного текста, включая 28 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 236 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель работы. Изложены основные положения диссертационной работы по главам.

Первая глава представляет обзор и анализ литературы, посвященной исследованию задач с распределенными параметрами при действии динамических нагрузок. Обосновывается выбор метода решения рассматриваемых начально-краевых задач и подчеркивается актуальность настоящего исследования.

Отмечается, что аналитическому исследованию тонких прямоугольных пластин посвящено огромное количество работ, начиная с С. Жермен, Г. Кирхгофа, Б. Навье, М. Леви, А. Лява. Затем эта проблема была отражена в трудах таких ученых, как И.Г. Бубнов, В.З. Власов, А.С. Вольмир, Б.Г. Галеркин, А.Л. Гольденвейзер, Г. Генки, М. Губер, Д.Д. Ивлев, Ю.Д. Каплунов, В.А. Ковалев, Л.Ю. Коссович, Т. Карман, А.Н. Крылов, С.Г. Лехницкий, Л.С. Лейбензон, В.Б. Лидский, А.В. Манжиров, Р. Миндлин, А. Надаи, П.Ф. Папкович, Ю.Н. Радаев, Е. Рейснер, С.П. Тимошенко, П.Е. Товстик, А. и Л. Феппль и многие другие.

С середины XX в. возрос интерес к уточненным теориям пластин, так как решение ряда задач на основе классических уравнений, связанных с исследованием неустановившихся процессов, приводило к заметным погрешностям в силу их физического и математического несовершенства. Обобщение классической теории поперечных колебаний стержней, пластин и оболочек, основанное на учете влияния инерции вращения и деформации поперечного сдвига, связывают с именем выдающегося ученого-механика С.П. Тимошенко. Он общепризнанно считается автором этой уточненной теории (1916 г.), хотя учет инерции вращения еще был сделан ранее Дж. Релеем в 1877 г. В неклассической теории колебаний стержней, пластин и оболочек эффективно проявил себя метод конечных интегральных преобразований. Структурный алгоритм этого метода отличается тем, что все составляющие решения находятся из рассмотрения соответствующих подзадач без какой-либо первоначальной информации о форме этого решения. Достоинством такого подхода в рассмотренных в диссертации задачах является единая форма представления замкнутых решений в хорошо разработанных элементарных функциях и функциях Бесселя.

Во **второй главе** приводится точное решение динамической задачи для прямоугольной пластины, лежащей на упругом основании с коэффициентом постели γ , при наиболее общих (упругих) условиях опирания на двух ее противоположных краях.

Существенным представляется то, что полученное замкнутое решение построено для произвольных динамических воздействий и в такой общей постановке такая задача ранее не рассматривалась.

Начально-краевая задача в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W - \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \eta} - b_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \gamma W &= -b_2 q, \\ b_3 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \alpha_\xi \right) + \frac{\partial^2 \alpha_\xi}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 \alpha_\eta}{\partial \xi \partial \eta} + b_5 \frac{\partial^2 \alpha_\xi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \alpha_\xi}{\partial t^2} &= 0, \\ b_3 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha_\eta \right) + \frac{\partial^2 \alpha_\eta}{\partial \eta^2} + b_4 \frac{\partial^2 \alpha_\xi}{\partial \xi \partial \eta} + b_5 \frac{\partial^2 \alpha_\eta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \alpha_\eta}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

При $t = 0$ должны выполняться начальные условия

$$W = \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha_\xi = \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial t} = \alpha_\eta = \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Границные условия имеют вид:

$$\text{при } \xi = 0 : \quad W(0, \eta, t) = 0, \quad \alpha_\eta(0, \eta, t) = 0, \quad \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \eta} = 0, \quad (3)$$

$$\text{при } \xi = 1 : \quad W(1, \eta, t) = 0, \quad \alpha_\eta(1, \eta, t) = 0, \quad \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \eta} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0 : \quad b_6 \left(\frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \xi} \right) + \gamma_1 \alpha_\eta &= 0, \\ b_7 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha_\eta \right) - \gamma_2 W &= 0, \quad b_8 \left(\frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \xi} \right) + \gamma_3 \alpha_\xi = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = \varepsilon : \quad -b_6 \left(\frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \xi} \right) + \gamma_1 \alpha_\eta &= 0, \\ b_7 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha_\eta \right) + \gamma_2 W &= 0, \quad -b_8 \left(\frac{\partial \alpha_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha_\eta}{\partial \xi} \right) + \gamma_3 \alpha_\xi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Границные условия (3), (4) соответствуют шарнирному опиранию краев пластины $\xi = 0, 1$, а условия (5), (6) на краях $\eta = 0, \varepsilon$ — упругому закреплению относительно углов поворота и прогибов. Соотношения (1)–(6) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи, в которой $W, \alpha_\xi, \alpha_\eta$ — прогибы и углы поворота нормали элемента в плоскости $\xi\zeta$ и $\eta\zeta$ соответственно, $\varepsilon = b/a$, a, b, h — длина, ширина и высота пластины, b_j ($j = 1, 2, \dots, 9$) — постоянные, приведенные в тексте диссертации.

При построения общего решения в случае произвольной динамической нагрузки сначала используем конечное синус- и косинус-интегральное преобразование Фурье по переменной ξ , а затем — в пространстве изображений

к полученной краевой задаче — обобщенное конечное интегральное преобразование по переменной η с компонентами вектор-функции ядра $K_1(\lambda_{in}, \eta)$, $K_2(\lambda_{in}, \eta)$, $K_3(\lambda_{in}, \eta)$, определяемыми в процессе решения задачи. Такой общий прием позволяет построить решение для наиболее общих (упругих) условий закрепления краев $\eta = 0$, $\eta = \varepsilon$.

В результате система уравнений (1) переходит в связанную систему дифференциальных уравнений для соответствующих трансформант, а начальные и граничные условия (2)–(6) будут также выражены через соответствующие трансформанты и их производные.

Затем на сегменте $[0, \varepsilon]$ вводится обобщенное конечное интегральное преобразование вида

$$\varphi(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^\varepsilon \{ f_1 W_s(n, \eta, t) K_1(\lambda_{in}, \eta) + f_2 \alpha_c(n, \eta, t) K_2(\lambda_{in}, \eta) + f_3 \alpha_s(n, \eta, t) K_3(\lambda_{in}, \eta) \} d\eta, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W_s(n, \eta, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, \eta)}{\| K \|^2}, \\ \alpha_s(n, \eta, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_3(\lambda_{in}, \eta)}{\| K \|^2}, \\ \alpha_c(n, \eta, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, \eta)}{\| K \|^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\| K \|^2 = \int_0^\varepsilon [f_1 K_1^2(\lambda_{in}, \eta) + f_2 K_2^2(\lambda_{in}, \eta) + f_3 K_3^2(\lambda_{in}, \eta)] d\eta$$

— квадрат нормы, f_1, f_2, f_3 — весовые коэффициенты.

Выражение (7) представляет собой прямое преобразование, а (8) — формулы обращения, справедливые при выполнении соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon & [f_1 K_1(\lambda_{in}, \eta) K_1(\lambda_{jn}, \eta) + f_2 K_2(\lambda_{in}, \eta) K_2(\lambda_{jn}, \eta) + \\ & + f_3 K_3(\lambda_{in}, \eta) K_3(\lambda_{jn}, \eta)] d\eta = \delta_i^j \| K \|^2, \end{aligned}$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Использование двух условий структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований позволяет, с одной стороны, получить счетную последовательность задач Коши для трансформанты $\varphi(\lambda_{in}, n, t)$

$$\ddot{\varphi}(\lambda_{in}, n, t) + \lambda_{in}^2 \varphi(\lambda_{in}, n, t) = b_2 \tilde{b}_1 q_H(\lambda_{in}, n, t) \quad (9)$$

$$(i, n = 1, 2, 3, \dots),$$

решение которой, с учетом нулевых начальных условий, записывается в виде интеграла следующим образом:

$$\varphi(\lambda_{in}, n, t) = \frac{b_2}{b_1 \lambda_{in}} \int_0^t q_H(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in}(t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

а с другой стороны— позволяют найти как значения коэффициентов

$$f_1 = 1, \quad f_2 = f_3 = \tilde{b}_1 \tilde{b}_3,$$

так и сформулировать однородную краевую задачу для компонент ядра конечного интегрального преобразования и получить граничные условия.

После решения соответствующих дифференциальных уравнений находим выражение для компонент ядра интегрального преобразования, подстановка которых в граничные условия приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Это позволяет получить трансцендентное уравнение для определения безразмерных собственных частот колебаний пластины λ_{in}

$$\det \|A_{km}\| = 0 \quad (k, m = 1, 2, \dots, 6).$$

Применяя теперь к выражению трансформанты (10) последовательно формулы обращения конечного интегрального преобразования (8), а также синус- и косинус-преобразований Фурье, получаем общие выражения для безразмерных динамических прогибов $W(\xi, \eta, t)$ и соответствующих углов поворота нормали $\alpha_\xi(\xi, \eta, t)$, $\alpha_\eta(\xi, \eta, t)$ пластины, справедливых для произвольной динамической нагрузки $q(\xi, \eta, t)$:

$$W(\xi, \eta, t) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, \eta) \sin n\pi\xi}{\|K\|^2},$$

$$\alpha_\xi(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, \eta) \cos n\pi\xi}{\Omega_n \|K\|^2}, \quad \Omega_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 1/2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

$$\alpha_\eta(\xi, \eta, t) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{in}, n, t) K_3(\lambda_{in}, \eta) \sin n\pi\xi}{\|K\|^2}.$$

В третьей главе рассматривается важная с теоретической и практической точек зрения динамическая задача, когда конструкция имеет переменную толщину, изменяющуюся непрерывно или ступенчато. При этом срединные плоскости участков пластины могут быть смещены относительно друг друга.

Аналитическое решение построено путем применения метода начальных параметров (МНП) в сочетании с методом конечных интегральных преобразований. В отличие от традиционной схемы применения МНП (когда начальные параметры имеют физический смысл перемещений и усилий), здесь в качестве последних используются произвольные константы одного из участков (например, первого) плиты ступенчато-переменной толщины. Применение такого подхода не приводит к появлению в решении функций, имеющих быстро возрастающие и быстро убывающие составляющие. В результате отпадает необходимость в ортогонализации решения.

В качестве примера рассмотрена плита ступенчатого сечения, состоящая из n элементов и имеющая шарнирное опирание на краях $x = 0, l$ и произвольное — на гранях $y = 0, L$ (рис. 1, а).

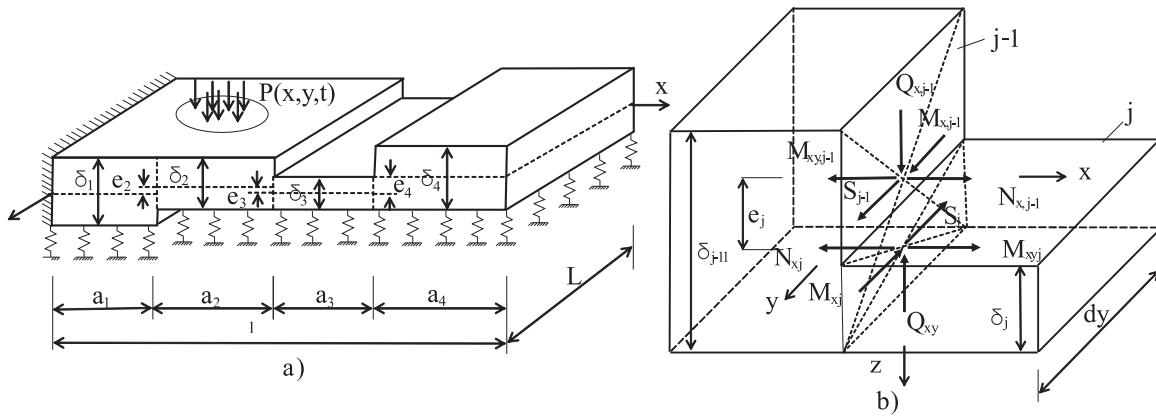


Рис. 1. а) прямоугольная плита ступенчато-переменной толщины, б) сопряжение элементов на границе участков

Конструкция лежит на упругом основании и загружена произвольными динамическими нагрузками $\vec{P}(x, y, t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Напряженно-деформированное состояние участков плиты определяется следующими векторами:

$$\vec{D}_j(x, y, t) = [U_j, V_j, W_j, \alpha_{xj}, \alpha_{yj}]^T, \quad (11)$$

$$\vec{F}_j(x, y, t) = [N_{xj}, S_j, Q_{xj}, -M_{xj}, -M_{yj}]^T,$$

$$\vec{\Lambda}_j(x, y, t) = [\vec{D}_j, \vec{F}_j]^T \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

где \vec{D}_j, \vec{F}_j — соответственно вектор-функции перемещений и усилий, отнесенных к срединной поверхности j -го участка, индекс T означает транспони-

рование матриц. Математическая формулировка задачи для составной конструкции при нулевых начальных условиях в стандартной форме имеет вид:

$$(L_j + G_j \partial^2 / \partial t^2) \vec{D}_j(x, y, t) = \vec{P}_j(x, y, t), \quad (13)$$

$$\vec{D}_j(x, y, 0) = 0, \quad \partial \vec{D}_j(x, y, t) / \partial t \big|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

$$\vec{\Lambda}_{j-1}(x, a_{j-1}, t) = B_j \vec{\Lambda}_j(x, 0, t) \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad (15)$$

где L_j — матрица дифференциальных операторов, G_j — диагональная матрица инерционных коэффициентов. Равенства (15) представляют кинематические и статические условия сопряжения смежных элементов (рис. 1, б), взаимное смещение e_j которых учитывается матрицей B_j .

Для замкнутой формулировки задачи к соотношениям (13)–(15) необходимо добавить условия, соответствующие конкретным способам закрепления продольных и поперечных ребер плиты ($x = 0, l; y = 0, L$).

Принятые условия шарнирного опирания на краях $x = 0, l$ позволяют использовать синус- и косинус-преобразования Фурье по переменной x :

$$\vec{\Lambda}_{jk}^f(y, t) = \int_0^{a_j} \Phi_k(x) \vec{\Lambda}_j(x, y, t) dx, \quad \vec{\Lambda}_j = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \vec{\Lambda}_{jk}^f. \quad (16)$$

В результате применения преобразования (16) к исходной начально-краевой задаче, соотношения (12)–(15) принимают вид:

$$\vec{\Lambda}_{jk}^f(y, t) = \left[\vec{D}_{jk}^f, \vec{F}_{jk}^f \right]^T, \quad (17)$$

$$(L_{jk} + G_j \partial^2 / \partial t^2) \vec{D}_{jk}^f(y, t) = \vec{P}_{jk}^f(y, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

$$\vec{D}_{jk}^f(y, 0) = 0, \quad \partial \vec{D}_{jk}^f(y, t) / \partial t \big|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

$$\vec{\Lambda}_{j-1,k}^f(a_{j-1}, t) = B_j \vec{\Lambda}_{jk}^f(0, t) \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad (20)$$

$$\vec{P}_{jk}^f(y, t) = \int_0^l \Phi_k(x) \vec{P}_j(x, y, t) dx.$$

Аналогичная процедура должна быть применена также для соответствующих граничных условий на ребрах $y = a_0$ для первого участка, $y = a_n$ для последнего участка конструкции.

С целью разделения переменных задачи (18)–(20) введем на сегментах $[0, a_j]$ конечное интегральное преобразование по переменной y , дополненное

операцией суммирования по элементам системы, что является новым в его структуре:

$$\varphi(\lambda_{ki}, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{\tilde{D}}_{jki}^T(\lambda_{ki}, y) G_j \vec{D}_{jk}^f(y, t) dy, \quad (21)$$

$$\vec{\Lambda}_{jk}(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ki}, t) \vec{\tilde{\Lambda}}_{jki}(\lambda_{ki}, y) \|Z_{ki}\|^{-2}. \quad (22)$$

Здесь (21) — прямое преобразование, (22) — формула обращения, справедливая при выполнении обобщенного условия ортогональности

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{\tilde{\Lambda}}_{jki}^T(\lambda_{ki}, y) G_j \vec{\tilde{\Lambda}}_{jkm}(\lambda_{mk}, y) dy = \begin{cases} \|Z_{ik}\|^{-2}, & \text{при } i = m, \\ 0, & \text{при } i \neq m, \end{cases}$$

где $\vec{\tilde{\Lambda}}_{jkm}(\lambda_{mk}, y)$ — вектор-функция форм перемещений и усилий, соответствующих i -му тону собственных колебаний системы.

Применим преобразование (21) к уравнениям (18) и начальным условиям (19). После выполнения соответствующих преобразований получим тождество Лагранжа для самосопряженных операторов L_{jk} :

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{\tilde{D}}_{jki}^T L_{jk} \vec{D}_{jk}^f dy = R_{ki} - \sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \left(\vec{D}_{jk}^f \right)^T L_{jk} \vec{\tilde{D}}_{jki} dy, \quad (23)$$

где R_{ki} — внеинтегральные члены.

Использование двух условий структурного метода конечных интегральных преобразований

$$R_{ki} = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \left(\vec{D}_{jk}^f \right)^T L_{jk} \vec{\tilde{D}}_{jki} dy = -\lambda_{ki}^2 \varphi(\lambda_{ki}, t), \quad (25)$$

представляющие равенство нулю внеинтегральных членов и операционное свойство, позволяют получить уравнения для нахождения трансформанты

$$\ddot{\varphi}_{ki}(t) + \lambda_{ki}^2 \varphi_{ki}(t) = p_{ki}(t) \quad (i = \overline{1, \infty}), \quad (26)$$

которое представляет, с учетом начальных условий счетную последовательность задач Коши для каждого тона колебаний, решение которой записывается в виде интеграла (12).

Преобразуя выражение для внеинтегральных членов (24) с учетом зависимости (20) и (15) приходим к выражениям

$$\vec{\tilde{\Lambda}}_{j-1,ki}(a_{j-1}) = B_j \vec{\tilde{\Lambda}}_{jki}(0) \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (27)$$

Полученные равенства (27) являются инвариантными по отношению к исходным краевым условиям (15) и обеспечивают обобщенную ортогональность разложения (22).

Использование второго условия структурного метода конечных интегральных преобразований (25) позволяет получить дифференциальные уравнения для форм колебаний системы:

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} (\vec{D}_{jk}^f)^T (L_{jk} - \lambda_{ki}^2 G_j) \vec{\tilde{D}}_{jki} dy = 0. \quad (28)$$

Из условия нетривиальности решения ($\vec{D}_{jk}^f \neq 0$) приходим к следующим равенствам:

$$(L_{jk} - \lambda_{ki}^2 G_j) \vec{\tilde{D}}_{jki} dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения (29) совместно с граничными условиями (27) и представляют ядерную задачу по определению собственных функций разложения (22).

Интегралы уравнений (29) могут быть представлены в матричной форме:

$$\vec{\tilde{\Lambda}}_{jki} = A_{jki} \vec{C}_{jki}, \quad (30)$$

где A_{jki} — матрица общих решений однородных уравнений (29), \vec{C}_{jki} — вектор-столбец произвольных постоянных.

Подставляя (30) в (27) и выполняя стандартные процедуры метода начальных параметров, выражаем искомые векторы \vec{C}_{jki} произвольного j -го элемента плиты через аналогичный вектор первого участка:

$$\vec{C}_{jki} = \left\{ \prod_{m=j}^2 [B_m A_{mki}(0)]^{-1} A_{m-1,ki}(a_{m-1}) \right\} \vec{C}_{1ki} \quad (m = j, j-1, \dots, 2). \quad (31)$$

Заметим, что при наличии соотношения (31), достаточно сформулировать краевые условия на границах плиты ($y = 0$ при $j = 1$, $y = a_n$ при $j = n$), что соответствует десяти граничным условиям задачи и обеспечивает замкнутую форму ее решения.

В качестве примера произведен расчет фундаментной части водонапорной плотины ГЭС при действии гидравлического удара (рис. 1, а). Нагрузка

$\vec{P}_j(x, y, t)$ внезапно приложена в момент времени $t = 0$ перпендикулярно ко всей поверхности фундамента и остается в дальнейшем постоянной и равной P_0 . Расчеты выполнены при следующих исходных данных: $L = 10\text{м}$, $a_1 = a_4 = 4\text{м}$, $a_2 = 3\text{м}$, $a_3 = 2\text{м}$, $\delta_1 = \delta_4 = 2\text{м}$, $\delta_2 = 1.4\text{м}$, $\delta_3 = 1\text{м}$, $E = 2, 7 \cdot 10^4 \text{МПа}$, $\mu = 0, 16$, $P_0 = 0, 1 \text{МПа}$, $\tilde{\gamma} = 28 \text{МПа/м}$.

На рис. 2 приведены эпюры перемещений и усилий в срединных плоскостях элементов в сечении $y_1 = L/2$ при $t_1 = 0, 01 \text{ с}$. Как и следовало ожидать, функции U и M_x имеют разрывы на границах участков в соответствии со следующими равенствами:

$$U_{j-1}(a_{j-1}, y_1, t_1) - U_j(0, y_1, t_1) = -e_j \alpha_{xj}(0, y_1, t_1),$$

$$M_{x,j-1}(a_{j-1}, y_1, t_1) - M_{xj}(0, y_1, t_1) = -e_j N_{xj}(0, y_1, t_1).$$

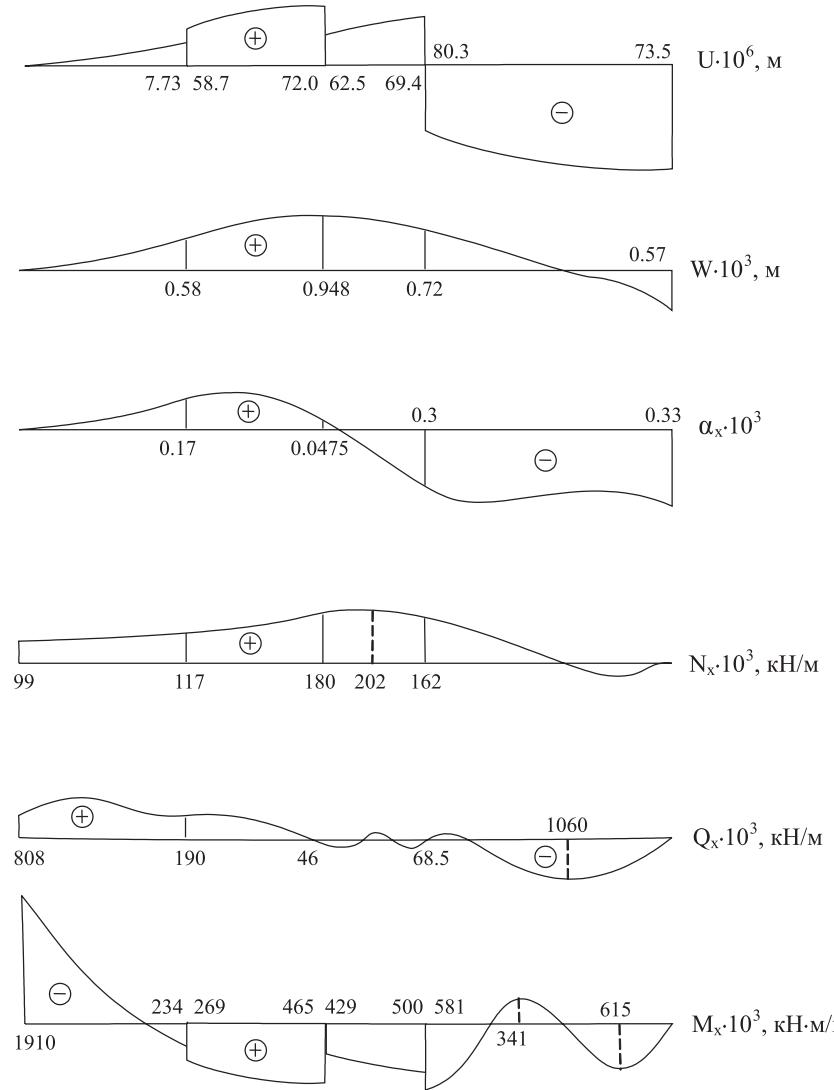


Рис. 2. Эпюры перемещений и усилий фундамента плиты плотины ГЭС

Характерной особенностью полученных результатов является наличие продольных усилий при действии на конструкцию поперечных нагрузок. Так,

например, в рассматриваемом сечении y_1 большая часть фундамента является внерадиально растянутой, причем максимальные растягивающие усилия возникают в ослабленной части конструкции (участок 3). Последнее обстоятельство особенно важно при проектировании железобетонных сооружений, при расчете сложных фундаментов, дорожных плит покрытия, подпорных стен гидротехнических сооружений.

В работе рассмотрены примеры, которые позволяют проанализировать отдельно влияние эксцентрикитетов ступенчатых пластин на жесткостные свойства системы и оценить вклад мембранных состояний. Обнаружено влияние арочного эффекта на частоту основного тона несимметричной конструкции, исследовано влияние тангенциальных сил инерций на значения первых частот форм колебания конструкций, при этом сам спектр становится более плотным.

В четвертой главе рассматривается неосесимметричная задача динамики для упруго закрепленной относительно углов поворота и линейных смещений круглой пластины Тимошенко, подверженной действию произвольной нормальной к ее поверхности нагрузки. Система трех дифференциальных уравнений движения составлена относительно нормального перемещения и двух углов поворота поперечных сечений пластины. К полученным линейным уравнениям в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами добавлена система краевых условий, соответствующая состоянию пластины в начальный момент времени и схеме закрепления на контуре: шесть начальных условий, шесть условий периодичности, три условия ограниченности (регулярности решения) в центре пластины и три условия на контуре, связывающие через коэффициенты жесткости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ моменты с углами поворота, а поперечные силы с прогибами.

Решение полученной начально-краевой задачи осуществляется также, как это описано во второй главе. В результате общие решения полученных уравнений выражаются в обычных и модифицированных функциях Бесселя. Из условия нетривиальности решений получается трансцендентное уравнение для определения собственных значений и связанных с ними круговых частот свободных колебаний пластины.

Выражения для прогибов и углов поворота, представляющие общее решение исследуемой динамической задачи в виде двойных рядов, составляются путем последовательного применения к трансформанте формул обращения конечного интегрального преобразования и преобразования Фурье. Расчетные соотношения для внутренних усилий определяются в результате дифференцирования построенных разложений. В работе указана процедура получения частных решений из полученного общего решения, справедливых для идеализированных схем опирания. В качестве примера определена реакция системы от сосредоточенного импульсного воздействия.

В работе исследовано влияние относительной толщины круглой пластины

на изменение частот свободных осесимметричных колебаний (рис. 3). Пунктирные линии соответствуют классической теории, а сплошные — уточненной. Для малых относительных толщин поправка Рэлея почти не оказывает существенного значения на первые частоты колебаний пластины. Более того, из сопоставления соответствующих кривых следует, что влияние инерции вращения является не существенным для первых двух тонов ее колебаний λ_1 и λ_2 во всем рассмотренном диапазоне толщин $0.05 \leq h/R \leq 0.3$.

Следует обратить внимание на то, что начиная с пятого тона и выше, частотные кривые, обозначенные на графике сплошными линиями, при увеличении относительной толщины, начиная с некоторых значений h/R имеют тенденцию к снижению.

Сопоставление частотных кривых, полученных с учетом и без учета поправки Рэлея выявляет причину ранее необъясненного эффекта понижения частот при увеличении относительной толщины пластины. Действительно, рост этого фактора при увеличении толщины h/R приводит к доминирующему влиянию сил инерции, возникающих вследствие поворотов нормалей сечений, что и проявляется в значительном уменьшении частот колебаний.

На рис. 4 представлены формы колебаний W_{mn} круглой пластины при шарнирном закреплении и указаны соответствующие им собственные значения.

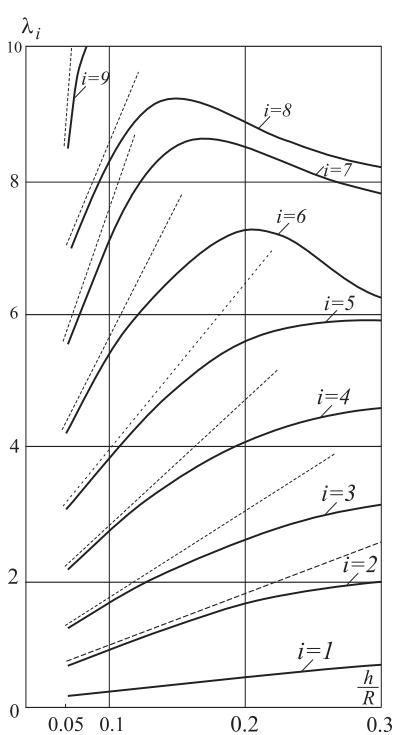


Рис. 3. Зависимость начальных тонов колебаний круглой пластины от их относительной толщины

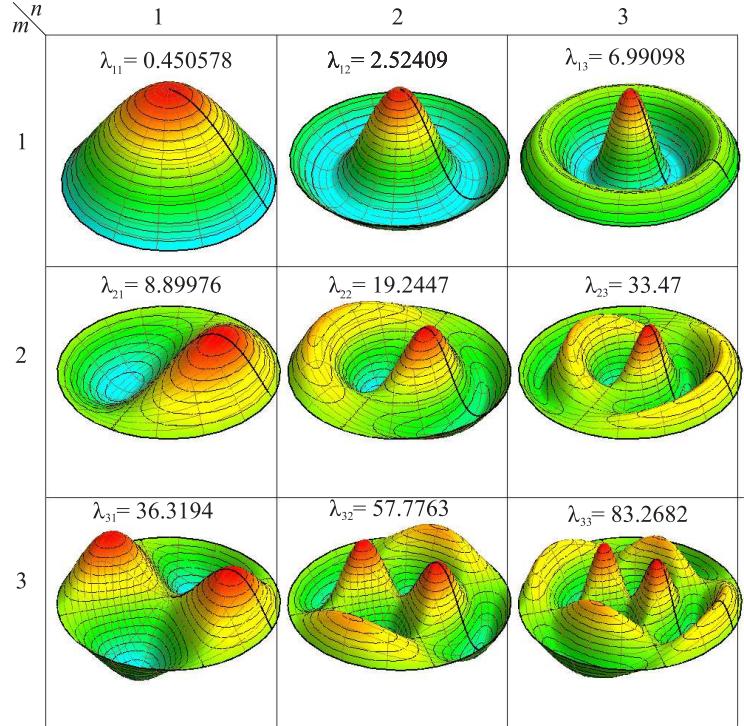


Рис. 4. Формы колебаний W_{mn} круглой пластины при шарнирном опирании

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- 1) Получены аналитические решения нестационарных задач упруго закрепленных прямоугольных и круговых пластин Тимошенко при достаточно общих условиях закрепления и динамического загружения.
- 2) Предложена универсальная, обладающая высокой точностью, методика расчета круговых и прямоугольных (в том числе переменного сечения) пластин с конечной сдвиговой жесткостью для широкого класса нестационарных динамических воздействий и произвольных условий закрепления на контуре.
- 3) Интегрирование начально-краевой задачи для пластин переменного сечения, возможно, путем применения метода конечных интегральных преобразований, включающего дополнительную операцию суммирования по элементам системы, что обеспечивает ортогональность получаемых разложений.
- 4) Выявлен эффект значительного повышения частоты основного тона колебаний плиты с несимметричным сечением, по сравнению с аналогичной конструкцией, имеющей симметричный профиль. Обнаруженная особенность является проявлением широко известного арочного эффекта, учет которого требуется нормативными документами (СНиП).
- 5) Принятая форма условий сопряжения элементов пластины сохраняет на границах участков гипотезу плоских сечений, хотя в действительности эти сечения искривляются. Математическое моделирование показало, что результаты, полученные на основе приведенной методики, дают оценку сверху в части определения частот и внутренних усилий, и оценку снизу в части определения перемещений конструкций. С инженерной точки зрения такой подход является оправданным.
- 6) Разработанная методика и программное обеспечение позволило произвести расчет и анализ напряженно-деформированного состояния дополнительной секции расширяемой части плотины Волжской ГЭС при различных режимах ее эксплуатации. При исследовании наиболее неблагоприятного расчетного случая для всего блока плотины в целом было показано, что картина распределения изгибающих моментов в этом случае приводит к появлению перерезывающих усилий высокой интенсивности. Выявлены зоны с растягивающими усилиями, которые следует учитывать при проектировании железобетонных конструкций плотины.

Статьи из перечня ведущих научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования науки РФ по тематике диссертационной работы:

1. Дьяченко, Ю.П. Метод расчета нестационарного воздействия на прямоугольные пластины ступенчато-переменной толщины / Ю.П. Дьяченко // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №2(61). – С. 136–159.
2. Еленицкий, Э.Я. Применение метода начальных параметров к решению нестационарной задачи динамики для прямоугольной пластины ступенчатого сечения / Э.Я. Еленицкий, Ю.П. Дьяченко // Известия вузов. Строительство. – 1997. – №11. – С. 13–18.

Основные результаты опубликованы также в работах:

1. Дьяченко, Ю.П. Динамический расчет конструкций, основанный на теории колебаний пластин / Ю.П. Дьяченко, Э.Я. Еленицкий // Тр. Юбилейной школы-семинара “Проблемы современной механики деформируемого твердого тела и прикладной математики”, посвященной 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева (29 января–2 февраля 2008 г., г. Самара). – С. 37–39.
2. Дьяченко, Ю.П. Динамический расчет прямоугольных пластин ступенчатого сечения при действии нестационарных нагрузок / Ю.П. Дьяченко // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции (24–28 июня 2008, г. Стерлитамак). – Уфа: Гилем. – 2008. – С. 79–83.
3. Дьяченко, Ю.П. Спектральная оценка уточненных кинематических гипотез теории пластин / Ю.П. Дьяченко, С.А. Лычев // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). В 3-х частях. Часть 1. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 337–341.
4. Дьяченко, Ю.П. Определение напряженно-деформированного состояния пластин ступенчато-переменной толщины при действии нестационарных нагрузок / Ю.П. Дьяченко // Обозрение прикладной и промышленной математики. Второй Всероссийский симпозиум (летняя сессия). – М.: Научное издательство ТВП, – 2001. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 162–163.
5. Еленицкий, Э.Я. Нестационарная задача динамики для прямоугольной пластины ступенчатого сечения / Э.Я. Еленицкий, Ю.П. Дьяченко // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики. – Киев: Институт математики НАН Украины, – 1997. – С. 112–115.
6. Еленицкий, Э.Я. Свободные колебания прямоугольной пластины ступенчатого сечения с конечной сдвиговой жесткостью / Э.Я. Еленицкий, Ю.П. Дьяченко // Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений. Сборник научных трудов. – Киев: Институт математики НАН Украины. – 1996. – С. 31–34.
7. Дьяченко, Ю.П. К вопросу о нестационарных колебаниях круглых пластин с конечной сдвиговой жесткостью / Ю.П. Дьяченко // “Исследования в области архитектуры и строительства”. Тезисы докладов 54-й научно-технической конференции.: Самара, СамГАСА, 1997. – С. 29.

8. Дьяченко, Ю.П. Колебания пластин под действием подвижной нагрузки с учетом инерции вращения и сдвига / Ю.П. Дьяченко // “Исследования в области архитектуры и строительства”. Тезисы докладов 53-й областной научно-технической конференции по итогам НИР академии за 1995 г. – Самара, СамГАСА, 1996, – С. 34.
9. Дьяченко, Ю.П. Свободные колебания бесконечной полосы с учетом инерции вращения и сдвига / Ю.П. Дьяченко // Расчет пространственных строительных конструкций. Межвузовский сборник научных статей. В кн.: Расчет пространственных строительных конструкций. – Куйбышев: КГУ, 1985. – Вып. XI. – С.170–175.
10. Сеницкий, Ю.Э. О точном решении динамической задачи для упруго закрепленной по двум сторонам прямоугольной пластины на основе модели Тимошенко / Ю.Э. Сеницкий, Ю.П. Дьяченко // Расчет пространственных строительных конструкций. Межвузовский сборник научных работ – Куйбышев: КГУ, 1979. – Вып. 8. – С. 35–45.

Подписано в печать 10 ноября 2008 г.

Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Объем 1,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1583

443011 г. Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано на УОП СамГУ