

На правах рукописи

Луконина Анна Сергеевна

**РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Саратов 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Хромов Август Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент Платонов Сергей Сергеевич
кандидат физико-математических наук
Бурлуцкая Мария Шаукатовна

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится « 18 » декабря 2008 года в 16 ч. 30 мин.
на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском
государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012,
г. Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, механико-математический фа-
культет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Сара-
товского государственного университета.

Автореферат разослан « 17 » ноября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

В.В. Корнев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие вопросы построения и исследования математических моделей физических явлений приводят к задачам спектрального анализа самосопряженных и несамопряженных операторов, т.е. исследованию спектра и разложению заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора. В связи с развитием квантовой механики, при решении многих задач которой спектральный анализ является основным математическим аппаратом, в последние десятилетия интерес к спектральной теории велик, и в ее развитии достигнуты значительные успехи.

Большое внимание в спектральной теории уделяется вопросам равносходимости разложений по с.п.ф. операторов и по известным системам функций. Начало исследований по равносходимости было положено в работах В.А. Стеклова, Е. Гобсона А. Хаара для случая дифференциального оператора Штурма–Лиувилля; а также Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными краевыми условиями (на базе асимптотических формул для собственных значений и собственных функций, полученных Дж. Биркгофом). Большой вклад в развитие этих вопросов внесли отечественные математики В.А. Ильин, А.М. Седлецкий, А.П. Хромов, А.А. Шкаликов и др.

Данная работе также посвящена исследованию равносходимости разложений по с.п.ф. (с тригонометрическим рядом), а также исследуются равномерная сходимость разложений по с.п.ф. к разлагаемой функции (аналог теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических

рядов) и вопросы сходимости средних Рисса вида^{1, 2}

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda, \quad (1)$$

(где $R_\lambda f$ – резольвента рассматриваемого оператора, r такие, что на окружности $|\lambda| = r$ нет собственных значений рассматриваемого оператора), которые обобщают рассматриваемые М. Стоуном средние Рисса спектральных разложений

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\zeta R_\lambda f d\lambda, \quad (\zeta > 0).$$

В настоящей диссертационной работе рассматривается оператор L , порожденный функционально-дифференциальным выражением

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_j(x) \in C^1[0, 1]$ ($j = 1, 2$), и интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 p(t) y(t) dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}, \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ ³, и удовлетворяет

$$(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)) (k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

¹Гуревич А.П. Суммируемость по Риссу разложений спектральных разложений одного класса интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 809-814.

²Гуревич А.П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – № 2(489). – С. 24-35.

³Здесь и в дальнейшем запись $k(t) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ означает, что функция $k(t)$ непрерывна на $[0, 1]$ и является на этом отрезке функцией ограниченной вариации.

Оператор (2) с общим краевым условием $U(y) = 0$ относится к классу функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\vartheta(x) = 1 - x$, которая порождает оператор отражения $Sy(x) = y(1 - x)$. Операторы, содержащие оператор отражения, имеют давнюю историю и интенсивно исследуются в настоящее время (Ch. Vabbage, Ch. Dunkl, А.А. Андреев, С.С. Платонов и др.) Наиболее полно эти операторы, возникающие в различных спектральных задачах (в частности, при изучении разложений по с.п.ф. интегральных операторов, ядра которых имеют разрывы на диагоналях и кодиагоналях^{4,5}), изучены А.П. Хромовым и его учениками.

Рассматриваемый функционально-дифференциальный оператор (2) замечателен своими свойствами: выступает как обобщение квадратного корня из оператора $y''(x)$ (главная часть рассматриваемого оператора $l_0(y) = \beta y'(x) + y'(1 - x)$ обладает тем свойством что $l_0(l_0(y)) = (\beta^2 - 1)y''(x)$); другое достоинство рассматриваемого оператора состоит в том, что он представляет собой интересный частный случай системы Дирака.

Граничное условие (3) было впервые введено и изучено А.М. Седлецким⁶. А.М. Седлецкий рассматривал разложения суммируемой функции в ряд Фурье по системе $E_\Lambda = \left\{ \left\{ x^k e^{i\lambda_n x} \right\}_{k=0}^{m_n-1} \right\}_{n=1}^\infty$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — занумерованная в порядке неубывания модулей последовательность кор-

⁴Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [Текст] / А.П. Хромов // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 932-942.

⁵Корнев В.В О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях [Текст] / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 33-50.

⁶Седлецкий А.М. О равносходимости и равносуммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами [Текст] / А.М. Седлецкий // Матем. заметки. — 1975. — Т. 18. — № 1. — С. 9-17.

ней целой функции $L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t)$, m_n – кратность λ_n . Порождающая мера $d\sigma(t)$ имеет вид

$$d\sigma(t) = \frac{k(t) dt}{(a - |t|)^\alpha}, \quad d\sigma(t) = \frac{k(t) dt}{(a^2 - t^2)^\alpha},$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\text{var } k(t) < \infty$, $k(a - 0) \neq 0$, $k(-a + 0) \neq 0$. Ранее в литературе этот случай не рассматривался, его исследование связано с преодолением значительных трудностей. С точки зрения спектральной теории операторов А.М. Седлецким была рассмотрена задача разложения функции из $L_1[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье по с.п.ф. оператора дифференцирования с граничным условием $\int_{-a}^a y(x) d\sigma(x) = 0$. Граничное условие (3) заменой $\tau = 1/2 - t$ приводится к виду, рассматриваемому А.М. Седлецким.

А.П. Хромовым⁷ был изучен оператор (2),(3) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$. Для него был получен аналог теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических рядов. Оказалось возможным добавить потенциалы (функции $p_j(x)$, $j = 1, 2$), которые создают значительные трудности при изучении сходимости разложений по с.п.ф.

Цель работы состоит в том, чтобы для функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3), весовая функция которого имеет степенную особенность, доказать теорему равносходимости разложений по с.п.ф. и в обычный тригонометрический ряд Фурье, получить аналог теоремы Жордана–Дирихле и исследовать суммируемость обобщенных средних Рисса этого оператора.

Методы исследования. Основной метод, применяемый в работе, – это метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты рассматриваемого оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоскости.

⁷Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.П. Хромов // Докл. РАЕН. – 2004. – № 4. – С. 80-87.

сти спектрального параметра. При этом широко используются результаты из теории функций вещественной и комплексной переменной, функционального анализа.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) Сформулирована и доказана теорема равносходимости разложений произвольной суммируемой функции по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием, весовая функция в котором имеет степенную особенность, и разложений в тригонометрический ряд Фурье (внутри отрезка).

2) Получен аналог теоремы Жордана–Дирихле равномерной сходимости (на всем отрезке) разложений по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора со степенной особенностью в граничном условии к разлагаемой функции.

3) Найдены условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней (на всем отрезке) обобщенных средних Рисса функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием, весовая функция в котором имеет степенную особенность.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применения в спектральной теории несамосопряженных операторов, при рассмотрении граничных условий со степенными особенностями.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались и обсуждались на объединенном научном семинаре математических кафедр СГУ (под руководством профессора А.П. Хромова), на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2005), на Воронежских весенних

математических школах "Понтрягинские чтения – XVI, – XIX" (Воронеж, 2005, 2008), на 13й и 14й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2006, 2008), на апрельских конференциях сотрудников механико-математического факультета СГУ "Актуальные проблемы математики и механики" (Саратов, 2005, 2006, 2007, 2008).

Публикации. Основные результаты исследований опубликованы в 7 научных работах [1]–[7]. Среди них 1 статья в научном журнале [6], 2 статьи в сборниках научных трудов [3], [5] и 4 тезиса докладов на международных конференциях [1], [2], [4], [7]. 6 работ опубликованы без соавторов. В статье [6] результаты каждого автора имеют свой пункт и не перемешиваются, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Первая и вторая главы разделены на три и два параграфа соответственно. В каждой главе своя нумерация параграфов, определений, лемм, теорем и формул. Общий объем диссертации 117 страниц, из которых 6 страниц занимает список литературы, состоящий из 54 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, обозначаются направления и методы исследования, приводится обзор результатов по исследуемой теме, описывается структура и краткое содержание основных этапов работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению резольвенты оператора L , порождаемого функционально-дифференциальным выражением (2) и интегральным граничным условием (3).

В параграфе 1.1 нахождение резольвенты оператора L , скалярной функции $R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f$ (E – единичный оператор, λ – комплексный параметр), сводится к решению краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два:

$$\begin{aligned} Bu'(x) + P(x)u(x) &= \lambda u(x) + F(x), \quad x \in [0, 1], \\ \tilde{U}(u) &= \int_0^1 N(\tau) u(\tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ (T – знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$,

$P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $N(\tau) = \text{diag}(p(\tau), p(1-\tau))$. Система (4) есть система Дирака частного вида.

Лемма 1.1. *Если λ таково, что $R_\lambda f$ существует, то $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = R_\lambda f$, $u_2(x) = u_1(1-x)$, удовлетворяет системе (4). Обратно: если $u(x)$ удовлетворяет (4) и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то $R_\lambda f$ существует и $R_\lambda f = u_1(x)$, $u_2(x) = u_1(1-x)$.*

Далее проводится диагонализация матрицы B и преобразование $u(x) = Qv(x)$, приводящее краевую задачу (4) к виду

$$v'(x) + \tilde{P}(x)v(x) = \lambda Dv(x) + \tilde{F}(x), \quad \tilde{U}(Qv) = 0,$$

где $\tilde{P}(x) = DQ^{-1}P(x)Q$, $\tilde{F}(x) = DQ^{-1}F(x)$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(\omega, -\omega)$,

$\omega = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$. Затем проводится преобразование $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)$,

$H_0(x) = \text{diag}(h_{11}(x), h_{22}(x))$, $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}$ – кодиагональ-

ная матрица, $h_{jj}(x) = \exp\left(-\int_0^x p_{jj}(t) dt\right)$ ($j = 1, 2$), $h_{12}(x) = \frac{1}{2\omega}p_{12}(x)$.

$\cdot h_{22}(x), h_{21}(x) = -\frac{1}{2\omega}p_{21}(x)h_{11}(x), p_{ij}(x) (i, j = 1, 2)$ – элементы матрицы $\tilde{P}(x)$. Данное преобразование хорошо известно (для дифференциальных уравнений ⁸ и для систем Дирака ⁹). После преобразования $v(x) = H(x, \lambda)w(x)$ краевая задача принимает вид

$$w'(x) + P_\lambda(x)w(x) = \lambda Dw(x) + F_\lambda(x), \quad U_\lambda(w) = 0,$$

где $P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}H^{-1}(x, \lambda) \left[H_1'(x) + \tilde{P}(x)H_1(x) \right], F_\lambda(x) = H^{-1}(x, \lambda) \tilde{F}(x), U_\lambda(w) = \tilde{U}(QH(x, \lambda)w)$. Заметим, что элементы матрицы $P_\lambda(x)$ допускают оценку $O(\frac{1}{\lambda})$, что важно при исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи.

Далее, в рассмотрение вводится вспомогательная краевая задача

$$z'(x) = \lambda Dz(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad U_\lambda(z) = 0, \quad (5)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T, \varphi_j(x) \in L_1[0, 1] (j = 1, 2)$. Пусть λ таково, что обратима матрица $\Delta(\lambda) = U_\lambda(Z) := (U_\lambda(Z_1), U_\lambda(Z_2)), Z_j(x, \lambda) (j = 1, 2)$ – столбцы матрицы $Z(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega x}, e^{-\lambda\omega x})$. Тогда решение (5) задается формулой:

$$R_{1,\lambda}\Phi = \int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt - Z(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) U_\lambda \left(\int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt \right),$$

$$\text{где} \quad g_0(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), g_2(x, t, \lambda)),$$

$$g_1(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t, x)e^{\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \text{Re } \lambda\omega \geq 0 \\ \varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \text{Re } \lambda\omega \leq 0 \end{cases},$$

⁸Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. [Текст] / И.М. Рапопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

⁹Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования [Текст] / А.П. Хромов // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 46-55.

$$g_2(x, t, \lambda) = \begin{cases} \varepsilon(x, t)e^{-\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\omega \geq 0 \\ -\varepsilon(t, x)e^{-\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\omega \leq 0 \end{cases},$$

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq x \\ 0 & \text{при } t > x \end{cases} \quad - \text{ функция Хевисайда.}$$

В **параграфе 1.2** с помощью метода, разработанного А.П. Хромым и О.И. Амвросовой ^{10,11}, приводится необходимое изучение некоторых интегралов при больших значениях параметра, базирующееся на асимптотике функции типа Миттаг-Леффлера. С опорой на эти исследования, в **параграфе 1.3** получаются оценки второго слагаемого в формуле для $R_{1,\lambda}\Phi$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Справедливо утверждение

Лемма 1.24. *В области $S = S_1 \cup S_2$ при больших значениях $|\lambda|$ имеют место оценки*

$$\|R_{1,\lambda}\Phi\|_1 = O(\varkappa(\lambda) \|\Phi\|_1), \quad \|R_{1,\lambda}\Phi\|_\infty = O(\|\Phi\|_1),$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ понимаются как нормы в пространстве вектор-функций размерности два L_1 и L_∞ соответственно,

$$\varkappa(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda\omega} (1 - |e^{-\lambda\omega}|) & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\omega \geq 0, \\ -\frac{1}{\operatorname{Re} \lambda\omega} (1 - |e^{\lambda\omega}|) & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\omega \leq 0, \end{cases}$$

S_1 (S_2) – область, получающаяся из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda\omega \geq 0$ ($\operatorname{Re} \lambda\omega \leq 0$) удалением всех нулей функции $a_0 + a_1 e^{-\lambda\omega} + a_2 e^{-2\lambda\omega}$ ($b_0 + b_1 e^{\lambda\omega} + b_2 e^{2\lambda\omega}$)

¹⁰ Амвросова О.И. Асимптотика собственных значений и теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях [Текст] / О.И. Амвросова Сб. "Функциональный анализ". // Ульяновск, 1983. – Вып. 21. – С. 3-11.

¹¹ Амвросова О.И. Теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях [Текст]: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук / О.И. Амвросова. – Саратов, 1985. – 13 с.

вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_1 (δ_2), где $a_0 = h_{11}(1) (k^2(1) - \gamma^2 k^2(0))$, $b_2 = (-1)^{2(\alpha-1)} a_0$, $a_1 = b_1 = (-1)^{\alpha-1} (1 - \gamma^2) k(0) k(1) (1 + h_{11}(1) h_{22}(1))$, $a_2 = (-1)^{2(\alpha-1)} b_0$, $b_0 = h_{22}(1) (k^2(0) - \gamma^2 k^2(1))$.

В параграфе 1.3 получено представление для резольвенты $R_\lambda f$.

Теорема 1.1. Резольвента оператора (2), (3) является первой компонентой вектора $QH(x, \lambda) M_\lambda R_{1,\lambda} F_\lambda$, $M_\lambda = (E + R_{1,\lambda} P_\lambda)^{-1}$.

Вторая глава посвящена получению теоремы равносходимости разложений произвольной суммируемой функции по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3), весовая функция в котором имеет степенную особенность, и разложений в тригонометрический ряд Фурье (внутри отрезка).

В параграфе 2.1 с использованием оценок для $R_{1,\lambda} \Phi$ проводятся вспомогательные рассуждения и доказывается

Теорема 2.1. Для любой функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} QH(x, \lambda) \left(M_\lambda R_{1,\lambda} F_\lambda(x) - R_{1,\lambda} H_0^{-1}(x) \tilde{F}(x) \right) d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Данное соотношение является ключевым моментом при доказательстве теоремы равносходимости.

В параграфе 2.2 в рассмотрение вводится вспомогательная краевая задача с периодическим краевым условием:

$$z'(x) = \lambda D z(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad U_0(z) = z(0) - z(1) = 0, \quad (6)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $\varphi_j(x) \in L_1[0, 1]$ ($j = 1, 2$).

Находится решение задачи (5):

Лемма 2.6. Для всех λ , таких что $\lambda\omega \neq 2\pi ij$, где i – мнимая единица, $j \in \mathbb{Z}$, краевая задача (6) однозначно разрешима и ее решение задается формулой

$$R_{2,\lambda}\Phi = \int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt - Z(x, \lambda) \Delta_0^{-1}(\lambda) U_0 \left(\int_0^1 g_0(x, t, \lambda) \Phi(t) dt \right),$$

где $\Delta_0(\lambda) = U_0(Z)$.

Заметим, что $R_{2,\lambda}\Phi = (R_{\lambda\omega}^0\varphi_1, R_{-\lambda\omega}^0\varphi_2)$, где $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 , порожденного y' и периодическим краевым условием $y(0) - y(1) = 0$.

Теорема 2.2 (теорема равномерности). Для любой функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ и для любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{r|\omega|}(f, x)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$, $\sigma_{r|\omega|}(f, x)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе экспонент $\{e^{2\pi i j x}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ для тех j , для которых $2\pi|j| < r|\omega|$.

В третьей главе доказан аналог теоремы Жордана–Дирихле равномерной сходимости (на всем отрезке) разложений по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3) к разлагаемой функции.

Теорема 3.1. (аналог теоремы Жордана–Дирихле) Пусть функция $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $U(f) = \int_0^1 p(\tau) f(\tau) d\tau = 0$. Тогда выполнено соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$.

В **четвертой главе** найдены условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней (на всем отрезке) обобщенных средних Рисса вида (1), где $R_\lambda f$ – резольвента оператора L , $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$; 2) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$; 3) существует $\zeta > 0$, что

$$g(re^{i \arg \lambda}, r) = \begin{cases} O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^\zeta\right), & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ O\left(\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^\zeta\right), & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \\ O\left(\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)^\zeta\right), & \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \\ O\left(\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)^\zeta\right), & \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad \text{где } \theta = \arg \lambda \omega.$$

4) $g(\lambda, r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и фиксированном λ .

Для рассуждений, проводимых в этой главе, оценки, полученные ранее оказываются недостаточными. Следуя работам А.М. Седлецкого^{12,13}, оценки получаются с помощью другого метода, базирующегося уже не на асимптотике финкций типа Миттаг-Леффлера, а на применении аппарата функций свертки.

Теорема 4.1. *Для функции $f(x) \in C[0, 1]$ и удовлетворяющей граничному условию $U(f) = \int_0^1 p(\tau) f(\tau) d\tau = 0$ выполняется соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \right\|_{C[0,1]} = 0.$$

¹²Седлецкий А.М. Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, II. [Текст] / А.М. Седлецкий // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т. 6, 2003. – 162 с.

¹³Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации [Текст] / А.М. Седлецкий. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 504 с.

Автор выражает искреннюю признательность и глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.П. Хромову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 06-01-00003.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Луконина А.С. О равносходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 149.

[2] Луконина А.С. Асимптотические оценки для решения одной краевой задачи с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XVI". – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 101-102.

[3] Луконина А.С. О сходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина Математика. Механика: Сб. науч. тр. // Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. – Вып. 7. – С. 66-69.

[4] Луконина А.С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы. – Саратов: "Научная книга", 2006. – С. 109.

[5] Луконина А.С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений одного функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина Математика. Механика: Сб. науч. тр. // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. – Вып. 8. – С. 69-72.

[6] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией [Текст] / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 443-446.

[7] Луконина А.С. Об асимптотике собственных значений функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIX". – Воронеж: ВГУ, 2008. – С. 131-132.