

на правах рукописи

Лукъяненко Ольга Александровна

**СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И КРАТНЫХ РЯДОВ
ВИЛЕНКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА**

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Саратов 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,
профессор Лукомский Сергей
Федорович.

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук,
профессор Рубинштейн Александр
Иосифович,
кандидат физико-математических наук,
доцент Волосивец Сергей Сергеевич.

Ведущая организация – Самарский государственный
университет.

Защита состоится 12 ноября 2007 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.243.02 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан 11 октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

В.В. Корнев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Хорошо известно¹, что если функция $f \in L_p$, $(1 < p < \infty)$, то ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к f по норме пространства L_p и для частичных сумм ряда Фурье функции f выполняется неравенство

$$\|S_n(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, (1 < p < \infty).$$

Аналогичный результат справедлив и для системы Виленкина². В работе Янг Восанг³ было доказано, что для частичных сумм Фурье-Виленкина выполняется аналогичное неравенство. Следовательно, система Виленкина является базисом в L_p для $1 < p < \infty$. Причем этот результат Янг Восанг был доказан без всяких ограничений на образующую последовательность системы Виленкина.

Ситуация меняется, если f принадлежит пространствам, лежащим между L_p и L_∞ или L_1 и L_p .

Вначале этот вопрос обсуждался для пространств Орлича, лежащих между L_1 и L_p .

В монографии А. Зигмунда⁴ для классов Орлича L_φ , где $\varphi(u) = u\alpha(u)$ и $\alpha(u)$ – слабо колеблющаяся функция, доказано, что если $f \in L_{\tilde{\varphi}}(0, 2\pi)$, то

$$\int_0^1 \varphi(|S_n(f) - f|) dt \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\varphi}(u) = u \int_0^u t^{-2} \varphi(t) dt$

¹Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

²Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джаварли Г.М., А.И.Рубинштейн. Мультипликативные системы функций и гармонического анализа на нуль-мерных группах. Баку: Изд."Элм", 1981.

³Yong W.-S. Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series// Trans. Amer. Math. Soc., 218. 1976, 311-320.

⁴Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1,2. М.: Мир, 1965.

Схожая проблема рассматривалась в статье Файна и Ткебучавы⁵ для сепарабельных пространств Орлича L_φ . (Заметим, что сепарабельность пространств L_φ равносильно тому, что для функции φ выполняется условие Δ_2 , а именно: $\varphi(2x) < \gamma\varphi(x)$). Вопросы сходимости были рассмотрены для систем Виленкина, образующие последовательности которых ограничены. Было доказано, что если функция $f \in L_{\tilde{\varphi}}$, где $\tilde{\varphi}(u) = u \int_1^u t^{-2} \varphi(t) dt$, то ряд Фурье-Виленкина тем не менее сходится к ней по норме более широкого пространства L_φ . Была доказана точность полученного результата.

В работах Лукомского С.Ф.^{6 7} был рассмотрен вопрос сходимости кратных рядов Фурье-Уолша в пространствах Орлича.

Лукомский С.Ф.⁸ рассматривал вопрос сходимости рядов Фурье-Уолша для случая пространств $L_{p,\alpha}$, лежащих по шкале пространств Орлича между L_p и L_∞ и определил в этих пространствах норму

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

и доказал, что если функция $f \in L_{p,\alpha}$, то $\|S_n(f) - f\|_{p,\alpha+1} \rightarrow 0$.

Асташкин С.В.⁹ отметил, что пространства $L_{p,\alpha}$ есть ни что иное как пространства Лоренца.

Вопрос сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе

⁵C. Finet and Tkebuchava. Walsh-Fourier Series and Their Genralization in Orlicz Spaces// J. Math. Anal. Appl. 221, (1996), 405-418.

⁶Lukomskii S.F. Convergence of multiple series in mesure and in L// East J. on Approx. 1997. V.3. №3. P.317-332.

⁷Lukomskii S.F. Convergence of multiple Walsh series in near L_∞ Orlich spaces// East J. on Approx. 2003. V.9. №3. P.295-308.

⁸Лукомский С.Ф. О сходимости рядов Фурье-Уолша в пространствах, близких к L_∞ //Матем. заметки. 2001. Т.70. №6, С.882-889.

⁹Асташкин С.В. Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространствах.//Матем. сб. 2003. Т.194. №6. С.26-42.

и системе Уолша в пространствах Лоренца был также изучен Лукомским С.Ф.^{10 11}. Было доказано, что если $f \in \Lambda_{\Psi,p}$ (при некоторых условиях на функцию Ψ), то тригонометрический ряд Фурье функции f тем не менее сходится в более широком пространстве Лоренца $\Lambda_{\tilde{\Psi},p}$, где

$$\tilde{\Psi}(x) = \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt,$$

и была показана точность данного результата. Более того, для тригонометрической системы результаты остаются справедливыми независимо от того, по какой последовательности n_k стремится к бесконечности номер частичной суммы $S_{n_k}(f)$, ($n_k \uparrow +\infty$).

В случае системы Уолша результаты отличаются. Сходимость рядов Фурье по системе Уолша зависит от того, ограничены или нет в совокупности константы Лебега L_n с номерами, пробегающими последовательность $\{n_k\}$.

Цель работы. Изучить вопросы сходимости рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца. Показать, что система Виленкина не является базисом в пространствах Лоренца, однако для любой функции $f \in \Lambda_{\Psi,q}$ частичные суммы Фурье-Виленкина $S_n(f)$ сходятся в более широком пространстве $\Lambda_{\tilde{\Psi},q}$. Рассмотреть аналогичные вопросы для кратных рядов Виленкина.

Методика исследований. Используются методы теорий функций действительного переменного и функционального анализа. Применяются также методы теории интерполяции линейных операторов.

Научная новизна. Все результаты являются новыми и приводятся с полными доказательствами. Основные результаты работы:

¹⁰Lukomskii. S.F. Convergence of fourier series in Lorents spaces.//East J. on Approx. 2003.

V.9. No. 2. P. 229-238.

¹¹Лукомский С.Ф. О подпоследовательностях частичных сумм рядов Фурье Уолша в пространствах Лоренца.// Известия ВУЗов. 2006. Математика. №6. С.48-55.

1) Введено понятие p -вариации числа $n \in \mathbb{N}$ для системы Виленкина.

2) Найдены оценки констант Лебега для систем Виленкина в терминах p -вариации.

3) Доказаны теоремы о сходимости простых и кратных рядов Фурье Виленкина функции $f \in \Lambda_{\Psi,q}$ в пространствах Лоренца $\Lambda_{\tilde{\Psi},q}$.

4) Построены примеры для простых и кратных рядов Фурье Виленкина, показывающие, что ряды Фурье-Виленкина не сходятся в пространствах более узких чем $\Lambda_{\tilde{\Psi},q}$.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов по ортогональным рядам.

Апробация работы. Основные результаты прошли апробацию на семинарах по теории функций действительного переменного Саратовского государственного университета (руководитель – проф. С.Ф. Лукомский, 2004-2007 г.г.), на Воронежской зимней математической школе (2005 г.), на Саратовской зимней математической школе (2006 г.) г., на объединенном семинаре Саратовского государственного университета по математическому анализу (2007 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух разделов, разбитых на 6 подразделов и списка литературы из 40 наименований. Общий объем диссертации 108 страниц машинописного текста.

Основное содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность темы и дается краткое содержание диссертации.

В данной диссертационной работе будем рассматривать вопросы сходимости рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца $\Lambda_{\Psi,q}$ близких к L_∞ . Покажем, что система Виленкина не является базисом в пространствах Лоренца, однако для любой функции $f \in \Lambda_{\Psi,q}$ частичные суммы Фурье-Виленкина $S_n(f)$ сходятся в более широком

пространстве $\Lambda_{\tilde{\Psi},q}$. Также будут рассмотрены аналогичные вопросы для кратных рядов Фурье-Виленкина.

В первом подразделе первого раздела дается определение системы Виленкина. Уточняется общепринятая терминология и приводятся необходимые определения и обозначения относительно рядов Фурье Виленкина.

Пусть $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ образующая последовательность системы Виленкина $\{V_n(x)\}$, $m_0 = 1$, $m_{k+1} = p_k m_k$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m_k, (a_k = 0, 1, \dots, p_k - 1).$$

В работе введено понятие модифицированного ядра Дирихле для системы Виленкина:

$$D_n^*(x) = V_{n^*}(x) D_n(x),$$

где

$$n^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* m_k, \text{ где } (a_k^* = (p_k - a_k) \mod p_k),$$

– дополнительное число для n , и модифицированной частичной суммы

$$S_n^*(f, x) = \int_{\mathbb{G}} D_n^*(x \oplus t) f(t) dt.$$

В подразделе 1.2 рассмотрены свойства системы Виленкина и доказаны вспомогательные результаты используемые в дальнейшем.

При рассмотрении вопросов сходимости рядов Фурье-Виленкина важную роль сыграли оценки констант Лебега.

Известно, что для системы Уолша имеет место оценки констант Лебега в терминах вариации числа n ¹²

$$\frac{V(n)}{4} < L_n < V(n),$$

¹²F. Shipp, Wade and P. Simon. W.R. Walsh Series. An Intrduction to Dyadic Harmonic Analysis, Akademia Kiado, Budapesht, 1990.

где

$$V(n) = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}|$$

– вариация числа

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k, (\varepsilon_k = 0, 1).$$

До сих пор аналогичных оценок для системы Виленкина не было.

В третьем подразделе первого раздела дается определение p -вариации для системы Виленкина.

Определение 1.3.1. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m_k$$

– p -ичное разложение числа n ,

$$n^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* m_k$$

– дополнительное число к n , тогда число

$$Var(n) = a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* (a_{k-1}^* - 1),$$

где $d_k = \max\{a_{k-1}^*, a_k^*\}$, (в случае, когда $d_k = 0$, будем считать $(a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k = (a_k^* + a_{k-1}^*)$), назовем p -вариацией числа n .

В случае когда образующая последовательность p_k не ограничена вместо $Var(n)$ будем рассматривать число

$$Var(n)_{\{p_k\}} = \frac{a_0^*}{p_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k}{p_k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^* (a_{k-1}^* - 1)}{p_k^2},$$

которое будем называть p -вариации числа n по последовательности $\{p_k\}$.

В терминах определенной вариации найдена двусторонняя оценка для констант Лебега L_n как для ограниченной образующей последовательности, так и для неограниченной.

Терема 1.3.1 *Пусть число n записано в виде*

$$n = \sum_{i=1}^s (a_{k_{2i-1}-1} m_{k_{2i-1}-1} + a_{k_{2i-1}-2} m_{k_{2i-1}-2} + \dots + a_{k_{2i}} m_{k_{2i}}),$$

где $a_j = p_j - q_i$, $j = k_{2i-1} - 1, k_{2i-1} - 2, \dots, k_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $k_1 > k_2 > \dots > k_s$,

$$L_n = \int_0^1 |D_n(t)| dt$$

– константы Лебега для системы Виленкина, тогда

$$\text{Var}_{\{p_k\}}(n) \leq L_n \leq \text{Var}(n)$$

Если последовательность $\{p\}_{k=0}^\infty$ ограничена числом p сверху, то

$$\frac{\text{Var}(n)}{p^2} \leq L_n \leq \text{Var}(n).$$

Очевидно, что в случае, когда $p_k = 2$, для любого $k = 0, 1, \dots$, p -вариация определенная в определении 1.3.1 принимает вид вариации $V(n)$, а обе оценки из условия теоремы 1.3.1 превращаются в известную оценку для констант Лебега по системе Уолша в терминах вариации, которая была приведена выше.

Второй раздел посвящен вопросам сходимости рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца.

В первом подразделе определены одномерные¹³ и m -мерные пространства Лоренца. Даны основные определения и изложены вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем.

Назовем Ψ функцией Лоренца, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Psi(t) > 0$ на $(0, 1)$, убывает на $(0, 1)$ и выпукла;
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = +\infty$;
- 3) $\int_0^1 \frac{dt}{\Psi^q(t)t} < +\infty$ ($q \geq 1$).

В работе рассматриваются пространства Лоренца

$$\Lambda_{\Psi,q} = \left\{ f \in L_{[0,1)} : \|f\|_{\Psi,q} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

– порожденные функцией Лоренца $\Psi(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\Psi\left(\frac{x}{p}\right) \leq \left(1 + \frac{C_p}{1 + \log \frac{1}{x}}\right) \Psi(x), \quad (p \in \mathbb{N}, C_p > 0).$$

Пространства Лоренца для функций многих переменных определяется как и в одномерном случае, а именно

$$\Lambda_{\Psi,q}^m = \left\{ f \in L_{[0,1)^m} : \|f\|_{\Psi,q} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\} ..$$

В подразделе 2.2 рассмотрены простые (однократные) ряда Фурье-Виленкина. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1 *Существует постоянная $C = C(\Psi, q) > 0$ такая,*

¹³Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces 2, Function spaces.– Berlin: Springer-Verlag, 1979.

что $\forall f \in \Lambda_{\Psi,q}$

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q} \leq C\|f\|_{\Psi,q}.$$

где функция Лоренца $\tilde{\Psi}$ при $0 < x \leq \frac{1}{2}$ определяется равенством

$$\tilde{\Psi}(x) = \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt.$$

В силу сепарабельности пространства $\Lambda_{\Psi,q}$ из этой теоремы следует

Терема 2.2.2 Если $f \in \Lambda_{\Psi,q}$, то ряд Фурье-Виленкина функции f сходится в более широком пространстве $\Lambda_{\tilde{\Psi},q}$

При доказательстве следующей теоремы построен пример, доказывающий точность теоремы 2.2.2. Пример был построен для случая, когда образующая последовательность ограничена сверху.

Терема 2.2.3 Пусть образующая последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$

ограничена числом p сверху, функция Лоренца $\Psi(x)$ удовлетворяет

дополнительному условию

$$\left(1 + \frac{C'_p}{1 + \log \frac{1}{x}}\right) \Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{x}{p}\right).$$

Если $N = \{n_k\}$ произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел таких, что $\sup_{n \in N} L_n = +\infty$, то для любой функции $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$ существуют функции $f \in \Lambda_{\Psi,q}$ такая, что отношение $\frac{\|S_n f\|_{\tilde{\Psi}_{\alpha,q}}}{\|f\|_{\Psi,q}}$ – неограничено.

В подразделе 2.3 рассмотрены вопросы сходимости кратных рядов Фурье-Виленкина. Также как и для одномерного случая справедлива следующая теорема.

Терема 2.3.1. Пусть функция Лоренца Ψ удовлетворяет условию

$$\Psi\left(\frac{x}{p}\right) \leq \left(1 + \frac{C_p}{1 + \log \frac{1}{x}}\right) \Psi(x), \quad (p \in \mathbb{N}, C_p > 0).$$

Тогда существует постоянная $C = C(\Psi, q) > 0$ такая, что $\forall f \in \Lambda_{\Psi, q}([0, 1]^m)$ выполняется

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\tilde{\Psi}, q} \leq C \|f\|_{\Psi, q},$$

где

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m-1} \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2}\right) & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

В силу сепарабельности пространств Лоренца из теоремы 2.3.1 следует

Терема 2.3.2. Если $f \in \Lambda_{\Psi, q}([0, 1]^m)$, то ряд Фурье-Виленкина функции f сходится в более широком пространстве $\Lambda_{\tilde{\Psi}, q}([0, 1]^m)$.

Теорема доказывающая точность теореме 2.3.2 доказана для случая сходимости по кубам, следовательно тем более предыдущая теорема является точной и в случае сходимости по прямоугольникам. Пример построен для случая, когда образующая последовательность системы Виленкина ограничена сверху.

Терема 2.3.3. Пусть $\{V_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})\}$ – кратная система Виленкина, порожденная последовательностью $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, которая ограничена

числом p , и $S_n(f, \mathbf{t})$ – кубические частичные суммы ряда Фурье-Виленкина,

$$\Psi(x) = \begin{cases} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m\gamma} & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \Psi(\frac{1}{2}) & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

($\gamma \geq m$). Тогда для любой функции $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$ отношение $\frac{\|S_n f\|_{\tilde{\Psi}_{\alpha,q}}}{\|f\|_{\Psi,q}}$ — неограничено.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Лукомскому Сергею Федоровичу за постановку задач и поддержку в исследованиях.

Публикации автора по теме диссертации.

1. Лукъяненко О.А. Об оценке констант Лебега по системе Виленкина // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. – Воронеж: ВГУ, 2005.-с.150.
2. Лукъяненко О.А. О константах Лебега для систем Виленкина // Математика. Механика: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005.- Вып. 7. с.70-73.
3. Лукъяненко О.А. О сходимости рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы.-Саратов: ООО Изд-во "Научная книга", 2006.-110-111.
4. Лукъяненко О.А. О сходимости рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца по подпоследовательностям // Математика. Механика: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006.- Вып. 8.-с.72-74.

5. Лукъяненко О.А. О сходимости кратных рядов Фурье-Виленкина в пространствах Лоренца // Известия Сарат. ун-та. Математика. Механика. Информатика.-Саратов.2007. Т.7. Вып.1. с.15-22. (Данный журнал входит в Перечень ВАК для кандидатских диссертаций)