

На правах рукописи

МАЛЯЕВ Владимир Сергеевич

**БИФУРКАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В СТОХАСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА  
УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ  
ЗАШУМЛЕННЫХ СИСТЕМ**

01.04.03 – Радиофизика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2013

Работа выполнена в Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского на кафедре радиофизики и нелинейной динамики физического факультета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент,  
**Вадивасова Татьяна Евгеньевна**

Официальные оппоненты:

**Смирнов Дмитрий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник

**Розанов Александр Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова, заведующий кафедрой информационных технологий и прикладной математики

Ведущая организация:

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

Защита состоится «30» мая 2013 г. в 18 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 при Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского государственного университета (Саратов, ул. Университетская, 42)

Автореферат разослан «\_\_\_» апреля 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Аникин Валерий Михайлович

## Общая характеристика работы

### Актуальность работы.

Реальная система любой природы всегда находится под воздействием внутренних и внешних случайных сил. Даже будучи слабыми такие воздействия могут играть очень важную роль в поведении системы. По этой причине они должны учитываться при математическом моделировании динамической системы. Фундаментальные основы теории динамических систем в присутствии случайных воздействий (т.е. шума) изложены в ряде монографий (Р.Л. Стратонович, Н.Г. Ван Кампен, В. Хорстхемке и Р. Лефевр, Л. Арнольд, В.И. Кляцкин и др.). Воздействие шума на динамическую систему приводит к разнообразным явлениям. Многие из таких явлений были открыты и исследованы в последние годы. Среди них наиболее значимыми представляются явления стохастического резонанса (R. Benzi, L. Gammaitoni, F. Moss, В.С. Анищенко, А.Б. Нейман и др.), когерентного резонанса (А. Pikovsky, J. Kurths, В. Lindner, L. Schimansky-Geier и др.), стохастической синхронизации (А.Б. Нейман, Б.В. Шульгин, В.С. Анищенко, S.K. Han, Д.Э. Постнов и др.), индуцированного шумом хаоса (В.С. Анищенко, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, L. Arnold), подавление хаотической динамики случайным воздействием (E. Sánchez, F. Gassmann, А.А. Короновский и др.), синхронизации шумом ансамбля осцилляторов (А.Б. Нейман, Д.С. Голдобин) и т.д.

Особое место в исследовании эффектов шумового воздействия занимает вопрос о влиянии шума на бифуркационные явления в динамических системах. Известно, что вблизи бифуркаций система является негрубой и особенно чувствительна к малым возмущениям, в том числе к слабому шумовому воздействию. Возникает вопрос, что будут представлять собой типичные бифуркации динамических систем при наличии шума и к чему они могут приводить с точки зрения статистических характеристик поведения системы. Бифуркации в системах с шумом называют стохастическими. В книге Л. Арнольда различаются два типа стохастических бифуркаций: феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. Имеется ряд теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию влияния шума на различные типы детерминированных бифуркаций (S. Kabashima, K. Wiesenfeld, W. Ebeling, N. Sri Namachshivaya, K. R. Schenk-Yoppé, П.С. Ланда, Н. Crauel, И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко и др.). В работе В. Хорстхемке и Р. Лефевра отмечается, что шум может не только видоизменять существующие в детерминированных системах бифуркации, но и, при некоторых условиях, приводить к качественно новому поведению. Такие явления были названы индуцированными шумом переходами. Однако достаточно полная общая теория

бифуркаций в зашумленных системах до настоящего времени отсутствует. Причина этого во многом объясняется тем, что стохастические бифуркации не обладают универсальностью локальных бифуркаций детерминированных динамических систем. Влияние шума на одну и ту же бифуркацию в различных системах может быть существенно различно. Кроме того, оно сильно зависит от статистических характеристик шумового воздействия.

Одной из типичных и важных бифуркаций динамических систем является бифуркация рождения предельного цикла (бифуркация Андронова-Хопфа). С этой бифуркацией связано возникновение режима автоколебаний в генераторах. Она может носить мягкий (суперкритический) и жесткий (субкритический) характер. Эффекты, связанные с воздействием аддитивного и мультипликативного (параметрического) шума на бифуркацию Андронова-Хопфа изучались в работах ряда авторов как с использованием аналитических методов (W. Ebeling, R. Lefevr, L. Arnold, N. Sri Namachshivaya, J. Olarrea, И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко), так и компьютерного моделирования (K. R. Schenk-Yorpe, Y. Xu и др.), а также натуральных экспериментов (L. Franzoni et al.). В большинстве работ, посвященных данным эффектам, рассматриваются системы с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. В меньшей степени исследовано влияние шума на систему с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. Захаровой А.С. и др. рассмотрено воздействие аддитивного белого шума на генератор Ван дер Поля – Дуффинга, в работе Y. Xu et al. та же система исследуется в присутствии двух источников шума – аддитивного и параметрического цветного гауссова шума. В работе И.А. Башкирцевой, Т.В. Переваловой и Л.Б. Ряшко аналитически исследован осциллятор Хопфа с жестким возбуждением при воздействии аддитивного и параметрического гауссова белого шума. Осциллятор Хопфа является строго гармоническим и потому допускает строгое описание в терминах мгновенной амплитуды и фазы. Однако, в отличие от осциллятора Ван дер Поля, осциллятор Хопфа не моделирует реальную автоколебательную систему. *Случай воздействия белого параметрического шума на генераторы с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа является недостаточно исследованным.* Кроме того, аналитические методы, применяемые для исследования систем с шумом (за исключением гармонического осциллятора Хопфа), являются приближенными и при значительном шуме могут сильно исказить истинную картину режимов системы. Соответственно, важное значение приобретает *сравнение теоретических результатов с результатами численных исследований и выявление случаев и особенностей динамики системы, в которых квазигармонический анализ имеет ограничения.*

Особенно заметную роль играет шум в поведении стохастических осцилляторов, т.е. систем, которые в детерминированном случае не демонстрируют режимов стационарных колебаний и только при шумовом воздействии в

них устанавливаются стохастические колебания со стационарной плотностью вероятности. Бистабильные и, особенно, возбудимые осцилляторы обладают рядом черт, свойственных автоколебательным системам, что позволяет говорить о них как о стохастических автогенераторах, совершающих незатухающие колебания за счет подкачки энергии от источника шума. Прежде всего, здесь следует отметить свойство частичной синхронизуемости стохастических колебаний при внешнем воздействии на систему или при взаимодействии двух осцилляторов, как показано в работах А.Б. Неймана, Д.Е. Постнова, В.С. Анищенко, С.К. Хана и др. Эффекты стохастического резонанса, когерентного резонанса и стохастической синхронизации отражают конструктивную роль шума, который может привести к увеличению порядка в поведении системы. С другой стороны, шум может индуцировать переход самой системы к хаотической динамике, проявляющейся в экспоненциальной неустойчивости траекторий (работы W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, H. Herzel, L. Arnold, В.С. Анищенко и др.).

Двумерный стохастический осциллятор с двухъямным потенциалом может служить примером системы, демонстрирующей сразу несколько вызванных шумом эффектов — стохастического резонанса (СР), стохастической синхронизации и индуцированного шумом хаоса. В имеющихся работах, как правило, рассматривается модель так называемого передемпфированного осциллятора, который описывает движение броуновской частицы с бесконечным трением и задается стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка. Имеется сравнительно мало работ, в которых эффекты СР и стохастической синхронизации рассмотрены для осциллятора с конечным трением (работы P. Hanggi, P. Jung, J. Freund, M. Borckovec). Кроме того, в научной литературе не рассматривается вопрос — *как соотносятся эффекты СР и стохастической синхронизации с индуцированным шумом переходом к хаосу и не сопоставлялось влияние уровня диссипации на все три эффекта сразу.*

Кроме вышеуказанных классов систем к стохастическим осцилляторам можно отнести системы, в которых в отсутствие шума наблюдается неограниченный рост амплитуды, а шумовое воздействие приводит к ограничению амплитуды и установлению стационарных стохастических колебаний. Назовем такие системы осцилляторами с шумовой стабилизацией колебаний. Эффект стабилизации шумом, также как явления СР, когерентного резонанса и стохастической синхронизации, может служить примером упорядочивающей роли шума в нелинейных системах. В целом, свойства осцилляторов с шумовой стабилизацией мало изучены. Исследование, проведенное J.M. Finn, E.R. Tracy, W.E. Cooke, A.S. Richardson для модели неустойчивости в плазме, относится к воздействию шума сравнительно слабой интенсивности. *Остается неизученным поведение осциллятора с шумовой стабилизацией при сильном шу-*

*ме, не исследованы статистические характеристики стабилизированных колебаний и стохастические бифуркации в системе.*

Одной из важных прикладных задач нелинейной динамики является проблема скрытой передачи информации с использованием хаотических сигналов (работы А.С. Дмитриева, В.Я. Кислова, А.И. Панаса, В.С. Анищенко, А.Н. Павлова, Б.П. Безручко, Д.А. Смирнова, В.С. Пономаренко, А.С. Караваяева, А.А. Короновского, А.Е. Храмова, J. Timmer, V. Annovazzi-Lodi, J. Kurths, U. Parlitz, H. Peng, I.P. Marino и др.). Предложено множество вариантов шифровки-дешифровки передаваемых сигналов на основе хаотической синхронизации, среди которых: хаотическая маскировка, переключение хаотических режимов, нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому, модулирование управляющих параметров передающего генератора полезным цифровым сигналом и др. На основе этих схем предложены соответствующие способы скрытой передачи данных.

Модулирование управляющих параметров передающей системы (как правило хаотической) полезным сигналом имеет ряд преимуществ по сравнению с другими предлагаемыми методами скрытой передачи информации. Среди этих преимуществ — простота практической реализации и устойчивость по отношению к измерительному шуму (А.Н. Павлов, U. Parlitz). В основе метода модуляции параметров лежит оценка параметров известной динамической системы по измеряемым данным. Поскольку передающий генератор, как любая реальная система, содержит источники внутреннего шума, и, кроме того, подвергается внешним случайным воздействиям, с точки зрения практической применимости метода важным является вопрос о возможностях оценки параметров при наличии в системе источников динамического шума. Несмотря на большое количество разработанных методов оценки параметров, их практическое применение может оказаться затруднительным. Многие предлагаемые алгоритмы имеют в основе метод максимального правдоподобия и сводятся к отысканию условного экстремума некоторой оценочной функции. К сожалению, несмотря на высокую точность, такие методы слишком сложны и, из-за большого объема вычислительных операций, применительно к задаче передачи информации в реальном времени могут оказаться неэффективными. Кроме того, точность подобных алгоритмов может сильно ухудшиться в режиме хаотической динамики системы. В настоящей работе задача ставится для радиофизического эксперимента, в котором неизбежно присутствует динамический, а также внешний шум с неизвестными характеристиками, возникающий из совокупности многих факторов. При этом возникает ряд вопросов: если такая оценка возможна, то каковы границы применимости предложенного метода? В каких пределах должна находиться частота передаваемого сигнала, и как частота передаваемого сигнала должна соотноситься с частотой колебаний исследуемой динамической системы? Таким

образом, актуальной задачей исследования зашумленных систем является разработка метода достаточно точной и быстрой оценки меняющихся во времени параметров по экспериментальным реализациям, который мог бы на практике быть использован в системах скрытой передачи информации в реальном времени в условиях значительного динамического шума. Также представляется важным исследовать возможности оценки параметров в условиях нетривиальной динамики зашумленной системы: в присутствии бифуркаций и в режиме хаоса.

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования.

**Целью диссертационной работы** является решение актуальной задачи радиофизики, состоящей в исследовании вызванных шумом эффектов в нелинейных колебательных системах: стохастических бифуркаций в генераторе с жестким возбуждением, стохастического резонанса и индуцированного шумом хаоса в осцилляторе Дуффинга и шумовой стабилизации колебаний в нестационарном нелинейном осцилляторе, а также в разработке и экспериментальной апробации способа оценки параметров зашумленных систем по экспериментальным данным с целью его перспективного применения в системах скрытой передачи информации.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Установлена качественная картина стохастических бифуркаций в генераторе с жестким возбуждением в присутствии параметрического и аддитивного белого шума. Проведено сравнение результатов квазигармонического анализа и численного расчета, свидетельствующее об ограниченности квазигармонического метода при исследовании стохастических бифуркаций.
2. Численно подтверждены известные аналитические результаты по влиянию конечной диссипации на эффект СР в бистабильном осцилляторе. Показано, что оптимальная интенсивность шума может быть достаточно точно определена по формулам, полученным для передемпфированного осциллятора путем введения эквивалентного потенциала.
3. Установлены и исследованы феноменологическая и динамическая бифуркации для стохастического осциллятора с шумовой стабилизацией колебаний, наблюдающиеся при большой интенсивности шума.
4. На примере нескольких генераторов различного типа исследована возможность оценки управляющих параметров зашумленных систем методом прямой статистической обработки реализации колебаний. Проведено исследование влияния уровня шума и характера динамического режима на точность оценки параметра.

5. В радиофизическом эксперименте показана возможность практически приемлемой оценки управляющего параметра в присутствии значительного динамического шума, осуществлено восстановление сигнала, модулирующего параметр зашумленной хаотической системы и, тем самым, показана возможность использования модуляции параметра зашумленной системы для скрытой передачи информации в реальном времени.

**Достоверность научных выводов** работы подтверждается взаимным соответствием аналитических результатов, результатов численного анализа и моделирования, а также результатов радиофизического эксперимента.

Научные результаты, представленные в диссертационной работе, существенно дополняют представления о влиянии шума на динамические системы и, таким образом, вносят заметный вклад в развитие современной теории колебаний, нелинейной динамики и статистической радиофизики. Исследование стохастических осцилляторов двух типов (бистабильного и нестационарного) выявляет ряд общих черт в поведении стохастических систем при вариации интенсивности шума. Применение метода построения стохастического аттрактора позволяет сделать анализ поведения зашумленной системы более наглядным. Результаты экспериментов по оценке параметров и восстановлению сигнала имеют практическую ценность.

Полученные результаты могут быть применены при создании новых радиофизических устройств с учетом роли динамического шума, систем скрытой передачи информации, при математическом моделировании стохастических явлений в нелинейных системах и интерпретации экспериментальных данных в различных сферах научных исследований.

**На защиту выносятся следующие положения и результаты:**

1. Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация не связаны со стохастической бифуркацией динамического типа, наблюдающейся в модели бистабильного осциллятора с шумом, так как область экспоненциальной неустойчивости системы на плоскости параметров “диссипация — интенсивность шума” значительно удалена от области стохастического резонанса и стохастической синхронизации;
2. В стохастическом осцилляторе с шумовой стабилизацией при большом уровне шумового воздействия имеют место стохастические бифуркации динамического и феноменологического типов, а также наблюдается эффект, подобный когерентному резонансу, проявляющийся в сужении спектральной линии стохастических колебаний с ростом интенсивности шума;
3. Предложен метод оценки неизвестных параметров системы с источниками динамического шума, основанный на вычислении плотности распределения разброса мгновенных оценок, простого среднего и фильтрации, который позволяет независимо от динамического режима получить



необходимую точность оценок параметров для задачи восстановления сигнала, модулирующего управляющий параметр стохастической системы. Возможно применение данного метода в системах скрытой передачи информации в реальном времени в условиях присутствия динамических шумов различной статистики.

**Апробация работы.** Результаты научных исследований по теме диссертационной работы были представлены на следующих научных конференциях:

- VIII Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур» «ХАОС-2007» “Волжские дали”, (Саратов, 9-14 октября 2007 г.);
- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2009);
- Международная школа-семинар “Статистическая физика и информационные технологии” (STATINFO-2009) (Саратов, 2009);
- Международная школа-конференция “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, 2010);
- Международная школа-конференция “Saratov Fall Meeting”, (5-8 октября 2010г., Саратов);
- Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика” (Саратов, 2011);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2011», (Москва, 2011),

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них 6 статей в журналах, 5 статей в журналах, входящих в Перечень ВАК [1-5], 5 статей в сборниках трудов конференций.

**Личный вклад автора.** В представленной работе все данные численного и физического экспериментов, а также аналитические результаты были получены соискателем совместно с дипломником. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем.

**Структура и объем диссертации.** Материалы диссертации изложены на 147 страницах, содержит 43 рисунка и список цитированной литературы из 134 наименований. Диссертационная работа состоит из введения, четырех содержательных глав, заключения и списка цитированной литературы.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, определена цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, сформулированы выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** рассматривается поведение генератора с жестким возбуждением у порога генерации при воздействии на него параметрического (мультипликативного) гауссова белого шума, а также при наличие двух независимых источников шума — параметрического и аддитивного. Исследуется эволюция вероятностного распределения при изменении управляющего параметра и интенсивности шума. Проводится сравнение теоретических результатов, полученных в рамках квазигармонического приближения с результатами численных исследований стохастических уравнений генератора. Исследуются два вида параметрического шума: когда шум модулирует параметр возбуждения  $\varepsilon$  и когда меняет частоту генератора. Рассматриваются две математические модели генератора, задаваемые следующими стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) Стратоновича:

$$\ddot{x} + [\omega_0^2 + \sqrt{2D_1}n_1(t)]x = (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t), \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = [\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t) + x^2 - x^4]\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t). \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) записаны для безразмерной переменной  $x$  и безразмерного времени  $t$ . Случайные процессы  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  представляют собой независимые источники нормированного гауссова белого шума. Константы  $D_1$  и  $D_2$  задают интенсивность параметрического и аддитивного шума, соответственно. Уравнения нормированы таким образом, что  $\omega_0 = 1$ . В квазигармоническом приближении модуляция гауссовым белым шумом как параметра возбуждения, так и квадрата собственной частоты приводит к одному и тому же виду укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{a}{2} \left( \varepsilon + \frac{D_1}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8} \right) + \frac{D_2}{2a} + \frac{a}{2} \sqrt{D_1}n_{11}(t) + \sqrt{D_2}n_{12}(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D_1}}{2}n_{21}(t) + \frac{\sqrt{D_2}}{a}n_{22}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$  — независимые источники нормированного гауссова белого шума. Для анализа режимов используется стационарная плотность вероятности  $p(x, y)$ , для которой получено аналитическое выражение:

$$p(x, y) = N[D_1(x^2 + y^2) + 4D_2]^\nu \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_1} \left( x^2 + y^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1} \right) \right\}, \quad (4)$$

где  $N = \frac{C}{2\pi}$  — нормировочная константа.

Построены бифуркационные диаграммы генератора как при наличии только мультипликативного шума ( $D_2 = 0, D_1 \neq 0$ ), так и в присутствии аддитивного шума ( $D_2 \neq 0$ ). При  $D_2 = 0$  отмечается отсутствие колебаний в области  $D < 2\varepsilon$ . Значение  $D = -2\varepsilon$  соответствует стохастической бифуркации динамического типа, приводящей к потере устойчивости точки равновесия и возникновению стохастических колебаний. Сколь угодно малый аддитивный шум, добавленный в систему, приводит к исчезновению состояния равновесия.

В силу ограничений квазигармонического подхода, полученная аналитическим методом картина стохастических бифуркаций не вполне соответствует картине бифуркаций в исходных системах (1) и (2). Для установления

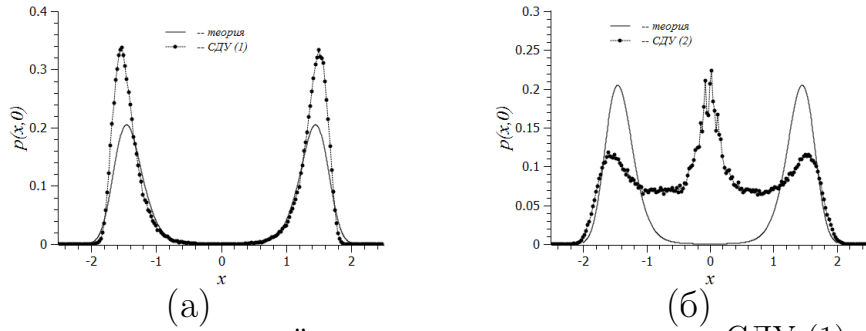


Рис. 1. Сравнение распределений, построенных численно для СДУ (1) и (2) с теорией: а – СДУ (1), б – СДУ (2),  $\varepsilon = 0.03$ . Значения интенсивностей шума:  $D_1 = 0.1$ ,  $D_2 = 0.001$ . Для удобства сравнения приведены сечения двумерной поверхности  $p(x, y)$

степени соответствия и уточнения истинной картины бифуркаций проведено численное исследование генератора с жестким возбуждением в присутствии источников шума. Численные результаты для СДУ (1) в целом качественно соответствуют теоретическим (рис. 1(а)). В то же время распределения вероятности, полученные для СДУ (2) имеют не только количественные, но и качественные расхождения с теорией (рис. 1(б)). При получении выражения (4) предполагается независимость амплитуды от фазы, что приводит к аксиальной симметрии распределения. В исходных СДУ (1) и (2) такая симметрия с ростом шума нарушается. Это означает, что Р-бифуркация не происходит одновременно по всем направлениям (углам поворота), а возникает сначала для некоторых направлений и постепенно распространяется на все направления. Нарушение аксиальной симметрии и различие в поведении моделей (1) и (2) хорошо видно из графиков двумерного распределения  $p(x, y)$ , представленных на рис. 2. Кроме того, численное моделирование свидетельствует о запаздывающем характере бифуркации Андронова-Хопфа, что соответствует результатам полученным для гармонического осциллятора Хопфа (И.А. Башкирцева, Т.В. Перевалова, Л.Б. Ряшко).

Результаты первой главы представлены в работе [1].

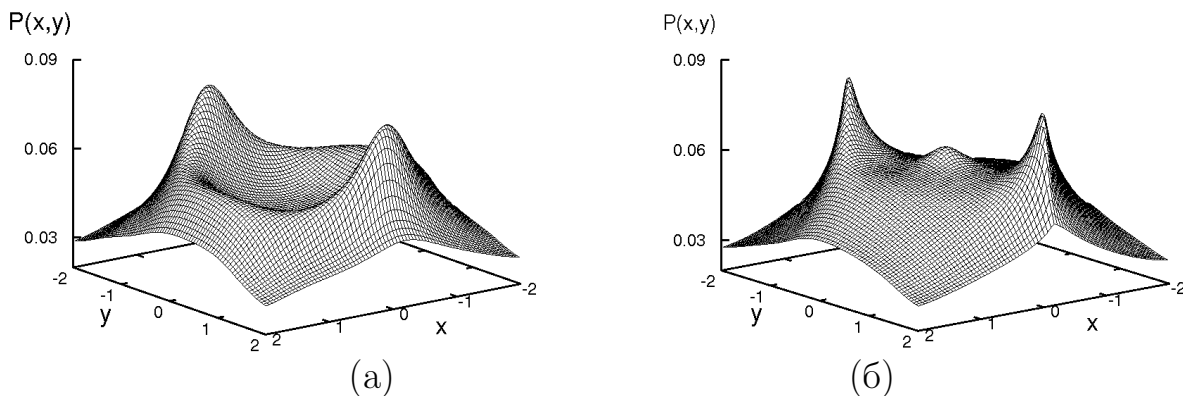


Рис. 2. Поверхности  $p(x, y)$ , построенные для (1) (а) и (2) (б), при  $\varepsilon = 0.03$ ,  $D_1 = 0.1$ ,  $D_2 = 0.001$

**Во второй главе** исследуются эффекты стохастического резонанса, стохастической синхронизации и индуцированного шумом хаоса в нелинейном

осцилляторе с конечными потерями. Уравнения осциллятора имеют вид:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + s(t) + \xi(t); \quad U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad (5)$$

где  $\gamma$  – безразмерный коэффициент трения,  $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ ,  $n(t)$  – источник нормированного гауссова белого шума. На осциллятор воздействует гармонический сигнал  $s(t) = A\sin\omega_0 t$  с амплитудой  $A = 0.05$  и частотой  $\omega_0 = 0.01$ . Сигнал в отсутствие шума не вызывает переходов между потенциальными ямками.

Для передемпфированного осциллятора при относительно слабом шуме и высоком потенциальном барьере средняя скорость выхода из потенциальной ямы  $r_K$  задается выражением:

$$r_K = \nu \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad \nu = \frac{\sqrt{|U''(x_{min})U''(x_{max})|}}{2\pi}. \quad (6)$$

В случае квадратичного потенциала коэффициент  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.225$ , а высота потенциального барьера  $\Delta U = 1/4$ . Средняя круговая частота переключений (частота Крамерса) есть  $\omega_K = \pi r_K$ . Полученные в численном эксперименте для (5) зависимости частоты переключений  $\omega_K$  от интенсивности шума  $D$  позволяют предположить, что на начальном этапе (при сравнительно слабом шуме) рост средней частоты переключений носит экспоненциальный характер и может быть выражен формулой, аналогичной (6), но с другими эквивалентными характеристиками  $\nu_3$  и  $\Delta U_3$ . Для  $\gamma = 1$  определены:  $\nu_3 = 0.123 \pm 10^{-3}$  и  $\Delta U_3 = 0.247 \pm 10^{-3}$ ; для  $\gamma = 0.4$  –  $\nu_3 = 0.118 \pm 10^{-3}$  и  $\Delta U_3 = 0.089 \pm 10^{-3}$ . Эквивалентный потенциальный барьер уменьшился в обоих случаях по сравнению с передемпфированным осциллятором.

Далее рассматривается случай, когда на стохастический осциллятор поступает слабый гармонический сигнал с заданной амплитудой и частотой. Эффект СР проявляется в резонансном характере зависимостей выходного отношения мощностей сигнала и шума ( $SNR$ ) и коэффициента передачи по мощности  $\eta$  от  $D$ . Известные из литературы теоретические результаты, полученные для передемпфированного осциллятора дают следующие зависимости  $SNR$  и коэффициента передачи от интенсивности шума:

$$SNR = C_1 \frac{A^2 r_K(D)}{D^2}; \quad \eta = C_2 \frac{r_K^2(D)}{D^2(4r_K^2(D) + \omega_0^2)}, \quad (7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы. С использованием соотношений (7) и эквивалентных характеристик  $\Delta U_3(x)$  и  $\nu_3$ , рассчитанных численно, были получены следующие оценки интенсивности шума в максимуме  $SNR$  ( $D_{m1}$ ) и в максимуме коэффициента передачи ( $D_{m2}$ ): при  $\gamma = 1.0$  имеем  $D_{m1} = 0.123 \pm 10^{-3}$  и  $D_{m2} = 0.086 \pm 10^{-3}$ ; при  $\gamma = 0.4$  –  $D_{m1} = 0.044 \pm 10^{-3}$  и  $D_{m2} = 0.038 \pm 10^{-3}$ . На рис.3(а) представлены зависимости  $\eta$  от  $D$ , полученные численно для  $\gamma = 1.0$  и  $\gamma = 0.4$ . Обе они носят резонансный характер, аналогичный, характеру данной зависимости для передемпфированного осциллятора. Приведенные выше

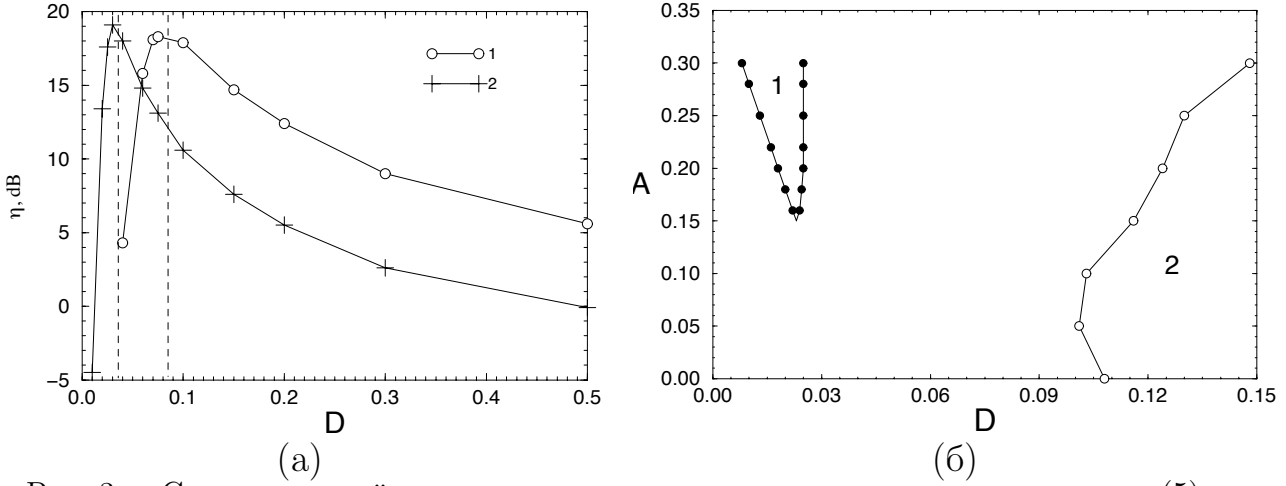


Рис. 3. Стохастический резонанс и стохастическая синхронизация в модели (5): а – зависимость коэффициента передачи по мощности от интенсивности шума: при  $\gamma = 1.0$  (кривая 1) и при  $\gamma = 0.4$  (кривая 2), пунктиром отмечены оценки значений интенсивности шума  $D_{m2}$  соответствующие максимуму  $\eta$ , полученные на основе  $U_s(x)$ ; б – область стохастической синхронизации “1” и область хаотической динамики “2” при  $\gamma = 0.4$

оценки отмечены на рис. 3(а) вертикальным пунктиром. Оптимальные значения шума для разных  $\gamma$  соответствуют выводам теории (P. Hanggi).

Эффект стохастической синхронизации наблюдается в численных экспериментах при более значительных амплитудах сигнала, чем СР. Однако, по-прежнему, сигнал в отсутствии шума не вызывает переключений. Синхронизация стохастических колебаний не является строгой — можно говорить только о близости, но не о равенстве частот в пределах рассматриваемой области. Критерием синхронизации служило выполнение неравенства  $((\omega_K - \omega_0)/\omega_0) < 0.1$ , где  $\omega_K$  – средняя частота переключений,  $\omega_0$  – частота сигнала. В соответствии с этим условием численно были построены области синхронизации на плоскости параметров  $(D, A)$  для  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0.4$ . Основание каждого из “клювов” синхронизации соответствует значению  $D$ , близкому к тому значению, при котором частота  $\omega_K$ , рассчитанная с учетом эквивалентных характеристик, совпадает с частотой сигнала  $\omega_0$ . Таким образом, синхронизация происходит на частоте сигнала и обусловлена близостью частоты сигнала к частоте Крамерса (в отличие от эффекта СР).

Для модели (5) была получена область хаотической динамики при  $A = 0$  и независимом изменении параметров  $D$  и  $\gamma$ . На основании численной аппроксимации было получено следующее выражение для границы хаоса:  $\gamma_{gr} = 0.54 (1 - \exp(-6.5D^{0.7}))$  и оценено максимальное значение параметра потерь, для которого еще возможен переход к хаотической динамике ( $\gamma_{max} \approx 0.54$ ). Для  $\gamma > \gamma_{max}$  хаотическая динамика не наблюдается ни при каком значении интенсивности шума. Воздействие на систему слабого сигнала ( $A \leq 0.3$ ) не изменяет данной ситуации.

Таким образом, в модели (5) при  $\gamma = 1$  эффекты СР и стохастической синхронизации не могут сопровождаться переходом от устойчивого режима к хаотической динамике или обратно. При  $\gamma = 0.4$  хаотическая динамика

может возникнуть. В отсутствии сигнала для этого необходим шум с интенсивностью  $D > D \approx 0.106$ , что значительно превосходит те значения  $D$ , при которых наблюдаются СР и стохастическая синхронизация (рис.3(б)). Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 6, 7].

**В третьей главе** исследуется нестационарный нелинейный осциллятор, в котором рост амплитуды колебаний ограничивается с помощью шумового воздействия. Анализируются характеристики стабилизированных шумом колебаний. Показано, что в системе при изменении интенсивности шума можно наблюдать такие эффекты, как подавление экспоненциальной неустойчивости траекторий, сужение спектра колебаний, изменение числа экстремумов вероятностного распределения.

Неустойчивый нелинейный осциллятор описывается следующей системой (J.M. Finn, E.R. Tracy et al.):

$$\dot{x} = (y - 1)x + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{y} = \varepsilon y^\nu - x^2 y, \quad y > 0, \quad (8)$$

где  $n(t)$  – нормированный источник гауссова белого шума,  $D$  – параметр, задающий интенсивность шума,  $\nu = 1.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  – параметры системы. В отсутствии шума в системе (8) нет аттрактора. При  $t \rightarrow \infty$  амплитуда и период колебаний неограниченно растут. Если добавить слабый шум, траектории перестанут приближаться к неустойчивой сепаратрисе седла, что воспрепятствует росту амплитуды и периода колебаний, и в системе будут существовать стационарные стохастические колебания. Траектории при слабом шуме являются экспоненциально неустойчивыми и старший ляпуновский показатель – положителен (J.M. Finn, E.R. Tracy et al.). В проведенных исследованиях было установлено, что с ростом интенсивности шума старший ляпуновский показатель переходит из положительной области значений в отрицательную (в точке  $D_0 \approx 0.014$ ). Это означает, что исследуемая система претерпевает динамическую бифуркацию. Кроме того, численные эксперименты показали, что ширина спектра колебаний  $x(t)$  на уровне половинной мощности зависит от интенсивности  $D$  немонотонным образом (рис.4(а)). Сужение основной спектральной линии можно связать еще с одним вызванным шумом эффектом, который заключается в том, что при увеличении  $D$  в спектре появляется второй (локальный) максимум, соответствующий вращению в окрестности фокусов. Эволюция плотности вероятности с ростом шума  $p(x)$  показывает перераспределение вероятностной меры из окрестности нуля в окрестность фокусов (рис. 4(б)).

Таким образом, можно говорить об эффекте некоторой регуляризации колебаний под действием шума, подобном эффекту когерентного резонанса. Результаты третьей главы опубликованы в работе [3, 8].

**Четвертая глава** посвящена разработке и апробации способа диагностики неизвестного параметра заданной динамической системы в реальном времени по реализациям колебаний. На примере нескольких динамических

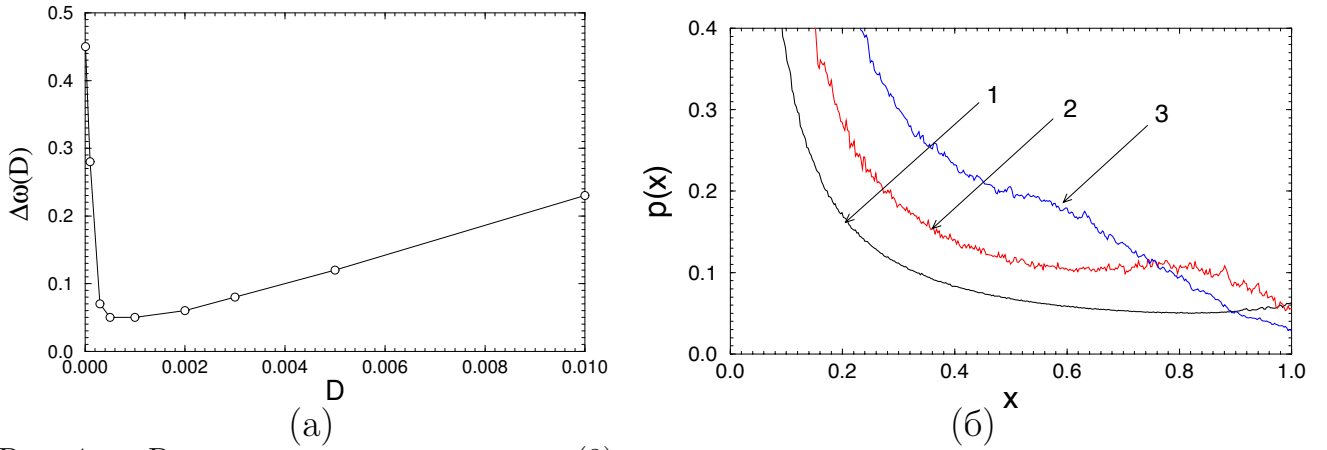


Рис. 4. Результаты расчета системы (8): а – зависимость полуширины спектра от интенсивности шума; б – фрагмент распределения  $p(x)$  кривая 1 –  $D = 10^{-5}$ , кривая 2 –  $D = 10^{-4}$ , кривая 3 –  $D = 0.5 \cdot 10^{-3}$

систем с помощью численного моделирования и в радиофизических экспериментах исследуется точность оценки параметров в зависимости от уровня динамического шума в системе, от характера колебательного режима и имеющих бифуркаций. Экспериментально показана возможность использования предлагаемого метода для восстановления сигнала, модулирующего управляющий параметр зашумленной хаотической системы.

Метод оценки управляющего параметра рассмотрен на примере генераторов Ван дер Поля, Ресслера, Лоренца и генератора с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова. Управляющий параметр (назовем его  $\varepsilon$ ) находится из системы уравнений соответствующего генератора, необходимые производные динамических переменных рассчитываются приближенным способом “по пяти точкам”. Таким образом, вычисляется массив мгновенных оценок  $\varepsilon_i$ . Оценка параметра  $\varepsilon_0$  по массиву  $\varepsilon_i$ , определенная с помощью метода наименьших квадратов (МНК), может в некоторых случаях из-за влияния шума давать очень большую (аномальную) ошибку  $\Delta = |\varepsilon_0 - \varepsilon|$ . Поэтому, для уменьшения разброса текущих оценок, производится фильтрация массива данных исключением малых величин динамической переменной в знаменателе выражения для мгновенной оценки. Так как МНК требует большой объем вычислительных операций, то применительно к рассматриваемым случаям удобнее использовать оценку по среднему или оценку по максимуму плотности распределения. Если распределение разброса текущих оценок параметра унимодално и симметрично, то среднее значение будет соответствовать максимуму распределения (рис.5(а)). На рисунке 5(б) приведены значения ошибки оценки, полученные для генератора Ван дер Поля с применением фильтра малых значений и без него. На рис. 5(в) представлена зависимость относительной ошибки оценки  $\Lambda = \frac{\Delta}{\varepsilon}$  от интенсивности шума  $D$ . Определено, что воздействующий в достаточно большом диапазоне интенсивностей шум не влияет на величину относительной ошибки, которая не превосходит 0.04 единицы или 4%. Можно сделать вывод, что применение простой оценки по среднему

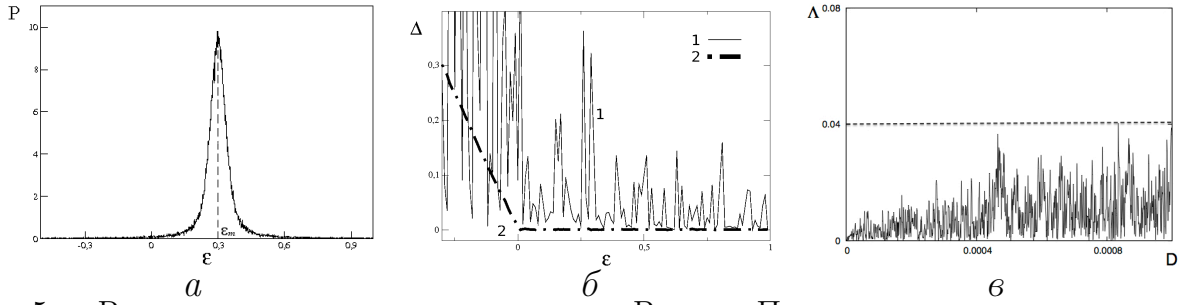


Рис. 5. Результаты расчетов для генератора Ван дер Поля: а – распределение значений  $\varepsilon_i$  при  $D = 10^{-4}$ ; б – зависимость ошибки  $\Delta$  от истинного значения  $\varepsilon$  при  $D = 10^{-4}$ , полученная без применения фильтра малых значений (кривая 1) и с применением фильтра (кривая 2); в – влияние интенсивности шума  $D$  на величину относительной ошибки  $\Lambda$  в оценке управляющего параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_0 = 0.4$ )

в исследуемой системе с шумом дает приемлемую точность ( $\Lambda < 30\%$ ).

В ходе работы рассматривалось влияние мягких и жестких бифуркаций на оценку параметра. Исследовались зашумленные генераторы: Анищенко-Астахова и Лоренца. В результате проведенных расчетов не выявлено каких-либо существенных влияний мягких и жестких бифуркаций на оценку параметров в исследованных системах. С увеличением интенсивности шума ошибка оценки параметра становится больше, но остается приемлемой.

Для подтверждения численных расчетов была создана радиофизическая установка – генератор Ресслера. Результаты обработки экспериментальных данных в исследованных режимах показали, что все полученные плотности распределения отличаются от гауссова и не являются унимодальными. Однако, не смотря на присутствие в системе значительного измерительного и динамического шума, оценка параметра по среднему значению дает приемлемый результат. В режиме квазигармонических колебаний без воздействия шума относительная ошибка оценки составляет  $\Lambda = 0.83\%$ , в режиме колебаний удвоенного периода без шума –  $\Lambda = 1.03\%$ , а при подключении в систему внешнего генератора шума –  $\Lambda = 1.07\%$ . Характер получаемых в эксперименте нетривиальных распределений  $p(m_i)$  может быть объяснен присутствием в системе узкополосного параметрического шума и/или регулярных изменений параметров под действием шума.

Для обоснования возможности использования данного метода в задачах передачи информации проведены численные и радиофизические эксперименты по восстановлению изменяющихся во-времени параметров. При этом, выполнялись условия выбора ширины скользящего окна и медленно изменяющегося параметра, значение которого принималось постоянным внутри окна. В численном эксперименте продемонстрировано успешное восстановление модулирующего сигнала (рис. 6(а)). Бифуркации удвоения периода, происходящие в системе, не влияют на результат восстановления сигнала. Сигнал успешно восстанавливается и в те моменты времени, когда система находится в режиме хаоса.

В радиофизическом эксперименте параметры установки модулировались



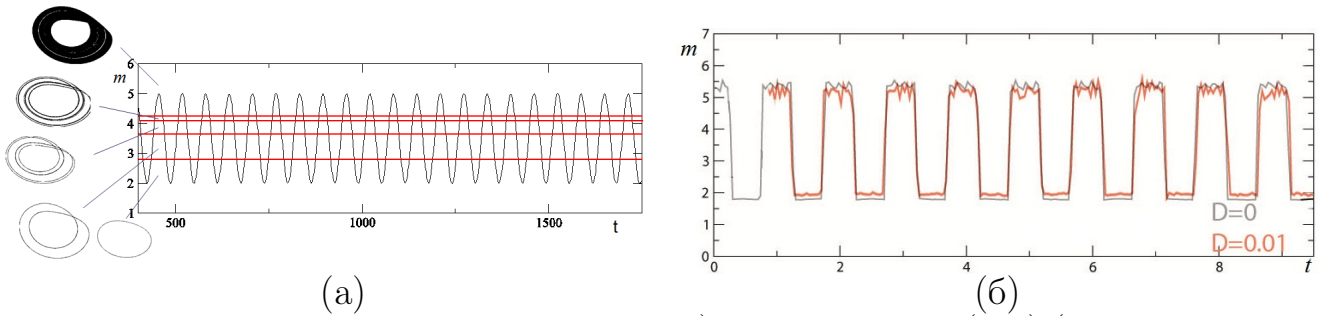


Рис. 6. Результат восстановления сигналов: а)  $m = 3.5 + 1.5\sin(0.1t)$  (численный эксперимент)  $D = 0.01$ , б) последовательность прямоугольных импульсов с частотой 1 Гц и скважностью 2 (радиофизический эксперимент)

сигналами синусоидальной формы и последовательностью прямоугольных импульсов. Исследование проводилось как без внешнего источника шума, так и с подключением внешнего аддитивного источника белого гауссова шума интенсивности  $D = 10^{-2}$ . Характеристики передаваемого сигнала подбирались таким образом, что в генераторе, как и в численном эксперименте, наблюдался каскад бифуркаций удвоения периода с последующим переходом к хаотическим колебаниям (рис. 6(б)).

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [4, 5, 9–11].

**В Заключение** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

1. В рамках квазигармонического приближения получена бифуркационная диаграмма стохастических бифуркаций в генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии аддитивного и параметрического шума. При воздействии только параметрического шума наблюдается динамическая бифуркация потери устойчивости точкой равновесия в начале координат и три феноменологические бифуркации, состоящие в качественной перестройке вероятностного распределения. Добавление в систему аддитивного шума упрощает картину бифуркаций, приводя к исчезновению точки равновесия. Численные расчеты, проведенные для полных уравнений генератора показали значительное расхождение с результатами квазигармонической теории и свидетельствуют о наличии бифуркационных интервалов, соответствующих постепенной эволюции формы вероятностного распределения.
2. Поведение бистабильного осциллятора с конечным трением может быть сведено к поведению передемпфированной модели с помощью эквивалентных характеристик потенциального профиля, зависящих от параметра потерь. Эти характеристики позволяют, используя аналитические соотношения, полученные для передемпфированного осциллятора, дать хорошие оценки значений интенсивности шума, при которых наблюдается максимум коэффициента усиления по мощности и максимум отношения “сигнал/шум” в осцилляторе с конечным трением.
3. Хаотическое поведение бистабильного стохастического осциллятора с конечным трением, вызванное внешним шумом возможно только при

небольших значениях параметра потерь. Переход к хаосу никак не связан с явлениями стохастической синхронизации и стохастического резонанса, которые могут наблюдаться при сколь угодно больших потерях. Даже в том случае, когда потери невелики и в системе возможны все три эффекта (СР, стохастическая синхронизация и индуцированный шумом хаос), область хаотической динамики соответствует значительно более сильному шуму, чем тот, при котором имеют место эффекты стохастического резонанса и стохастической синхронизации.

4. В нестационарном осцилляторе стабилизируемом шумом обнаружена стохастическая бифуркация, приводящая к подавлению экспоненциальной неустойчивости колебаний с увеличением интенсивности шума. Таким образом, шум не только стабилизирует осциллятор, препятствуя росту амплитуды колебаний, но при большой интенсивности приводит к подавлению хаоса. Кроме того, в этой же системе обнаружен эффект, подобный когерентному резонансу: при некоторой интенсивности шума наблюдается минимальная ширина спектральной линии и наиболее медленный спад корреляционной функции.
5. В численных и радиофизических экспериментах показано, что если детерминированная модель системы известна, то на основе статистической обработки экспериментально получаемых реализаций системы, содержащей внутренние источники шума, возможно получить оценки управляющего параметра с высокой точностью в режиме сложной динамики даже при большой интенсивности шума.
6. Натурные эксперименты, направленные на выяснение возможности использования модуляции параметра хаотической системы в целях скрытой передачи информации, показали, что, несмотря на происходящие в системе бифуркации удвоения периода, наличие внешних источников шума с известными характеристиками и внутренних шумов с неизвестными характеристиками, предложенный способ позволяет восстанавливать сигналы с большой точностью. Установлено, что режим хаоса в исследуемой системе не влияет существенным образом на результаты восстановления сигнала. Таким образом, можно утверждать, что применение предлагаемого метода в системах скрытой передачи информации возможно в режиме реального времени.

## Список публикаций

1. Вадивасова Т.Е., Маляев В.С. Бифуркации в генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии параметрического шума. Квазигармонический анализ и численный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2, принята к печати.
2. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Стохастический резонанс, стохастическая синхронизация и индуцированный шумом хаос в осцилляторе Дуффинга // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 5. С. 74–83.
3. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С., Тишина О.В. Эффекты подавления хаоса и сужения спектра в стабилизируемом шумом неустойчивом нелинейном осцилляторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 1. С. 37–45.
4. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е. Оценка параметров зашумленных динамических систем // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 2. С. 267.
5. Маляев В.С., Семенов В.В., Вадивасова Т.Е. Экспериментальная оценка неизвестного параметра нелинейной системы в присутствии динамического шума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 3. С. 17–28.
6. Маляев В.С. Стохастический аттрактор (по Арнольду) // Материалы VII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур”, ГосУНЦ “Колледж”, 2004. С. 157–158.
7. Маляев В.С., Шишкин А.В., Постнов Д.Э. Индуцированный шумом хаотический режим в двумерном осцилляторе // Материалы VII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур”, ГосУНЦ “Колледж”, 2004. С. 159–161.
8. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Маляев В.С. Применение концепции стохастического аттрактора для исследования динамических систем в присутствии шума // Актуальные проблемы статистической радиофизики (малаховский сборник). 2005. Т. 4. С. 3–13.
9. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е. Возможность оценки параметров зашумленной динамической системы по реализациям колебаний // “Статистическая физика и информационные технологии”: Материалы Международной школы-семинара “StatInfo-2009”, Россия, Саратов, 2-5 июня 2009. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2009.
10. Маляев В.С., Семенов В.В. Экспериментальная оценка изменяющихся параметров динамических систем // Материалы VI научной конференции для молодых ученых «Нанoeлектроника, Нанofотоника и Нелинейная физика», Саратов, 2011, Саратовский филиал института радиотехники и электроники РАН им. В.А. Котельникова.
11. Маляев В.С., Семенов В.В. Оценка параметров зашумленных динамических систем в случае жесткой бифуркации // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010, Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011. С. 76-78.