

На правах рукописи

Феоктистов Алексей Владимирович

**Экспериментальное исследование  
синхронизации квазипериодических  
и индуцированных шумом автоколебаний**

01.04.03 – Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2013

Работа выполнена в Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского на кафедре радиофизики и нелинейной динамики физического факультета.

Научный руководитель:

заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
**Анищенко Вадим Семенович**

Официальные оппоненты:

**Селезнев Евгений Петрович**, доктор физико-математических наук, доцент, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, заместитель директора по научной работе

**Рыскин Никита Михайлович**, доктор-физико математических наук, профессор, Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов, профессор кафедры нелинейной физики

Ведущая организация:

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

Защита состоится « 30 » мая 2013 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. В.А. Артисевич Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (Саратов, ул. Университетская, 42)

Автореферат разослан «\_\_\_» апреля 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Аникин Валерий Михайлович

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** В вопросе об эффекте синхронизации периодических колебаний на сегодняшний день достигнута практически полная ясность. Однако из рассмотрения выпала проблема синхронизации квазипериодических колебаний. К этой проблеме обратились совсем недавно, тем не менее не все вопросы здесь решены на сегодня в достаточной степени.

Впервые задача о синхронизации квазипериодических колебаний была поставлена и частично решена в работах В.С. Анищенко, С.М. Николаева, Ю. Куртса, с использованием модели модифицированного генератора с инерционной нелинейностью, а позднее модели двух связанных генераторов Ван дер Поля. Эксперименты показали, что синхронизация резонансного предельного цикла происходит совершенно отличным от синхронизации обычного предельного цикла способом. В резонансном случае внешнее воздействие в начале разрушает режим взаимной синхронизации генераторов, а затем по очереди захватывает частоты первого и второго генераторов. Таким образом бифуркационная диаграмма на плоскости параметров “частота-амплитуда” внешнего воздействия, содержит помимо области полной синхронизации и двухчастотных колебаний еще и область трехчастотных колебаний. В работе В.С. Анищенко, С.В. Астахова, Т.Е. Вадивасовой синхронизация двух связанных генераторов Ван дер Поля анализируется аналитически в фазовом приближении. Установлено, что в основе бифуркационного механизма синхронизации двухчастотных колебаний лежит седло-узловая бифуркация двумерных торов, что соответствует седло-узловой бифуркации инвариантных замкнутых кривых в фазовом приближении. Полученные в этих работах бифуркационные диаграммы имеют принципиальные отличия. По этой причине становится актуальным проведение радиофизического эксперимента, который позволит исследовать синхронизацию резонансного предельного цикла на торе и построить бифуркационную диаграмму на плоскости параметров “частота-амплитуда” внешнего воздействия. Так же радиофизический эксперимент позволит исследовать синхронизацию в окрестности резонанса  $1 : 3$ , что невозможно сделать в фазовом приближении. А это, в свою очередь, дает возможность распространить теорию синхронизации квазипериодических колебаний на случай резонансов  $m : n$  ( $m$  и  $n$  отличны от 1).

Говоря о синхронизации, следует отметить, что это явление присуще исключительно автоколебательным системам, однако оказалось, что и индуцированные шумом колебания в возбудимой системе возможно синхронизовать. Интерес к возбудимым системам во многом обусловлен задачами моделирования в нейродинамике. Классическим примером возбудимой системы и качественной модели нейрона является система ФитцХью-Нагумо (ФХН). Среди множества интересных с точки зрения нелинейной динамики эффектов, на-

блюдаемых в возбудимых системах, особый интерес для нас представляет когерентный резонанс. Явление когерентного резонанса проявляется в наличии оптимального уровня шума, при котором возбуждаемые этим шумом колебания в системе наиболее когерентны. Это явление особо интересно и тем, что колебания в возбудимых системах оказывается можно синхронизовать, причем, как с помощью внешней силы (вынужденная синхронизация), так и с использованием двух связанных систем (взаимная синхронизация). Хотя хорошо известно, что синхронизация является типичным явлением исключительно для автоколебательных систем. Следовательно, возбудимые системы можно рассматривать как автоколебательные, хотя они в принципе являются неавтономными.

Мы можем расширить наши представления о захвате частоты через касательную бифуркацию на случай синхронизации индуцированных шумом колебаний через захват. Однако, если эти представления верны, тогда синхронизация индуцированных шумом колебаний более чем с одной основной частотой в спектре, должна подчиняться тому же сценарию, что и в случае квазипериодических автоколебаний. Таким образом, возникает необходимость в проведении эксперимента по синхронизации двух связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса внешним периодическим воздействием. Этот эксперимент не только вскроет механизм такой синхронизации, что само по себе является новым, не исследованным явлением, но и позволит провести дополнительные аналогии между возбудимыми неавтономными и автоколебательными системами.

Задачи анализа возбудимых систем, находящихся под внешним воздействием, возникают во многих биологических и физиологических приложениях. Поскольку подавляющее большинство работ посвящено случаю когда внешнее воздействие представляет импульсы, как одиночные так и последовательности, интересным становится вопрос, как меняется динамика системы в зависимости от формы сигнала воздействия. Также большой интерес представляет выявление особенностей поведения системы в зависимости от параметров внешнего воздействия таких как амплитуда и частота. Анализ изоклин системы ФитцХью-Нагумо приводит к выводу, что наличие некоторого расстояния до порога генерации в системе ведет к значительному обогащению карты режимов на плоскости параметров, что подтверждается экспериментально [10]. Детальное исследование синусоидального воздействия на систему ФХН позволит перейти к рассмотрению воздействия уже амплитудно-модулированным сигналом, что еще в большей степени усложняет динамику, а отклик системы на такое воздействие открывает возможность в преобразовании АМ сигнала в последовательности групп спайков, что представляется возможным использовать в кодировании сигналов.

Некоторые возбудимые системы при определенных условиях можно пред-

ставить как два устойчивых состояния равновесия, разделенных неустойчивым (седловым). Например, систему ФХН с фиксированной медленной переменной. Теперь рассмотрим структуру фазового пространства генератора с жестким возбуждением. Для некоторых значений параметров, его фазовое пространство содержит устойчивый фокус в начале координат, устойчивый предельный цикл и неустойчивый предельный цикл, разделяющий два устойчивых режима. Заметно, что такая структура схожа со структурой возбудимой системы, но в отличие от последней не обладает медленной (возвращающей) переменной. Если характеристики шума таковы, что любые значения его интенсивности имеют ненулевую вероятность, получается что в такой системе должен наблюдаться эффект когерентного резонанса. И действительно, в генераторе с жестким возбуждением наблюдается явление когерентного резонанса, причем, как после бифуркации рождения предельных циклов, так и до нее. Особенностью индуцированных шумом колебаний в возбудимых системах является возможность их синхронизации. Продолжая аналогию с возбудимыми системами, встает вопрос о синхронизации стохастических колебаний в генераторе с жестким возбуждением. По этой причине становится актуальным проведение эксперимента по исследованию когерентного резонанса и явлений синхронизации в такой системе, как до бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого предельных циклов, так и после нее.

**Целью диссертационной работы** являлся экспериментальный анализ механизмов и особенностей вынужденной и взаимной синхронизации квазипериодических и индуцированных шумом автоколебательных процессов.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые в физическом эксперименте исследован бифуркационный механизм явления внешней синхронизации предельного цикла на двумерном торе гармоническим воздействием.
2. Впервые в физическом эксперименте продемонстрирован механизм синхронизации двух связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса внешним периодическим воздействием и построена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров “амплитуда - частота” воздействия.
3. Экспериментально установлено, что в системе ФХН наличие расстояния до порога генерации позволяет системе “различать” не только частоту, но и амплитуду внешнего воздействия, в следствие чего появляются дополнительные области резонансов.
4. В физическом эксперименте установлено, что в генераторе с жестким возбуждением после бифуркации рождения предельных циклов в режи-

ме когерентного резонанса существует набор оптимальных значений интенсивности шума, при котором степень когерентности колебаний максимальна.

5. Впервые продемонстрирована возможность синхронизации индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением до бифуркации рождения предельных циклов и выявлена структура области синхронизации.
6. Впервые в физическом эксперименте проведено исследование синхронизации в системе с двумя предельными циклами после бифуркации рождения предельных циклов в режиме когерентного резонанса и выявлена структура области синхронизации.
7. В физическом эксперименте проведено исследование синхронизации в генераторе с жестким возбуждением в отсутствие внешнего шумового воздействия и подтверждено отличие структуры областей синхронизации от классического случая синхронизации в генераторе Ван дер Поля.

**Достоверность научных выводов** работы подтверждается взаимным соответствием результатов радиофизического эксперимента, результатов численного анализа и моделирования, а также аналитических результатов.

**Научно-практическая значимость результатов.** Научные результаты, представленные в диссертационной работе, существенно развивают и дополняют представления современной радиофизики и теории колебаний. Понятие автоколебательной системы в данной работе расширяется на случай неавтономных возбудимых систем, находящихся под действием шума. Результаты экспериментов по синхронизации квазипериодических автоколебаний не только существенно дополняют современную теорию колебаний, но имеют и практическую ценность, поскольку позволяют определить наличие многочастотных колебаний в системе. Результаты экспериментов с возбудимыми системами обосновывают введение таких новых понятий как индуцированные шумом предельные циклы и торы, что в свою очередь дает новое направление в исследовании бифуркаций. Исследования синхронизации генератора с жестким возбуждением как с шумом так и без, значительно дополняют представления теории синхронизации.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. Возбудимые шумом незатухающие колебания в неавтономных системах типа ФитцХью-Нагумо и генератор Ван дер Поля с жестким возбуждением до бифуркации рождения предельных циклов (отсутствие генерации) реализуют режим автоколебаний, которые не зависят от началь-

ных условий и демонстрируют эффект внешней и взаимной синхронизации.

2. Эффект вынужденной синхронизации связанных возбуждимых осцилляторов ФитцХью-Нагумо характеризуется тем же бифуркационным механизмом, который имеет место при внешней синхронизации предельного цикла на двумерном торе в системе двух связанных генераторов Ван дер Поля.
3. Внешняя синхронизация индуцированных шумом автоколебаний в генераторе с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса характеризуется асимметрией области синхронизации. Результатом является возможность реализации эффекта синхронизации как через захват частоты, так и через подавление колебаний при постоянстве амплитуды внешнего сигнала и вариации его частоты.

**Апробация работы.** Результаты научных исследований по теме диссертационной работы были представлены на следующих научных конференциях:

- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2009);
- Международная школа-семинар “Статистическая физика и информационные технологии” (STATINFO-2009) (Саратов, 2009);
- Международная школа-конференция “Нелинейная динамика в электронных системах” (Nonlinear Dynamics in Electronic Systems) (Швейцария, Рапперсвиль, 2009);
- Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2010);
- Всероссийской конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2011);
- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2012);

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 12 печатных работах: 5 статей в рецензируемых журналах (5 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1-5]), 5 статей в сборниках трудов конференций, 1 публикация в сборнике тезисов докладов, 1 статья в книге.

**Личный вклад автора.** В представленной работе все данные численного и физического экспериментов, а также аналитические результаты были получены лично соискателем. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем.

**Структура и объем диссертации.** Материалы диссертации изложены на 135 страницах, содержит 53 рисунка и список цитированной литературы из 66 наименований. Диссертационная работа состоит из введения, четырех содержательных глав и списка цитированной литературы.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** проводится экспериментальное исследование по синхронизации резонансного предельного цикла на торе внешним гармоническим воздействием. Приводятся бифуркационные диаграммы и обосновывается наличие касательных бифуркаций.

Явление синхронизации предельного цикла на торе рассматривается на модели связанных осцилляторов Ван дер Поля, имеющих расстройку по частоте, один из которых находится под действием гармонической внешней силы. В п. 1.1 рассмотрены функциональная и принципиальная электрическая схемы экспериментальной установки. Она содержит три генератора типа Ван дер Поля, собранных по схеме Колпитца. Два генератора имеют близкие частоты, а у третьего собственная частота примерно в три раза выше собственной частоты первого генератора. В п. 1.2. исследуется синхронизация резонансного предельного цикла на торе в окрестности резонанса 1 : 1. Полученная бифуркационная диаграмма представлена на рис.1а. В области, обозначенной  $T^3$ , неавтономная система двух связанных генераторов Ван дер Поля характеризуется квазипериодическими колебаниями с тремя независимыми частотами  $f_{ex}$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ . Выход из областей  $T^3$  в области  $T^2$  характеризуется возникновением двумерного тора как частичного-резонанса на трехмерном торе. Частичный резонанс отвечает эффекту захвата одной из парциальных частот. Здесь возможны случаи:  $f_{ex} = f_1$  и  $f_2 \neq f_1$ , либо  $f_{ex} = f_2$  и  $f_1 \neq f_2$ . Имеет место частичная синхронизация. Переход из областей  $T^2$  в область резонансного предельного цикла отвечает режим установления устойчивых периодических движений. Рождается устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора, который, в свою очередь, лежит на поверхности трехмерного тора. Этому предельному циклу отвечает режим полной синхронизации, при котором внешний сигнал захватывает обе частоты пар-



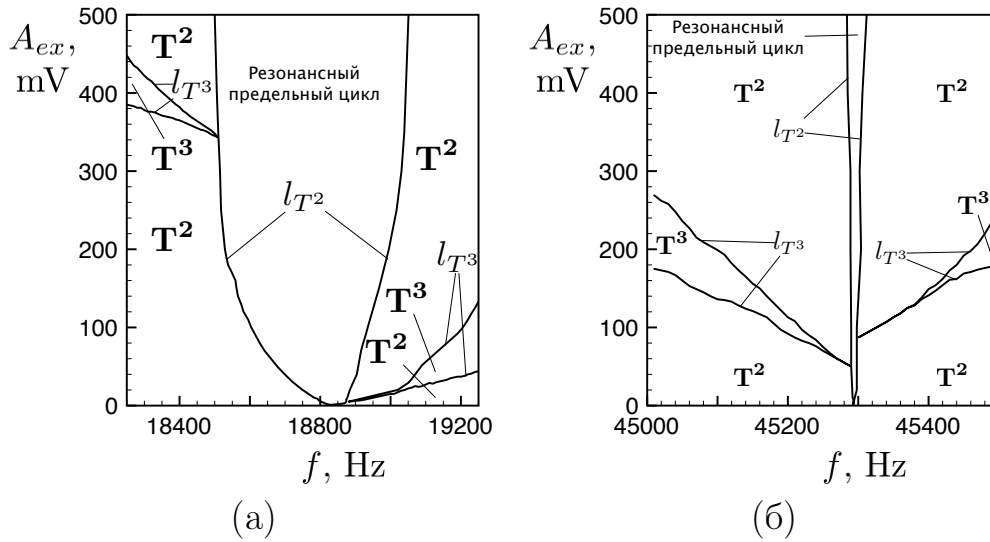


Рис. 1. Экспериментально полученные бифуркационные диаграммы для резонансов 1 : 1 (а) и 1 : 3 (б). По горизонтали отложена частота внешнего воздействия, по вертикали — амплитуда внешнего воздействия.

циальных генераторов ( $f_{ex} = f_1 = f_2$ ). Так же рассматриваются проекции фазовых портретов и стробоскопические сечения, соответствующие каждой области на бифуркационной диаграмме. Наблюдения за эволюцией проекций фазового портрета и стробоскопического сечения при переходе из области  $T^2$  в область полной синхронизации показывают, что в месте рождения будущего устойчивого предельного цикла происходит сгущение фазовых траекторий, в месте рождения будущего неустойчивого (седлового) предельного цикла происходит разряжение фазовых траекторий, что свидетельствует о наличии седло-узловой бифуркации при таком переходе (рис.2). Об этом же свидетельствуют и стробоскопические сечения. В п.1.3. проводится исследование синхронизации резонансного предельного цикла на торе в окрестности резонанса 1 : 3. Полученная бифуркационная диаграмма (рис.1б) качественно совпадает с диаграммой полученной для резонанса кратности 1 : 1 (рис.1а).

**Во второй главе** описывается сценарий синхронизации связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса внешним гармоническим воздействием. Проводятся аналогии между неавтономными возбудимыми и автоколебательными системами.

В п. 2.1. рассматривается исследуемая схема и ее математическая модель. За основу схемы был выбрана цепочка на туннельном диоде, предложенная Нагумо. Оригинальная схема была модифицирована заменой туннельного диода на схему на операционном усилителе, моделирующую  $N$ -образную вольт-амперную характеристику. На основе законов Кирхгофа нетрудно сформулировать уравнения, описывающие динамику системы с учетом введения источ-

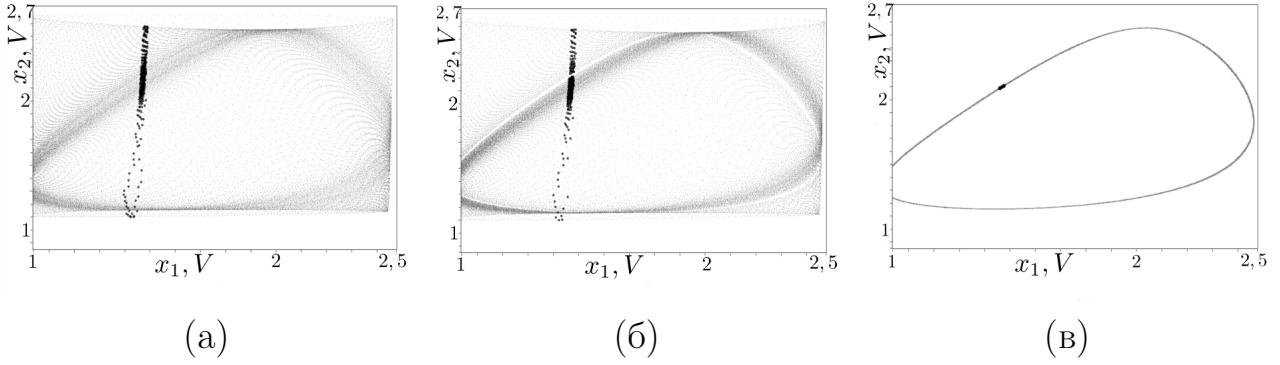


Рис. 2. Эволюция проекций фазовых портретов и стробоскопических сечений при переходе из области  $T^2$  в область полной синхронизации.

ника шумового напряжения. Уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L}(Vc - RI - U) + \frac{1}{L}\xi(t), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C}(I - I(U)), \quad I(U) = \alpha'U^3 - \gamma'U, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R = 100\Omega$ ,  $L = 6.8 \cdot 10^{-3}H$ ,  $C = 6.8 \cdot 10^{-11}F$ ,  $\alpha' = 2.22 \cdot 10^{-5}Vc = 7.2V, \Omega^{-3}$ ,  $\gamma' = 1.61 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$ ,  $A_\xi = \sqrt{\langle \xi^2(t) \rangle}$ .

В п. 2.2. исследуется явление когерентного резонанса в системе ФХН. Его существование демонстрируется спектрами мощности, а также графиком зависимости ширины спектральной линии индуцированных колебаний на уровне половинной мощности от интенсивности шумового воздействия, представленном на рис.3а.

В п. 2.3. проводится экспериментальное исследование по внешней синхронизации индуцированных шумом колебаний в системе ФХН в режиме когерентного резонанса. С помощью спектров мощности и зависимости числа вращения от частоты внешнего воздействия демонстрируется возможность синхронизации таких колебаний. В п. 2.4. демонстрируется возможность взаимной синхронизации индуцированных шумом колебаний в системе ФХН. Приводится схема экспериментальной установки на которой проводились исследования. Она состоит из двух осцилляторов ФХН, параметры которых были выбраны так, чтобы между ними была частотная расстройка, схемы связи, а также схемы, позволяющей наблюдать происходящее в системе. В п.2.5. исследуется вынужденная синхронизация связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса внешним периодическим воздействием. Построенная бифуркационная диаграмма представлена на рис.3б. Легко видеть, что она качественно эквивалентна такой же бифуркационной диаграмме, но построенной для неавтономной системы двух связанных генераторов Ван дер Поля. Колебания в области  $T^3$  неавтономной системы двух связанных осциллято-

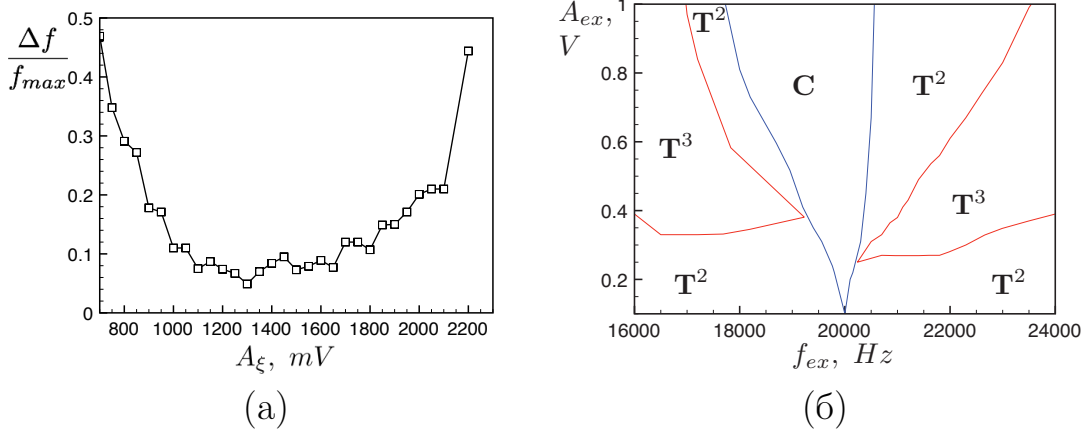


Рис. 3. Зависимости ширины спектральной линии индуцированных колебаний на уровне половинной мощности от интенсивности шумового воздействия (а), бифуркационная диаграмма на плоскости параметров “амплитуда - частота” внешнего воздействия.

ров ФХН в режиме когерентного резонанса характеризуются тремя независимыми частотами, в фазовом пространстве индуцированный шумом трехмерный тор. Выход в область  $T^2$  соответствует либо захвату частоты одного из осцилляторов внешним периодическим воздействием, либо синхронизации между осцилляторами. В этом случае в спектре мощности наблюдаются две независимые частоты, а в фазовом пространстве двумерный индуцированный шумом тор. Область  $C$  соответствует режиму полной синхронизации, когда оба осциллятора захвачены внешним периодическим воздействием, а в фазовом пространстве системы наблюдается индуцированный шумом предельный цикл. В п. 2.6. обсуждается вопрос об аттракторе стохастических колебаний и балансе энергии в системе (1). Методом проектирования решений на фазовую плоскость было показано существование аттрактора стохастических колебаний такой системы. С целью исследования подкачки в систему энергии производился расчет дивергенции векторного поля  $F$  системы (1).

$$\operatorname{div} F = \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} = (\gamma g - ac) - 3\alpha g y^2 \quad (2)$$

Были определены области где дивергенция положительна, т.е. в систему происходит подкачка энергии от источника и где она отрицательна. В области где дивергенция отрицательна, полученная энергия диссипирует.

**В третьей главе** исследуется динамика системы ФХН под воздействием синусоидального сигнала. Строится карта режимов на плоскости параметров “амплитуда - частота” внешнего воздействия. Обсуждается влияние порога на динамику системы.

В п. 3.1. представлена исследуемая схема и ее математическая модель. Принципиальная схема установки по существу та же, что использовалась

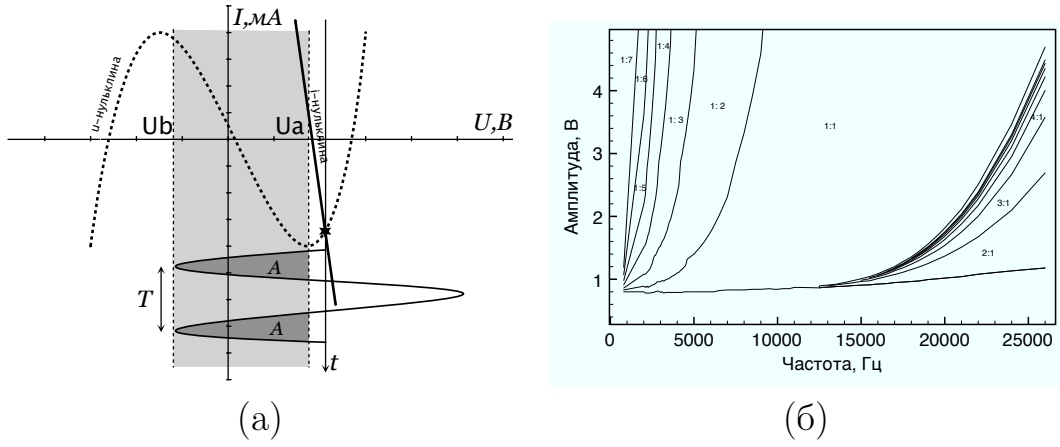


Рис. 4. Нульклины системы (3) - (а) и область резонансов - (б).

для исследований, представленных во второй главе, но с небольшими модификациями. Используя законы Кирхгофа получаем уравнения, описывающие динамику системы. Уравнения имеют вид:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(V_c - RI - U + A \sin(\omega_{ext} t)), \quad (3)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C}(I - I(U)), \quad I(U) = \alpha' U^3 - \gamma' U,$$

где  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 6.8 \cdot 10^{-3} \text{H}$ ,  $C = 6.8 \cdot 10^{-11} \text{F}$ ,  $\alpha' = 2.22 \cdot 10^{-5} \text{Vc} = 7.2 \text{V}, \Omega^{-3}$ ,  $\gamma' = 1.61 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$ .

В п. 3.2. для анализа системы (3) используется метод нульклин. Его суть заключается в построении в пространстве переменных системы кривых, на которых производные соответствующих переменных обращаются в ноль. Эти кривые разбивают пространство переменных на области в которых производные имеют разный знак, тем самым позволяя сделать выводы о характере траектории изображающей точки. Для системы (3)  $u$ -нульклина представляет собой  $N$ -образную кривую на которой  $\frac{dU}{dt}$  меняет свой знак и определяется из условия  $\frac{dU}{dt} = 0$ . Она симметрична относительно нуля и пересекает ось абсцисс в точках  $-8,49$ ;  $0$ ;  $8,49$  Вольт.  $i$ -нульклина представляет собой прямую, на которой  $\frac{di}{dt}$  меняет свой знак и определяется из условия  $\frac{di}{dt} = 0$ . Она имеет вид прямой с угловым коэффициентом  $-1/r$ , где  $r$  - активное сопротивление всей цепочки. С помощью метода нульклин определяется точны размер области генерации системы (3) в зависимости от ее параметров. Рассматривается какое влияние на динамику системы оказывает каждый из полупериодов внешнего воздействия. Один полупериод получает название активного, поскольку заставляет систему переходить в режим генерации, а другой - нейтрального. На рис.4а активный полупериод обозначен темно-серым фоном и литерой А. Так же в этом пункте анализируется динамика системы в зависимости от частоты внешнего воздействия. Вся частотная область делится на две области.

Первую область определили из условия что  $T_s \leq \frac{1}{2}T_{ex}$ , т.е. что период собственных колебаний системы меньше либо равен половине периода внешнего воздействия. Вторую область определили из условия, что  $T_s > \frac{1}{2}T_{ex}$ .

В п. 3.3. исследуется влияние расстояния до порога области генерации на динамику системы. Показано, что если координата состояния равновесия фазовой точки в отсутствие внешнего воздействия находится на некотором расстоянии от порога генерации, то карта режимов на плоскости параметров “амплитуда-частота” внешнего воздействия значительно усложняется. Появляется зависимость динамики системы не только от частоты, но и амплитуды внешнего воздействия. В п. 3.4. построена карта режимов на плоскости параметров “амплитуда-частота” внешнего воздействия, которая представлена на рис.4б. Проводя аналогию с квазипериодическими колебаниями, а именно с двухчастотными, можно заметить, что в случае, когда частота внешнего воздействия низка и не превосходит половину частоты собственных колебаний, а в активном полупериоде укладывается целое число периодов собственных колебаний, такая ситуация соответствует резонансу кратности  $1 : n$ , где  $n$  равно количеству собственных периодов уложившихся в активном полупериоде. Случай равенства частоты воздействия половине собственной частоты соответствует случаю резонанса кратности  $1 : 1$ . При дальнейшем увеличении частоты воздействия, выше половины собственной частоты в системе начинают наблюдаться резонансы кратности  $m : 1$ , где  $m$  - количество периодов внешнего воздействия, уложившихся на периоде собственных колебаний системы. **В четвертой главе** рассматривается радиофизическая модель генератора с жестким возбуждением. Исследуется явление когерентного резонанса в такой системе и его особенности. Проводится эксперимент по вынужденной синхронизации колебаний в режиме когерентного резонанса. Также исследуется синхронизация в системе с двумя предельными циклами в отсутствие шума.

В п. 4.1. вводится в рассмотрение генератор с жестким возбуждением, который описывается уравнением:

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \quad (4)$$

Параметр  $\lambda$  определяет подкачку энергии в систему, а параметр  $\mu$  определяет диссипацию энергии в системе. Также представлена его фазопараметрическая диаграмма для параметра  $\lambda$  при фиксированном значении  $\mu = 0.5$ .

В п. 4.2. представлена схема экспериментальной установки. Она построена по принципу аналогового моделирования и состоит из операционных усилителей (ОУ) и умножителей напряжения. Выведены уравнения схемы для произвольно выбранных элементов схемы, а затем приведены к безразмерному виду. Несмотря на то, что полученные уравнения имеют точное сходство с уравнением (4), тем не менее, их вывод основывается на определенных приближениях в работу ОУ, а потому была снята экспериментальная фазопа-

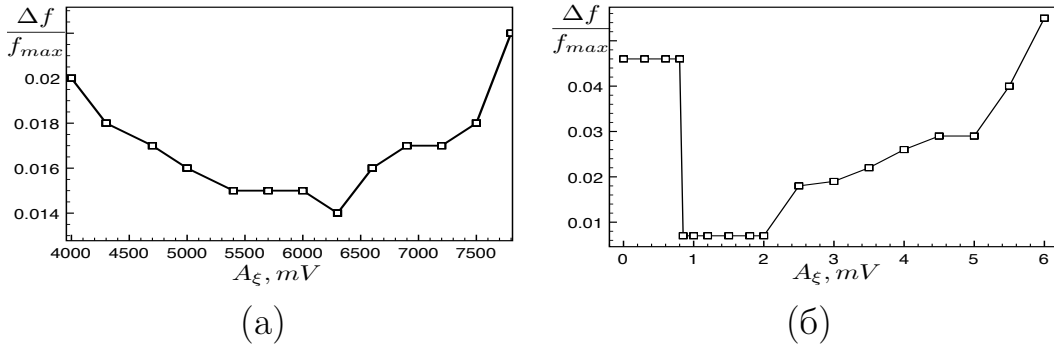


Рис. 5. Зависимость ширины спектральной линии на высоте половинной мощности индуцированных шумом колебаний от интенсивности шума до бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого циклов (а) и после бифуркации (б).

раметрическая диаграмма. Качественна она совпадает с полученной численными методами, а количественные соотношения имеют конкретную связь, определяемую формулой.

Исследованию когерентного резонанса в генераторе с жестким возбуждением посвящен пункт 4.3. Для этого на систему (4) подается белый гауссов шум, интенсивность которого возможно изменять. На рис.5 представлены графики демонстрирующие явление когерентного резонанса в такой системе, причем когда в системе существуют устойчивый и неустойчивый предельные цикла (рис.5б), так и когда в системе единственное состояние равновесия - устойчивый фокус (рис.5а).

В п. 4.4. исследуется синхронизация индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением до и после бифуркации рождения предельных циклов. С целью синхронизации колебаний на схему дополнительно к шумовой накачке подается внешний гармонический сигнал. Уровень шума соответствует режиму когерентного резонанса. Наблюдения производились по спектру мощности  $S(f)$  и фазовому портрету при вариации амплитуды и частоты внешнего воздействия. Область синхронизации когда в системе существует устойчивый предельный цикл представлена на рис.6б. Как видно из рисунка, по форме она напоминает классическую область синхронизации в виде “языка” Арнольда. Отличие от классического случая состоит в том, что синхронизация через захват происходит только на левой границе области, в то время как на правой границе синхронизация возможна только через подавление. Что еще более удивительно, индуцированные колебания можно синхронизовать и в случае когда в системе нет устойчивого предельного цикла (рис.6а). При этом сохраняются отличия области синхронизации от классического случая. На левой границе области синхронизация происходит через захват, а на правой - через подавление.

В п. 4.5. исследуется синхронизация в генераторе с жестким возбуждени-

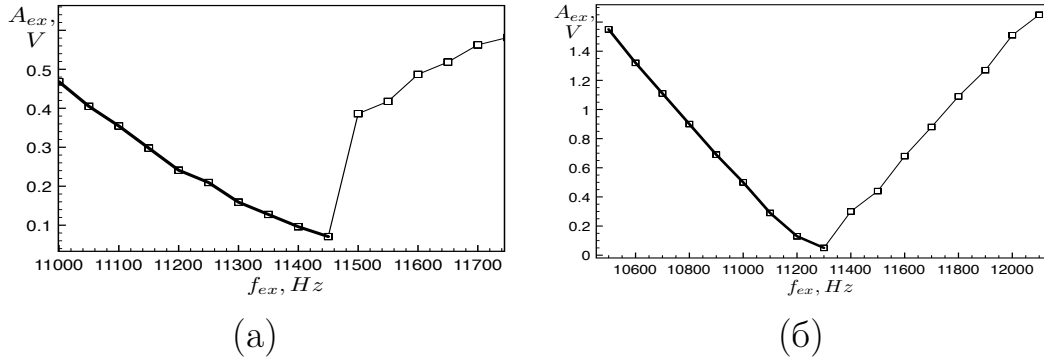


Рис. 6. Области синхронизации индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением до бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого циклов (а) и после нее (б). Жирной линией выделена граница области синхронизации через захват, тонкой - через подавление.

ем но уже в отсутствии шума. С помощью параметра  $\lambda$  выбирается режим, при котором в системе сосуществуют устойчивый и неустойчивый циклы, а также устойчивый фокус. Далее внешним воздействием синхронизируют устойчивый предельный цикл. Полученная бифуркационная диаграмма на плоскости параметров “амплитуда - частота” внешнего воздействия отличается от классического случая синхронизации в системе с одним предельным циклом тем, что асимметрична. На левой границе вход в область синхронизации происходит через захват, как и в случае индуцированных шумом колебаний в такой системе, а на правой границе – преимущественно через подавление. Также справа существует область захвата, но значительно меньшая чем на левой границе.

**В Заключение** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

### Основные результаты и выводы

1. В области, обозначенной  $T^3$ , неавтономная система двух связанных генераторов Ван дер Поля характеризуется квазипериодическими колебаниями с тремя независимыми частотами  $f_{ex}$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ . Выход из областей  $T^3$  в области  $T^2$  характеризуется возникновением двумерного тора как частичного-резонанса на трехмерном торе. Частичный резонанс отвечает эффекту захвата одной из парциальных частот. Здесь возможны случаи:  $f_{ex} = f_1$  и  $f_2 \neq f_1$ , либо  $f_{ex} = f_2$  и  $f_1 \neq f_2$ . Имеет место частичная синхронизация. Переход из областей  $T^2$  в область резонансного предельного цикла отвечает режиму установления устойчивых периодических движений. Рождается устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора, который, в свою очередь, лежит на поверхности трехмерного тора. Этому предельному циклу отвечает ре-

жим полной синхронизации, при котором внешний сигнал захватывает обе частоты парциальных генераторов ( $f_{ex} = f_1 = f_2$ ).

2. При входе в область трехчастотных колебаний  $T^3$  происходит мгновенное возникновение третьей частоты с ненулевой амплитудой в спектре и без гистерезиса, что подтверждает наличие седло-узловой бифуркации инвариантных двумерных торов — седлового и устойчивого, лежащих на поверхности трехмерного тора.
3. Переход из области  $T^2$  в область полной синхронизации сопровождается седло-узловой бифуркацией предельных циклов, лежащих на поверхности двумерного тора. Сгущение точек в стробоскопическом сечении и сгущение траекторий на фазовой плоскости в окрестности рождения устойчивого предельного цикла и разряжение траекторий и точек в стробоскопическом сечении в окрестности рождения неустойчивого (седлового) предельного цикла непосредственно перед бифуркацией, явно об этом свидетельствуют.
4. Результаты радиофизического эксперимента по синхронизации предельного цикла на двумерном торе в окрестности резонанса  $1 : 3$  позволяют распространить выводы теории фазовой синхронизации на случаи резонансов кратности, отличной от  $1 : 1$ . Построенная по результатам эксперимента бифуркационная диаграмма для области резонанса  $1 : 3$  качественно повторяет полученную для резонанса  $1 : 1$ .
5. Полученные данные об аттракторе возбудимых шумом колебаний в системе ФитцХью-Нагумо, механизме подкачки и диссипации энергии в системе, а также наличие средней частоты в спектре мощности, позволяют ввести понятие индуцированного шумом предельного цикла, как образа индуцированных шумом колебаний в фазовом пространстве системы ФХН.
6. В результате эксперимента над неавтономной системой связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса были получены следующие результаты. Бифуркационная диаграмма, построенная на плоскости параметров амплитуда-частота внешнего воздействия топологически эквивалента такой же бифуркационной диаграмме, но построенной для неавтономной системы двух связанных генераторов Ван дер Поля. Это значит, что мы можем распространить представления о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе внешним периодическим воздействием на случай неавтономных возбудимых систем.



7. Колебания в области  $T^3$  неавтономной системы двух связанных осцилляторов ФХН в режиме когерентного резонанса характеризуются тремя независимыми частотами, в фазовом пространстве индуцированный шумом трехмерный тор. Выход в область  $T^2$  соответствует либо захвату частоты одного из осцилляторов внешним периодическим воздействием, либо синхронизации между осцилляторами. В этом случае в спектре мощности наблюдаются две независимые частоты, а в фазовом пространстве двумерный индуцированный шумом тор. Область  $C$  соответствует режиму полной синхронизации, когда оба осциллятора захвачены внешним периодическим воздействием, а в фазовом пространстве системы наблюдается индуцированный шумом предельный цикл.
8. Таким образом, приведенные выше результаты позволяют сделать важный вывод: неавтономный режим функционирования системы ФХН реализует автоколебательный процесс, преобразуя энергию источника в режим незатухающих почти периодических колебаний независимо от начальных условий. Роль шума заключается в том, что под действием флуктуаций система “выбивается” из устойчивого состояния равновесия в область фазового пространства, где включается нелинейный процесс подкачки энергии, приводящий к автоколебаниям.
9. Полученные в эксперименте результаты свидетельствуют о том, что внешнее периодическое воздействие для системы ФХН можно рассматривать, как способ управления этой системой. Задав параметры (амплитуду и частоту) внешнего воздействия возможно получить точно заданное число спайков, либо сформировать последовательность групп спайков.
10. Выявлено существенное влияние на динамику системы величины расстояния до порога генерации. Наличие этого расстояния позволяет системе “различать” форму сигнала внешнего воздействия. Синусоидальная форма сигнала внешнего воздействия определяет количественные изменения в числе спайков при изменении амплитуды внешнего воздействия. Построена карта режимов на плоскости “амплитуда - частота” внешнего воздействия.
11. Выявлено, что при превышении амплитудой сигнала воздействия размеров области генерации, т.е. при выходе за “дальнюю” границу этой области, происходит деление каждой группы в последовательности спайков на две равные группы. В каждой такой группе при дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия происходит уменьшение числа спайков.

12. Определены точные границы области генерации для системы ФитцХью-Нагумо и их зависимость от управляющих параметров, а также от характеристики нелинейного элемента. Границы области генерации не могут превышать координаты экстремумов  $N$  характеристики нелинейного элемента и лишь в предельном случае совпадают с ними. В радиофизических системах область генерации всегда меньше расстояния между экстремумами, причем чем больше активное сопротивление в цепи, тем эта область меньше.
13. Экспериментально установлено, что в неизохронном генераторе с жестким возбуждением наблюдается явление когерентного резонанса. До бифуркации рождения предельных циклов, т.е. когда в системе существует единственное состояние равновесия (устойчивый фокус) когерентный резонанс проявляется в существовании одного оптимального значения интенсивности шума, подобно возбудимым системам. После бифуркации, когда в систему существуют три состояния равновесия (устойчивый и неустойчивый предельные циклы, устойчивый фокус) особенностью когерентного резонанса является существование целого набора (множества) оптимальных значений интенсивности шума.
14. Исследование синхронизации индуцированных шумом колебаний в системе с двумя предельными циклами не только показало существование возможности синхронизовать такие колебания, причем не только после бифуркации рождения циклов, но и до нее. Области синхронизации на плоскости параметров амплитуда - частота внешнего воздействия отличаются от классического случая с одним предельным циклом в системе. Области синхронизации асимметричны. Для небольших значений расстройки по частоте при  $f_{ex} < f_0$  наблюдается захват частоты, как и предсказывает классическая теория, а для значений  $f_{ex} > f_0$  области синхронизации через захват не существует, либо она настолько мала, что в эксперименте мы ее не можем наблюдать, а синхронизация происходит через подавление, что отличается от классической теории.
15. Эксперименты по синхронизации в системе с двумя предельными циклами в отсутствии шума, так же показали, что области синхронизации асимметричны и отличаются, как от классических, так и тех, что построены для системы в режиме когерентного резонанса, т.е. при наличии шума. Но в отличие от последних при  $f_{ex} > f_0$ , область синхронизации через захват существует, но в разы меньше, чем та же область для  $f_{ex} < f_0$ . Используя неизохронность системы, было определено, что область синхронизации неустойчивого предельного цикла находится правее (выше по частоте) области синхронизации устойчивого предельного

цикла на плоскости параметров “амплитуда - частота” воздействия.

### Основные публикации по теме диссертации

1. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237-252.
2. Феоктистов А.В., Астахов С.В., Анищенко В.С. Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в системе ФитцХью-Нагумо // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 5. С. 33-44.
3. Astakhov S., Feoktistov A., Anishchenko V.S., Kurths J. Synchronization of multi-frequency noise-induced oscillations. // Chaos. 2011. V. 21. Pp. 047513.
4. Феоктистов А.В., Анищенко В.С.. Динамика системы ФитцХью-Нагумо под внешним периодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 35-44.
5. Феоктистов А.В., Анищенко В.С., Когерентный резонанс и синхронизация индуцированных шумом автоколебаний в генераторе с жестким возбуждением // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 5. С. 897-911.
6. Феоктистов А.В., Астахов С.В. Экспериментальное исследование эффекта внешней синхронизации квазипериодических автоколебаний // Статистическая физика и информационные технологии: Материалы Международной школы-семинара “StatInfo-2009”. Саратов: ООО ИЦ “Наука”. 2009. С. 107-110.
7. Feoktistov A., Astakhov S., Anishchenko V. Experimental Analysis of the Bifurcation Mechanism of Synchronization of a Resonant Limit Cycle on a Torus // 17-th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Rapperswil, Switzerland: 2009. Pp. 114-117.
8. Феоктистов А.В. Экспериментальное исследование эффекта внешней синхронизации возбудимых шумом систем // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ “Наука”, 2010. С.127-130.
9. Феоктистов А.В. Управление системой ФитцХью-Нагумо внешним периодическим воздействием. // “Хаотические автоколебания и образование структуры”: Материалы IX Международной школы. Саратов: РИО журнала “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика”, 2010. С. 135-136.
10. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Боев Я.И., Феоктистов А.В. Стохастические параметрические осцилляторы и стохастические генераторы // Динамические явления в сложных системах. Казань: Изд-во МОиН РТ, 2011. С. 7-26.
11. Астахов С.В., Феоктистов А.В. Синхронизация квазипериодических индуцированных шумом колебаний в возбудимых системах // «Наноэлектроника, нанопотоника и нелинейная физика»: Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых, Саратов: Издательство Саратовского университета, 2011. С. 92-93.
12. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Feoktistov A.V. and Strelkova G.I., Stochastic oscillators // A Scientific Canvas of Nonlinearity and Complex Dynamics / R. G. Rubio, Yu. S. Ryazantsev, V. M. Starov, G. X. Huang, A. P. Chetverikov, P. Arena, A. Ferrus and E. G. Morozov (Eds.). Springer, 2013. Pp. 541-559. ISBN 978-3-642-34069-7.