На правах рукописи

Луконина Анна Сергеевна

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Саратов 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Хромов Август Петрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Платонов Сергей Сергеевич кандидат физико-математических наук, доцент Тихомиров Сергей Алексеевич
Ведущая организация:	Самарский государственный университет

Защита состоится « 19 » февраля 2009 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан « 15 » января 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент В.В. Корнев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие вопросы построения и исследования математических моделей физических явлений приводят к задачам спектрального анализа самосопряженных и несамосопряженных операторов, т.е. исследованию спектра и разложению заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора. В связи с развитием квантовой механики, при решении многих задач которой спектральный анализ является основным математическим аппаратом, в последние десятилетия интерес к спектральной теории велик, и в ее развитии достигнуты значительные успехи.

Большое внимание в спектральной теории уделяется вопросам равносходимости разложений по с.п.ф. операторов и по известным системам функций. Начало исследований по равносходимости было положено в работах В.А. Стеклова, Е. Гобсона А. Хаара для случая дифференциального оператора Штурма–Лиувилля; а также Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными краевыми условиями (на базе асимптотических формул для собственных значений и собственных функций, полученных Дж. Биркгофом). Большой в клад в развитие этих вопросов внесли отечественные математики В.А. Ильин, А.М. Седлецкий, А.П. Хромов, А.А. Шкаликов и др.

Данная работе также посвящена исследованию равносходимости разложений по с.п.ф. (с тригонометрическим рядом), а также исследуются равномерная сходимость разложений по с.п.ф. к разлагаемой функции (аналог теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических рядов) и вопросы сходимости средних Рисса вида[1, 2]

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)\, R_\lambda f\, d\lambda, \tag{1}$$

(где $R_\lambda f$ – резольвента рассматриваемого оператора, r такие, что на окружности $|\lambda| = r$ нет собственных значений рассматриваемого оператора), которые обобщают рассматриваемые М. Стоуном средние Рисса спектральных разложений

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\right)^{\zeta} R_\lambda f\, d\lambda, \quad (\zeta > 0).$$

В настоящей диссертационной работе рассматривается оператор L, порожденный функционально-дифференциальным выражением

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_j(x) \in C^1[0,1]\,(j=1,2)$, и интегральным граничным условием

$$U(y) = \int\limits_0^1 p(t)\, y(t)\, dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}, \tag{3}$$

где $0 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ [3], и удовлетворяет

$$\left(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)\right)\left(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)\right) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

[1] *Гуревич А.П.* Суммируемость по Риссу разложений спектральных разложений одного класса интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 809-814.

[2] *Гуревич А.П.* Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – № 2(489). – С. 24-35.

[3] Здесь и в дальнейшем запись $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ означает, что функция $k(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и является на этом отрезке функцией ограниченной вариации.

Оператор (2) с общим краевым условием $U(y) = 0$ относится к классу функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\vartheta(x) = 1 - x$, которая порождает оператор отражения $Sy(x) = y(1-x)$. Операторы, содержащие оператор отражения, имеют давнюю историю и интенсивно исследуются в настоящее время (Ch. Babbage, Ch. Dunkl, А.А. Андреев, С.С. Платонов и др.) Наиболее полно эти операторы, возникающие в различных спектральных задачах (в частности, при изучении разложений по с.п.ф. интегральных операторов, ядра которых имеют разрывы на диагоналях и кодиагоналях[4,5]), изучены А.П. Хромовым и его учениками.

Рассматриваемый функционально-дифференциальный оператор (2) замечателен своими свойствами: выступает как обобщение квадратного корня из оператора $y''(x)$ (главная часть рассматриваемого оператора $l_0\left(y\right) = \beta y'(x) + y'(1-x)$ обладает тем свойством что $l_0\left(l_0(y)\right) = \left(\beta^2 - 1\right) y''(x)$); другое достоинство рассматриваемого оператора состоит в том, что он представляет собой интересный частный случай системы Дирака.

Граничное условие (3) было впервые введено и изучено А.М. Седлецким [6]. А.М. Седлецкий рассматривал разложения суммируемой функции в ряд Фурье по системе $E_\Lambda = \left\{\left\{x^k e^{i\lambda_n x}\right\}_{k=0}^{m_n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – занумерованная в порядке неубывания модулей последовательность кор-

[4] *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [Текст] / А.П. Хромов // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64, № 6. – С. 932-942.

[5] *Корнев В.В* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях [Текст] / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, № 10. – С. 33-50.

[6] *Седлецкий А.М.* О равносходимости и равносумммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами [Текст] / А.М. Седлецкий // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 1. – С. 9-17.

ней целой функции $L(z) = \int\limits_{-a}^{a} e^{izt} d\sigma(t)$, m_n – кратность λ_n. Порождающая мера $d\sigma(t)$ имеет вид

$$d\sigma(t) = \frac{k(t)\,dt}{(a-|t|)^{\alpha}}, \quad d\sigma(t) = \frac{k(t)\,dt}{(a^2-t^2)^{\alpha}},$$

$\alpha \in (0,1)$, $\operatorname{var} k(t) < \infty$, $k\,(a-0) \neq 0$, $k\,(-a+0) \neq 0$. Ранее в литературе этот случай не рассматривался, его исследование связано с преодолением значительных трудностей. С точки зрения спектральной теории операторов А.М. Седлецким была рассмотрена задача разложения функции из $L_1\,[-a,a]$ в ряд Фурье по с.п.ф. оператора дифференцирования с граничным условием $\int\limits_{-a}^{a} y(x)\,d\sigma(x) = 0$. Граничное условие (3) заменой $\tau = 1/2 - t$ приводится к виду, рассматриваемому А.М. Седлецким.

А.П. Хромовым[7] был изучен оператор (2),(3) при $p_1\,(x) \equiv p_2\,(x) \equiv$ $\equiv 0$. Для него был получен аналог теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических рядов. Оказалось возможным добавить потенциалы (функции $p_j(x)$, $j = 1, 2$), которые создают значительные трудности при изучении сходимости разложений по с.п.ф.

Цель работы состоит в том, чтобы для функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3), весовая функция которого имеет степенную особенность, доказать теорему равносходимости разложений по с.п.ф. и в обычный тригонометрический ряд Фурье, получить аналог теоремы Жордана–Дирихле и исследовать суммируемость обобщенных средних Рисса этого оператора.

Методы исследования. Основной метод, применяемый в работе, – это метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты рассматриваемого оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоско-

---

[7] *Хромов А.П.* Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с нтегральным граничным условием [Текст] / А.П. Хромов // Докл. РАЕН. – 2004. – № 4. – С. 80-87.

сти спектрального параметра. При этом широко используются результаты из теории функций вещественной и комплексной переменной, функционального анализа.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) Сформулирована и доказана теорема равносходимости разложений произвольной суммируемой функции по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием, весовая функция в котором имеет степенную особенность, и разложений в тригонометрический ряд Фурье (внутри отрезка).

2) Получен аналог теоремы Жордана–Дирихле равномерной сходимости (на всем отрезке) разложений по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора со степенной особенностью в граничном условии к разлагаемой функции.

3) Найдены условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней (на всем отрезке) обобщенных средних Рисса функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием, весовая функция в котором имеет степенную особенность.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применения в спектральной теории несамосопряженных операторов, при рассмотрении граничных условий со степенными особенностями.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались и обсуждались на объединенном научном семинаре математических кафедр СГУ (под руководством профессора А.П. Хромова), на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2005), на Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения – XVI, – XIX" (Воронеж, 2005, 2008), на 13й и 14й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2006, 2008), на апрельских конференциях сотрудников механико-математического факультета СГУ "Актуальные проблемы математики и механики" (Саратов, 2005, 2006, 2007, 2008).

Публикации. Основные результаты исследований опубликованы в 7 научных работах [1]–[7]. Среди них 1 статья в научном журнале [6], 2 статьи в сборниках научных трудов [3], [5] и 4 тезиса докладов на международных конференциях [1], [2], [4], [7]. 6 работ опубликованы без соавторов. В статье [6] результаты каждого автора имеют свой пункт и не перемешиваются, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие диссертанту. Работа [6] соответствует списку ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Первая и вторая главы разделены на три и два параграфа соответственно. В каждой главе своя нумерация параграфов, определений, лемм, теорем и формул. Общий объем диссертации 117 страниц, из которых 6 страниц занимает список литературы, состоящий из 54 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, обозначаются направления и методы исследования, приводится обзор результатов по исследуемой теме, описывается структура и краткое содержание основных этапов работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению резольвенты оператора L, порождаемого функционально-дифференциальным выражением (2) и интегральным граничным условием (3).

В **параграфе 1.1** нахождение резольвенты оператора L, скалярной функции $R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f$ (E – единичный оператор, λ – комплексный параметр), сводится к решению краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два:

$$\begin{aligned} &Bu'(x) + P(x)u(x) = \lambda u(x) + F(x), \quad x \in [0,1], \\ &\widetilde{U}(u) = \int\limits_0^1 N(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ (T – знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $N(\tau) = \operatorname{diag}(p(\tau), p(1-\tau))$. Система (4) есть система Дирака частного вида.

Лемма 1.1. *Если λ таково, что $R_\lambda f$ существует, то $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = R_\lambda f$, $u_2(x) = u_1(1-x)$, удовлетворяет системе* (4)*. Обратно: если $u(x)$ удовлетворяет* (4) *и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то $R_\lambda f$ существует и $R_\lambda f = u_1(x)$, $u_2(x) = u_1(1-x)$.*

Далее проводится диагонализация матрицы B и преобразование $u(x) = Qv(x)$, приводящее краевую задачу (4) к виду

$$v'(x) + \widetilde{P}(x)v(x) = \lambda Dv(x) + \widetilde{F}(x), \quad \widetilde{U}(Qv) = 0,$$

где $\widetilde{P}(x) = DQ^{-1}P(x)Q$, $\widetilde{F}(x) = DQ^{-1}F(x)$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(\omega, -\omega)$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Затем проводится преобразование $H(x,\lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)$, $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_{11}(x), h_{22}(x))$, $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}$ – кодиагональная матрица, $h_{jj}(x) = \exp\left(-\int\limits_0^x p_{jj}(t)\, dt\right)$ ($j = 1,2$), $h_{12}(x) = \frac{1}{2\omega}p_{12}(x) \cdot$

$\cdot\, h_{22}(x),\ h_{21}(x) = -\frac{1}{2\omega}p_{21}(x)h_{11}(x),\ p_{ij}(x)\ (i,j=1,2)$ – элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$. Данное преобразование хорошо известно (для дифференциальных уравнений [8] и для систем Дирака [9]). После преобразования $v(x) = H(x,\lambda)\, w(x)$ краевая задача принимает вид

$$w'(x) + P_\lambda(x) w(x) = \lambda D w(x) + F_\lambda(x), \qquad U_\lambda(w) = 0,$$

где $P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} H^{-1}(x,\lambda)\left[H_1'(x) + \widetilde{P}(x) H_1(x)\right],\ F_\lambda(x) = H^{-1}(x,\lambda)\,\widetilde{F}(x)$, $U_\lambda(w) = \widetilde{U}\left(QH(x,\lambda)\, w\right)$. Заметим, что элементы матрицы $P_\lambda(x)$ допускают оценку $O(\frac{1}{\lambda})$, что важно при исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи.

Далее, в рассмотрение вводится вспомогательная краевая задача

$$z'(x) = \lambda D z(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \qquad U_\lambda(z) = 0, \tag{5}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $\varphi_j(x) \in L_1[0,1]$ $(j=1,2)$. Пусть λ таково, что обратима матрица $\Delta(\lambda) = U_\lambda(Z) := (U_\lambda(Z_1), U_\lambda(Z_2))$, $Z_j(x,\lambda)$ $(j=1,2)$ – столбцы матрицы $Z(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda\omega x}, e^{-\lambda\omega x}\right)$. Тогда решение (5) задается формулой:

$$R_{1,\lambda}\Phi = \int_0^1 g_0(x,t,\lambda)\,\Phi(t)\,dt - Z(x,\lambda)\,\Delta^{-1}(\lambda) U_\lambda\left(\int_0^1 g_0(x,t,\lambda)\,\Phi(t)\,dt\right),$$

$$\text{где} \qquad g_0(x,t,\lambda) = \operatorname{diag}\left(g_1(x,t,\lambda), g_2(x,t,\lambda)\right),$$

$$g_1(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x) e^{\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega \ge 0 \\ \ \ \varepsilon(x,t) e^{\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega \le 0 \end{cases},$$

[8] Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. [Текст] / И.М. Рапопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

[9] *Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования [Текст] / А.П. Хромов // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 46-55.

$$g_2\left(x,t,\lambda\right)=\begin{cases}\varepsilon(x,t)e^{-\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega\geq 0\\ -\varepsilon(t,x)e^{-\lambda\omega(x-t)} & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega\leq 0\end{cases},$$

$$\varepsilon(x,t)=\begin{cases}1 & \text{при } t\leq x\\ 0 & \text{при } t>x\end{cases} \text{ – функция Хевисайда.}$$

В **параграфе 1.2** с помощью метода, разработанного А.П. Хромовым и О.И. Амвросовой [10,11], приводится необходимое изучение некоторых интегралов при больших значениях параметра, базирующееся на асимптотике функции типа Миттаг-Леффлера. С опорой на эти исследования, в **параграфе 1.3** получаются оценки второго слагаемого в формуле для $R_{1,\lambda}\Phi$ при $|\lambda|\to\infty$. Справедливо утверждение

Лемма 1.24. *В области $S=S_1\cup S_2$ при больших значениях $|\lambda|$ имеют место оценки*

$$\left\|R_{1,\lambda}\Phi\right\|_1=O\left(\varkappa\left(\lambda\right)\left\|\Phi\right\|_1\right),\quad \left\|R_{1,\lambda}\Phi\right\|_\infty=O\left(\left\|\Phi\right\|_1\right),$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ понимаются как нормы в пространстве вектор-функций размерности два L_1 и L_∞ соответственно,

$$\varkappa\left(\lambda\right)=\begin{cases}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda\omega}\left(1-\left|e^{-\lambda\omega}\right|\right) & \textit{при } \operatorname{Re}\lambda\omega\geq 0,\\ -\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda\omega}\left(1-\left|e^{\lambda\omega}\right|\right) & \textit{при } \operatorname{Re}\lambda\omega\leq 0,\end{cases}$$

S_1 (S_2) – область, получающаяся из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\omega\geq 0$ ($\operatorname{Re}\lambda\omega\leq 0$) удалением всех нулей функции $a_0+a_1\,e^{-\lambda\omega}+a_2\,e^{-2\lambda\omega}$ $\left(b_0+b_1\,e^{\lambda\omega}+b_2\,e^{2\lambda\omega}\right)$

[10] *Амвросова О.И.* Асимптотика собственных значений и теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях [Текст] / О.И. Амвросова Сб. "Функциональный анализ". // Ульяновск, 1983. – Вып. 21. – С. 3-11.

[11] *Амвросова О.И.* Теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях [Текст]: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук / О.И. Амвросова. – Саратов, 1985. – 13 с.

вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_1 (δ_2), *где* $a_0 = h_{11}(1)\left(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)\right)$, $b_2 = (-1)^{2(\alpha-1)}a_0$, $a_1 = b_1 = (-1)^{\alpha-1}(1-\gamma^2)k(0)k(1)\left(1 + h_{11}(1)h_{22}(1)\right)$, $a_2 = (-1)^{2(\alpha-1)}b_0$, $b_0 = h_{22}(1)\left(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)\right)$.

В **параграфе 1.3** получено представление для резольвенты $R_\lambda f$.

Теорема 1.1. *Резольвента оператора* (2), (3) *является первой компонентой вектора* $QH(x,\lambda)\,M_\lambda R_{1,\lambda}F_\lambda$, $M_\lambda = \left(E + R_{1,\lambda}P_\lambda\right)^{-1}$.

Вторая глава посвящена получению теоремы равносходимости разложений произвольной суммируемой функции по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3), весовая функция в котором имеет степенную особенность, и разложений в тригонометрический ряд Фурье (внутри отрезка).

В **параграфе 2.1** с использованием оценок для $R_{1,\lambda}\Phi$ проводятся вспомогательные рассуждения и доказывается

Теорема 2.1. *Для любой функции* $f(x) \in L_1[0,1]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r} QH(x,\lambda)\left(M_\lambda\, R_{1,\lambda}\, F_\lambda(x) - R_{1,\lambda}H_0^{-1}(x)\,\widetilde{F}(x)\right)\,d\lambda\right\|_\infty = 0.$$

Данное соотношение является ключевым моментом при доказательстве теоремы равносходимости.

В **параграфе 2.2** в рассмотрение вводится вспомогательная краевая задача с периодическим краевым условием:

$$z'(x) = \lambda D z(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \qquad U_0(z) = z(0) - z(1) = 0, \tag{6}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $\varphi_j(x) \in L_1[0,1]$ $(j = 1,2)$.

Находится решение задачи (5):

Лемма 2.6. *Для всех λ, таких что $\lambda\omega \neq 2\pi i j$, где i – мнимая единица, $j \in \mathbb{Z}$, краевая задача* (6) *однозначно разрешима и ее решение задается формулой*

$$R_{2,\lambda}\Phi = \int\limits_0^1 g_0\left(x,t,\lambda\right)\Phi\left(t\right)\,dt - Z\left(x,\lambda\right)\Delta_0^{-1}\left(\lambda\right)U_0\left(\int\limits_0^1 g_0\left(x,t,\lambda\right)\Phi\left(t\right)\,dt\right),$$

где $\Delta_0\left(\lambda\right) = U_0\left(Z\right)$.

Заметим, что $R_{2,\lambda}\Phi = \left(R^0_{\lambda\omega}\varphi_1, R^0_{-\lambda\omega}\varphi_2,\right)$, где $R^0_\lambda = \left(L_0 - \lambda\,E\right)^{-1}$ – резольвента оператора L_0, порожденного y' и периодическим краевым условием $y(0) - y(1) = 0$.

Теорема 2.2 (теорема равносходимости). *Для любой функции $f\left(x\right) \in L_1\left[0,1\right]$ и для любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \, S_r\left(f,x\right) - \sigma_{r\,|\omega|}\left(f,x\right) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $S_r\left(f,x\right)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$, $\sigma_{r\,|\omega|}\left(f,x\right)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе экспонент $\{exp\,2\pi i j x\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ для тех j, для которых $2\pi|j| < r\,|\omega|$.

В **третьей главе** доказан аналог теоремы Жордана–Дирихле равномерной сходимости (на всем отрезке) разложений по с.п.ф. функционально-дифференциального оператора (2) с интегральным граничным условием (3) к разлагаемой функции.

Теорема 3.1. (аналог теоремы Жордана–Дирихле) *Пусть функция $f\left(x\right) \in C\left[0,1\right] \cap V\left[0,1\right]$ и $U\left(f\right) = \int\limits_0^1 p\left(\tau\right) f\left(\tau\right)\,d\tau = 0$. Тогда выполнено соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \, f\left(x\right) - S_r\left(f,x\right) \right\|_{C[0,1]} = 0,$$

где $S_r\left(f,x\right)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$.

В **четвертой главе** найдены условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней (на всем отрезке) обобщенных средних Рисса вида (1), где $R_\lambda f$ – резольвента оператора L, $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda|\le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda|<r$ при любом $r>0$; 2) существует такая константа $C>0$, что $|g(\lambda,r)|\le C$ при всех $r>0$ и $|\lambda|\le r$; 3) существует $\zeta>0$, что

$$g\left(re^{i\arg\lambda},r\right)=\begin{cases}O\left(\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{\zeta}\right), & 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ O\left(\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^{\zeta}\right), & \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,\\ O\left(\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)^{\zeta}\right), & \pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2},\\ O\left(\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)^{\zeta}\right), & \frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi,\end{cases}\qquad \text{где } \theta=\arg\lambda\omega.$$

4) $g(\lambda,r)\to 1$ при $r\to\infty$ и фиксированном λ.

Для рассуждений, проводимых в этой главе, оценки, полученные ранее оказываются недостаточными. Следуя работам А.М. Седлецкого [12,13], оценки получаются с помощью другого метода, базирующегося уже не на асимптотике финкций типа Миттаг-Леффлера, а на применении аппарата функций свертки.

Теорема 4.1. *Для функции $f(x)\in C[0,1]$ и удовлетворяющей граничному условию $U(f)=\int\limits_0^1 p(\tau)f(\tau)\,d\tau=0$ выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}g(\lambda,r)\,R_\lambda f\,d\lambda\right\|_{C[0,1]}=0.$$

[12] *Седлецкий А.М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, II. [Текст] / А.М. Седлецкий // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т. 6, 2003. – 162 с.

[13] *Седлецкий А.М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации [Текст] / А.М. Седлецкий. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 504 с.

Автор выражает искреннюю признательность и глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.П. Хромову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 06-01-00003.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Луконина А.С. О равносходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 149.

[2] Луконина А.С. Асимптотические оценки для решения одной краевой задачи с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XVI". – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 101-102.

[3] Луконина А.С. О сходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина Математика. Механика: Сб. науч. тр. // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – Вып. 7. – С. 66-69.

[4] Луконина А.С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы. – Саратов: "Научная книга", 2006. – С. 109.

[5] Луконина А.С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений одного функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина Математика. Механика: Сб. науч. тр. // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. – Вып. 8. – С. 69-72.

[6] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией [Текст] / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 443-446.

[7] Луконина А.С. Об асимптотике собственных значений функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.С. Луконина // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIX". – Воронеж: ВГУ, 2008. – С. 131-132.