

На правах рукописи

Доль Александр Викторович

**Биомеханическое моделирование кровеносных сосудов с
учетом мышечной активности стенок**

01.02.08 – Биомеханика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского".
Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского" **Гуляев Юрий Петрович**.

Официальные оппоненты:

Саврасов Геннадий Викторович, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», профессор кафедры «Биотехнические системы и устройства».

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

Защита состоится 27 сентября 2013 г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского по адресу 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, корп. IX, ауд. 18 образовательно-научного института наноструктур и биосистем.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Автореферат разослан «20» августа 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шевцова Юлия Владиславовна

Общая характеристика работы

Актуальность работы. По статистике, сердечно-сосудистые заболевания на сегодняшний день являются одной из основных причин инвалидности и смерти жителей большинства современных развитых стран, причем на долю смертности от заболеваний сердечно-сосудистой системы в общем приходится до 60% от общего числа умерших. В России, как и в мире в целом, наблюдается похожая картина.

Нередко для восстановления кровообращения в пораженных сосудах помимо медикаментозного лечения проводятся реконструктивные операции, и часто невозможно объективно оценить, какой тип оперативного вмешательства будет оптимальным для конкретного пациента, а также насколько близок будет кровоток в сосуде к нормальному после операции.

Еще одной важной проблемой при прогнозировании результатов лечения является скорость расчетов: как правило, большинство современных математических моделей требуют численного решения, причем вычисления получаются затратными по времени и требуют довольно мощные компьютеры. При этом снижение времени расчетов путем упрощений может привести к неточности полученных результатов, что, безусловно, недопустимо.

В области математического моделирования гемодинамики в последние несколько лет все чаще поднимается вопрос о воздействии стенки сосуда на поток крови. Данная проблема была впервые исследована еще в начале XX века российским ученым академиком М.В. Яновским, который сформулировал гипотезу так называемого вторичного или периферического сердца: то есть предположение о том, что кровь помимо сердца ускоряется еще и за счет сокращения сосудистых стенок. На сегодняшний день это предположение подтверждено многими исследованиями, поэтому пренебрегать при моделировании кровообращения работой стенок нельзя.

Таким образом, построение математической модели течения крови в гибких сосудах, учитывающей мышечную активность стенки, является актуальной научно-практической задачей. Моделирование движения крови в артериях позволит вычислять кровоток в любой точке сосудистого русла и прогнозировать поведение сосуда после хирургического вмешательства.

Цели диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является разработка и верификация математической модели, которая бы достаточно полно описывала движение крови в кровеносных сосудах, учитывая взаимодействие жидкости со стенкой и влияние самой стенки на поток (работу вторичного сердца), являлась бы быстродействующей и легко адаптируемой под конкретного пациента. Для этого были поставлены следующие задачи:

- Провести анализ существующих на данный момент математических моделей гемодинамики.
- Построить математическую модель течения крови в системе кровеносных сосудов произвольной конфигурации, которая бы учитывала работу вторичного сердца.
- Провести механические эксперименты по растяжению стенок артерий с целью определения их механических характеристик.
- Методом конечных элементов решить задачу о течении крови в плечевой артерии и основных ее ответвлениях.
- Сравнить результаты расчетов по построенной модели с результатами, полученными методом конечных элементов.

Научная новизна. Разработана трехмерная линейная математическая модель динамики кровотока в сосудах с упругими стенками, учитывающая работу распределенного сердца. Предложены новые варианты постановки задач о движении крови в кровеносных сосудах с упругими стенками.

Разработана одномерная линейная математическая модель, для которой получено аналитическое решение. Результаты, полученные с помощью данной модели, мало отличаются от результатов, полученных методом конечных элементов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Математические модели, описанные в диссертации, могут быть использованы для выбора наиболее удачного варианта реконструктивной операции. Одномерная модель, кроме того, существенно сокращает время расчетов, при этом показывая результаты, близкие к результатам, полученным методом конечных элементов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задачи, а также хорошим соответствием численных результатов при использовании более точной пространственно трехмерной модели сосудистой системы (метод конечных элементов).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на

- X Всероссийской конференции «Биомеханика 2010» (Саратов, 2010),
- Всероссийской научной школе-семинаре «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2011» (Саратов, 2011),
- X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011),
- Всероссийской научной школе-семинаре «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2012» (Саратов, 2012),
- конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2012),
- научных семинарах кафедры математической теории упругости и биомеханики ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Трехмерная математическая модель периодического течения крови в кровеносных сосудах, учитывающая мышечную активность стенок.
- Новые варианты постановки задач о движении крови в кровеносных сосудах с упругими стенками.
- Одномерная линейная математическая модель периодического течения крови в кровеносных сосудах, учитывающая мышечную активность стенок.
- Исследование и анализ механических свойств плечевых артерий человека.
- Оценка влияния мышечной активности стенок сосудов на кровоток методом конечных элементов.
- Анализ и верификация полученных численных результатов путем сравнения одномерной модели с трехмерной.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 статьи в журналах из списка ВАК [2, 5, 7], 2 статьи в сборниках тезисов конференций [1, 9], 3 статьи в сборниках материалов конференций [3, 6, 8], 1 статья в сборнике научных трудов [4].

Личный вклад автора. Изложенные в диссертационной работе научные результаты получены автором самостоятельно. Постановка задач и анализ результатов проводились совместно с научным руководителем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет

144 страницы. Работа содержит 18 графиков, 3 таблицы, 36 рисунков и список литературы из 107 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи исследования, показаны практическая значимость и новизна, представлены положения, выносимые на защиту, дано краткое описание содержания работы.

Первая глава содержит информацию о строении кровеносной системы человека, а также описание современных математических моделей и расчетных схем, которые применяются различными исследователями для вычисления параметров кровотока и напряженно-деформированного состояния сосудистых стенок.

Вторая глава посвящена построению математических моделей движения крови в упругих изотропных сосудах с учетом мышечной активности стенок.

Рассмотрим осесимметричное движение крови, которую считаем вязкой несжимаемой жидкостью, в круглом сосуде постоянного радиуса R . Ось x цилиндрической системы координат (x, r, θ) совпадает с осью симметрии потока. Материал стенки считаем идеально упругим, изотропным.

Перемещения стенок будем представлять в виде суммы:

$$u_{\text{общ}}(x, t) = u(x, t) + u_0(x, t), \quad w_{\text{общ}}(x, t) = w(x, t) + w_0(x, t),$$

где $u(x, t)$ - упругие перемещения в продольном направлении, $w(x, t)$ - в поперечном, а функции $u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ описывают дополнительное смещение стенки сосуда, вызываемое реактивным мышечным сокращением при прохождении по сосуду пульсовой волны давления, то есть работу вторичного сердца.

Основная система уравнений динамики кровотока в гибких цилиндрических сосудах в таком случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \\
 \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial^2 v_x}{\partial r \partial x} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= 0, \\
 \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \tau, \\
 \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{R^2} w + \frac{T_0}{R^2} w_0 - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \rho_0 h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sigma, \\
 S' &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right), \\
 T' &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p - давление; ρ - плотность крови; μ - вязкость крови; v_x - осевая компонента скорости крови; v_r - радиальная компонента скорости крови; R - радиус сосуда; t - время; u , w - перемещения стенки в продольном и поперечном направлениях; S' , T' - силы натяжения в окружном и продольном направлениях соответственно; S_0 , T_0 - начальные значения сил натяжения в окружном и продольном направлениях; E - модуль Юнга стенки; ν - коэффициент Пуассона; h - толщина стенки сосуда; ρ_0 - массовая плотность материала стенки сосуда.

Третье уравнение системы (уравнение для давления) получено из уравнений Навье-Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости. Оно заменяет уравнение неразрывности.

На стенке задаются статические и кинематические контактные условия:

1. Кинематические условия:

$$\begin{aligned}
 v_x|_{r=R} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\
 v_r|_{r=R} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Статические условия:

$$\tau = \mu \left(\left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=R} + \left. \frac{\partial v_r}{\partial x} \right|_{r=R} \right)$$

$$\sigma = -p|_{r=R} + 2\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{r=R}.$$
(3)

Задача заключается в нахождении общего решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3). В силу линейности уравнений задача распадается на однородную и неоднородную. Сначала построим общее решение однородной задачи, после чего найдем частное решение неоднородной.

В однородном случае решение будем искать в виде простых гармонических волн вида:

$$\begin{aligned} u &= u_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \\ w &= w_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \\ v_x &= v_{x1}(r) \exp[i(\omega t - \chi x)], \\ v_r &= v_{r1}(r) \exp[i(\omega t - \chi x)], \\ p &= p_1(r) \exp[i(\omega t - \chi x)]. \end{aligned}$$
(4)

Здесь ω - частота пульсации кровотока, χ - волновое число. Подставляя функции (4) в первые три уравнения системы (1), получим значения для амплитуд давления и скоростей:

$$\begin{aligned} p_1 &= A J_0(i\chi r), \\ v_{x1}(r) &= \frac{\chi}{\rho\omega} A J_0(i\chi r) + B J_0(i\beta r), \\ v_{r1}(r) &= \frac{\chi}{\rho\omega} A J_1(i\chi r) + \frac{\chi}{\beta} B J_1(i\beta r), \end{aligned}$$
(5)

где $J_0(r), J_1(r)$ - функции Бесселя первого рода порядков 0 и 1.

Далее, построив частные решения для каждой волновой гармоники $e^{i(\omega t - \chi x)}$, подставим в однородную систему (1) значения (5), а также функции (4) и выполним однородные кинематические условия (2). Получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных u_1, w_1, A и B . Ненулевое решение системы

существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Таким образом, получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - c_0^2 \chi^2 & -i\chi \left(c_0^2 \frac{v}{R} - \frac{S-T}{\rho_0 h R} \right) & \frac{2\mu i \chi^2}{\rho_0 h \omega R} J_1(i\chi R) & \frac{\mu i(\beta^2 + \chi^2)}{\rho_0 h \beta} J_1(i\beta R) \\ i\chi \frac{c_0^2 v}{R} & \omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi^2 \frac{S}{\rho_0 h} & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu \frac{i\chi^2}{\omega R} J_0(i\chi R) - \frac{2\mu \chi}{R \omega R} J_1(i\beta R) \right] & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i \chi J_0(i\beta R) - \frac{2\mu \chi}{R \beta} J_1(i\beta R) \right] \\ -i\omega & 0 & \frac{\chi}{\omega R} J_0(i\chi R) & J_0(i\beta R) \\ 0 & -i\omega & \frac{\chi}{\omega R} J_1(i\chi R) & \frac{\chi}{\beta} J_1(i\beta R) \end{vmatrix} = 0$$

Здесь $c_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-v^2)}$.

Для решения полной краевой задачи с учетом граничных условий на входе и выходе из сосудистой системы необходимо решить дисперсионное уравнение для конечных значений волновых чисел (конечных частот гармонических колебаний). Для определения числа решений и начального приближения может быть использован контурный график начальных точек дисперсионных кривых, полученный в программном пакете Mathcad.

В случае малых коэффициентов вязкости ($\mu \approx 0.00001$) дисперсионное уравнение имеет 2 комплексных решения. Соответствующий контурный график представлен на рисунке 1.

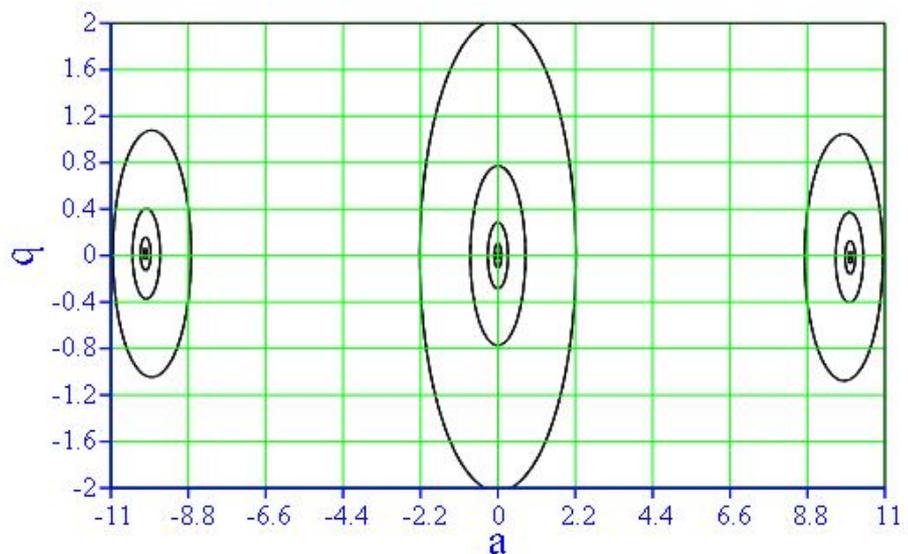


Рисунок 1. Начальные точки дисперсионных кривых в случае малой вязкости.

Для относительно больших коэффициентов вязкости ($\mu \approx 0.1$) число дисперсионных кривых образует бесконечное счетное множество (рисунок 2).

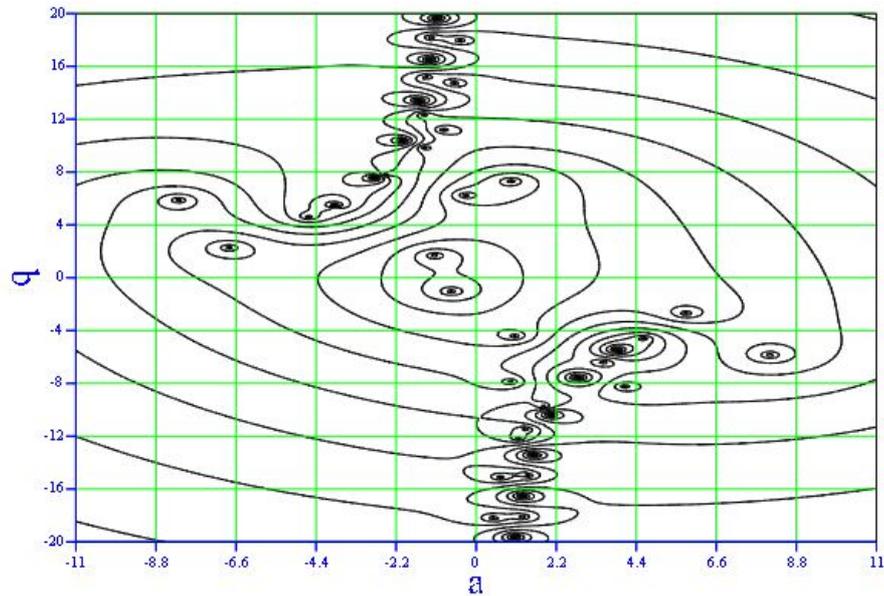


Рисунок 2. Начальные точки дисперсионных кривых в случае большой вязкости.

Используя полученные точки в качестве начальных приближений для построения решения дисперсионного уравнения, можно построить необходимые дисперсионные кривые. Наличие дисперсионных кривых позволяет завершить решение полной краевой задачи с учетом краевых и контактных условий.

Таким образом, общее решение однородной системы (1) построено. Далее перейдем к построению частного решения неоднородной системы.

Частное решение неоднородной системы (2.2.10), (2.2.8) для каждой волновой гармоники $e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-\frac{x}{c_{mk}})}$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
 u_{0k} &= u_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \\
 w_{0k} &= w_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \\
 v_{x0k} &= v_{x10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad (\omega = \frac{2\pi k}{T}) \\
 v_{r0k} &= v_{r10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \\
 p_{0k} &= p_{10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)],
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $p_{10} = A_0 J_0(i\chi_0 r)$,

$$v_{x10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_0(i\chi_0 r) + B_0 J_0(i\beta_0 r),$$

$$v_{r10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_1(i\chi_0 r) + \frac{\chi_0}{\beta_0} B_0 J_1(i\beta_0 r),$$

$$\beta_0 = \sqrt{\alpha^2 / R^2 + i\chi_0^2}, \quad \chi_0 = \frac{\omega}{c_{mk}}, \quad \alpha = R \sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}} \quad - \text{ параметр Уомерсли,}$$

$$c_{mk} = \sqrt{\frac{hE}{2R\rho}} \quad - \text{ скорость пульсовой волны давления Моэнса-Кортевега.}$$

Функции $u_0(x,t)$, $w_0(x,t)$, учитывающие работу распределенного сердца, определяются из эксперимента. Следует отметить, что установившееся движение вязкой жидкости при дополнительном мышечном воздействии возможно, если среднее ускорение реактивного перемещения стенок равно нулю. В простейшем случае функции реактивного перемещения стенок могут быть записаны в виде:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right)\right), & \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0, & \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases} \quad (7)$$

$$w_0(t, x) = \begin{cases} \gamma_2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - \frac{x}{c_{mk}})}{qT}\right)\right), & \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0, & \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T. \end{cases} \quad (8)$$

где $\gamma_{1,2}$ - параметры, характеризующие степень мышечной активности, $0 < q \leq 1$, T - период пульсации крови.

В этом случае график ускорения реактивного перемещения стенок будет антисимметричным, и среднее ускорение будет равно 0 (рисунок 3).

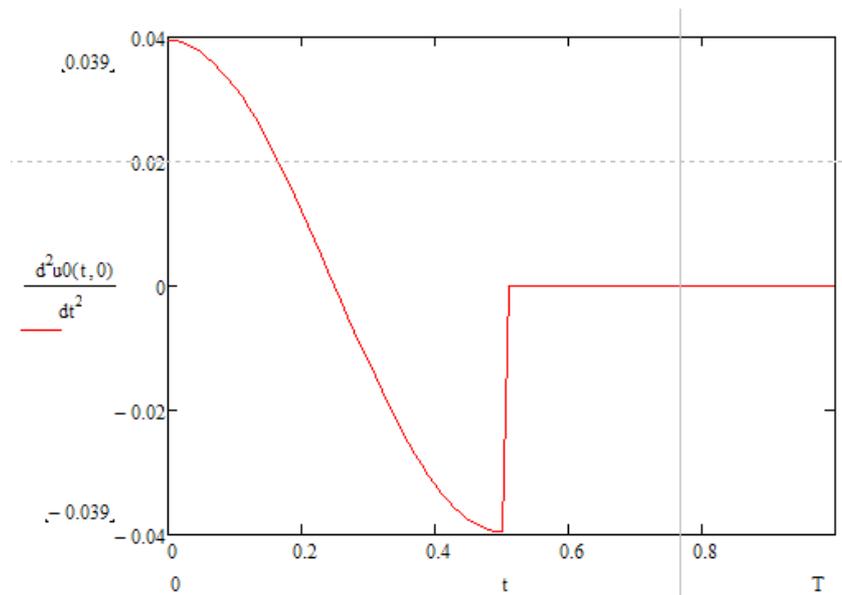


Рисунок 3. Реактивное ускорение стенок сосуда.

Тогда, раскладывая в ряды Фурье функции скорости и ускорения реактивного перемещения стенок и подставляя в неоднородную систему (1) и в контактные условия (2) функции (6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных u_{10} , w_{10} , A_0 , B_0 , определитель которой будет отличен от 0, так как χ_0 не является корнем дисперсионного уравнения. Решая систему, определим неизвестные константы и построим базовые частные решения для продольной и поперечной компонент скорости. Сумма таких решений, найденных для каждой волновой гармоники $e^{i\frac{2\pi k}{T}(t-\frac{x}{c_{mk}})}$, даст нам решение системы уравнений (1) с кинематическими контактными условиями (2).

Таким образом, задача о построении решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3) решена. Расчеты с помощью построенной трехмерной аналитической модели довольно трудоемки, поэтому было принято решение о необходимости ее упрощения.

Осредняя уравнения системы (1) по радиусу сосуда, получим одномерную систему течения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2}{\pi R^2} Q \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= -\pi R^2 \frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} Q + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial w_{\text{общ}}}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x}, \\
\rho h \frac{\partial^2 u_{\text{общ}}}{\partial t^2} &= \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w_{\text{общ}}}{\partial x} + \tau, \\
\rho h \frac{\partial^2 w_{\text{общ}}}{\partial t^2} &= p + \frac{T_0}{R^2} w_{\text{общ}} - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w_{\text{общ}}}{\partial x^2}, \\
S' &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right], \\
T' &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\
\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{r=R} &= -\frac{4Q}{\pi R^3}, \\
\tau = \mu \gamma_{rz} \Big|_{r=R} &= -\frac{4\mu Q}{\pi R^3},
\end{aligned} \tag{9}$$

где $Q = \int_0^R 2\pi r v_x dr$ - объемный расход крови.

Пренебрегая инерционными силами, действующими на элемент оболочки, а также конвективной составляющей ускорения частиц жидкости, из замкнутой системы уравнений (9) получаем более простую систему уравнений динамики кровотока:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\pi R^2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2} \cdot \left(Q - \pi R^2 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), \\
\frac{\partial w_{\text{общ}}}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x}, \\
\rho + \frac{T_0}{R^2} w_{\text{общ}} - \frac{T'}{R} &= 0, \\
T' &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{w}{R}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из системы (10) с учетом разложения функций (7), (8) в ряды Фурье, получаем разрешающее уравнение для объемного кровотока:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{B}{L} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \pi R^2 \frac{B}{L} \cdot \text{Re} \left[\sum_0^{\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right] - \\
&- \frac{1}{LD} \text{Re} \left[\sum_1^{\infty} f_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $B = \frac{8\pi\mu}{\pi^2 R^4}$, $L = \frac{\rho}{\pi R^2} \frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi R^3} \cdot \left(\frac{E}{1-\nu^2} - T_0 \right)$, $\frac{1}{D} = \frac{1}{R^2} \cdot \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu^2_0} \right)$, c_k, f_k - коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Построение аналитического решения задачи по определению объемного кровотока в системе кровеносных сосудов проводилось для участка сосудистой системы с двумя узлами бифуркации. Рассматривается система артерий, состоящая из пяти сегментов, в которых происходит периодическая пульсация крови. Каждый отдельный участок обладает своей пространственно одномерной системой координат, начало которой лежит на входе, а ось x направлена в сторону выходного отверстия.

На каждом i -м участке запишем уравнение для объемного кровотока:

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2} + \frac{B_i}{L_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{1}{L_i C_i} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_i^2} + \pi R_i^2 \frac{B_i}{L_i} \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_0^{\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right] - \frac{1}{L_i D_i} \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} f_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} (t - \frac{x}{c_{mk}})} \right] \quad (12)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x = 0, Q_1 = Q_0(t); \text{ при } x \rightarrow \infty: Q_2, Q_4, Q_5 \rightarrow 0. \quad (13)$$

Контактные условия выражают условия сохранения расходов и непрерывности давления в узлах разветвления:

$$Q_1|_{x=l_1} = Q_2|_{x=0} + Q_3|_{x=0}, \quad (14)$$

$$P_1|_{x=l_1} = P_2|_{x=0} = P_3|_{x=0},$$

$$Q_3|_{x=l_3} = Q_4|_{x=0} + Q_5|_{x=0}, \quad (15)$$

$$P_3|_{x=l_3} = P_4|_{x=0} = P_5|_{x=0}.$$

Объемный кровоток на каждом участке будем искать в виде:

$$Q_i(t, x) = Q_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{ki}(x) e^{i\omega_k t}, \quad (16)$$

где Q_{0i} - средний объемный кровоток на i -том участке.

Решением уравнения (12) в этом случае будет функция:

$$Q_i(t, x) = q_{oi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ki} e^{\lambda_{1ki} x} + B_{ki} e^{\lambda_{2ki} x} + \frac{2\pi i k}{T} \frac{-\frac{C_i f_k}{D_i} + \pi R_i^2 B_i C_i c_k}{\lambda_{ki}^2 + \left(\frac{2\pi k}{T c_{mk}}\right)^2} e^{-i \frac{2\pi k}{T c_{mk}} x} \right) e^{i \omega_n t} \quad (17)$$

Неизвестные константы определяются из граничных условий (13) и контактных условий (14), (15).

Средний объемный кровоток на первом участке определяем из условия на входе:

$$Q_{10} = a_0 + \pi v_{\text{прод}} R_1^2 + Q_{0w},$$

$$\text{где } Q_{0w} = \frac{2\pi R_1}{qT} \int_0^{qT} \int_0^{qT} w_0(x, t) dx dt = \frac{2R_1 q T c_{mk} \gamma_2 (\pi^2 - 4)}{\pi} - \text{дополнительный}$$

средний расход, возникающий за счет продольных сокращений стенки;

$$v_{\text{прод}} = \frac{\gamma_1 \pi}{T^2 q} \int_0^{qT} \sin\left(\frac{\pi t}{qT}\right) dt.$$

На остальных участках средние объемные кровотоки определяются из первого уравнения системы (10) при условии установившегося течения жидкости:

$$Q_{20} = \frac{B_3 Q_{10} l_3 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2}, \quad Q_{30} = \frac{B_2 Q_{10} l_2 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_2 l_2 R_2^2 - B_3 l_3 R_3^2)}{B_3 l_3 + B_2 l_2},$$

$$Q_{40} = \frac{B_5 Q_{30} l_5 + \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5}, \quad Q_{50} = \frac{B_4 Q_{30} l_4 - \pi \frac{du_0}{dt} (B_4 l_4 R_4^2 - B_5 l_5 R_5^2)}{B_4 l_4 + B_5 l_5}.$$

Таким образом, построена одномерная математическая модель периодического течения крови, которая учитывает работу распределенного сердца. Важнейшим преимуществом данной модели является то, что основная система уравнений допускает аналитическое решение.

Во второй главе также предложены новые варианты постановки задачи о движении крови в гибких цилиндрических сосудах.

Полагая, как и раньше, что задача осесимметрична, а кровь является ньютоновской жидкостью, рассмотрим случай направленного движения жидкости в сосуде, когда малая пульсация составляющий скоростей

происходит вокруг основной скорости потока v_0 : $v_x = v_0 + v'$; $v_r = v'$. В этом случае уравнения гидродинамики представляют собой уравнения Навье-Стокса для направленных потоков, и система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в сосудах с упругими стенками принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \\
 \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_r}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(c_0^2 \frac{v}{R} + \frac{S_0 - T_0}{\rho_0 h R} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho_0 h} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \Bigg|_{r=R}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{T_0}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) w - c_0^2 \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{S_0}{\rho_0 h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0 h} \left(p \Big|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Условия «прилипания» частиц жидкости к стенкам сосуда можно заменить условием стесненного их скольжения по поверхности контакта:

$$\begin{aligned}
 \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \Bigg|_{r=R} &= \lambda (v_x \Big|_{r=R} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)), \\
 v_r \Big|_{r=R} &= \frac{\partial w}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

λ - коэффициент вязкого трения материала оболочки и жидкости.

Для дальнейшего упрощения предложенной системы уравнений в трехмерной постановке можно вместо уравнений Навье-Стокса (2.4.1) использовать уравнения Эйлера для описания движения направленного потока идеальной несжимаемой жидкости, полагая при этом, что вязкое стесненное трение жидкости о стенку сосуда будет происходить в бесконечно тонком слое (погранслои) на контактной поверхности:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\
 \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_r}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\
 \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_x)}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_p}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_p}{\partial x} &= -\frac{\partial p_p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c_0^2 \frac{v}{R} + \frac{S_0 - T_0}{\rho_0 h R}) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho_0 h}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{R^2} (\frac{T_0}{\rho_0 h} - c_0^2) w - c_0^2 \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{S_0}{\rho_0 h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p_p}{\rho_0 h}.\end{aligned}$$

Касательные напряжения на стенке будут иметь вид:

$$\tau = \lambda(v_p - \frac{du}{dt}).$$

В качестве контактных условий для идеальной жидкости можно взять условия непроницаемости стенки и условия прилипания частиц жидкости вдоль стенки:

$$v_r|_{r=R} = \frac{dw}{dt}, \quad v_x|_{r=R} = v_p. \quad (21)$$

В одномерной постановке задача о движении крови в сосудах с упругими стенками может быть записана в уточненном виде на основе сокращения числа гипотез и предположений. Осредним по радиусу сосуда систему уравнений (18) с граничными и контактными условиями вида:

$$\begin{aligned}\tau &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \Big|_{r=R} \right), & v_x|_{r=R} &= \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \sigma &= p|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}. & v_r|_{r=R} &= \frac{\partial w}{\partial t}.\end{aligned}$$

Тогда получим систему одномерных уравнений динамики кровотока в крупных кровеносных сосудах:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q_0}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= -\pi R^2 \frac{\partial p_c}{\partial x} + 8\pi R \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \rho_{cm} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau, \\ \rho_{cm} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma, \\ S &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right),\end{aligned}$$

$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right),$$

$$p|_{r=R} = p_c + \rho \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} + 2\nu_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) - \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right],$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2Q}{\pi R^2} - v_x \Big|_{r=0}.$$

Система замкнута, так как для определения 10 неизвестных функций

$Q, u, w, S, T, p_c, p|_{r=R}, v_x|_{r=0}, \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}, \frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R}$ имеем 10 уравнений.

Предложенная математическая модель допускает построение аналитического решения в классе периодических функций времени.

В третьей главе описаны механические эксперименты по определению свойств плечевых артерий человека. Были проведены испытания по растяжению трех пар плечевых артерий без патологий, изъятых у мужчин среднего возраста. Растяжение образцов проводилось как в продольном, так и в поперечном направлении.

В результате были получены диаграммы растяжений образцов, а также в автоматическом режиме рассчитаны модули Юнга для каждого образца и посчитаны средние значения модулей в продольном и поперечном направлениях. Среднее значения модуля упругости (по всем трем парам сосудов) для продольного направления составило 4.621 МПа, для поперечного 2.401 МПа.

В четвертой главе представлены результаты расчетов кровотока в участке сосудистого русла плеча. Расчеты проводились в программах Ansys (методом конечных элементов) и Mathcad (по построенной одномерной модели).

В Ansys была решена задача о течении крови в участке сосудистого русла плеча. Рассматривалась плечевая артерия с двумя узлами бифуркации.

Механические характеристики стенки были взяты из предыдущей главы (средние значения). Кровь считалась вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью. Рассматривались две задачи: о течении крови в сосуде с учетом мышечной активности стенок и без учета мышечной активности. Функции реактивного перемещения стенок имели вид (7). В результате получили графики для объемных кровотоков на выходах из сосудов, которые показывают, что при коэффициенте мышечной активности, равному 0.001, за счет реактивного перемещения стенок объемный кровоток возрастает в среднем на 5%.

Далее в программе Mathcad по одномерной модели были рассчитаны объемные кровотоки в той же системе артерий плеча. На рисунке 4 приведен график сравнения результатов конечно-элементного расчета (с учетом мышечной активности стенок) и одномерной теории.

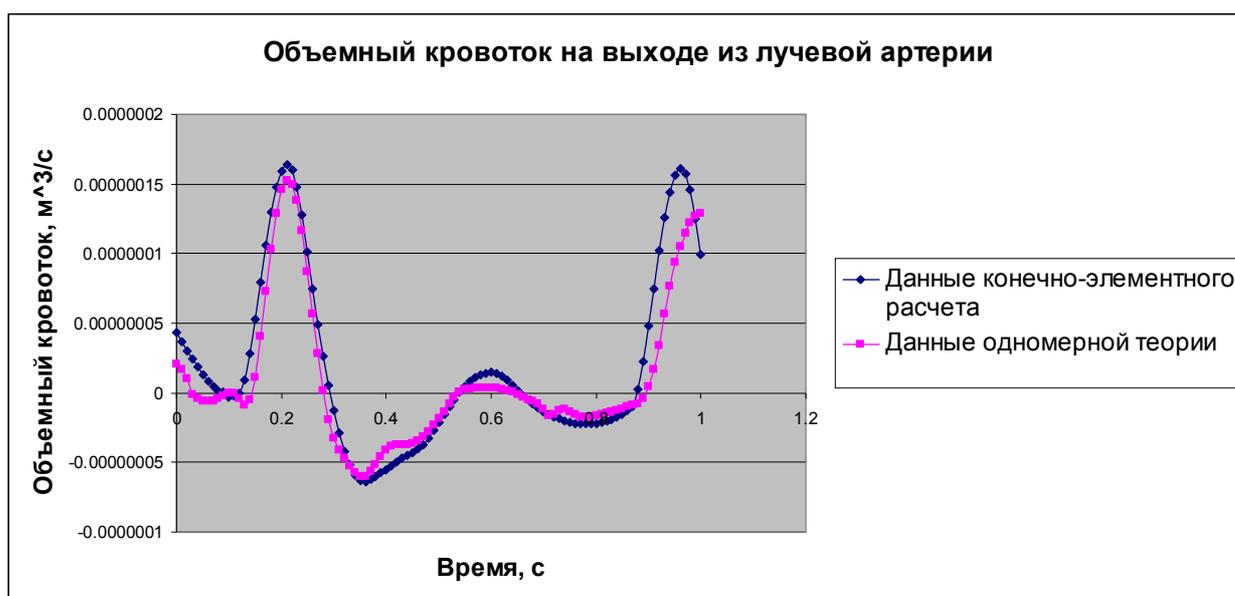


Рисунок 4 Объемный кровоток на выходе из лучевой артерии.

Различия в значениях для объемных кровотоков на пиках систолы для всех выходных сечений не превышает 10%., что является вполне приемлемой погрешностью для практических приложений одномерной теории.

Результаты и выводы

1. Построена трехмерная математическая модель периодического течения крови. Данная модель применима к сосудистому руслу

произвольной конфигурации. Построенная модель допускает численное решение.

2. Построена одномерная математическая модель периодического течения крови в сосудистом русле произвольной конфигурации. Модель допускает аналитическое решение, что позволяет быстро получать необходимые результаты.
3. Методом конечных элементов решена задача о течении крови в системе сосудов плеча (трехмерная постановка). Модель учитывала реактивное перемещение стенок.
4. Показано, что за счет периодического реактивного смещения стенок по определенному закону объемный кровоток на выходе из сосуда возрастает. Величина, на которую увеличивается кровоток, напрямую зависит от подбора коэффициента мышечной активности.
5. Проведено сравнение результатов, полученных при конечно-элементном моделировании сосудистой системы плеча, и вычисленных с помощью одномерной модели. Показано, что одномерная модель позволяет с высокой степенью точности оценивать объемные кровотоки в сосудах, причем время расчетов при ее использовании значительно ниже, чем при моделировании методом конечных элементов.
6. Предложенные в диссертации математические модели могут быть использованы для исследований участков сосудистого русла конкретного пациента. Кроме того, на основе построенной одномерной модели может быть создано специализированное программное обеспечение, позволяющее быстро (практически в режиме реального времени) рассчитывать объемные кровотоки в системе сосудов произвольной конфигурации.

Список публикаций

1. Гуляев, Ю.П. Моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов с учетом взаимодействия потока крови со стенкой / Ю.П. Гуляев, А.В. Доль // III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: Тез. докл. Всерос. конф. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2009. С. 13.
2. Доль, А.В. Одномерная система уравнений динамики кровотока в крупных кровеносных сосудах/ А.В. Доль // Научно-технический вестник Поволжья. – Казань: Научно-технический вестник Поволжья. 2012. №2. С. 27-30.
3. Доль, А.В. Интегрирование замкнутой системы динамики кровотока методом разделения переменных / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине: Материалы ежегодной Всероссийской научной школы-семинара. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2011. С.13-15.
4. Доль, А.В. Интегрирование основной системы уравнений динамики кровотока методом разделения переменных / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Математика. Механика: Сб. науч. Трудов. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2011. С. 140-143.
5. Доль, А.В. Математические модели гемодинамики кровотока с учетом работы распределенного сердца / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. С. 423-425.
6. Доль, А.В. Моделирование течения крови в крупных кровеносных сосудах с учетом взаимодействия потока со стенкой / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине: Материалы ежегодной Всероссийской научной школы-семинара.. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2009. С.69-72.
7. Доль, А.В. Трехмерная математическая модель гемодинамики с учетом работы распределенного сердца / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Известия

- саратовского университета. Серия математика. Механика.
Информатика. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2012. – Т.
12. – Вып. 3. – С. 62-66.
8. Доль, А.В. Учет работы распределенного сердца в трехмерной модели гемодинамики / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине - 2012: Материалы ежегодной Всероссийской научной школы-семинара. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2012. С.44-47.
9. Доль, А.В. Одномерное движение вязкой несжимаемой жидкости / А.В. Доль, Ю.П. Гуляев// X Всероссийская конференция «Биомеханика 2010»: Тез. докл. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2010. – С. 69.