

На правах рукописи

ШУРЫГИНА Светлана Андреевна

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ
ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ И ПОВЕДЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ
СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В ПОТОКОВЫХ СИСТЕМАХ
И ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

01.04.03 – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Саратов – 2013

Работа выполнена на факультете нелинейных процессов, на кафедре физики открытых систем, и в отделении физики нелинейных систем научно-исследовательского института естественных наук ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

Научный руководитель:

Москаленко Ольга Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”, доцент кафедры физики открытых систем

Официальные оппоненты:

Казанцев Виктор Борисович, д.ф.-м.н., ФГБУН “Институт прикладной физики Российской академии наук”, заведующий лабораторией

Павлов Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”, профессор кафедры радиопизики и нелинейной динамики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки “Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской Академии наук”, Саратовский филиал

Защита состоится “17” октября 2013 г. в 15 часов 30 минут в 34 ауд. III корпуса СГУ на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 по специальности 01.04.03 в Саратовском государственном университете (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета (Саратов, ул. Университетская, 42).

Автореферат разослан “15” августа 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета



В.М. Аникин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Синхронизация колебаний динамических систем, способных демонстрировать сложное хаотическое поведение, является универсальным явлением¹, которое наряду с фундаментальным значением, имеет широкий спектр практических приложений, охватывающих, помимо физических, химические, биологические и физиологические системы². В настоящее время известно достаточно большое число различных типов хаотической синхронизации (например, полная синхронизация, синхронизация с запаздыванием (лаг-синхронизация), обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация, синхронизация, индуцированная шумом, и др.) и, если каждый тип синхронного поведения в отдельности исследован достаточно полно, то проблема выявления взаимосвязи различных типов хаотической синхронизации друг с другом находится в развитии и требует активного изучения, поскольку понимание механизмов, приводящих к установлению разных типов хаотической синхронизации и их взаимосвязи друг с другом имеет важное значение, как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. Так, например, известны работы, направленные на выявление взаимосвязи различных типов хаотической синхронизации в системах с единым типом связи³, когда меняется только интенсивность связи между системами. В этих работах предложены общие подходы к анализу синхронного поведения хаотических осцилляторов — синхронизация временных масштабов и синхронизация спектральных компонент, которые естественным образом обобщают различные типы синхронного поведения, перечисленные выше. В то же самое время, вопрос о взаимосвязи разных типов хаотической синхронизации при переходе от однонаправлено связанных систем к системам с взаимной связью в настоящее время остается открытым. Поэтому в диссертационной работе большое внимание уделено определению закономерностей поведения границ этих типов хаотической синхронизации при переходе от однонаправлено связанных систем к системам с взаимной связью.

Важную роль при исследовании хаотической синхронизации играют пока-

¹А.С. Пиковский, М.Г. Розенблум, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003; V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development.*, 2nd Edition, Springer, 2007.

²L. Glass, *Nature (London)* 410 (2001) 277; V.S. Anishchenko, A.G. Balanov, N.B. Janson, N.B. Igosheva, G.V. Bordyugov, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2339; O.V. Sosnovtseva, A.N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, *Phys. Rev. E* 66 (6) (2002) 061909; A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Phys. Rev. E* 75 (5) (2007) 056207; А.Н. Павлов, А.Е. Храмов, А.А. Короновский, Е.Ю. Ситникова, В.А. Макаров, А.А. Овчинников, *Успехи физических наук* 182 (9) (2012) 905.

³А.Е. Храмов, А.А. Короновский, *CHAOS* 14(3) (2004) 603; А.Е. Храмов, А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, *Phys. Rev. E* 71 (5) (2005) 056204; A.V. Shabunin, V.V. Astakhov, J. Kurths, *Phys. Rev. E* 72 (1) (2005) 016218.

затели Ляпунова⁴. В частности, известно, что в двух связанных хаотических системах при увеличении параметра связи, как правило, происходит последовательный переход в область отрицательных значений двух показателей Ляпунова: сначала нулевого, а затем положительного⁵. Изменение знака показателя Ляпунова свидетельствует о качественных изменениях, произошедших в динамике системы. В ряде случаев, переход одного из показателей Ляпунова в область отрицательных значений связывают с возникновением синхронного поведения, как например, в случае синхронизации периодических колебаний или при установлении режима обобщенной хаотической синхронизации. В то же самое время, для связанных хаотических осцилляторов при установлении режима фазовой синхронизации нулевой условный показатель Ляпунова является уже существенно отрицательным. Переход старшего условного показателя Ляпунова через нуль происходит тоже немного раньше установления режима обобщенной хаотической синхронизации, однако, разница между критическими значениями параметра связи оказывается столь незначительной, что зачастую не принимается в рассмотрение. Причины различия значений параметра связи, при которых устанавливается синхронный режим, и при которых условный показатель Ляпунова становится отрицательным, до настоящего времени нигде не рассматривались. Изучению этого вопроса также посвящена настоящая диссертационная работа.

При исследовании по отдельности некоторых типов синхронного поведения часть вопросов также остается неизученной. В частности, подобные вопросы существуют для режима обобщенной хаотической синхронизации⁶. Данный тип хаотической синхронизации явно выделяется среди известных типов синхронного поведения. Изначально он был введен в рассмотрение только для однонаправленно связанных хаотических систем. Позднее появились попытки обобщения этого режима на случай взаимной связи — две взаимно связанные хаотические динамические системы и сети связанных нелинейных элементов⁷. В то же самое время, известные работы, посвященные этой проблеме, направлены лишь на установление факта существования этого режима, в то время как само понятие обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, автоматически переносилось со случая обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи, а правомерность такого переноса никоим образом не рассматривалась и не обосновывалась. Бо-

⁴K. Pyragas, Phys. Rev. E 56 (5) (1997) 5183; A. Politi, F. Ginelli, S. Yanchuk, Yu. Maistrenko, Physica D 224 (2006) 90; A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, Phys. Rev. E 78 (2008) 036212.

⁵Несмотря на то, что эти ляпуновские показатели могут претерпевать изменения (например, становятся отрицательными) здесь и далее используются термины “нулевой” и “положительный” условные показатели Ляпунова.

⁶N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. E 51 (2) (1995) 980.

⁷Z. Zheng, X. Wang, M.C. Cross, Phys. Rev. E 65 (2002) 056211; S. Guan, X. Wang, X. Gong, K. Li, C.-Y. Lai, CHAOS 19 (2009) 013130.

лее того, во всех известных работах диагностика обобщенной синхронизации производится при помощи модификации метода вспомогательной системы⁸, являющегося эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью, однако вопрос о корректности применения этого метода к системам с взаимным типом связи до настоящего времени оставался открытым. Поэтому настоящая диссертационная работа направлена также на рассмотрение данных вопросов и построение универсальной концепции обобщенной синхронизации, справедливой для систем, связанных как однонаправлено, так и взаимно.

Изучение режима обобщенной хаотической синхронизации в системах с взаимной связью оказывается важным еще и потому, что если для двух связанных осцилляторов однонаправленный и взаимный характеры связи являются равноправными, то в решетках и сетях, как правило, реализуется взаимный характер связей между элементами. Это связано с тем, что все элементы сети действуют друг на друга, если не непосредственно, то, по крайней мере, опосредовано, через соседние (промежуточные) элементы. В то же самое время, изучение синхронного поведения в таких сложных объектах, помимо фундаментального интереса, имеет важное практическое значение, связанное с задачами распознавания и хранения информации, анализа временных рядов (нейронные сети), передачи и обработки информации (нелинейные антенны), описания и изучения физиологических процессов, начиная с моделирования отдельных нейронов и заканчивая рассмотрением глобальных нейронных ансамблей и анализом поведения головного мозга животных и человека. Поэтому исследование режима обобщенной хаотической синхронизации является одной из основных задач настоящей диссертационной работы. В рамках решения этой задачи разработаны универсальные методы диагностики и анализа обобщенной синхронизации, справедливые как для модельных систем, связанных однонаправлено или взаимно, так и реальных экспериментальных данных, полученных от систем различной природы. Подобная задача, влекущая за собой пересмотр и уточнение существующей концепции обобщенной синхронизации однонаправлено и взаимно связанных систем, носит как фундаментальный, так и прикладной характер, а методы анализа этого режима смогут найти применение при обработке временных рядов (по всей видимости, прежде всего, радиофизической и физиологической природы).

Таким образом, на основании описанного выше можно заключить, что тема диссертации является актуальной и важной для радиофизики и нелинейной динамики, при этом вопросов, требующих дальнейших исследований в этой области, оказывается достаточно много.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертационной

⁸H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, Phys. Rev. E 53 (5) (1996) 4528.

работы является выявление особенностей различных типов хаотической синхронизации в диссипативно связанных потоковых системах и дискретных отображениях, разработка новых методов их анализа и определение взаимосвязи между ними.

Основными вопросами, подробно рассмотренными в диссертационной работе, являются следующие:

- аналитическое и численное исследование влияния степени взаимности связи на установление различных типов хаотической синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях;
- разработка концепции обобщенной синхронизации, справедливой как для однонаправлено, так и взаимно связанных потоковых систем и дискретных отображений, демонстрирующих хаотическую динамику;
- исследование закономерностей поведения спектра показателей Ляпунова при установлении различных типов хаотической синхронизации;
- исследование возможности установления индуцированной шумом синхронизации в неавтономных системах;
- изучение перемежающегося поведения на границе синхронизации, индуцированной шумом;
- пересмотр и уточнение общепринятой концепции обобщенной синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях, разработка новых методов анализа синхронного режима.

Результаты проведенных аналитических и численных исследований, изложенные в настоящей диссертационной работе, позволяют определить закономерности возникновения различных типов синхронного поведения в потоковых системах и дискретных отображениях. Полученные результаты обладают высокой степенью общности, что позволяет распространить полученные результаты на множество нелинейных динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Пороги режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, фазовой и обобщенной синхронизаций диссипативно связанных хаотических потоковых систем и дискретных отображений уменьшаются при увеличении степени взаимности связи между системами, при этом, граница возникновения полной синхронизации в зависимости от коэффициента взаимности связи подчиняется гиперболическому закону.

2. Отрицательность условных показателей Ляпунова, имеющая место перед возникновением режимов фазовой хаотической и обобщенной хаотической синхронизации, является следствием синхронизма, наблюдающегося в определенные периоды времени вблизи границ установления синхронных режимов, где полностью синхронный режим еще не установился и наблюдается перемежающееся поведение.
3. Два идентичных периодических осциллятора, находящихся под внешним периодическим воздействием, но не синхронизованных им, демонстрируют идентичное поведение — режим неавтономной индуцированной шумом синхронизации — при добавлении шума, при этом средняя длительность переходного процесса обратно пропорциональна интенсивности шумового воздействия.
4. Переход к синхронизации, индуцированной шумом, сопровождается перемежающимся поведением, характеристики которого соответствуют перемежаемости типа “on-off”.
5. Состояния взаимодействующих однонаправлено или взаимно связанных систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, связаны между собой не функциональной зависимостью, а функционалом в случае потоковых систем или зависимостью, зависящей от K предыдущих состояний, в случае дискретных отображений; при этом, диагностику синхронного режима можно осуществлять по моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений или при помощи метода фазовых трубок, а для однонаправлено связанных систем — и при помощи метода вспомогательной системы.

Научная новизна. Научная новизна результатов диссертационной работы заключается в определении общих закономерностей возникновения различных типов хаотической синхронизации в диссипативно связанных системах при переходе от однонаправленного типа связи к взаимному, разработке непротиворечивой концепции обобщенной синхронизации, справедливой для двух (и более) хаотических систем, а также в выявлении особенностей поведения спектра показателей Ляпунова при установлении различных типов синхронизации.

Впервые получены следующие научные результаты:

- Получена аналитическая зависимость порога возникновения полной синхронизации от коэффициента взаимности связи между системами, справедливая как для отображений, так и для потоков.

- Предложена универсальная концепция обобщенной синхронизации в хаотических системах как с однонаправленным, так и взаимным типами связи. Показано, что установление обобщенной синхронизации связано с переходом одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений.
- Установлено, что за отрицательность условных нулевого (до момента возникновения фазовой синхронизации) и положительного (вблизи границы обобщенной синхронизации) показателей Ляпунова в однонаправлено связанных хаотических системах отвечают ламинарные фазы (фазы синхронного поведения) систем.
- Выявлен новый тип синхронного поведения — неавтономная индуцированная шумом синхронизация.
- Обнаружено перемежающееся поведение на границе синхронизации, индуцированной шумом. Установлено, что в данном случае имеет место перемежаемость типа “on-off”.
- Пересмотрена и дополнена концепция обобщенной синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях. Для изучения этого типа синхронного поведения в системах с непрерывным и дискретным временем предложен подход, основанный на рассмотрении трубок траекторий в фазовом пространстве.

Научная и практическая значимость работы. Диссертационная работа решает научную задачу, имеющую существенное значение для радиофизики, нелинейной динамики и современной теории колебаний, связанную с выявлением общих закономерностей хаотической синхронизации в диссипативно связанных потоковых системах и дискретных отображениях при изменении степени взаимности связи между ними. В большинстве случаев рассматривались эталонные модели нелинейной динамики, демонстрирующие периодическое (автогенератор Ван дер Поля, отображение окружности) и хаотическое (системы Ресслера, Лоренца, логистические отображения, отображения Эно) поведение. Благодаря тому, что все рассмотренные модели являются базовыми, результаты диссертационной работы носят общий характер и могут быть обобщены на системы различной природы (радиофизической, физиологической, биологической и т.д.). Полученные результаты позволяют понять общие закономерности синхронного поведения связанных хаотических систем, определить механизмы их возникновения и выявить тесную взаимосвязь между ними. В частности, разработанный метод анализа обобщенной синхронизации, основанный на рассмотрении трубок траекторий в фазовом

пространстве и учете предыстории взаимодействующих систем, может найти применение при обработке экспериментальных данных, полученных от систем различной природы.

Определение взаимосвязи между поведением связанных хаотических осцилляторов, находящихся около границ возникновения синхронных режимов, и поведением условных показателей Ляпунова имеет важное не только теоретическое, но и практическое значение, так как позволяет применять аппарат, связанный с использованием ляпуновских показателей, при изучении широкого круга нелинейных систем, демонстрирующих хаотическое поведение, значения управляющих параметров которых находятся вблизи границ установления синхронных режимов.

Более того, обнаруженное в рамках диссертационной работы сходство связанных хаотических систем и неавтономных периодических осцилляторов, находящихся под действием шума, хорошо согласующееся с известными опубликованными работами⁹, позволяет расширить применимость как известных, так и полученных в рамках диссертационной работы результатов на большое число систем, находящихся под действием внешних шумов. Понятно, что шумы присутствуют всегда, как в численном моделировании, так и в эксперименте. И хотя в ряде случаев влиянием шума можно пренебречь, вблизи границ синхронных режимов роль шума становится существенной. Шум влияет существенным образом как на статистические характеристики перемежающегося поведения и значения показателей Ляпунова, так и приводит к возникновению новых типов поведения, например, неавтономной синхронизации, индуцированной шумом. Поэтому выявление особенностей поведения систем, обусловленных добавлением шума, имеет важное фундаментальное и прикладное значение.

Результаты, изложенные в диссертационной работе, внедрены в учебный процесс по подготовке специалистов по специальностям “Радиофизика и электроника”, “Физика открытых нелинейных систем”, а также по направлению подготовки бакалавров и магистров “Радиофизика” в ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”. Результаты, полученные в рамках выполнения настоящей диссертационной работы, вошли в монографию С.А. Шурыгиной, О.И. Москаленко, А.А. Короновского “Хаотическая синхронизация в отображениях и потоках. Взаимосвязь различных типов синхронного поведения, показатели Ляпунова, перемежаемость”, изданную в Германии в 2011 году.

⁹В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова, Радиотехника и электроника 48 (7) (2003) 824; V.S Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, Fluctuation and Noise Letters 4 (1) (2004) L219; V.S Anishchenko, G.A. Okrokvvertskhov, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, New Journal of Physics 7 (2005) 76; Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко, Г.А. Окрокверцхов, А.С. Захарова, Радиотехника и электроника 51 (5) (2006) 580-592

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических процедур; известных уравнений, описывающих нелинейные процессы; общепризнанных методов и подходов, апробированных на различных системах и хорошо зарекомендовавших себя при проведении научных исследований; обоснованным выбором параметров численных методов. Достоверность полученных результатов подтверждается их воспроизводимостью, сопоставлением аналитически и численно полученных результатов, совпадением результатов при использовании различных методов диагностики колебательных режимов, а также отсутствием противоречий с известными в научной литературе достоверными общепризнанными результатами.

Личный вклад. Большая часть представленных в диссертационной работе результатов получена автором лично либо при его непосредственном участии. В совместных работах автором выполнена значительная часть аналитических и численных расчетов. Постановка задач, разработка методов их решения, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены совместно с научным руководителем и другими соавторами научных работ, опубликованных соискателем.

Апробация работы. Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ по грантам Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 07-02-00044-а, 12-02-00221-а), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (соглашения № 14.В37.21.0751 от 27 августа 2012 г., № 14.В37.21.1289 от 21 сентября 2012 г., ГК № П586 от 18 мая 2010 г., П2492 от 20 ноября 2009 г., П1136 от 27 августа 2009 г., П451 от 31 июля 2009 г.), Президентской Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (2010–2011 и 2012–2013 гг., руководитель ведущей научной школы — чл.-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков), гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект № МК-672.2012.2, руководитель проекта — к.ф.-м.н., доцент О.И. Москаленко, 2012–2013 гг.), Фонда некоммерческих программ “Династия” и Московского Международного Центра Фундаментальной Физики (2009–2011 гг.).

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов: IX Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем” (ННГУ, Нижний Новгород, 2012), школы-семинара “Волны” (МГУ, Москва, 2009, 2012, 2013), III Всероссийского научно-практического форума “Экология: синтез естественно-научного, технического и гуманитарного знания” (СГТУ, Саратов, 2012), научной школы-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (СГУ, Саратов, 2011), IX Между-

народной школы “ХАОС-2010” (СГУ, Саратов, 2010), 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference (Хания, Греция, 2010), 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2010) (Дрезден, Германия, 2010), конференции для молодых ученых “Presenting Academic Achievements to the World” (СГУ, Саратов, 2010), конференции молодых ученых “Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики” (ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2010), Всероссийской научной школы для молодежи “Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах” (СГУ, Саратов, 2009), Международной школы-семинара “Statinfo-2009” (СГУ, Саратов, 2009). Результаты, изложенные в диссертационной работе, неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ.

Публикации. Результаты работы опубликованы в монографии, в центральных реферируемых научных журналах (8 статей), рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, а также в трудах конференций (14 статей и тезисов докладов).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 139 страниц текста, включая 38 иллюстраций. Список литературы содержит 131 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулирована цель работы, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные положения и результаты, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

Первая глава диссертационной работы посвящена изложению результатов исследования различных типов хаотической синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях при изменении степени взаимности связи между ними. В начале главы дается детальное описание известных типов синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных системах и методов их диагностики, обсуждаются проблемы и вопросы, возникающие при исследовании каждого из них в отдельности. Дальнейшее изложение главы посвящено исследованию влияния степени взаимности связи на установление режимов полной синхронизации, обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и синхронизации с запаздыванием в потоковых системах, а также на границы установления полной и обобщенной синхронизации в дискретных отображениях.

В главе получена аналитическая зависимость порога возникновения полной синхронизации от коэффициента взаимности связи, справедливая как для потоковых систем, так и дискретных отображений. В частности, установлено, что в случае взаимодействия двух систем с идентичными управляющими параметрами порог возникновения полной синхронизации целиком определяется степенью α влияния второй системы на первую и находится с ней в следующей зависимости:

$$\varepsilon^\alpha \sim \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что пороги установления полной синхронизации в системах с однонаправленным ε^1 ($\alpha = 0$) и взаимным ε^2 ($\alpha = 1$) типами связи находятся в соотношении:

$$\frac{\varepsilon^1}{\varepsilon^2} = \frac{2}{1}. \quad (2)$$

Для других типов синхронного поведения соотношения (1)–(2) нарушаются, однако, в области относительно слабых значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем пороги фазовой синхронизации и синхронизации с запаздыванием потоковых систем и полной синхронизации дискретных отображений все же примерно удовлетворяют установленной закономерности. Кроме того, независимо от величины расстройки между системами, границы вышеупомянутых типов синхронного поведения снижаются с ростом коэффициента взаимности связи.

Отдельно рассмотрен вопрос о существовании режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах. Как упоминалось выше, понятие обобщенной синхронизации до настоящего времени было введено в рассмотрение только для однонаправлено связанных систем¹⁰. Поэтому этот режим был, прежде всего, расширен на случай взаимной связи между системами. В рамках первой главы диссертационной работы предложена универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух однонаправлено, так и взаимно связанных потоковых систем и дискретных отображений, находящихся в хаотическом режиме. Под режимом обобщенной синхронизации в данном случае понимается установление функционального соотношения $\mathbf{F}[\cdot]$ между состояниями взаимодействующих систем $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$, которое с учетом взаимного влияния систем друг на друга запишется в виде

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)] = 0. \quad (3)$$

Показано, что установление обобщенной синхронизации в таких системах связано с переходом второго (положительного) показателя Ляпунова в область

¹⁰N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. E 51 (2) (1995) 980

отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Рисунок 1 иллюстрирует работоспособность этих методов на примере двух взаимно связанных систем Ресслера. Здесь приведены зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε (*a*) (момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений ε_{LE} показан стрелкой) и фазовые портреты взаимодействующих систем при различных ε (*b-u*). На фазовых портретах первой системы $\mathbf{x}(t)$ (рисунок 1, *b, z, e, z*) приведены также три случайно выбранные точки \mathbf{x}^k и их ближайшие соседи \mathbf{x}^{kn} . Рисунки 1, *в, d, ж, u* иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$. Нетрудно заметить, что при малых значениях параметра связи все точки в фазовом пространстве второй системы распределены случайным образом по всему аттрактору (рисунок 1, *в*). При увеличении параметра связи точки начинают группироваться в ограниченном диапазоне аттрактора, что соответствует режиму фазовой хаотической синхронизации, причем радиус этой области уменьшается с ростом параметра связи (сравните рисунки 1, *d, ж*). При $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ все состояния второй системы, соответствующие ближайшим соседям первого осциллятора, оказываются также близкими и наоборот (рисунок 1, *e, ж* и рисунок 1, *z, u*), что доказывает возникновение обобщенной синхронизации. Аналогичные результаты получены для других потоковых систем (генераторов на туннельном диоде) и дискретных отображений (логистических отображений, отображений Эно).

По аналогии с другими рассмотренными типами синхронного поведения, в данной главе диссертации проанализирована зависимость границы возникновения обобщенной хаотической синхронизации от степени взаимности связи на примере потоковых систем и дискретных отображений. Показано, что тенденция к уменьшению порогового значения установления синхронного режима с ростом коэффициента взаимности связи по-прежнему наблюдается, однако, установить какой-либо закон как в области относительно больших, так и относительно слабых значений расстройки собственных частот представляется затруднительным. Более того, для двух связанных осцилляторов Ресслера с сильно различающимися параметрами имеет место слабая зависимость порога установления синхронного режима от коэффициента взаимности связи.

Во **второй главе** диссертационной работы представлены результаты исследования поведения спектра показателей Ляпунова при установлении различных типов синхронного поведения в связанных потоковых системах и дискретных отображениях при изменении параметра связи между ними.

В первой части второй главы исследован переход одного из нулевых показателей Ляпунова в область отрицательных значений как в системах, демон-

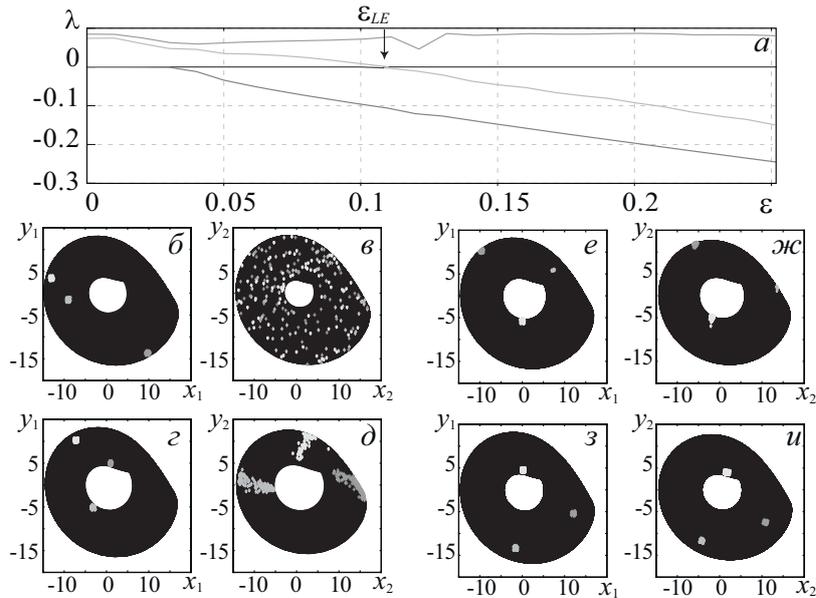


Рисунок 1 — (а) Зависимость четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε для системы двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера $\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2})$, $\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}$, $\dot{z}_{1,2} = p + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$, $\omega_1 = 0.99$, $\omega_2 = 0.95$, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в отрицательную область $\varepsilon_{LE} = 0.106$ показан стрелкой. (б–и) Фазовые портреты осцилляторов Ресслера для различных значений параметра связи: (б–в) $\varepsilon = 0.01$ (асинхронное состояние); (г–д) $\varepsilon = 0.05$ (режим фазовой синхронизации); (е–ж) $\varepsilon = 0.12$ (режим обобщенной синхронизации); (з–и) $\varepsilon = 0.18$ (режим синхронизации с запаздыванием). На рисунках (б, г, е, з) приведены хаотические аттракторы первой системы $\mathbf{x}(t)$ с тремя случайно выбранными точками \mathbf{x}^k и их ближайшими соседями \mathbf{x}^{kn} . Рисунки (в, д, ж, и) иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$

стрирующих периодическую динамику (отображение окружности на себя, осциллятор Ван дер Поля), находящихся под действием шума, так и связанных хаотических системах (однаправлено связанные системы Ресслера). Показано, что переход одного из нулевых показателей Ляпунова в область отрицательных значений в таких системах происходит до момента установления режима фазовой синхронизации, причем в системах с периодической динамикой добавление шума приводит к уменьшению значения управляющего параметра, соответствующего этому переходу. В рассмотрение введены локальные условные показатели Ляпунова λ_l отдельно для ламинарных и турбулентных фаз и изучено их распределение на плоскости “значение условного показателя Ляпунова — длительность фазы”. На основании проведенных исследований установлено, что за отрицательность условного нулевого показателя Ляпунова отвечают ламинарные фазы: распределение локальных условных показателей Ляпунова на плоскости “значение показателя — длительность фазы” сдвигается в область отрицательных значений, в то время как рас-

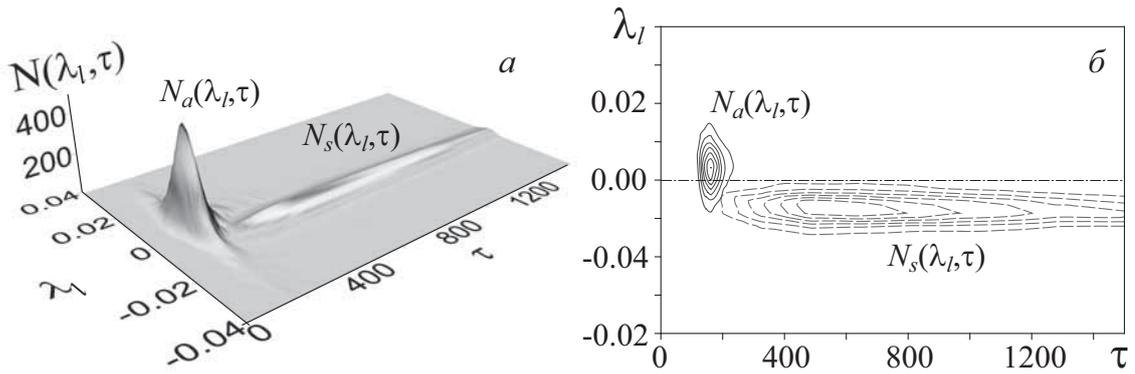


Рисунок 2 — (а) Распределения локальных показателей Ляпунова, полученных для синхронных и асинхронных фаз хаотических колебаний однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера $\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_1 - x_{1,2})$, $\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}$, $\dot{z}_{1,2} = p + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$, $\omega_1 = 0.93$, $\omega_2 = 0.95$, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Значение параметра связи $\varepsilon = 0.034$, условный показатель Ляпунова $\Lambda_0 = -0.037$. (б) Проекция распределений синхронных $N_s(\lambda_l, \tau)$ и асинхронных $N_a(\lambda_l, \tau)$ фаз на плоскость (τ, λ_l)

пределение соответствующих показателей Ляпунова для турбулентных фаз остается практически симметричным относительно нуля. Эта ситуация проиллюстрирована на рисунке 2, где приведены распределения локальных нулевых показателей Ляпунова для двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера. Отрицательность условного нулевого показателя Ляпунова является следствием синхронизма, наблюдающегося в определенные моменты времени вблизи границы установления режима фазовой синхронизации, где полностью синхронный режим еще не наступил.

Интересным следствием из полученных результатов является тот факт, что два идентичных периодических осциллятора, находящиеся под внешним периодическим воздействием, но не синхронизованные им, должны демонстрировать идентичное поведение при добавлении шума, в то время как в отсутствие шума их динамика должна отличаться. Это обуславливается тем, что в этом случае условный нулевой показатель Ляпунова является старшим и его отрицательность при добавлении шума свидетельствует об установлении режима индуцированной шумом синхронизации. В данном случае для того, чтобы подчеркнуть факт неавтономного поведения, целесообразно говорить о неавтономной индуцированной шумом синхронизации. В рамках второй главы диссертационной работы на примере двух несвязанных генераторов Ван дер Поля, находящихся под внешним воздействием, в отсутствие синхронизации, изучен вопрос о возможности установления в этой системе режима неавтономной синхронизации, индуцированной шумом. Проанализирована длительность установления синхронного режима и ее зависимость от интенсивности шума. Показано, что средняя длительность переходного про-

цесса зависит как от величины интенсивности шума (обратно пропорционально), так и от того, какое воздействие оказывается на исследуемую систему: гармоническое и стохастическое одновременно или только стохастическое.

Дальнейшее изложение этой главы посвящено результатам исследования закономерностей перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. В качестве объекта исследования выбраны два однонаправленно связанных логистических отображения. Показано, что переход условного показателя Ляпунова через нуль происходит немного раньше установления режима обобщенной хаотической синхронизации, определенной с помощью метода вспомогательной системы. В той области, где соответствующий условный показатель отрицателен, но режим обобщенной синхронизации еще не наступил, имеет место перемежающееся поведение. Установлено, что, как и в случае нулевого показателя Ляпунова, отрицательность старшего (положительного) условного показателя Ляпунова является следствием синхронизма, наблюдающегося в определенные периоды времени, что соответствует ламинарным фазам поведения, в то время как в турбулентных фазах старший условный показатель Ляпунова положителен и близок к нулю.

Также во второй главе диссертации рассмотрен еще один режим, детектирование которого возможно по моменту перехода старшего показателя Ляпунова через ноль, — режим синхронизации, индуцированной шумом, в хаотических системах. Проведено исследование перехода к этому типу синхронизации. На примере одномерных отображений (логистическое и экспоненциальное отображения) и потоковых систем (осцилляторы Лоренца), демонстрирующих хаотическую динамику, находящихся под воздействием общего источника шума, установлено, что на границе этого типа синхронного поведения имеет место перемежаемость типа “on-off”¹¹, при этом распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется степенному закону $N(\tau) \sim \tau^{-3/2}$, а зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности ε удовлетворяет закономерности $\langle \tau \rangle \sim \varepsilon^{-1}$. На рисунке 3 приведены распределение длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$ (б) для двух логистических отображений, находящихся под общим источником шума¹², а также соответствующие аппроксимации. Из рисунков видно, что полученные характеристики с хорошей степенью точности подчиняются степенным законам в четком соответствии с известными закономерностями для перемежаемости типа “on-off”.

Третья глава диссертационной работы посвящена детальному изучению

¹¹С.М. Kim, Phys. Rev. E 56 (3B) (1997) 3697–3700.

¹²А.Е. Hramov, А.А. Koronovskii, О.И. Moskalenko, Phys. Lett. A 354 (5–6) (2006) 423–427.

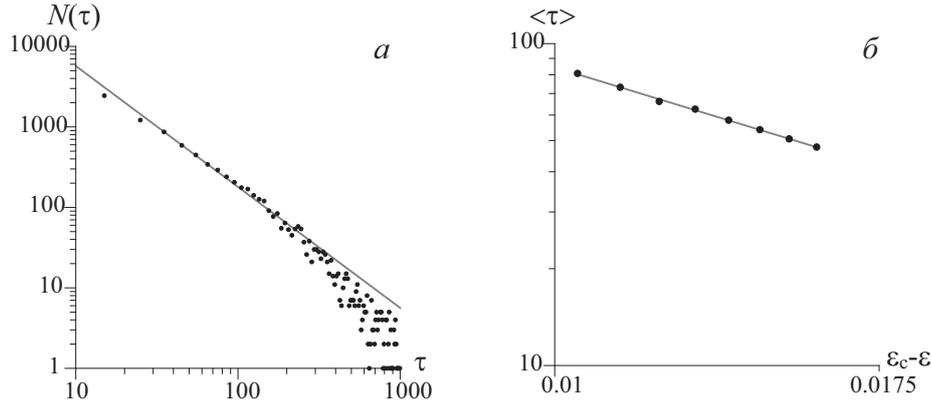


Рисунок 3 — Распределение длительностей ламинарных фаз (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ (б) логистических отображений¹¹, находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами, характерными для перемежаемости типа “on-off”. Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями

одного из наименее изученных типов хаотической синхронизации — режима обобщенной синхронизации. В рамках настоящей главы пересмотрена и дополнена концепция обобщенной синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных потоковых системах и дискретных отображениях. Показано, что состояния взаимодействующих систем, демонстрирующих этот тип синхронного поведения, целесообразно рассматривать как связанные между собой не функциональной зависимостью, а функционалом в случае потоковых систем

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(s)], \quad t - \tau < s \leq t; \quad (4)$$

или зависимостью, зависящей от K предыдущих состояний, в случае дискретных отображений

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{F}[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_{n-K}]. \quad (5)$$

Иными словами, состояние одной из взаимодействующих хаотических систем определяется не только состоянием другой системы в данный момент времени, но и его “предысторией”, длительность которой обратно пропорциональна величине показателя Ляпунова, отвечающего за сходимость фазовых траекторий. Предложен подход для анализа обобщенной синхронизации в таких системах, основанный на рассмотрении трубок траекторий в фазовом пространстве, для определения порога возникновения обобщенной синхронизации и изучения данного типа синхронного поведения в системах с дискретным и непрерывным временем. Данный подход представляет собой модификацию метода ближайших соседей⁵ с тем лишь отличием, что близкими считаются только те состояния, которые будут оставаться близкими на всей длине

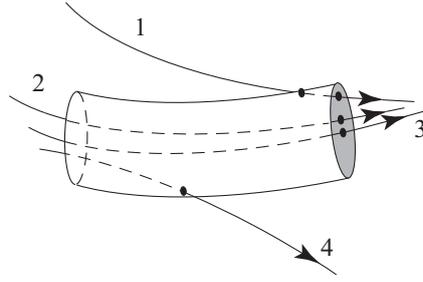


Рисунок 4 — Фазовая трубка и фазовые траектории одной из взаимодействующих систем

“предыстории” (длине фазовой трубки). Например, на рисунке 4, где представлены фазовые траектории одной из взаимодействующих систем, опорные траектории 3 и 1 являются близкими в рассматриваемый момент времени t (показан серым), но с различной “предысторией”. Траектории 2 и 3 удовлетворяют условию близости и имеют сходную “предысторию”. Траектория 4 не является близкой к траекториям 1-3 в момент времени t .

Учет предыстории приводит к тому, что векторы \mathbf{y}_J состояния одной из взаимодействующих систем, будут однозначно определяться векторами \mathbf{x}_J состояния другой системы, причем связь между ними должна выражаться соотношением $\delta \mathbf{z}_J = \delta \mathbf{y}_J = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_J$, полученным путем линеаризации соотношения (4) для потоковых систем [соотношения (5) для дискретных отображений]. Рисунок 5 иллюстрирует вышесказанное на примере двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера. Здесь представлены векторы \mathbf{y}_J и \mathbf{z}_J для случаев, когда используются все ближайшие соседи (а) и только точки, прошедшие через фазовую трубку длиной τ (б). Из рисунка видно, что в первом случае вектора возмущений \mathbf{z}_J и \mathbf{y}_J достаточно сильно отличаются друг от друга (рисунок 5,а), в то время как вычисленные вектора возмущений \mathbf{z}_J для точек, прошедших через трубку, находятся в хорошем соответствии с векторами \mathbf{y}_J (рисунок 5,б), что доказывает предположение о необходимости принятия во внимание предыстории. Аналогичные результаты получены также для генераторов на туннельном диоде, связанных взаимно, а также однонаправлено связанных логистических отображений и взаимно связанных отображений Эно. При этом установлено, что метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы (последний — только для однонаправлено связанных систем) оказываются по-прежнему справедливыми, в то время как при использовании метода ближайших соседей целесообразно принимать во внимание “предысторию” состояний взаимодействующих систем.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и намечены направления дальнейших исследований в данном направлении.

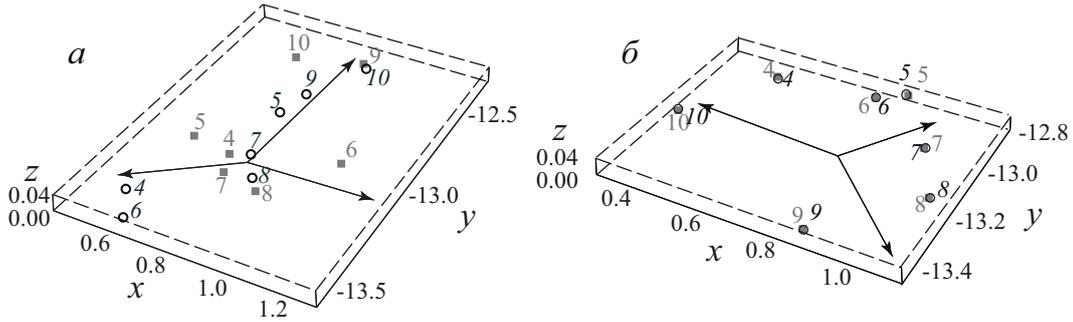


Рисунок 5 — Векторы \mathbf{y}_J (■) состояний ведомой системы Ресслера из $\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_1 - x_{1,2})$, $\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}$, $\dot{z}_{1,2} = p + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$, $\omega_1 = 0.99$, $\omega_2 = 0.95$, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, и соответствующие им векторы возмущений \mathbf{z}_J (○), вычисленные с учетом выполнения соотношения (4), при $\varepsilon = 0.3$ для всех ближайших соседей (а) и для точек, прошедших через трубку длиной $\tau = 100$ (б). Номера векторов J показаны прямым шрифтом и курсивом, соответственно

Основные результаты и выводы

1. Получена аналитическая зависимость порога возникновения полной синхронизации от коэффициента взаимности связи между системами. Показано, что в области относительно слабых значений расстройки собственных частот режимы фазовой синхронизации и синхронизации с запаздыванием потоковых систем приближенно подчиняются установленной закономерности.
2. Предложена концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для однонаправлено, так и взаимно связанных потоковых систем и дискретных отображений, демонстрирующих хаотическую динамику. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации в таких системах связано с переходом одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений.
3. Выявлены закономерности поведения спектра показателей Ляпунова при установлении различных типов хаотической синхронизации. В рассмотрение введены локальные условные показатели Ляпунова отдельно для ламинарных и турбулентных фаз. Показано, что за отрицательность положительного и нулевого условных ляпуновских показателей отвечают одинаковые механизмы.
4. Обнаружен новый тип синхронного поведения — неавтономная индуцированная шумом синхронизация. Показано, что возникновение этого режима возможно как при одновременном воздействии внешнего сигнала и шума, так и при отдельном влиянии на систему только стохастического сигнала. Установлено, что средняя длительность установления

синхронного режима обратно пропорциональна интенсивности шумового воздействия.

5. Обнаружено перемежающееся поведение на границе синхронизации, индуцированной шумом. Установлено, что в данном случае имеет место перемежаемость типа “on-off”.
6. Пересмотрена и дополнена концепция обобщенной синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях. Показано, что при установлении обобщенной синхронизации векторы состояний взаимодействующих систем следует рассматривать, как связанные функционалом, а не функциональным соотношением.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

- [1] Шурыгина С.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. Хаотическая синхронизация в отображениях и потоках. Взаимосвязь различных типов синхронного поведения, показатели Ляпунова, перемежаемость. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, Dudweiler Landstr. 99, 66123. 2011.
- [2] Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E. Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization // Chaos, Solitons and Fractals. 2013. № 46. P. 12–18.
- [3] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Обобщенная синхронизация в сетях со сложной топологией межэлементных связей // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 5. С. 507–517.
- [4] Короновский А.А., Москаленко О.И., Шурыгина С.А., Храмов А.Е. Сильная и слабая обобщенная хаотическая синхронизация // Изв. РАН. Сер. физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1495–1499.
- [5] Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А. Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации // ЖТФ. 2011. Т. 81. № 9. С. 150–153.
- [6] Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А. Поведение нелинейных систем на границе синхронизации, индуцированной шумом // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 197–208.
- [7] Короновский А.А., Москаленко О.И., Шурыгина С.А. Влияние степени взаимности связи на установление типов хаотической синхронизации // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 12. С. 1490–1500.
- [8] Короновский А.А., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Неавтономная индуцированная шумом синхронизация // Изв. РАН. Серия физическая. 2009. Т. 73. № 12. С. 1728–1731.
- [9] Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Влияние шума на поведение осцилляторов вблизи границы синхронизации // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 10. С. 1–9.

- [10] Шурыгина С.А., Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Локальные показатели Ляпунова вблизи границ синхронных режимов // Труды школы–семинара “Волны–2013”. 2013. С. 57–58.
- [11] Шурыгина С.А. Обобщенная хаотическая синхронизация в системах с взаимной связью // Труды IX Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. 2012. С. 1019–1020.
- [12] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Особенности обобщенной синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных потоковых системах и отображениях: метод фазовых трубок // Труды школы–семинара “Волны–2012”. 2012. С. 45–46.
- [13] Москаленко О.И., Иванов А.В., Яшков И.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Метод фазовых трубок для диагностики обобщенной синхронизации // Материалы III Всероссийского научно–практического форума “Экология: синтез естественно-научного, технического и гуманитарного знания”. 2012. С. 324–325.
- [14] Шурыгина С.А. Обобщенная синхронизация во взаимно связанных системах // Материалы научной школы–конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых”. 2011. С. 114–122.
- [15] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Исследование обобщенной синхронизации во взаимно связанных динамических системах и сетях со сложной топологией // Материалы IX Международной школы “ХАОС-2010”. 2010. С. 46.
- [16] Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А. Перемежающаяся индуцированная шумом синхронизация // Материалы IX Международной школы “ХАОС-2010”. 2010. С. 67.
- [17] Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A. Analysis of generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems // Book of Abstracts of 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference. 2010. P. 53–54.
- [18] Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A. Generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems // Proceedings of 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2010). 2010. P. 70–73.
- [19] Shurygina S.A. On the behavior of one of the positive Lyapunov exponent in mutually coupled chaotic oscillators // Papers from the conference for young scientists “Presenting Academic Achievements to theWorld”. 2010. P. 129–132.
- [20] Шурыгина С.А. О поведении одной из положительных ляпуновских экспонент во взаимосвязанных хаотических осцилляторах // Тезисы докладов конференции молодых ученых “Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики”. 2010. С. 135–136.
- [21] Шурыгина С.А. Индуцированная шумом синхронизация в неавтономных системах // Труды школы–семинара “Волны–2009”. 2009. С. 8–9.

- [22] Шурыгина С.А. Нелинейный феномен неавтономной индуцированной шумом синхронизации // Материалы Всероссийской научной школы для молодежи “Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах”. 2009. С. 79–81.
- [23] Шурыгина С.А. Статистические характеристики неавтономной индуцированной шумом синхронизации // Материалы Международной школы-семинара “Statinfo-2009”. 2009. С. 115–118.

ШУРЫГИНА Светлана Андреевна

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ
ХАОТИЧЕСКОЙ синхронизации и ПОВЕДЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ
синхронных РЕЖИМОВ В ПОТОКОВЫХ СИСТЕМАХ
И ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Автореферат

Подписано к печати 26.06.2013. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Гарнитура “Times”

Усл. печ. л. 1,39 (1,5). Тираж 100 экз. Заказ “...”.

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография СГУ.

410012, Саратов, Большая Казачья, 112а, корпус 8.