На правах рукописи

Кузнецов Алексей Сергеевич

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С АТТРАКТОРАМИ ТИПА СМЕЙЛА-ВИЛЬЯМСА

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на базовой кафедре динамических систем факультета нелинейных процессов

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук доцент **Исаева Ольга Борисовна**, ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», ФГБУН «Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук», старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Полежаев Андрей Александрович**, ФГБУН «Физический институт им. П.Н. Лебедева» Российской академии наук, заведующий сектором теоретических проблем биофизики
	кандидат физико-математических наук **Балякин Артем Александрович**, Федеральное государственное бюджетное учреждение Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", начальник отдела научно-технических программ и проектов Департамента информационно-аналитического обеспечения.
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.»**

Защита состоится 12 декабря 2013 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д212.243.01 по специальности 01.04.03 – радиофизика на базе ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке СГУ им. В.А. Артисевич.

Автореферат разослан 11 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, Аникин Валерий Михайлович

<u>Актуальность темы исследования</u>

Как известно, предметом радиофизики является изучение общих закономерностей генерации, передачи, приема, анализа колебаний и волн различной физической природы и разных частотных диапазонов, а также разработка их приложений. В частности, сюда относится рассмотрение физических основ генерации, усиления и преобразования колебаний и волн, процессов распространения и трансформации волн в нелинейных средах, исследование нелинейной динамики, пространственно-временного хаоса и самоорганизации в неравновесных системах.

Теория хаоса и нелинейная динамика – относительно новое направление современной науки. На протяжении нескольких последних десятилетий многие научные группы занимаются исследованиями в данной области, так как это один из наиболее интересных, перспективных, и активно развивающихся разделов фундаментальной науки.[1] Также нелинейная динамика и теория хаоса представляет интерес с практической точки зрения. В этой связи можно упомянуть такие возможные технические приложения, как шифрование сигналов, хранение и передача информации, а также фундаментальные проблемы, природа которых до конца пока не раскрыта, например, в гидродинамике, нейродинамике, биологии и многих других важнейших областях. Принципы нелинейной динамики применимы также в построении социальных, экономических, статистических моделей. Методы и инструменты нелинейной динамики сейчас подвергаются активному осмыслению, и ведется активный поиск возможных приложений.

В последнее время одним из направлений работы является создание искусственных систем с хаотической динамикой, которая обусловлена присутствием однородно гиперболических аттракторов, таких как аттрактор Смейла – Вильямса в фазовом пространстве. Отправной точкой послужила идея использовать попеременное возбуждение пары автоколебательных элементов, передающих возбуждение друг другу с тем, чтобы за полный цикл передачи возбуждения, угловая переменная (в роли которой может выступать фаза колебаний) претерпела преобразование, описываемое растягивающим отображением окружности.[2] Такие системы представляют интерес в первую очередь потому, что они характеризуются свойством структурной устойчивости, т.е. для них хаотический режим нечувствителен по отношению к изменению параметров системы и составляющих ее элементов. В теории колебаний и волн именно структурно устойчивые системы считаются предметом первоочередного анализа и наиболее важными для практики. Большинство известных систем с хаотической динамикой структурной устойчивостью не обладают.

[1] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем, изд-во Сарат. ун-та, 1999; Глас Л., Мэки М. От часов к хаосу. М., Мир, 1991; Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи, М., Физматлит, 2002; Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны, М., Физматлит, 2010; Рабинович М.И., Трубецков Д.И., Введение в теорию колебаний и волн, М., Наука, 1984; Спротт Дж.К., Элегантный хаос. М.- Ижевск, Инст. компьют. исслед., 2012.
[2] S.P. Kuznetsov, Phys. Rev. Lett., 95, 2005, 144101; S.P.Kuznetsov, A.S.Pikovsky, Physica D, 232, 2007, 87.

В качестве основы для построения дальнейших примеров систем со структурно устойчивыми гиперболическими аттракторами представляется естественным обратиться к классу систем, функционирование которых основано на принципе параметрического возбуждения, относительно просто реализуемом и давно применяющем на практике в оптике, электронике, акустике. В данном контексте представляется актуальной задача о построении и исследовании систем с гиперболической хаотической динамикой на аттракторе типа Смейла – Вильямса, основанных на принципе параметрического возбуждения.

Степень разработанности темы исследования. До последнего времени примеры систем с гиперболическим хаосом ограничивались абстрактными математическими конструкциями (соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор Смейла).[3] Задача разработки подходов к построению физических систем с гиперболическими хаотическими аттракторами с привлечением характерных для радиофизики методических приемов и понятий (нелинейные осцилляторы, автоколебания, обратная связь) в конструктивном ключе была поставлена лишь сравнительно недавно, но исследования в этом направлении уже привели к появлению достаточно большого числа примеров. [4] Это схемы на основе попеременно возбуждающихся осцилляторов, систем с запаздыванием, систем с импульсными толчками и т.д.

Один из перспективных подходов к созданию систем со структурно устойчивым гиперболическим хаосом в радиофизике может основываться на использовании принципа параметрического возбуждения колебаний. До выполнения настоящей диссертационной работы был указан и исследован путем численного моделирования единственный пример такого рода. [5] А именно, аттрактор типа Смейла – Вильямса был реализован в системе двух попеременно возбуждающихся за счет модуляции накачки параметрических генераторов, передающих возбуждение друг другу с удвоением фазовой переменной на каждом этапе. Данный подход, однако, с определенностью заслуживает гораздо более широкой проработки, поскольку параметрическое возбуждение нелинейных систем широко известно и нашло многочисленные применения в электронике, механике, акустике и других областях.[6] При этом соответствующие схемы зачастую оказываются проще в реализации в сравнении с альтернативными подходами к генерации и преобразованию колебаний и волн.

Цели и задачи работы

Целью диссертационной работы является разработка и численное исследование новых примеров систем, допускающих физическую реализацию, на основе принципа параметрического возбуждения колебаний, в которых реализо-

[3] Я.Г. Синай. В кн. Нелинейные волны, М.: Наука, 1979, с.192; L. Shilnikov, Int. J. of Bifurcation and Chaos 7, 1997, 1353; А.Ю. Лоскутов, УФН, 180 (12), 2010, 1305.
[4] С.П. Кузнецов, УФН, 181 (2), 2011, 121.
[5] С.П. Кузнецов, ЖЭТФ, 133 (2), 2008, 438
[6] У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИИЛ, М.: 1963; С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов, УФН, 88 (3), 1966, 439; Е.А.Хазанов, А.М.Сергеев, УФН, 178 (9), 2008, 1006.

валась бы грубая хаотическая динамика, обусловленная присутствием в фазовом пространстве аттракторов типа Смейла – Вильямса.

В качестве конкретных задач ставились следующие.

1) Построение и исследование модели двух нелинейных осцилляторов с параметрической связью, в которой благодаря модуляции накачки и уровня диссипации реализовался бы механизм удвоения фазы колебаний, и рассмотрение двух вариантов генераторов хаоса на этой основе, с ограничением параметрической неустойчивости за счет нелинейной диссипации и за счет истощения накачки.
2) Построение и исследование модели параметрического генератора, в котором роль угловой координаты на аттракторе Смейла – Вильямса играет переменная, отвечающая за распределение амплитуд между двумя подсистемами.
3) Построение и исследование схемы параметрического генератора хаоса, использующего запаздывающую обратную связь.
4) Модификации задачи о параметрическом возбуждении струны, в которой возникал бы аттрактор типа Смейла – Вильямса, вложенный в бесконечномерное фазовое пространство распределенной системы, и проведение численного моделирования сложной пространственно-временной динамики в этой системе.

Научная новизна

В работе впервые представлено исследование проблемы реализации грубого, структурно устойчивого хаоса для множества систем с параметрическим возбуждением, с демонстрацией соответствующих режимов путем численного моделирования.

Введена в рассмотрение и исследована в численных расчетах схема параметрического генератора гиперболического хаоса на основе двух нелинейных осцилляторов с модуляцией накачки и уровня диссипации с ограничением параметрической неустойчивости за счет нелинейной диссипации и за счет истощения накачки.

Предложена и изучена схема параметрического генератора, в котором для реализации аттрактора Смейла - Вильямса реализована предложенная в работе [7] идея растягивающего отображения для угловой переменной, управляющей распределением амплитуд двух подсистем.

Введена в рассмотрение и исследована модельная система, в которой аттрактор типа Смейла – Вильямса реализуется благодаря запаздывающей обратной связи через элемент с квадратичной нелинейностью между двумя параметрически связанными осцилляторами с модулированной накачкой.

[7] O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov, E. Mosekilde, Phys. Rev. E, 84, 2011, 016228.

Впервые предложена модификация опыта Мельде с параметрически возбуждаемой струной, где благодаря модулированной накачке, нелинейности и пространственной неоднородности удается реализовать и продемонстрировать в численных расчетах присутствие аттрактора типа соленоида Смейла – Вильямса, вложенного в фазовое пространство распределенной системы.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы определяется тем, что указан определенный класс систем, использующих принцип параметрического возбуждения колебаний, в которых реализуется грубый, структурно устойчивый хаос. Они представляют собой практическое осуществление объектов теории гиперболических динамических систем, хорошо развитой в математическом плане, но не имевшей до последнего времени реальных приложений. Практическая значимость работы определяется тем, что она открывает возможность создания параметрических генераторов хаоса, обладающих структурной устойчивостью, т.е. нечувствительностью к изменению параметров и характеристик систем и их элементов, что является принципиальным преимуществом с точки зрения возможных приложений хаоса.

Методология и методы исследования

В работе использованы методы и подходы, развитые в теории колебаний и волн. Для конструирования схем с гиперболическим хаосом привлечены принципы радиофизики и теории колебаний, включая модуляцию параметров, введение дополнительных обратных связей, принцип параметрического возбуждения. В качестве математических моделей использованы неавтономные нелинейные дифференциальные уравнения, уравнения с запаздыванием, уравнения в частных производных. Для численного решения уравнений использованы разработанные в литературе методы, для которых обоснованы сходимость и устойчивость (метод Рунге-Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений и его обобщение на уравнения с запаздыванием, схема «крест», для уравнений в частных производных). Применены методы компьютерного исследования хаотической динамики, в том числе построение фазовых портретов аттракторов и расчеты показателей Ляпунова.

Положения, выносимые на защиту

1) Грубый гиперболический хаос, обусловленный аттрактором Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре, осуществим в системе двух параметрически связанных нелинейных осцилляторов, частоты которых различаются вдвое, при подходящей модуляции накачки и параметров диссипации, когда ограничение параметрической неустойчивости определяется нелинейной диссипацией или истощением накачки.

2) Хаотическая амплитудная динамика, связанная с присутствием аттрактора типа Смейла – Вильямса, реализуема в параметрически возбуждаемой системе, где роль угловой переменной, претерпевающей растяги-

вающее отображение, играет величина, отвечающая за распределение амплитуд между двумя осцилляторами.

3) Параметрический генератор грубого хаоса можно построить на основе классического параметрического генератора, составленного из двух осцилляторов с различающимися вдвое рабочими частотами, введением периодической модуляции накачки и добавлением дополнительной цепи запаздывающей обратной связи, содержащей квадратичный нелинейный элемент.
4) Гиперболический хаос, соответствующий аттрактору типа Смейла – Вильямса, вложенному в бесконечномерное фазовое пространство распределенной системы, возникает в модифицированной задаче о параметрическом возбуждении струны с диссипацией, характеризуемой кубической нелинейностью, при наличии накачки попеременно на различающихся в три раза частотах и пространственной неоднородности.

Достоверность результатов работы определяется постановкой задач на базе строгих концепций математической теории динамических систем, применением апробированных в радиофизике подходов к конструированию схем с параметрическим возбуждением, соответствием качественного физического описания и компьютерного анализа сложной динамики, использованием схем численного решения уравнений, обеспечивающих аппроксимацию и устойчивость при тестированном надлежащим образом выборе шагов интегрирования.

Личный вклад соискателя. Все включенные в диссертацию результаты получены лично автором, осуществлявшим выработку методик решения задач, программирование и проведение численных расчетов. Постановка задач и интерпретация результатов выполнялись совместно с научным руководителем и другими соавторами совместных опубликованных работ.

Публикации и апробация

Основные результаты диссертации были представлены докладами на X международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2010 г.), XVI научной школе «Нелинейные волны» (Нижний Новгород, 2012 г.), на IV, VI, VII и VIII Всероссийских конференциях молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2009, 2011-2013 гг.), на ежегодных научных школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2009–2011 гг.), а также на научных семинарах базовой кафедры динамических систем СГУ.

Частично результаты диссертации получены в процессе выполнения работ по грантам РФФИ № 12-02-31342, 12-02-00541 и гранту Президента РФ для молодых ученых МК-905.2010.2.

По результатам диссертации опубликовано 12 работ [1-12], из них статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК – 5, статей в сборниках и тезисов докладов – 7.

Структура и объем работы. Работа содержит 115 страниц, из них 90 страниц основного текста, 25 страниц иллюстраций и список литературы из 67 наименований на 7 страницах.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, и заключения.

Во Введении обсуждается актуальность, научная новизна и значимость результатов работы, изложено ее краткое содержание, приводятся сведениия о публикациях и апробации.

В четырех главах предлагаются принципы построения систем, в которых параметрическая генерация хаоса обусловлена присутствием аттракторов типа Смейла – Вильямса, благодаря чему имеет место свойство грубости, или структурной устойчивости – генерируемый хаос оказывается нечувствительным по отношению к изменению параметров системы. Обсуждается несколько подходов к построению параметрических генераторов хаоса, для каждого из которых рассмотрены механизмы динамики, приводятся и анализируются результаты численного моделирования. Первые две главы посвящены параметрическим системам, фазовое пространство которых имеет конечную размерность и которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В оставшихся главах излагаются результаты, относящиеся к распределенным системам, фазовое пространство которых бесконечномерное, и которые описываются уравнениями с запаздыванием и уравнениями с частными производными.

В первой главе рассмотрено два варианта построения систем, использующих принцип параметрического возбуждения колебаний [5,8,11,12].

В первом случае система строится на базе двух осцилляторов с модулированной добротностью, рабочие частоты которых отличаются вдвое, а возбуждение производится импульсами накачки на тройной частоте, с периодом следования, равным периоду модуляции добротности. Временная эволюция составлена из четырех периодически повторяемых стадий. На первой стадии осуществляется параметрическое возбуждение осцилляторов в присутствии нелинейной диссипации, на второй стадии происходит затухание второго осциллятора, на третьей – взаимодействие осцилляторов через квадратичную нелинейность, и на четвертой – затухание первого осциллятора. Передача возбуждения к осциллятору удвоенной частоты на новой стадии активности происходит через квадратичный нелинейный элемент. Насыщение параметрической неустойчивости осуществляется благодаря присутствию нелинейной диссипации. Динамику системы можно представить парой уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= f_1(t)(\kappa y \sin\omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3) - \alpha_1 f_4(t)\dot{x} + 2\varepsilon f_3(t) xy,\\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= f_1(t)(\kappa x \sin\omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3) - \alpha_2 f_2(t)\dot{y} + \varepsilon f_3(t) x^2,\end{aligned} \tag{1}$$

где $f_n(t)$=1, если n=4{t/T}, в других случаях $f_n(t)$=0, κ – параметр накачки системы, ε – квадратичный элемент связи, α – линейная диссипация, β – нелинейная диссипация.

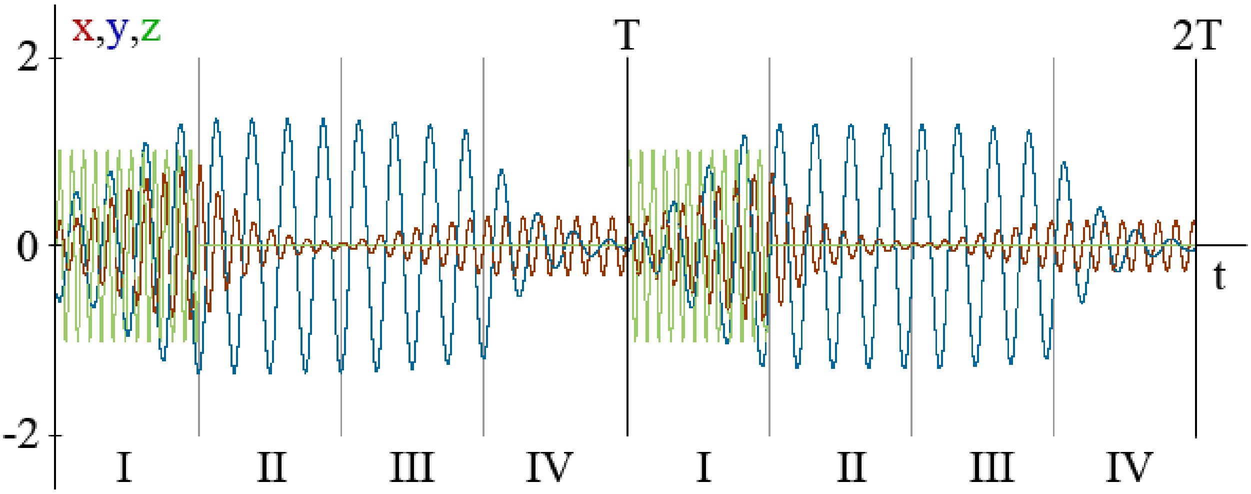


Рис.1. Зависимость сигналов осцилляторов и накачки от времени на протяжении двух полных периодов модуляции параметров в системе (1) при $\omega_1=2\pi$, $\omega_2=4\pi$, $\omega_3=6\pi$, $T=16$, $\alpha_{1,2}=1.6$, $\beta_{1,2}=0.02$, $\varepsilon=2.2$, $\kappa=25$

На рис.1 показана зависимость переменных x, y и сигнала накачки z от времени. Трансформация фазы колебаний за четыре стадии дается растягивающим отображением окружности, или отображением Бернулли, динамика которого хаотическая. Численные расчеты подтверждают, что в фазовом пространстве четырехмерного отображения, описывающего изменение состояния за период модуляции, имеет место аттрактор типа Смейла – Вильямса.

Второй рассмотренный вариант параметрического генератора хаоса работает по аналогичному принципу, но накачка осуществляется через посредство дополнительно введенного в схему третьего осциллятора, и амплитуда возбуждающихся параметрических колебаний ограничивается за счет истощения энергии осциллятора накачки. Функционирование происходит в отсутствии нелинейной диссипации, которую в данном случае вводить не требуется, что, как можно полагать, делает схему проще с точки зрения возможной практической реализации.

Во второй главе предлагается параметрический генератор хаоса с аттрактором типа Смейла – Вильямса, в котором роль угловой координаты, претерпевающей растяжение на последовательных шагах динамики во времени, играет специальная переменная, характеризующая распределение амплитуд между двумя взаимодействующими подсистемами[4,8,9].

Пусть имеем два осциллятора с комплексными амплитудами a_1 и a_2, взаимодействующих с осциллятором накачки амплитуды a_3. Если потери и внешние источники энергии отсутствуют, то при надлежащей нормировке амплитуд можно записать соотношение $|a_1|^2+|a_2|^2=|a_3|^2$, выражающее закон сохранения энергии. Полагая $|a_1|^2=|a_3|^2\cos^2\theta, |a_2|^2=|a_3|^2\sin^2\theta$, вводим угловую координату θ, характеризующую в каждый момент времени распределение энергии между осцилляторами 1 и 2.

Каждая из двух подсистем, из которых построена схема, состоит из трех осцилляторов, один из которых является осциллятором накачки. Осцилляторы накачки возбуждаются попеременно от общего источника, параметрически раскачивая осцилляторы своей подсистемы. Взаимодействие подсистем происходит также попеременно, с нелинейным преобразованием и трансформацией амплитуды колебаний, динамика которой оказывается хаотической.

В первом варианте системы угловая переменная претерпевает утроение только при передаче возбуждения от второй подсистемы к первой (рис.2а). Динамика системы описывается шестью уравнениями в терминах медленных амплитуд:

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_1 = a_1^* a_3 - \gamma a_1 + \varepsilon(|b_1|^2 - 3|b_2|^2)b_1, && \dot{b}_1 = b_1^* b_3 - \gamma b_1 + \varepsilon a_1,\\
&\dot{a}_2 = a_2^* a_3 - \gamma a_2 + \varepsilon(|b_2|^2 - 3|b_1|^2)b_2, && \dot{b}_2 = b_2^* b_3 - \gamma b_2 + \varepsilon a_2,\\
&\dot{a}_3 = -a_1^2 - a_2^2 - \gamma a_3 + \kappa\xi(t), && \dot{b}_3 = -b_1^2 - b_2^2 - \gamma a_3 + \kappa\xi(t+T),
\end{aligned} \qquad (2)$$

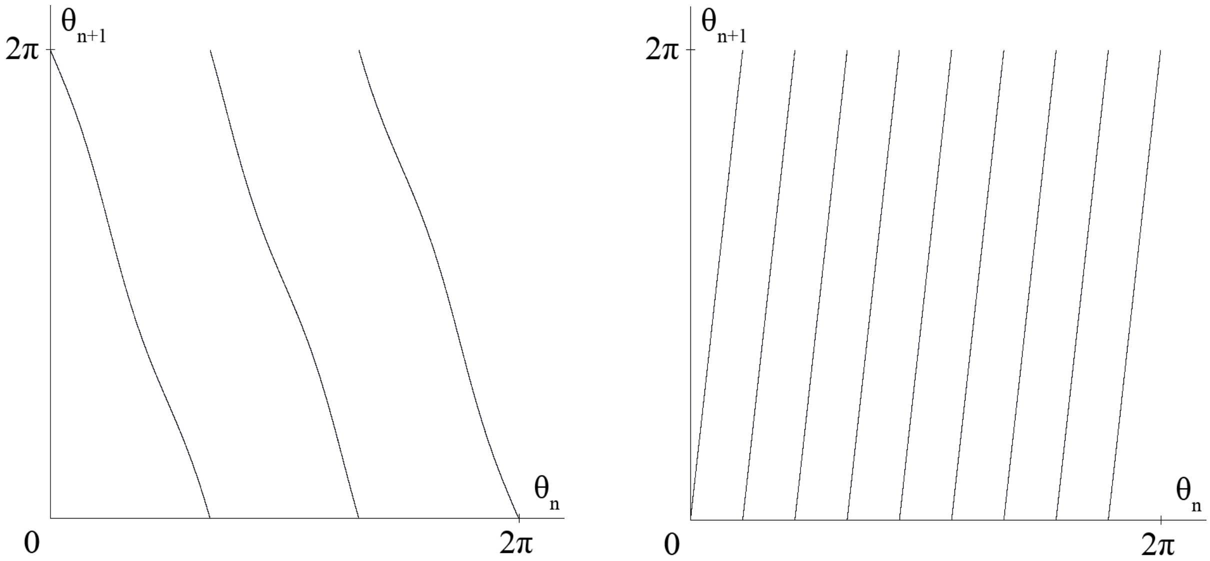
где величины $a_{1,2,3}$ и $b_{1,2,3}$ относятся к осцилляторам первой и второй подсистем, параметр κ характеризует интенсивность накачки, γ – параметр затухания, T – полный период функционирования системы, ε – параметр, отвечающий за передачу сигнала от одной подсистемы к другой с преобразованием на кубической нелинейности.

Во втором варианте системы преобразование амплитуд с утроением угловой переменной на нелинейности происходит при передаче возбуждения как от первой подсистемы ко второй, так и в обратном направлении. Таким образом, величина θ, отвечающая за распределение амплитуд между осцилляторами, претерпевает девятикратное преобразование на каждом полном периоде функционирования системы (рис.2б). Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_1 = a_1^* a_3 - \gamma a_1 + \varepsilon(|b_1|^2 - 3|b_2|^2)b_1, && \dot{b}_1 = b_1^* b_3 - \gamma b_1 + \varepsilon(|a_1|^2 - 3|a_2|^2)a_1,\\
&\dot{a}_2 = a_2^* a_3 - \gamma a_2 + \varepsilon(|b_2|^2 - 3|b_1|^2)b_2, && \dot{b}_2 = b_2^* b_3 - \gamma b_2 + \varepsilon(|a_2|^2 - 3|a_1|^2)a_2,\\
&\dot{a}_3 = -a_1^2 - a_2^2 - \gamma a_3 + \kappa\xi(t), && \dot{b}_3 = -b_1^2 - b_2^2 - \gamma b_3 + \kappa\xi(t+T)
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\xi(t) = 1,\ 0 < t \le T/2$, $\xi(t) = 0,\ T/2 \le t < T$, и $\xi(t+T) = \xi(t)$.

В фазовом пространстве системы присутствует аттрактор типа Смейла – Вильямса, который характеризуется растяжением по одному из направлений и сжатием по остальным, в конкретном случае растяжение происходит по угловой координате: втрое в первой системе и в девять раз – во второй.



(а) (б)

Рис.2. Диаграмма для угловой переменной в системах, описываемых уравнениями (2) (а) и (3) (б) при κ=2, ε=0.1, T=20, γ=1

.

В третьей главе представлена система с запаздыванием [2,3,8]. Это генератор хаоса на основе двух параметрически связанных осцилляторов, частоты которых различаются вдвое. Элемент, обеспечивающий связь, подвергается воздействию накачки на третьей гармонике основной частоты с модуляцией по амплитуде. Кроме того, взаимодействие между осцилляторами также осуществляется через цепь с запаздыванием и квадратичным элементом связи. При этом на каждом очередном периоде модуляции возбуждение осциллятора удвоенной частоты стимулируется сигналом от осциллятора основной частоты, претерпевшим квадратичное нелинейное преобразование и задержку во времени (рис.3).

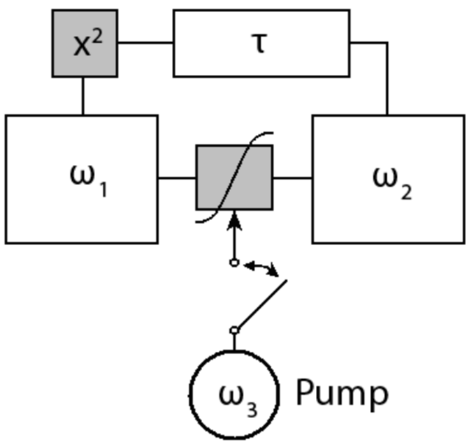


Рис.3. Блок-схема параметрического генератора хаоса с запаздыванием.

Описать динамику системы можно двумя уравнениями второго порядка.

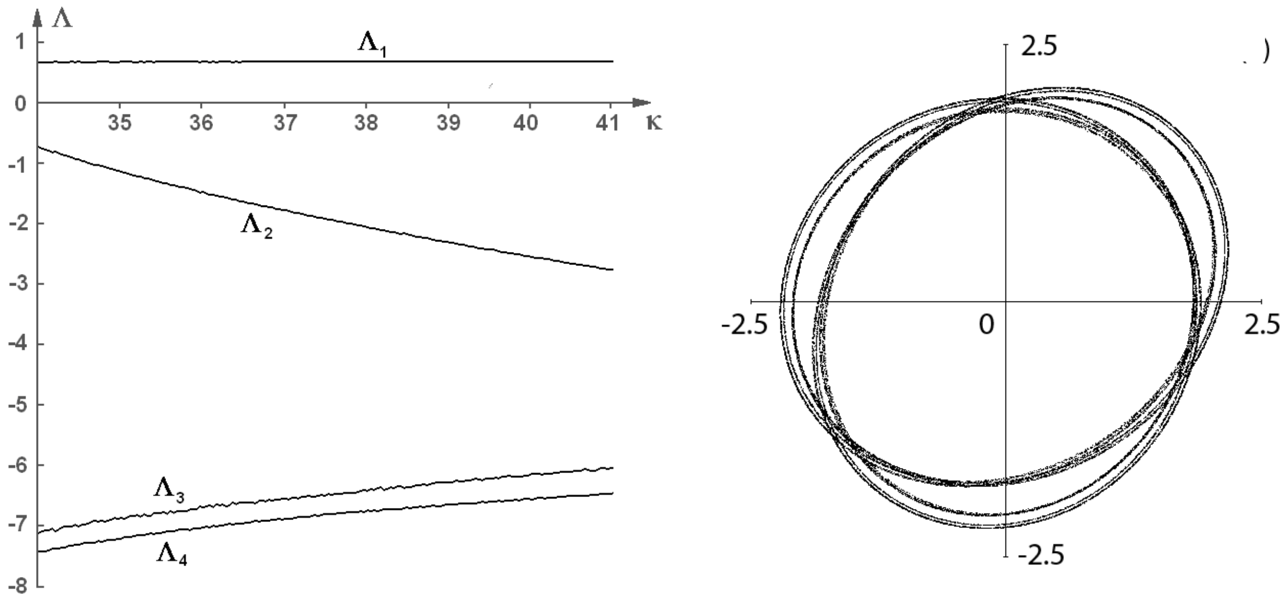
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \kappa x_2 f(t) \sin \omega_3 t - \alpha_1 \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{x}_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \kappa x_1 f(t) \sin \omega_3 t - \alpha_2 \dot{x}_2 - \beta_2 \dot{x}_2^3 + \varepsilon x_1^2 (t-\tau), \end{aligned} \qquad (4)$$

где функция $f(t) = \cos^2(\pi t / T)$ характеризует модуляцию сигнала накачки, κ – параметр накачки, $\alpha_{1,2}$ – параметры, определяющие линейную диссипацию в осцилляторах, $\beta_{1,2}$ – параметры нелинейной диссипации, ε – параметр взаимодействия осцилляторов через квадратичную нелинейность с задержкой τ, которая определяется как половина периода функционирования системы.

В роли угловой координаты выступает величина фазы сигнала, хаотическая динамика которой обусловлена удвоением при преобразовании на квадратичном элементе связи при передаче возбуждения от второго осциллятора к первому через цепь запаздывающей обратной связи.

Первый показатель Ляпунова является положительным, и сохраняет значение при вариации параметров, что говорит о структурной устойчивости системы. На рис.4а приведена зависимость показателей Ляпунова от параметра накачки, положительный показатель практически не изменяется при вариации величины параметра κ, остальные остаются стабильно отрицательными.

На основе качественного анализа и результатов численного моделирования делается заключение, что хаотическая динамика в системе отвечает странному аттрактору, который представляет собой разновидность соленоида Смейла – Вильямса (рис.4б), вложенного в бесконечномерное пространство состояний системы с запаздыванием.



(а) (б)

Рис.4. Зависимости показателей Ляпунова от параметра накачки при $\omega_1=2\pi$, $\omega_2=4\pi$, $\omega_3=6\pi$, $T=20$, $\tau=10$, $\varepsilon = 1$, $\alpha_{1,2} = 1$, $\beta_{1,2} = 0.0015$, $\kappa=35$ (а) и портрет аттрактора для стробоскопического отображения в фазовом пространстве системы (б).

В четвертой главе показано, как можно реализовать хаотические колебания, ассоциирующиеся с аттрактором типа Смейла – Вильямса при параметрическом возбуждении струны [1,2,6,7].

Рассмотрена модель, описываемая уравнением

$$\rho y_{tt} = G y_{xx} - (\alpha + y^2) y_t - \gamma y,$$

где сила натяжения колеблется по закону

$$G(t) = T_0 \cdot [1 + a_2(t)\sin 2\omega_0 t + a_6(t)\sin 6\omega_0 t].$$

При этом $a_2(t) = a_2^0 \sin^2 \pi(t - \frac{1}{4})/T$, $a_6(t) = a_6^0 \cos^2 \pi(t - \frac{1}{4})/T$, а распределение массы задано выражением $\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x)$, $k_0 = \omega_0 / c_0$, $c_0 = \sqrt{T_0 / \rho_0}$.

Проведено численное решения уравнения в частных производных, описывающего кольцевой систему длины L с использованием схемы «крест», второго порядка аппроксимации по пространственному и временному шагу. Показано, что при подходящем выборе параметров в системе с периодическими граничными условиями поочередно возбуждаются длинноволновые и коротковолновые структуры, пространственная фаза которых меняется от одного периода модуляции к другому (рис.5а). Фаза колебаний во времени при этом жестко привязана к фазе накачки, а пространственная фаза стоячих волн за период модуляции накачки претерпевает троекратно растягивающее отображение окружности (рис.5б). Это согласуется с результатами расчета показателей Ляпунова, наибольший из которых для отображения за период модуляции накачки близок к величине $\ln 3$, а остальные отрицательные. Портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость соответствует по виду соленоиду Смейла – Вильямса (рис.5в).

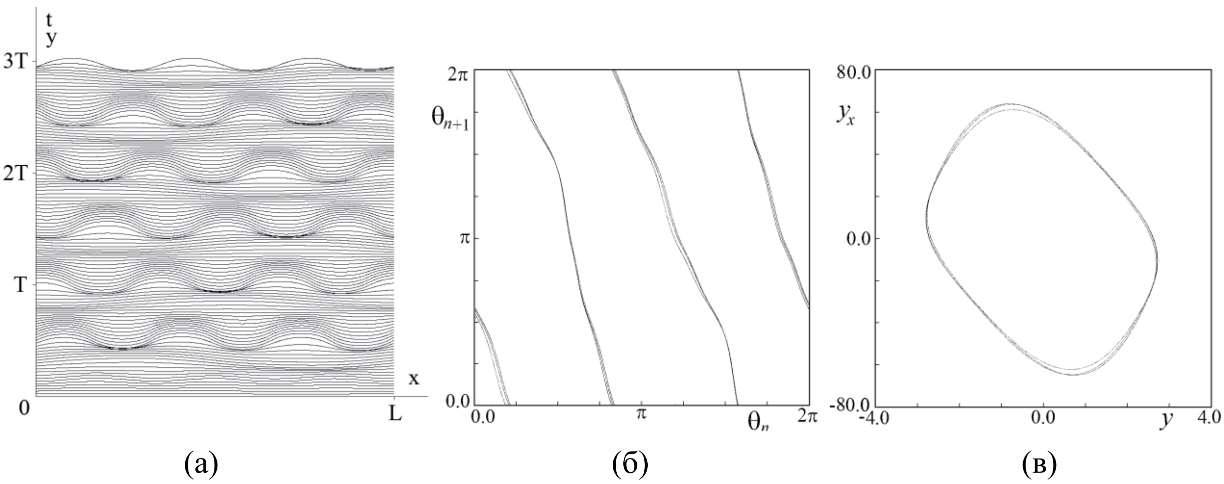
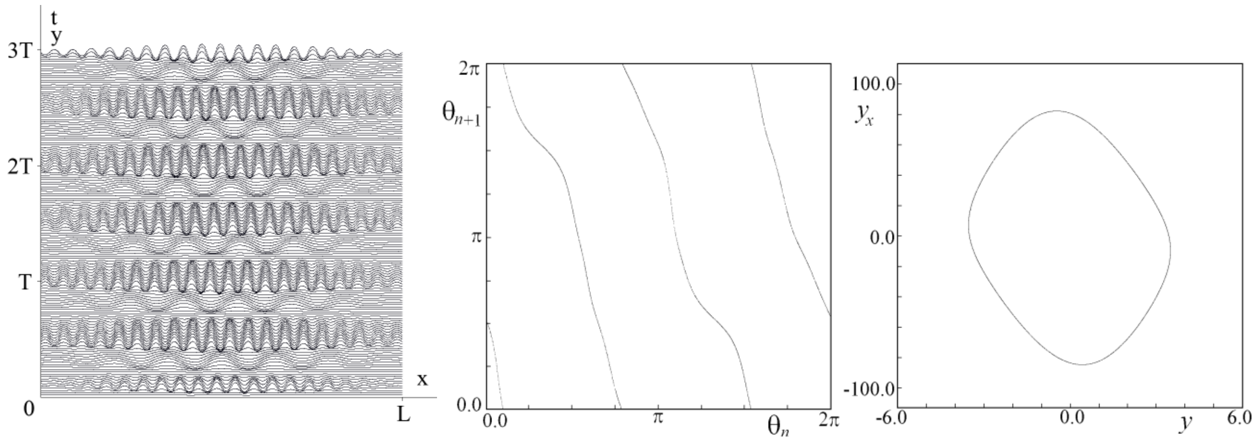


Рис.5. Пространственно-временная диаграмма, диаграммы для пространственных фаз и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении для кольцевой системы при $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $T = 40$, $L = 1, a_2^0 = 0.4$, $a_6^0 = 0.2$, $\varepsilon = 0.2, \alpha = 0.4, \gamma = 0.03$



(а) (б) (в)

Рис.6. Пространственно-временная диаграмма, диаграммы для пространственных фаз и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении для системы с нулевыми граничными условиями при $\omega_0 = 2\pi,\ k_0 = 2\pi,\ T = 50,\ L = 6.5, a_2^0 = 0.55,\ a_6^0 = 0.3,\ \varepsilon = 0.2, \gamma = 0, \alpha_1 = 3$

Рассмотрен также вариант системы с фиксированными граничными условиями $u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$, которая представляется более реалистичной с точки зрения возможного осуществления в эксперименте. Модификация уравнений для этого случая состоит во введении профиля зависимости линейной диссипация от пространственной координаты по закону $\alpha = \alpha_1 \cos^2 \pi x / L$. Показано, что в этом случае также можно реализовать хаотическую динамику, соответствующую аттрактору типа Смейла – Вильямса (рис.6).

В заключении обобщаются результаты диссертационной работы, приводятся возможные направления развития и формируются выводы.

Основные результаты и выводы

1. Предложены параметрически возбуждаемые системы с хаотической динамикой, обусловленной наличием в фазовом пространстве аттракторов типа Смейла – Вильямса, допускающие физическую реализацию.
2. Показана возможность реализации гиперболического хаоса в параметрических системах, функционирующих по принципу взаимодействия колебательных элементов через квадратичную или кубическую связь.
3. Указаны примеры распределенных параметрически возбуждаемых систем, где хаотический аттрактор типа Смейла - Вильямса вложен в бесконечномерное фазовое пространство отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции накачки.
4. Рассмотренные модели не чувствительные к вариации параметров системы. Это говорит о грубости хаотической динамики, её структурной устойчивости, что является важной особенностью для возможных практических приложений предложенных генераторов хаоса.

Публикации по теме диссертации

[1] Исаева О.Б., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П. Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны // Нелинейная динамика. 2013. Т..9, №1. С.3-10.

[2] Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // Phys. Rev. E. 2013. V.87. P. 040901.

[3] Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P. Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. V.18. P. 728-734.

[4] Кузнецов А.С. Параметрические генераторы с хаотической амплитудной динамикой, отвечающей аттракторам типа Смейла-Вильямса // Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, №1. С.129-136.

[5] Кузнецов А.С., Кузнецов С.П. , Сатаев И.Р. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ. 2010. Т.80, вып.12. С.1-9.

[6] Кузнецов А.С., Исаева О.Б. Гиперболический хаос при параметрических колебаниях нелинейной струны // Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика :Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 3-5 сентября 2013 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С.137-138.

[7] Кузнецов А.С. Хаотическая динамика при механических колебаниях нелинейной струны с параметрическим возбуждением // Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 24-26 сентября 2012 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. С.79-80.

[8] Кузнецов А.С. О некоторых схемах параметрических генераторов хаоса с аттракторами типа Смейла-Вильямса // Нелинейные волны – 2012. XVI научная школа. Н. Новгород, 29 февраля – 6 марта 2012 г. Тезисы докладов молодых ученых. Н. Новгород, 2012. С. 81.

[9] Кузнецов А.С. О новом принципе построения параметрических генераторов гиперболического хаоса // Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 11-15 сентября 2011 г. Саратов : Изд-во Сарат. университета, 2011. С.124-126.

[10] Кузнецов А.С., Кузнецов С.П. Параметрические генераторы хаоса с гиперболическими аттракторами // Материалы IX международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур", 4-9 октября 2010 г. Саратов, 2010. С.86-87.

[11] Кузнецов А.С. Две схемы параметрических генераторов гиперболического хаоса // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009. 16-18 ноября 2009 г. Материалы научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. С.77-80.

[12] Кузнецов А.С. Сравнительный анализ моделей параметрических колебаний. Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика // Тезисы докладов IV конференции молодых ученых. Саратов, 7-9 сентября 2009 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С.56-58.