ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

ЧУМАЧЕНКО СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ СПЛАЙНАМИ

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор С. Ф. Лукомский

Саратов – 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

Научный руководитель:
Лукомский Сергей Федорович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор по кафедре математического анализа механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» (специальность 1.1.1).

Официальные оппоненты:
Лебедева Елена Александровна — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа математико-механического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (специальность 1.1.1).
Солодов Алексей Петрович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность 1.1.1).

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН).

Защита состоится 12 сентября 2023 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.392.08 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» по адресу: г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, в аудитории 511.
С диссертацией можно ознакомится в библиотеке СГУ и на сайте
https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-08/kandidatskaya-dissertaciya
-chumachenko-sergeya
Автореферат разослан _ _ июня 2023 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.392.08

доктор технических наук, доцент ______________ И. В. Вешнева

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория сплайнов является важным разделом теории приближения функций. Являясь более гибким аппаратом приближения, чем многочлены, сплайны позволяют решать задачи интерполяции, сглаживания функций, численного дифференцирования, интегрирования и решения дифференциальных уравнений.

Работа посвящена использованию базисных сплайнов в задачах аппроксимации.

Впервые базисные сплайны появились в работах В. А. Дженкинса[1] в связи с основной задачей интерполяции, которая заключается в следующем[2]*необходимо по значениям* $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *построить функцию* $S(x)$ *такую, что:*

1) $S(x)$ *определена на* $\mathbb{R}$ *и* m *раз дифференцируема на* $\mathbb{R}$, $m \geq 1$;

2) $S(j) = f_j$ *при всех* $j \in \mathbb{Z}$.

Функцию $S(x)$ естественно искать в виде ряда

$$S(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j L(x-j),$$

который называют *кардинальным рядом.* Если в кардинальном ряде y_j — заданные значения, т. е. $y_j = f_j$, то такую интерполяцию называют правильной (ordinary), в противном случае — гладкой. В. А. Дженкинс первым построил как правильные, так и гладкие кардинальные интерполяционные формулы, в которых функции $L(x)$ были базисными симметричными сплайнами 3-й и 4-й степени с носителем $[-3, 3]$. Но тогда их называли базисными функциями.

[1]Jenkins, W. A. Osculatory interpolation: New derivation and formulae / W. A. Jenkins // Record of the American Institute of Actuaries. — 1926. — Vol. 15. — P. 87.

[2]Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. — Москва : Мир, 2001. — 412 с. — DOI: 10.2307/2153134

И. Я. Шенберг определил[3,4] базисные сплайны равенством

$$M_k(x) = \frac{1}{(k-1)} \delta^k x_+^{k-1},$$

где δ^k — центральная разность k-го порядка с единичным шагом, и получил гладкую полиномиальную интерполяционную формулу. Базисные сплайны также назывались базисными функциями.

В 1947 г. в совместной работе[5] Х. Б. Карри и И. Я. Шенберга базисные сплайны были представлены в виде разделенных разностей. Если теорема отсчетов позволяет приближать только функции ограниченного порядка, суммируемые на действительной оси, то им удалось доказать, что разделенные разности позволяют приближать множество функций из пространства $P_k(0, +\infty)$. Пространство $P_k(0, +\infty)$ определяется как совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные на $[0, +\infty)$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{t}{2^k}, \frac{t+1}{2^k}\right]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty, +\infty)$. Было показано, что разделенные разности являются базисом в пространстве $P_k(-\infty, +\infty)$. На основании этого И. Я. Шенберг[6] такие разделенные разности назвал B-сплайнами. В дальнейшем терминология B-сплайнов получила широкое развитие.

В настоящее время основная задача интерполяции традиционно решается с помощью центрированных B-сплайнов Д. О. Стрёмберга $N_m(x)$. Подробное описание этого метода решения можно найти в монографии Ч. К. Чуи, одна-

[3] Schoenberg, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4. P. 45–99. — DOI: 10.1090/qam/15914

[4] Schoenberg, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4. P. 112–141. — DOI: 10.1090/qam/16705

[5] Curry, H. B. On spline distributions and their limits: the Pólya distributions / H. B. Curry, I. J. Schoenberg // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1947. — Vol. 53

[6] Schoenberg, I. J. On spline functions / I. J. Schoenberg // Inequalities I / ed. O. Shisha. — New York : Academic Press, 1967. — P. 255–291.

ко в этом случае приходится решать систему бесконечного числа уравнений. В диссертационной работе мы предлагаем использовать новый вид базисных сплайнов, которые названы двоичными базисными сплайнами. В этом случае для нахождения неизвестных коэффициентов получаем рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} c_{-1} = \frac{a_{n-1}}{\psi_{n,n}^{(n-1)}\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{a_{n-1}\cdot Q(1,1)}{Q(n,n)} = \frac{a_{n-1}\cdot 2^{\frac{2+3-1-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}} = \frac{a_{n-1}}{2^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}, \\ c_{-2} = \left(a_{n-2} - c_{-1}\psi_{n,n}^{(n-2)}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\frac{Q(2,2)}{Q(n,n)} = \frac{\left(a_{n-2}-c_{-1}\psi_{n,n}^{(n-2)}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{2^{\frac{n^2+3n-10}{2}}}, \\ \ldots \\ c_{-2^k} = \frac{a_{n-k}-\sum_{j=0}^{k} c_{-2^j}\psi_{n,n}^{(k)}\left(\frac{1}{2^{n-k}}\right)}{2^{\frac{(n^2-k^2)+3(n-k)}{2}}}, \end{cases}$$

где коэффициенты c_{-2^k} однозначно определены.

Введенные двоичные базисные сплайны решают и другие задачи, о чем пойдет речь далее.

За несколько десятилетий до возникновения теории сплайнов появилась система А. Хаара[7]. Система Хаара является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,1]$. Сам А. Хаар, однако, не отметил в своих работах тот факт, что все элементы построенной им системы являются двоичными сжатиями и сдвигами одной функции. Система Хаара является базисом в пространстве непрерывных функций (если исключить тот факт, что сами функции системы Хаара не попадают в класс непрерывных функций) и ортогональным базисом в пространстве суммируемых функций, она локализована, а так же вычисление ее коэффициентов разложения имеет низкую вычислительную сложность. Однако функции системы Хаара являются разрывными, что ограничивает класс решаемых задач.

[7] Haar, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme / A. Haar // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371. — DOI: 10.1007/BF01456326

Р. В. Мартенс рассмотрел[8] систему сжатий и сдвигов базисного сплайна

$$\varphi = \begin{cases} 8t, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 4-8t, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 8t-8, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$$

и доказал ее полноту в $L_2(0,1)$. Позднее, Р. В. Мартенс , что эта система есть базис Рисса в $L_2(0,1)$. Более того, он нашел вид сопряженной системы, который можно рассматривать как некоторый непрерывный аналог системы Хаара. Однако этот результат так и остался неопубликованным, но привел к задаче построения аналогов базисов Рисса произвольной гладкости.

Напомним, что такое базис Рисса. Пусть H — гильбертово пространство. Система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется системой Рисса с постоянными $A, B \geq 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится в H и

$$A\|c\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n \right\| \leq B\|c\|_{l_2}.$$

Аналоги системы Хаара произвольной гладкости были построены . Эти производные также являются двоичными базисными сплайнами, и системы сжатий и сдвигов таких сплайнов образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$, причем риссовские постоянные не зависят от степени сплайна. Таким образом, полученную систему сжатий и сдвигом можно считать некоторым гладким аналогом системы Хаара (ортогональность заменена на базисность по Риссу).

В 1910 г. немецкий математик Г. Фабер проинтегрировал систему Хаара. Его результат в 1927 г. повторил львовский математик Ю. Шаудер. Новая система получила название системы Фабера – Шаудера[9]. . Она является базисом

[8]Мартенс, Р. В. О полной минимальной системе функций / Р. В. Мартенс // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — Вып. 14. — С. 50–53. — EDN: TXMPHX.

[9]Кашин, Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. — Москва : АЦФ, 1999. — 550 с.

в пространстве $C[0,1]$ и для отклонения частичных сумм справедливо неравенство

$$||f - S_N(f)||_C \le \omega^2\left(\frac{1}{N}, f\right),$$

где

$$\omega^2(\delta, f) := \sup_{0<h<\delta, h\le x\le 1-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|.$$

Функции системы Фабера – Шаудера не дифференцируемы, поэтому в дальнейшем предпринимались попытки модифицировать эту систему. Так, в работе Т. У. Аубакирова и Н. А. Бокаева[10] определен новый класс систем, обобщающих систему Фабера – Шаудера. По заданной последовательности $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_0 = 1$, а $p_n \ge 2$, $n = 1, 2, \ldots$, определяют числа $m_n = p_0 p_1 \ldots p_n$. В этом случае для любой точки $x \in [0,1] \backslash Q$, где

$$Q = \left\{\frac{l}{m_n}\right\}, \quad 0 \le l \le m_n, \quad n \ge 0, \quad l \in \mathbb{Z},$$

существует единственное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{m_k},$$

где $0 \le \alpha_k(x) \le p_k - 1$, $\alpha_k(x)$ — целые. После этого систему функций

$$\Phi\{p_n\} = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, авторы определили равенствами

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} m_{n+1}(x) - p_{n+1}r - \alpha_{n+1}(x) e^{\frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}} + \dfrac{1 - e^{\frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}}}{1 - e^{\frac{2\pi i s}{p_{n+1}}}}, & x \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right) Q, \\ 0, & x \notin \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right]. \end{cases}$$

где $s = 1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1$. Таким образом, система $\Phi\{p_n\}$ полностью определена. Также в этой работе показывается, что эта система состоит из непрерывных,

[10] Аубакиров, Т. У. О новом классе систем функций типа Фабера – Шаудера / Т. У. Аубакиров, Н. А. Бокаев // Математические заметки. — 1974. — Т. 82, № 5. — С. 643–651. — DOI: 10.1134/S0001434607110016

кусочно-линейных функций, и приводится следующая оценка отклонения через модуль непрерывности 2-го порядка:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{l} \alpha_k(f)\varphi_k(x) \right\| \le \omega_2\left(\frac{1}{m_n}, f\right), \quad l = m_n + r(p_{n+1} - 1).$$

В 1965 г. К. М. Шайдуковым[11] был построен базис в пространстве непрерывных функций, состоящий из дуг парабол (из гладких функций)

$$g_1(x) = (1-x^2)^2, \quad g_2(x) = x^4, \quad 0 \le x \le 1,$$
$$g_{sk} = \frac{(x-a)^2(x-c)^2}{(b-a)^2(b-c)^2} \cdot \Theta^2(ax + cx - x^2 - ac),$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$
$$a = \frac{s}{2^k}, \quad b = \frac{s+1}{2^k}, \quad c = \frac{s+2}{2^k}, \quad s = 0, 2, 4, \ldots, 2^k - 2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

В этой работе доказывается, что система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве непрерывных функций, однако оценка скорости сходимости через модуль непрерывности отсутствует. Поэтому возникает задача построения систем типа Фабера – Шаудера произвольной гладкости и изучения их свойств.

Автором диссертации[12] был определен двоичный базисный сплайн 2-й степени, доказано, что система сжатий и сдвигов этого сплайна образует базис в $C_0[0,1]$ и получена оценка отклонения через модуль непрерывности. К сожалению, полученная система сжатий и сдвигов не является базисом в пространстве L_2, а так же не порождает базис Рисса. Подробно об этом рассказано в главе 3 диссертации.

[11] Шайдуков, К. М. О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол / К. М. Шайдуков // Ученые записки Казанского университета. — 1965. — Т. 125, № 2. — С. 133–142.

[12] Чумаченко, С. А. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера / С. А. Чумаченко // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2016. — Т. 53. — С. 163–164.

В работе С. Ф. Лукомского и М. Д. Мушко[13] было доказано, что двоичный базисный сплайн 2-й степени удовлетворяет масштабирующему уравнению, порождая кратномасштабный анализ. Напомним классическое определение кратномасштабного анализа.

Пусть $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ — совокупность замкнутых пространств. Совокупнотьность $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется кратномасштабным анализом, если выполнены следующие условия (аксиомы)[14]:

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j\in Z} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j\in Z} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j\cdot) \in V_0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. Существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

В статье С. Ф. Лукомского и М. Д. Мушко[15] рассматривается не классический кратномасштабный анализ, а кратномасштабный анализ в смысле Де Бора, ДеВора и Рона[16,17]. В нем не обязательно выполнение аксиомы MR5. Это приводит к сужению множества приближаемых функций. С. Ф. Лукомскому и М. Д. Мушко удалось доказать, что соответствующими подпространствами V_n можно хорошо приближать функции из пространств Соболева. Естествен-

[13]Лукомский, С. Ф. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени / С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 2. — С. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

[14]Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 616 с.

[15]Лукомский, С. Ф. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени / С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 2. — С. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

[16]De Boor, C. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ / C. De Boor, R. A. DeVore, A. Ron // Transactions of the American Mathematical Society. — 1994. — Vol. 341, iss. 2. — P. 787–806. — DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1195508-X

[17]De Boor, C. On the construction of multivariate (pre)wavelets / C. De Boor, R. A. DeVore, A. Ron // Constructive Approximation. — 1993. — Vol. 9, iss. 2. — P. 123–166. — DOI: 10.1007/BF01198001

ным образом возникла задача переноса полученных результатов на двоичные базисные сплайны произвольной степени.

Целью диссертационной работы является изучение представляющих и аппроксимативных свойств систем сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1 Доказана базисность системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов в пространстве непрерывных функций и найдена оценка сходимости через модули непрерывности.

2 Доказано, что дифференцируя построенные системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов, мы получаем базисы Рисса в пространстве L_2.

3 Доказано, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению и порождает кратномасштабный анализ (V_n). Найден порядок приближения функции из пространств Соболева подпространствами V_n по норме $L_2(\mathbb{R})$.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы теории функций, ортогональных рядов, функционального анализа, всплесков.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Рассмотренные в диссертационной работе базисные сплайны могут быть использованы для построения кратномасштабного анализа, построения интерполяционных процессов, численного решения дифференциальных уравнений, сглаживания экспериментальных данных, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Положения, выносимые на защиту:

1 Базисность системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов в пространстве непрерывных функций на отрезке и оценка погрешности приближения (теорема 1.1).

2 Базисность по Риссу систем сжатий и сдвигов производных двоичных базисных сплайнов (теорема 2.1).

3 Аппроксимация сжатиями и сдвигами двоичных базисных сплайнов функций из пространств Соболева (теорема 3.4).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1 — 18-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января–3 февраля 2016 г.);

2 — XV Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2016» (Казань, 24–29 ноября 2016 г.);

3 — XIII Международная Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», (Казань, 21–27 августа 2017 г.);

4 — XXVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». X Международный симпозиум «ряды Фурье и их приложения». Молодёжная школа-конференция по гармоническому анализу (Новороссийск, 27 мая–03 июня 2018 г.);

5 — 19-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января–2 февраля 2018 г.);

6 — 20-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января–1 февраля

2020 г.);

7 — Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января–2 февраля 2021 г.);

8 — Всероссийская научная конференция«Математика и математическое моделирование» (Самара, 10–12 ноября 2021 г.);

9 — 21-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января–4 февраля 2022 г.).

Кроме этого, результаты работы регулярно докладывались на семинаре «Ортогональные ряды» кафедры математического анализа механико-математического факультета Саратовского национального исследоваательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, в том числе 3 статьи [1–3] в журналах, индексируемых Web of Science, SCOPUS, RSCI (все журналы включены в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» ВАК РФ, 9 работ опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов [4–13].

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты были получены лично соискателем. В работе [1], выполненной в соавторстве с П. А. Терехиным и С. Ф. Лукомским, автору настоящей диссертации принадлежат результаты доказательства, что двоичный базисный сплайн, построенный по функции $\psi_{n,n-1}$, порождает базис Рисса. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов осуществлялись совместно с научным руководителем, а также с соавторами опубликованных работ. При использовании результатов других авторов и, полученных в соавторстве, приводятся соответствующие ссылки.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы (69 наименований). Диссертация изложена на 101 странице, содержит 1 таблицу и 16 рисунков. Часть рисунков получена программами, написанными на языках программирования C++ и Python, при реализации алгоритмов, описанных в главе 2 диссертационной работы.

Краткое содержание диссертации

В главе 1, раздел 1.1 приведен краткий обзор задач, решаемый в ходе диссертации с помощью двоичных базисных сплайнов, и классические методы их решения.

В разделе 1.2 обобщается определение двоичного базисного сплайна, введенное С. Ф. Лукомским и М. Д. Мушко[18].

Пусть

$If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1])$ — оператор интегрирования;

$r_k(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x))$ — функции Радемахера[19];

$W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ — функции Уолша[20,21].

Функцию

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x), \quad x \in [0,1], \quad n,N \in \mathbb{N}, \quad N \le n,$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от функции Уолша W_{2^n-1}, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$ в пространстве $C[0,1]$.

Название «двоичные базисные сплайны» было выбрано потому, что:

[18]Лукомский, С. Ф. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени / С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 2. — С. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

[19]Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 508 с.

[20]Алберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш ; Перевод с англ. Ю. Н. Субботина ; Под ред. С. Б. Стечкина ; С доб. С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина. — Москва : Мир, 1972. — 318 с.

[21]Ahlberg, J. The theory of splines and their application / J. Ahlberg, E. Nilson, J. Walsh. — N. Y. : Academic Press, 1967. — 284 p

1) построенные функции действительно являются сплайнами, при этом дефекта 1 независимо от числа интегрирований N, что будет доказано в ходе диссертационной работы;

2) система строится по двоичной сетке;

3) эти сплайны порождают базисы в различных функциональных пространствах, что будет доказано в ходе работы.

Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно. Из этого замечания следует, что можно строить двоичные базисные сплайны произвольного порядка гладкости.

Далее в разделе 1.2 описывается решение основной задачи интерполяции.

Определение 1.6. *Обозначим через $P_k(0,+\infty)$ совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка на $[0,+\infty)$, и которые на каждом отрезке $[t, t+1]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty,+\infty)$.*

Теорема 1.1. *Пусть $F_{n,N}(x) = \psi_{n,N}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Совокупность функций*

$$F_{n,n}(x-j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j > -2^n, \quad j \notin \left[-2^{d+1}+1, -2^d-1\right], \\ 0 \le d < n, \quad d \in \mathrm{N},$$

образуют базис в пространстве $P_n(0,+\infty)$.

При этом коэффициенты разложения будут определены рекуррентными соотношениями.

В разделе 1.3 доказывается теорема о базисности системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим систему

$$\phi_{m,j}(x) = \psi_{n,n}(2^m x - j), \quad m \in \mathbb{Z}_0, \quad j \in [0, 2^m-1].$$

Пусть $f(x)$ — функция из $C_0[0,1]$. Обозначим:

$$R_0(x) = f(x), \quad S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x), \quad x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right],$$
$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x).$$

Определение 1.8. *Пусть*

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0\le h\le\delta}(f(x+h) - f(x)), \quad x \in [0, 1-h],$$

— модуль непрерывности,

$$\omega_f^2(\delta) = \sup_{0\le h\le\delta}(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)), \quad x \in [0, 1-2h],$$

— модуль непрерывности второго порядка (модуль гладкости).

Теорема 1.2. *Пусть $\phi_{m,j}(x)$ — базис в $C_0[0,1]$. Имеет место следующая оценка:*

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}||f|| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

В главе 2, раздел 2.1 двоичные базисные сплайны рассматриваются как аналоги систем Хаара и Фабера – Шаудера. Показывается, что систему сжатий и сдвигов функции $\psi_{n,n-1}$ справедливо называть гладким аналогом системы Хаара в терминологии двоичных базисных сплайнов, так как при $n = 1$ $\psi_{1,0}$ является системой Хаара с точностью до нормирующего коэффициента. В то же время систему, построенную по $\psi_{n,n}$, справедливо называть гладким аналогом системы Фабера – Шаудера. Эти две системы связаны между собой: из «аналога системы Хаара» можно получить «аналог системы Фабера – Шаудера», произведя операцию интегрирования (с точностью до нормирующего коэффициента).

В разделе 2.2 доказывается, что двоичный базисный сплайн, построенный по функции $\psi_{n,n-1}$, порождает базис Рисса.

Введем альтернативное определение двоичного базисного сплайна (предложено П. А. Терехиным), которое будет основано на принципе индуктивного построения. Для 1-периодических функций $f(t)$ обозначим

$$\mathbb{W}_0 f(t) = f(2t), \quad \mathbb{W}_1 f(t) = r(t)f(2t)$$

— операторы двоичных сжатия-модуляции. Наконец, положим

$$U = 4\mathbb{W}_1 I$$

— оператор интегрирования и последующей антипериодизации. Тогда

$$\psi_{n+1,n}(x) = U\psi_{n,n-1}(x).$$

Будем понимать под системой сжатий и сдвигов функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ последовательность функций

$$f^{k,j}(t) = 2^{\frac{k}{2}} f(2^k t - j).$$

Теорема 2.1. *Для каждого $n = 1, 2, \dots$ сплайновая аффинная система $\{\psi^{k,j}_{n,n-1}\}^{\infty,2^k-1}_{k=0,j=0}$ является базисом Рисса, и для всех $c = \{c_{k,j}\}^{\infty,2^k-1}_{k=0,j=0} \in \ell^2$ выполняются неравенства*

$$\frac{1}{10}\|c\|_2 \le \left\| \sum_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1} c_{k,j}\psi^{k,j}_{n,n-1}(x) \right\| \le \frac{19}{10}\|c\|_2.$$

Подводя итог, отметим, что «гладкий Хаар» является базисом Рисса в $L^2_0[0,1]$, а «гладкий Фабер – Шаудер» — базисом в $C[0,1]$.

В разделе 2.3 описывается алгоритм построения двоичного базисного сплайна с получением графического изображения[22,23,24,25]. Матрица значений получена при реализации алгоритма, описанного в этой главе, на языке C++. Программа, получающая графическое изображение, реализована на языке Python по описанию алгоритма, также приведенного в этом параграфе.

В раделе 2.4 по построенной системе сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна осуществляется построение приближений нескольких функций с различным характером поведения на отрезке $[0,1]$. Программа, получающая

[22] Де Бор, К. Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор ; Пер. с англ. В. К. Галицкого, С. А. Шестакова. — Москва : Радио и Связь, 1985. — 304 с.

[23] De Boor, C. A Practical Guide to Spline / C. De Boor. — American Mathematical Society, 1978.

[24] Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов : Пер. с англ. / С. Малла. — Москва : Мир, 2005. — 671 с.

[25] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation / S. Mallat // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1989. — Vol. 11, № 7. — P. 674–693. — DOI: 10.1109/34.192463

графическое изображение, реализована на языке Python на основе описания алгоритма, приведенного в этой главе.

Глава 3 посвящена построению кратномасштабного анализа, порожденного двоичным базисным сплайном.

В разделе 3.1 выведены масштабирующие уравнения, которым удовлетворяет двоичный базисный сплайн при порядках интегрирования $N = n - 1$ и $N = n$.

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x-0) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-2}} F_{n,n-1}(2x-t) + \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x-n).$$

Теорема 3.2. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n}(x) = \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x-0) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n}(2x-t) + \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x-n).$$

В разделе 3.2 обсуждаются аспекты построения кратномасштабного анализа для двоичного базисного сплайна $F_n(x) = \psi_{n,n}\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна $\psi_{n,n}$ не является системой Рисса и базисом Рисса, и масштабирующая функция $F_n(x)$ не порождает ортогональный кратномасштабный анализ. Тем не менее, возможно построение неортогонального кратномасштабного анализа.

Лемма 3.3. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i \omega x}\, dx.$$

Тогда

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = 2^{-N\cdot n - N - 1} \cdot \left(\frac{1}{\pi i \omega}\right)^{N+1} Q(n,N) \left(1 - e^{-2\pi i \omega}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-2^k \pi i \omega}\right).$$

Образуем подпространства

$$V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}} F_n(2^m x + k)_{k \in Z})}.$$

Теорема 3.3. *Совокупность* $(V_{m,n,n-1})$, $m \in \mathbb{Z}$, *образует ортогональный КМА:*

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j \in Z} V_j$ *плотно в* $L_2(\mathbb{R})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j \in Z} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. ществует функция $\varphi \in V_0$, *такая что последовательность* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса в* V_0.

Совокупность $(V_{m,n,n})$, $m \in \mathbb{Z}$, *образует КМА общего вида, т. е. выполнены аксиомы MR1–MR3.*

Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна не является системой Рисса и базисом Рисса и не порождает ортогональный кратномасштабный анализ[26,27,28]. Однако возможно построить приближения для функций из пространства Соболева по норме $L_2[0, +\infty]$ функциями из V_m. Теме построения приближений посвящен **раздел 3.3**.

Определение 3.1. Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение

$$[f, g](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\omega + k)\overline{g(\omega + k)}$$

называют *скобочным произведением.*

Определение 3.2. Пусть $s > 0$. Множество

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R})} = \| \,(1 + |\cdot|)^s \,\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют *пространством Соболева.*

Определение 3.3. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi\left(2^m x + k\right)$. Оператор

$$\beta_m : f \to \sum_{k \in Z} \left(f, \varphi_{m,k}\right) \varphi_{m,k}$$

называют *квазиинтерполяционным оператором.*

---

[26] Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И Добеши. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 464 с.

[27] Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / I. Daubechies. — Philadelphia,PA : SIAM Press, 1992. — 357 p. ISBN: 0-89871-274-2

[28] Новиков, И. Я. Основы теории всплесков / И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин // Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, вып. 6 (324). — С. 53–128. — DOI: 10.4213/rm89

Определение 3.4. Оператор β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$

$$\|f - \beta_m f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt}).$$

Лемма 3.4[29]**.** *Пусть функция* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям:*
1) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ *существенно ограничена;*
2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t})$*;*
3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t_0})$.
Тогда β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t_1 = \min(t, 2t_0)$.
Здесь символ $f = O(|\cdot|^t)$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|^t} \leq C$, $C > 0$.

Теорема 3.4 (Теорема о порядке аппроксимации). *Семейство операторов* β_m, $m \in \mathbb{Z}$, *построенных по функции* $\varphi_n(x)$, *доставляет аппроксимацию порядка* 1.

Таким образом, для любой функции $f \in W_2^1$

$$\|f - \beta_m\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-m}).$$

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации:

1 Доказано, что система сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов образует базис в пространстве непрерывных функций. Доказательство изложено в разделе 1.3 главы 1.

2 Доказано, что совокупность производных системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна образует базис Рисса в пространстве L_2. Границы этого базиса Рисса не зависят от выбранного двоичного базисного сплайна. Доказательство изложено в разделе 2.2 главы 2.

3 Предложены компьютерные алгоритмы, моделирующий сам двоичный базисный сплайн, а также его систему сжатий и сдвигов. Эти алгоритмы изложены в разделах 2.3 и 2.4 главы 2.

4 Установлено, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению, и, значит, порождает кратномасштабный анализ, который

[29] Mathematics in Image Processing / ed. H. Zhao. — Providence : American Mathematical Society; Institute for Advanced Study, 2013. — 245 p. — (IAS/Park City Mathematics Series, vol. 19). DOI: 10.1090/pcms/019

не является ортогональным. Доказательство изложено вразделе 1.2 главы 1. В разделе 2.4 главы 2 найден порядок приближения функций из пространства Соболева в метрике $L_2(\mathbb{R})$ подпространствами, образующими КМА.

Изложенные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории сплайнов. Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующие:

1) исследование возможности построения жесткого фрейма на основе аналога системы Фабера – Шаудера;

2) исследование вейвлета, построенного на основе аналога системы Хаара;

3) решение основной задачи интерполяции в случае построения сплайна произвольной степени гладкости;

4) практическое применение результатов исследования в задачах кодирования сигналов, сжатия информации и задачах машинного обучения;

5) поиск систем, которые могут иметь свойства, близкие к свойствам двоичного базисного сплайна;

6) построение многомерного инварианта двоичного базисного сплайна.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Лукомскому Сергею Федоровичу за постановку проблемы, постоянную поддержку, внимание к работе, участие в обсуждении полученных результатов и помощь при оформлении диссертации. Также автор выражает огромную благодарность профессору Терехину Павлу Александровичу за плодотворное сотрудничество, новые идеи и доброжелательное отношение. Автор благодарит сотрудников механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского за помощь в процессе обучения.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

1. Лукомский, С. Ф. Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем / С. Ф. Лукомский, П. А. Терехин, С. А. Чумаченко // Математические заметки. — 2018. — Т 103, вып. 6. — С. 863–874. — DOI: 10.4213/mzm11654

2. Чумаченко, С. А. Гладкие аппроксимации в C[0,1] / С. А. Чумаченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2020. — Т. 20, вып. 3. — С. 326–342. — DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

3. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе / С. А. Чумаченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2021. — Т. 21, вып. 4. — С. 458–471. — DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

Материалы конференций и другие публикации

4. Чумаченко, С. А. Обобщенная функция Мартенса – Терехина / С.А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 03 2016 года / Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2016. — С. 320–322.

5. Чумаченко, С. А. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера / С. А. Чумаченко // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2016. — Т. 53. — С. 163–164.

6. Чумаченко, С. А. Двоичные масштабирующие сплайн функции / С. А. Чумаченко // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2017. — Т. 54. — С. 403.

7. Чумаченко, С. А. Двоичные масштабирующие сплайн функции / С. А. Чумаченко // XXV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование» X Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» Молодежная школа-конференция по гармоническому анализу. Материалы. — Ростов н/Д : Изд-во Фонд науки и образования, 2018. — С. 16–18.

8. Чумаченко С. А. Двоичные масштабирующие сплайн-функции / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова, Саратов, 29 января – 02 февраля 2018 года. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2018. — С. 342–343.

9. Чумаченко, С. А. О полноте двоичных базисных сплайнов в пространстве L_p / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 28 января – 01 февраля 2020 года / Редколлегия: А. П. Хромов (гл. редактор), Б. С. Кашин (зам. гл. редактора), Ю. С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2020. — С. 453–455.

10. Чумаченко, С. А. Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$ / С. А. Чумаченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 28 января – 02 февраля 2021 года. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 296–298.

11. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны в пространстве кусочно-многочленных функций / С.А. Чумаченко // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2021. — Вып. 23. — С. 70–73.

12. Чумаченко, С. А. Аффинные системы, порожденные сплайнами / С. А. Чумаченко // Математика и математическое моделирование : Всероссийская

научная конференция (с международным участием), Самара, 10–12 ноября 2021 года. — Самара : Самарама, 2021. — С. 90–91.

13. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 31 января – 04 февраля 2022 года / Редколлегия: А. П. Хромов (глав. редактор) [и др.]. Вып. 21. — Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2022. — С. 331–333.