На правах рукописи

СПЕРАНСКИЙ Константин Сергеевич

ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЯДРОМ СЕГЕ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Саратов – 2023

Работа выполнена на кафедре теории функций и стохастического анализа механико - математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Научный руководитель:
Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский университет имени Н.Г. Чернышевского», профессор кафедры теории функций и стохастического анализа.

Официальные оппоненты:
Новиков Сергей Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», профессор кафедры безопасности информационных систем.
Беднов Борислав Борисович, кандидат физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Первый Московский государственный медицинский университет имени И.М. Сеченова Министерства здравоохранения Российской Федерации (Сеченовский Университет), доцент кафедры высшей математики, механики и математического моделирования.

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Защита состоится 12 сентября на заседании диссертационного совета 24.2.392.08 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83.
С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке СГУ и на сайте СГУ https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-08.
Автореферат разослан « _____ » __________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.392.08
доктор технических наук, доцент И.В. Вешнева

Общая характеристика работы.

Актуальность темы исследования. Настоящая диссертация посвящена изучению представляющих свойств систем функций, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди на единичном диске комплексной плоскости. В частности, дается положительный ответ на открытый вопрос о существовании системы представления на основе дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра[1].

Задача представления функций рядами по элементам заданной последовательности $\varphi_n,\ n = 1, 2, \dots$, заключается в нахождении для произвольной функции f из некоторого класса функций F последовательности коэффициентов $c_n,\ n = 1, 2, \dots$, такой, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Вопросы представления функций рядами составляют обширную область теории функций и имеют многочисленные приложения.

Наряду с классическими методами решения задачи представления активно развиваются современные методы представления на основе использования орторекурсивных разложений (Т.П.Лукашенко, В.В. Галатенко, В.А.Садовничий), всплесков (И.Я.Новиков, В.Ю.Протасов, М.А.Скопина, Добеши), жадных алгоритмов (В.Н.Темляков, Джонс), а также теории фреймов, предоставляющей общие и даже универсальные подходы к конструкции представления.

Касательно теории фреймов следует упомянуть классическую работу Даффина и Шеффера[2], в которой введено понятие фрейма гильбертова пространства, и теорию Файхтингера и Грохенига[3], в которой концепция фрейма впервые распространена на банаховы пространства. Понятия атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу легли в основу других близких определений, например, фрейма Шаудера (Касазза, Хан и Ларсон) и X_d-фрейма (Касазза, Кристенсен и Стоева).

[1]Fricain E., Khoi L., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels. // Indag. Math. – 2018. – Vol. 29. – P. 860–872.

[2]Duffin R. J., Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series. // Transactions of the American Mathematical Society. – 1952. – Vol. 72. – No. 2. – P. 341–366.

[3]Gröchenig K. Describing functions: Atomic decompositions versus frames. // Monatshefte für Mathematik. – 1991. – Vol. 112. – No. 1. – P. 1–42.

В диссертационной работе мы используем определение банахова фрейма предложенное П.А.Терехиным. Важным отличием этого определения от других определений банахова фрейма является автоматическое выполнение теоремы о представлении при соблюдении соответствующих фреймовых неравенств.

Существует значительное количество исследований, связывающих теорию воспроизводящих ядер и фреймов. Необходимо упомянуть монографию Партингтона[4], в которой в том числе рассматривается взаимосвязь между всплесковым преобразованием и воспроизводящим ядром подходящего гильбертова пространства. Джанг и Джанг исследовали воспроизводящие ядра и фреймы в ситуации банахова пространства с внутренним произведением. Фюр, Грохениг, Хаими, Клотц и Ромеро изучали плотностные характеристики сэмплирующих и интерполяционных последовательностей, построенных на основе воспроизводящих ядер. Сонг и Йоргенсен рассматривали решение обратной задачи, заключающейся в построении ядра по заданному фрейму. Гао, Харрис и Ганн, а также Ракотомамоньи и Кану изучали прикладные вопросы взаимосвязи фреймов и воспроизводящих ядер.

Вопрос о существовании фрейма на основе воспроизводящих ядер существенным образом зависит от рассматриваемого пространства. В настоящее время наиболее полно исследованы представляющие свойства воспроизводящих ядер пространств Харди и Бергмана[5,6]. Как в пространстве Бергмана, так и в пространстве Харди не существует последовательности точек, для которых система воспроизводящих ядер образует базис Рисса. Можно показать, что это связано с несовместностью условий интерполяционной и сэмплинг последовательностей. С другой стороны, в пространстве Бергмана существуют фреймы Даффина-Шеффера указанного вида, в то время как в пространстве Харди их не существует.

Вопрос о существовании систем представления на основе дискретизации воспроизводящего ядра пространства Харди на единичном диске комплексной плоскости был сформулирован в качестве открытой проблемы Фрикейном, Хоем и Лефевром.

[4] Partington J. Interpolation, identification, and sampling. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 267 p.
[5] Duren P. L. Theory of H^p spaces. – New York: Academic Press, 1970. – 258 p.
[6] Duren P. L., Schuster A. P. Bergman spaces. – Providence: AMS, 2004. – 318 p.

Исходя из вышесказанного, несомненна актуальность данной работы, сочетающей в себе аспекты теории функциональных гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и теории фреймов, а также отвечающей на открытый вопрос о существовании системы представления в пространстве Харди на основе воспроизводящего ядра Сеге. Касательно постановки этого открытого вопроса следует заметить, что ранее была известна формула восстановления, полученная Тотиком, которая не обеспечивает существования представляющего функцию ряда. Между этим положительным результатом Тотика и отрицательными результатами о несуществовании базисов Шаудера и фреймов Даффина-Шеффера среди рассматриваемых систем функций наблюдается определенный пробел, составляющий содержание открытого вопроса.

Цели и задачи диссертационной работы. Основной целью диссертационной работы является изучение представляющих свойств систем функций, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи:

1. Построить систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированного ядра Сеге, тем самым ответив на открытый вопрос, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра.
2. Найти такие условия на последовательность точек (достаточно общего вида) единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при которых последовательность дискретизированных в этих точках значений ядра Сеге образует систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.
3. Построить фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ определенного на полидиске $\mathbb{D}^d$. Получить оценку роста числа обусловленности этого фрейма в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.
4. Найти такие условия на последовательность точек единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$ при которых имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ для соответствующих подпространств, порожденных ядром Сеге дискретизированным в точках этой последовательности.

Научная новизна. Все выносимые на защиту диссертации результаты являются новыми. В работе была построена система представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе дискретизированных ядер Сеге и тем самым дан ответ на открытый вопрос, поставленный Фрикейном, Хоем и Лефевром. Также была исследована возможность построения многомерного аналога данной системы представления в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$. Помимо построения системы представления в диссертации обсуждается алгоритм разложения функций по этой системе представления.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В диссертации получен ответ на открытый вопрос о существовании системы представления (фрейма) на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2, поставленный Фрикейном, Хоем и Лефевром, что говорит о теоретической значимости исследования. В этой работе мы объединяем проблематику теории фреймовых разложений, пространств с воспроизводящим ядром и жадных алгоритмов.

Теория фреймовых разложений является активной областью исследований и имеет широкое применение в теории обработки сигналов, теории операторов, гармоническом анализе, квантовой механике, акустике, теории сэмплирования, нелинейной аппроксимации, методах граничных и конечных элементов. Пространства с воспроизводящим ядром применяются для решения интегральных и дифференциальных уравнений, задач теории оптимального управления, а также в теории машинного обучения.

Результаты диссертации могут быть использованы как при решении теоретических задах, возникающих в теории функциональных гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, так и в прикладных вопросах обработки сигналов, машинного обучения и при решении оптимизационных задач.

Методы исследования. В работе используются методы и понятия теории функций, функционального анализа, комплексного анализа, теории приближений и теории линейных операторов в банаховых пространствах. Также используются методы и понятия теории жадных алгоритмов и теории фреймовых разложений.

Положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Построен фрейм (система представления) пространства $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге и тем самым получен ответ на открытый вопрос, поставленный Фрикейном, Хоем и Лефевром. Результат основан на применении теории банаховых фреймов.
2. Определены условия на последовательность точек (достаточно общего вида) единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при которых она будет являться последовательностью точек дискретизации ядер Сеге, образующих систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.
3. Построен фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге. Показано, что рост числа обусловленности этого фрейма с ростом размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$ является степенным.
4. Получены условия на последовательность точек единичного диска, при которых имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$. При этом был уточнен один результат Тотика о приближении функций из пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$ посредством ядер Сеге за счет выбора последовательности точек дискретизации специального вида.

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертационной работы представлены в виде математических утверждений (теоремы, леммы, предложения и следствия из них) вместе со строгими математическими доказательствами. Используемые в доказательствах вспомогательные утверждения и методы взяты из известных книг или ведущих математических журналов. Все выносимые на защиту результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXI Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2022 г.)

2. XX Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2020 г.)
3. XIX Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2018 г.)
4. XIII Международная Казанская летняя школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (2017 г.)
5. Семинар “Ортогональные ряды” под руководством профессора С.Ф. Лукомского (2016, 2017, 2018 г.)
6. Ежегодная апрельская конференция сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского университета (2017, 2018 г.)

Личный вклад автора. В совместной статье [1] автору диссертации принадлежит построение системы представления в пространстве Харди на основе ядра Сеге. В совместной статье [2] автору диссертации принадлежит доказательство фреймовости последовательности дискретизированных значений ядра Сеге при выполнении так называемого условия согласования. Материалы конференций [5], [7], [8], [9], подготовленные в соавторстве, опубликованы по результатам статей [1] и [2].

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в работах [1] - [9]. Работы [1], [2], [3], [4] опубликованы в изданиях, входящих в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» ВАК РФ. При этом работы [2], [4] (или их переводы) включены в базу данных Web of Science Core Collection, а работы [1], [2], [4] (или их переводы) включены в базу данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем диссертации составляет 107 страниц, а библиография включает 90 наименований.

Основное содержание работы.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертации, приводится обзор научной литературы, связанной с изучаемой темой, формулируется цель работы и ставятся задачи. Помимо этого во введении формулируются без доказательств основные результаты диссертации, а также обоснуется их значимость и новизна.

В первой главе мы построим систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге, ответив на открытый вопрос, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра:

Вопрос 1. Существует ли последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ в открытом единичном диске $\mathbb{D}$ такая, что последовательность дискретизированных ядер $\{K(\cdot, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве $H^2(\mathbb{D})$?

В диссертации рассматривается пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$ как классический пример функционального гильбертового пространства с воспроизводящим ядром. В параграфе 1.1 мы приводим определение гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и их основные свойства.

Определение 1.1.2. Пусть Ω - основное непустое множество. Гильбертово пространство H называется функциональным пространством или гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (над Ω), если каждый элемент $f \in H$ является функцией $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и при этом для всех $x \in \Omega$ линейный функционал $\delta_x(f) = f(x)$ на H, который называется оценочным функционалом, корректно определен и непрерывен, т.е. найдется $C_x < \infty$ такое, что для всех $f \in H$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C_x \|f\|.$$

По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $x \in \Omega$ существует и при том единственный элемент $K_x \in H$ такой, что

$$\delta_x(f) = \langle f, K_x \rangle, \quad f \in H.$$

Определение 1.1.3. Пусть H является гильбертовым функциональным пространством над основным множеством Ω. Функция $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ называется воспроизводящим ядром гильбертового пространства H если

$$K(\,\cdot\,, x) \in H, \quad \forall x \in \Omega,$$
$$f(x) = \langle f, K(\,\cdot\,, x)\rangle, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall f \in H.$$

Воспроизводящее ядро $K(x, y)$ пространства H является функцией двух переменных $x, y \in \Omega$. Если вторая из этих переменных фиксирована, то ядро становится функцией одной переменной принадлежащей пространству H и значение произвольной функции $f \in H$ в точке x можно получить как скалярное произведение функции f и ядра $K(\,\cdot\,, x)$, дискретизированного в точке x.

В параграфе 1.2 мы напоминаем определение и основные свойства пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$, определенного на единичном диске комплексной плоскости $\mathbb{D}$.

Определение 1.2.1. Пространством Харди H^2 называется пространство, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $|z| < 1$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пространство H^2 является пространством с воспроизводящим ядром.

Определение 1.2.4. Воспроизводящее ядро K пространства H^2 называется ядром Сеге и имеет вид

$$K(z, \zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Важным объектом при изучении пространства H^2 является произведение Бляшке $B(z) \in H^2$, которое строится по заданным точкам $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющим так называемому условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Эта ненулевая функция имеет нули в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ и при этом оказывается, что во всех прочих точках произведение Бляшке не равно нулю[7].

В параграфе 1.4 мы переходим к рассмотрению систем представления в функциональных пространствах.

Определение 1.4.1. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется системой представления, если для любого вектора пространства $f \in F$ существует последовательность $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n$$

сходится к f по норме пространства F, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k \right\|_F = 0.$$

Примерами систем представления являются базис Рисса и фрейм Даффина-Шеффера.

Определение 1.4.7. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется фреймом Даффина-Шеффера, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой функции $f \in H$ выполняются неравенства

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2.$$

В параграфе 1.6 мы приводим известный результат о несуществовании базиса и фрейма Даффина-Шеффера на основе нормированных дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве Харди H^2

$$\widehat{K}_{z_n} = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{z_n}.$$

Поскольку условия полноты и минимальности противоречат друг другу, то последовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть одновременно полной и минимальной си-

[7] Conway J. Functions of one complex variable II. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 412 p.

стемой, в частности, базисом пространства H^2. Также не существует точек дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ таких, что последовательность ядер Сеге $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина-Шеффера в пространстве Харди.

Предложение 1.6.4. Каждое множество точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)|f(z_n)|^2 \le B\|f\|_2^2,$$

является конечным объединением интерполяционных последовательностей.

Последнее предложение является отражением следующего общего факта:

Каждая последовательность Бесселя $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\inf_{n=1,2,\dots}\|h_n\| > 0$, *является конечным объединением последовательностей Рисса.*

Это утверждение было высказано в качестве гипотезы Файхтингером и эквивалентно гипотезе Кадисона–Зингера, недавно доказанной Маркусом, Шпильманом и Шриваставой[8].

Предложение 1.6.5. Всякая последовательность Бесселя $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо не полна в H^2, в частности, не существует точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина–Шеффера.

Замечание 1.6.6. Отрицание условия Бляшке гарантирует переполненность последовательности $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$: для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ подпоследовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ также будет полной в H^2. Следовательно, для любой функции $f \in H^2$ найдется $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такое, что справедливо представление (полагаем $n_0 = 1$)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} c_n\widehat{K}_{z_n}.$$

Однако, такое представление еще не означает, что $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в H^2, поскольку номера n_k, вообще говоря, зависят от f. Кроме того, теорема Тотика[9] утверждает, что отрицание условия Бляшке необходимо и достаточно

[8] Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N. Interlacing Families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem. // Ann. of Math. Vol. – 2015. – Vol. 182. – Num. 1. – P. 327–350.

[9] Totik V. Recovery of H^p functions. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – Vol. 90. – P. 531–537.

для решения задачи восстановления, а именно, в предположении отрицания условия Бляшке существует семейство алгебраических полиномов $P_{n,k}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, \dots, n$, таких, что для любой функции $f \in H^2$ справедливо представление

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) P_{n,k}.$$

Ясно, что такое аппроксимационное представление также, вообще говоря, не гарантирует представления в виде ряда. Конкретный пример не удовлетворяющей условию Бляшке последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ для которой $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не является системой представления указан в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра.

Поскольку построить фрейм Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2 невозможно, то в параграфе 1.7 мы переходим к рассмотрению систем представления более общего вида. В 1989 г. Грохениг обобщил понятие фрейма на банаховы пространства и ввел понятие атомарного разложения и банахова фрейма. Альтернативное определение банахова фрейма, которое мы и будем рассматривать в дальнейшем, было предложено П.А. Терехиным.

Определение 1.7.1. Банахово пространство X, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется модельным если система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n = \{\delta_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$, где δ_{mn} символ Кронекера) образует базис в пространстве X.

Пусть дано сепарабельное банахово пространство F с сопряженным $G = F^*$ и $\langle f, g\rangle$ - значение непрерывного линейного функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

Определение 1.7.2. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ называется фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с сопряженным пространством $Y = X^*$ если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \le \|\{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G.$$

Определение банахова фрейма совпадает с определением фрейма Даффина-

Шеффера в случае, когда $F = G = H$ гильбертово пространство и $X = Y = \ell_2$. Важным отличием банахова фрейма от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу является то, что автоматически обеспечивается справедливость теоремы о представлении.

В параграфе 1.8 мы даем положительный конструктивный ответ на открытый вопрос 1 о существовании систем представления на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2 построив банахов фрейм этого пространства.

По-прежнему будем обозначать значения ядра Сеге для пространства H^2

$$K_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z}, \qquad \lambda_n, z \in \mathbb{D}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Построим последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на единичном диске $\mathbb{D}$. Разделим $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на группы так, что каждая группа состоит из корней из единицы k-ой степени расположенных на окружности радиуса $r_k = 1 - \frac{1}{k}$

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = \left(1 - \tfrac{1}{k}\right) e^{\frac{2\pi i j}{k}}, \qquad j = 0, \ldots, k-1, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Основным результатом главы 1 является следующий результат.

Теорема 1 (1.8.1). Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ определены вышеприведенным образом. Тогда последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве H^2.

Замечание 1.8.5. Фактически, доказано, что система нормированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где точки дискретизации $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют приведенный выше вид, является фреймом в пространстве H^2 относительно модельного пространства $X = \ell^1(\ell_k^2)$

$$X = \ell^1(\ell_k^2) = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_k^2\right)_{\ell^1},$$

где ℓ_k^2 - конечномерное унитарное пространство.

Замечание 1.8.6. Несуществование фрейма Даффина-Шеффера в пространстве H^2 на основе дискретизированных ядер Сеге означает, что в качестве модельного пространства фрейма $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя взять пространство ℓ^2. Кроме того, как показано Фрикейном, Хоем и Лефевром, таким модельным пространством не может быть пространство ℓ^1. Наш результат утверждает, что при выборе промежуточного пространства $\ell^1(\ell^2_k)$ фрейм вида $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ существует для подходящим образом подобранной последовательности точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Основной результат главы 1 (теорема 1) приводит нас к следующей более общей задаче. А именно, каковы должны быть последовательности натуральных чисел $n_k \nearrow \infty$ и радиусов $r_k \nearrow 1$ для того, чтобы последовательность точек

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, \dots, n_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$n_1 < \dots < n_k < \dots, \qquad 0 < r_1 < \dots < r_k < \dots, \qquad \lim_{k \to \infty} r_k = 1,$$

имеющая более общий вид чем в главе 1, являлась последовательностью точек дискретизации ядер Сеге образующих фрейм (систему представления) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.

В главе 2 мы даем ответ на этот вопрос.

В следующей лемме мы определим границы Рисса для блоков дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_j\}_{j=0}^{n-1}$ при произвольных фиксированных параметрах $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$, задающих положение точек дискретизации $\lambda_j = \lambda_{r,n,j} = re^{\frac{2\pi i j}{n}}$, $j = 0, \dots, n-1$.

Лемма 2.1.3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$ выполняются неравенства

$$\frac{r^{2n} n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2 \le \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \widehat{K}_j \right\|_2^2 \le \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2.$$

Потребуем, что "номера" n_k и "радиусы" r_k удовлетворяют следующему *условию согласования*: существуют постоянные $0 < a \le b < \infty$ такие, что

$$\frac{a}{n_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{n_k}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Теорема 2 (2.2.3). Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют указанный выше вид и удовлетворяют приведенному выше условию согласования. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) для коэффициентов $\xi_n = \xi_{k,j}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ абсолютно сходится по блокам в H^2, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} \widehat{K}_{\lambda_{k,j}} \right\|_2 < \infty.$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ безусловно сходится в H^2.

Теорема 2 побуждает к выбору в качестве ассоциированного с системой $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ модельного пространства X, являющегося ℓ^1 - суммой конечномерных ℓ^2 - пространств:

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k} \right)_{\ell^1},$$

т.е. пространство X состоит из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\} = \{x_{k,j}\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |x_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Теорема 3 (2.3.1). Пусть точки дискретизации $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ имеют указанный выше вид и удовлетворяют приведенному выше условию согласования. Тогда последовательность нормированных дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют фрейм в H^2 относительно модельного пространства

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k} \right)_{\ell^1}.$$

Из теоремы 3 вытекает следствие о представлении функций в H^2.

Следствие 2.3.2. Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют указанный выше вид и удовлетворяют приведенному выше условию согласования. Тогда для любой функции $f \in H^2$ существует последовательность коэффициентов $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{\lambda_n}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Замечание 2.3.3. Следует отметить, что коэффициенты данного представления $\xi_n = \xi_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, нелинейно зависят от $f \in H^2$. В частности, для каждой точки $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$K_z = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(z)(1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{\lambda_n},$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(\lambda_n) \overline{\xi_n(z)}$$

— формула восстановления в виде ряда, дающая при фиксированном z вычислительные преимущества по сравнению с аппроксимационной формулой восстановления Тотика.

В главе 3 мы переходим к более общему вопросу о построении системы представления для пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$, определенного на полидиске

$$\mathbb{D}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \ldots |z_d| < 1\}.$$

Мы построим фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ и покажем, что число обусловленности этого фрейма имеет степенной рост в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.

В третьей главе мы будем использовать следующие обозначения

$$\mathbb{Z}_+ = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\}, \qquad \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

и для произвольного $d \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_+^d =& \{(k_1, \ldots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq \nu \leq d\}, \\ \mathbb{Z}_n^d =& \{(k_1, \ldots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_n,\ 1 \leq \nu \leq d\}, \\ |k| =& k_1 + \cdots + k_d, \quad \langle k, m \rangle = \sum_{\nu=1}^{d} k_\nu m_\nu. \end{aligned}$$

Пусть последовательность радиусов имеет вид

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k \to \infty} r_k = 1$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^d$ вида

$$\lambda_n = \lambda_k^j = \left(r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, \ldots, r_k e^{\frac{2\pi i j_d}{n_k}} \right), \quad j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_{n_k}^d,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \le n_k(1 - r_k) \le b < \infty$$

с некоторыми постоянными $0 < a \le b < \infty$.

Теорема 4 (3.1.3). Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^d$ - последовательность точек имеющая указанный выше вид и удовлетворяющая приведенному выше условию согласования. Тогда последовательность нормированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, дискретизированных в этих точках, образует фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ относительно пространства коэффициентов X, состоящего из всех числовых последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{kj}\} \subset \mathbb{C}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}^d} |\xi_{kj}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Следствие 3.1.4. Для каждой функции $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}.$$

При переходе от пространства $H^2(\mathbb{D})$ к пространству $H^2(\mathbb{D}^d)$ возникает новый вопрос о росте числа обусловленности фрейма в $H^2(\mathbb{D}^d)$ с ростом размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$. Ответ на данный вопрос дается в следующем утверждении.

Следствие 3.1.5. Пусть Φ^d - фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ на основе дискретизированных ядер Сеге. Тогда для числа обусловленности этого фрейма $\mathrm{cond}(\Phi^d)$ справедливо неравенство

$$\mathrm{cond}(\Phi^d) \le \left(\frac{2b/a}{1 - e^{-2a}} \right)^{d/2}.$$

В главе 4 мы даем ответ на следующий вопрос: при каких условиях на последовательность точек единичного диска имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств, порожденных дискретизированным ядром Сеге пространства Харди H^2. Также мы уточняем один результат Тотика о приближении функций из пространства Харди H^2 посредством ядер Сеге за счет выбора последовательности точек дискретизации специального вида.

Теорема 1 является теоремой существования коэффициентов представляющего ряда. Построенный нами фрейм на основе дискретизированных ядер Сеге это безусловная система представления пространства Харди, поэтому возникает вопрос об алгоритме нахождения коэффициентов разложения, который бы сохранил порядок элементов в естественной нумерации.

Для решения задачи нахождения коэффициентов системы представления широко применяются слабые жадные алгоритмы. Однако, в общем случае, слабый жадный алгоритм не дает ряда по естественно упорядоченной системе, ряд не является безусловно сходящимся. Выходом из сложившейся ситуации является порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм предложенный А.В.Сильниченко в работе[10] для пространств с равномерно непрерывной квазинормой.

Согласно общим результатам Джонса[11] и Маллата и Джанга[12] слабый жадный алгоритм по каждой полной системе функций всегда сходится. Напомним определение порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма, введенное А.В.Сильниченко.

Определение 4.2.2. Пусть $\{L_k\}$ - последовательность линейных подпространств X и $\{\alpha_k\}$ - последовательность неотрицательных чисел. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм для произвольного вектора $f \in X$ определяется следующей итеративной процедурой. Пусть исходная аппроксимация равна нулю $s_0(f) = 0$, остаток $r_0(f) = f$ и оптимальный аппроксимирующий элемент $k_0(f) = 0$. Если $s_n(f), r_n(f)$ и $k_n(f)$ определены, то мы можем выбрать $k_{n+1} = k_{n+1}(f) > k_n(f)$ и

[10]Сильниченко А. В. О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов. // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84. – No. 5. – С. 795–800.

[11]Jones L. K. On a Conjecture of Huber Concerning the Convergence of Projection Pursuit Regression. // Ann. Statist. – 1987. – Vol. 15. – No. 2. – P. 880–882.

[12]Mallat S. G., Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41. – No. 12. – P. 3397–3415.

$\varphi_{k_{n+1}} \in L_{k_{n+1}}$ такие, что выполняется соотношение

$$\|r_n(f) - \varphi_{k_{n+1}}\| \leq \inf_{\varphi \in L_k, k > k_n} \|r_n(f) - \varphi\| + \alpha_n,$$

где α_n может быть неформально названо релаксацией. Далее положим $s_{n+1}(f) = s_n(f) + \varphi_{k_{n+1}}$ и $r_{n+1}(f) = f - s_{n+1}(f)$.

Если для всех $f \in X$ слагаемое $r_n(f)$ сходится к нулю при $n \to \infty$ или эквивалентно мы имеем представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k_n}$ то говорят что алгоритм сходится (т.е. $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k_\nu}$). Наш основной результат основан на следующем результате А.В.Сильниченко о сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов:

Предположим, что X - пространство с равномерно непрерывной квазинормой. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм по системе $\{L_k\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma < 1$ такое, что для любых $f \in X$ и N существуют $n > N$ и $\varphi \in L_n$ такие, что

$$\|f - \varphi\| \leq \sigma \|f\|.$$

В качестве подпространств L_k, $k = 1, 2, \dots$ мы выберем пространства порожденные ядрами Сеге $K_{\lambda_{k,j}}$, $j = 0, \dots, n_k - 1$, дискретизированными в точках $\lambda_{k,j} \in \mathbb{D}$:

$$L_k := \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1} = \operatorname{span}\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Выберем точки дискретизации ядер Сеге также как и прежде

$$\lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, 1, \dots, n_k - 1,$$

где мы предполагаем, что

$$r_k \nearrow 1, \qquad n_k \nearrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Теорема 5 (4.3.1). Пусть последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ порождена ядрами Сеге дискретизированными в точках, имеющих указанный выше вид и удовлетворяющих приведенному выше условию согласования. Тогда порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится в пространстве H^2 тогда и только тогда, когда r_k и n_k удовлетворяют предельному соотношению

$$\limsup_{k \to \infty} n_k (1 - r_k) > 0.$$

Определение 4.3.4. В качестве расстояния между функцией $f \in H^2$ и линейным подпространством $L_k \subset H^2$ определенным как (замкнутая) линейная оболочка $\left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}$ из дискретизированных ядер Сеге $\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}$ мы принимаем

$$\operatorname{dist}(f,\ L_k) = \operatorname{dist}\left(f,\ \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \min_{a_0,\dots a_{n_k-1}} \left\| f - \sum_{j=0}^{n_k-1} a_j K_{\lambda_{k,j}} \right\|.$$

Лемма 4.3.5. Пусть $0 < r < 1$. Расстояние от произвольного полинома $p_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ степени $< n$ до линейного пространства порожденного системой из ядер Сеге $\{K_j\}_{j=0}^{n-1}$ дискретизированных в точках

$$\lambda_j = \lambda_{r,n,j} = re^{\frac{2\pi i j}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

удовлетворяет следующему неравенству

$$\operatorname{dist}\left(p_n, [K_j]_{j=0}^{n-1}\right) \le r^n \|p_n\|_{H^2}.$$

Замечание 4.3.6. Тотик показал, что для произвольного выбора точек дискретизации ядер Сеге $\{\lambda_{k,j}\}_{j=0}^{n_k-1} \subset \mathbb{D}$ выполняется равенство

$$\operatorname{dist}(1,\ L_k) = \operatorname{dist}\left(1,\ \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \prod_{j=0}^{n_k-1} |\lambda_{k,j}|.$$

Однако, в лемме 4.3.5 мы выбрали точки дискретизации специального вида, что позволило нам получить получить точную оценку на расстояние от каждого полинома p_{n_k}, $\deg p_{n_k} < n_k$ до L_k, а не только для случая $p_{n_k} = 1$.

Замечание 4.3.7. Мы можем выбрать последовательности $\{r_k\}, \{n_k\}$ так, чтобы величины наилучших приближений функции $f \in H^2$ по подпространствам $\{L_k\}$ стремились к нулю, т.е.:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(f, \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}) = 0.$$

Действительно, как следует из леммы 4.3.5, последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} n_k(1 - r_k) = \infty.$$

Заключение.

В диссертации исследованы задачи представления функций рядами по последовательности дискретизированных значений воспроизводящего ядра Сеге пространства Харди. В работе получены следующие результаты.

1. Построен фрейм на основе последовательности дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ и как следствие, получен ответ на открытый вопрос из работы Фрикейна, Хоя и Лефевра.
2. Найдены условия на последовательность точек единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при выполнении которых последовательность дискретизированных в этих точках значений ядра Сеге образует систему представления в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.
3. Построен фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ и получена оценка роста числа обусловленности этого фрейма в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.
4. Найдены условия на последовательность точек единичного диска $\mathbb{D}$ при которых сходится порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ для соответствующих подпространств, порожденных ядром Сеге дискретизированным в точках этой последовательности.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Speransky, K. S. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space / K. S. Speransky, P. A. Terekhin // Indagationes Mathematicae. – 2018. – Vol. 29, № 5. – P. 1318–1325. – DOI: 10.1016/j.indag.2018.06.001

[2] Сперанский, К. С. О существовании фреймов в пространстве Харди, построенных на основе ядра Сеге / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2019. – № 2. – С. 57–68. – DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-57-68

[3] Сперанский, К. С. Построение фрейма в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске / К. С. Сперанский // Вестник Самарского университета.

Естественнонаучная серия. – 2019. – Т. 25, № 2. – С. 21–29. – DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29

[4] Speransky, K. S. On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space / K. S. Speransky // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, вып. 3. – С. 336–342. – DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342

Материалы конференций и другие публикации

[5] Сперанский, К. С. Фреймовые свойства ядра Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2017. – Т. 54. – С. 337–339.

[6] Сперанский, К. С. О системах представления на основе воспроизводящих ядер в пространствах Харди и Бергмана / К. С. Сперанский // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. – 2019. – № 9. – С. 17–54.

[7] Сперанский, К. С. О сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств, порожденных ядром Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. – 2022. – С. 273–274.

[8] Сперанский, К. С. Построение банахова фрейма в пространстве Харди, определенном на полидиске / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – 2020. – С. 382–384.

[9] Сперанский, К. С. Представляющие свойства ядра Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы. – 2018. – С. 299–301.

.