

На правах рукописи



ПЛОТНИКОВА Анастасия Дмитриевна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ
ИЗУЧЕНИЯ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ И СИНХРОННОГО
ПОВЕДЕНИЯ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ С
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И РЕАЛЬНЫХ
НЕЙРОФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1.3.4. – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Саратов – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” на кафедре физики открытых систем института физики.

Научный руководитель:

Москаленко Ольга Игоревна, д.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского”, г. Саратов, профессор кафедры физики открытых систем

Официальные оппоненты:

Максименко Владимир Александрович, д.ф.-м.н., Автономная некоммерческая организация высшего образования “Университет Иннополис”, г. Иннополис, профессор лаборатории нейронауки и когнитивных технологий
Станкевич Наталия Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород, старший научный сотрудник лаборатории топологических методов в динамике

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”, г. Нижний Новгород

Защита состоится “14” октября 2022 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 24.2.392.01 на базе ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского” (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 10 корпус, аудитория 511).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского” (Саратов, ул. Университетская, 42) и на сайте <https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-01/kandidatskaya-dissertaciya-plotnikovoy-anastasii>.

Автореферат разослан “15” июля 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д.ф.-м.н., доцент



И.В. Сысоев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Феномен хаотической синхронизации появился на рубеже 21 века, и за достаточно короткое время в этой научной области был сделан значительный исследовательский прорыв¹. Это связано с тем, что явление хаотической синхронизации может наблюдаться во многих сферах деятельности человека и может принести колоссальную пользу в различных областях знаний.

К настоящему времени были выявлены и хорошо изучены разные типы хаотической синхронизации, среди которых наибольшее распространение получили режимы полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием (lag-синхронизации), обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации, синхронизации временных масштабов и другие.

Среди различных областей науки и техники, в которых каждый из вышеперечисленных типов хаотической синхронизации нашел свое применение, можно выделить СВЧ-электронику и радиофизику, сферу скрытой передачи информации, лазерную физику, исследования в области биологии и медицины².

Непосредственно на границе различных типов синхронного поведения наблюдается перемежающееся поведение³. Соответственно, существуют режимы перемежающейся фазовой синхронизации, перемежающейся обобщенной синхронизации, перемежающейся синхронизации с запаздыванием, перемежающейся синхронизации временных масштабов и т.п. Подобные явления возможно наблюдать также в неавтономных периодических и хаотических осцилляторах, находящихся под внешним шумовым воздействием. Перемежаемость также часто встречается в реальных систе-

¹А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003; S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, Physics Reports 366 (2002) 1–101; В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, Г. И. Стрелкова, Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний, М.-Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.

²A. Kittel, J. Parisi, K. Pyragas, Physica D: Nonlinear Phenomena 112 (3) (1998) 459–471; Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, Радиотехника и электроника 48 (1) (2003) 116–124; А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Успехи физических наук 179 (12) (2009) 1281–1310; В. И. Пономаренко, А. С. Караваев, Е. Е. Глуховская, М. Д. Прохоров, Письма в ЖТФ 38 (1) (2012) 103–110; A. Uchida, K. Higa, T. Shiba, S. Yoshimori, F. Kuwashima, H. Iwasawa, Phys. Rev. E 68 (2003) 016215; I. Reidler, M. Nixon, Y. Aviad, S. Guberman, A. Friesem, M. Rosenbluh, N. Davidson, I. Kanter, Optics letters 38 (2013) 4174–7; А. Е. Храмов, Н. С. Фролов, В. А. Максименко, С. А. Куркин, В. Б. Казанцев, А. Н. Писарчик, Усп. физ. наук 191 (6) (2021) 614–650.

³A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. 79 (1) (1997) 47–50; S. Boccaletti, D. L. Valladares, Phys. Rev. E 62 (5) (2000) 7497–7500; А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Europhysics Lett. 70 (2) (2005) 169–175; А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, S. Boccaletti, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 114101; М. О. Zhuravlev, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, А. Е. Храмов, Phys. Rev. E 83 (2011) 027201; А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, V. А. Khanadeev, А. Е. Храмов, А. Н. Писарчик, Physical Review E 102 (1) (2020) 012205.

мах, в том числе в нейрофизиологических, где в качестве примера можно привести эпилептическую активность у животных и человека⁴. Таким образом, изучение особенностей синхронизации связанных хаотических осцилляторов и перемежающегося поведения на границе синхронных режимов в настоящее время представляется актуальным направлением теоретических и экспериментальных исследований, имеющим важное практическое значение.

Для исследования поведения динамических систем существует множество количественных и качественных критериев, которые предоставляют информацию о состоянии и изменениях изучаемого объекта. Одним из таких базовых и фундаментальных инструментов является расчет спектра показателей Ляпунова, который эффективен как при изучении автономной, так и неавтономной динамики систем с сосредоточенными и распределенными параметрами⁵. С помощью расчета спектра показателей Ляпунова возможно отследить качественные изменения в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Методика расчета показателей Ляпунова хорошо зарекомендовала себя в таких исследованиях систем, при которых происходит переход от хаотического режима к гиперхаосу или для выявления наличия гиперболического аттрактора. При изучении синхронных режимов в неавтономных и связанных системах расчет показателей Ляпунова позволяет детектировать границы их возникновения.

Методология расчета показателей Ляпунова применительно к вопросам исследования хаотической синхронизации используется повсеместно. Например, смена знака у одного из положительных показателей Ляпунова на отрицательный указывает на наступление режима обобщенной синхронизации⁶. Момент перехода нулевого условного ляпуновского показателя в отрицательную область предшествует установлению режима фазовой синхронизации в неавтономных системах, находящихся в периодическом режиме под действием шума, и связанных системах, демонстрирующих хаотическую динамику⁷. Важно учитывать, что разница между моментом смены знака показателя Ляпунова и наступлением режима фазовой синхронизации может быть достаточно велика, из чего следует вывод, что ве-

⁴A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, C. M. Rijn, Chaos 16 (2006) 043111; P. Bob, M. Palus, M. Susta, K. Glaslova, Neuroscience Letters 447 (2008) 73–77.

⁵K. Pyragas, Phys. Rev. E 54 (5) (1996) R4508–R4511; R. Porcher, G. Thomas, Phys. Rev. E 64 (1) (2001) 010902(R); A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, Physics of Plasmas 19 (8) (2012) 082302

⁶K. Pyragas, Phys. Rev. E 54 (5) (1996) R4508–R4511; O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Phys. Rev. E 86 (2012) 036216.

⁷D. S. Goldobin, A. S. Pikovsky, Phys. Rev. E 71 (4) (2005) 045201(R); A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Phys. Rev. E 78 (2008) 036212; A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Chaos, Solitons & Fractals 78 (2015) 118–123.

личину соответствующего показателя Ляпунова можно рассматривать как степень синхронизма при перемежающейся фазовой синхронизации⁸.

Необходимо отметить, что подход для изучения хаотической синхронизации, основанный на расчете спектра показателей Ляпунова, является универсальным и применяется как в сосредоточенных, так и распределенных системах. Например, режим обобщенной синхронизации был исследован в моделях систем с дискретным временем, связанных однонаправленно и взаимно, потоковых динамических системах с однонаправленной и взаимной связью, а также в пространственно-распределенных системах⁹. Режим фазовой синхронизации был подробно изучен в однонаправленно и взаимно связанных системах с фазово-когерентными и фазово-некогерентными аттракторами и сетях связанных нелинейных элементов¹⁰.

Существует ряд распространенных и хорошо зарекомендовавших себя методов для расчета показателей Ляпунова по заданному оператору эволюции и по временной реализации. Это алгоритм Бенеттина и процедура ортогонализации Грама-Шмидта в первом случае и методы Вольфа, Экмана и Розенштейна во втором¹¹. Однако, к настоящему времени еще существуют открытые вопросы, связанные с особенностями применения данного подхода в более сложных, нетривиальных системах. Это может быть связано, например, с пространственно-распределенной природой системы, где существует бесконечномерное фазовое пространство, а спектр показателей Ляпунова таких систем содержит бесконечное число показателей Ляпунова. В данном случае общепринятые методы расчета показателей Ляпунова оказываются неработоспособными, что говорит о необходимости разработки и использования новых методов и алгоритмов. Также сложности могут возникнуть при исследовании реальных данных, когда из доступных характеристик в распоряжении оказывается только временная реализация, а оператор эволюции вовсе отсутствует. При необходимости рассматривать не только старший показатель Ляпунова, но и нулевой (что является неотъемлемой частью при исследовании фазовой и перемежаю-

⁸О. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Phys. Rev. E 92 (2015) 012913.

⁹К. Pyragas, Phys. Rev. E 54 (5) (1996) R4508–R4511; A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, S. A. Shurygina, A. E. Hramov, Chaos, Solitons & Fractals 46 (2013) 12–18; H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Phys. Rev. E 53 (5) (1996) 4528–4535; A. A. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, ЖЭТФ 130 (4(10)) (2006) 748–764.

¹⁰В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, Письма в ЖТФ 14 (6) (1988) 569–573; A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. 79 (1) (1997) 47–50; M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. 78 (22) (1997) 4193–4196; L. Chunguang, C. Guanrong, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 341 (2004) 73–79; A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 114101.

¹¹С. П. Кузнецов, Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”, М.: Физматлит, 2006; E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 1993.

щейся фазовой хаотической синхронизации) использование классических алгоритмов оценки старших показателей Ляпунова по временному ряду становится недостаточным.

Таким образом, на основании вышеизложенного, можно сделать вывод о необходимости дальнейшего изучения и внедрения новых подходов по расчету спектра показателей Ляпунова в связанных системах, демонстрирующих режимы хаотической синхронизации.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертационной работы является изучение сложной динамики и синхронного поведения хаотических динамических систем с использованием расчета спектра показателей Ляпунова. В качестве исследуемых объектов в диссертации выбраны сложные модельные системы, такие как однонаправленно и взаимно связанные системы с запаздыванием, а также экспериментальные данные нейрофизиологической природы — сигналы электроэнцефалограмм (ЭЭГ), полученные с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Основным инструментом для выявления закономерностей был выбран подход, основанный на расчете спектра показателей Ляпунова, для использования которого в рамках настоящей диссертационной работы были разработаны и апробированы новые методы и подходы.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи исследования, которые можно разделить на два блока:

- изучение особенностей режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием:
 - разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием;
 - исследование режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, связанных однонаправленно и взаимно, анализ влияния значений управляющих параметров и времени запаздывания на порог возникновения режима обобщенной синхронизации;
- определение степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации по экспериментальным временным рядам нейрофизиологической природы:
 - разработка и апробация метода оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации, основанного на расчете условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду;

- применение разработанного метода для оценки степени синхронизма перемежающегося поведения реальных нейрофизиологических систем.

Для решения задач второго блока также рассмотрены модельные однонаправленно связанные хаотические системы, способные демонстрировать режим перемежающейся фазовой синхронизации, и оценены их статистические характеристики.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова позволяет исследовать автономную и неавтономную динамику систем с запаздыванием. Для автономных систем он может использоваться для определения режима, реализуемого в системах, а для однонаправленно и взаимно связанных систем – диагностировать наступление режима обобщенной синхронизации.
2. Порог обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием при изменении времени запаздывания выходит на уровень насыщения, величина которого существенным образом зависит от типа связи между системами и числа положительных показателей Ляпунова, реализуемых во взаимодействующих системах в отсутствие связи между ними.
3. Разработанная модификация метода оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временным рядам учитывает специфику сигналов активности головного мозга и делает возможной оценку степени синхронизма в реальных нейрофизиологических системах, что показано на примере анализа различных участков электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией, и крыс линии WAG/Rij – генетических моделей абсансной эпилепсии.

Научная новизна. В настоящей диссертационной работе представлены фундаментальные результаты исследования режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием, а также режимов фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации в реальных нейрофизиологических системах. В соответствии с поставленной целью и по мере выполнения работы были получены новые научные результаты:

- разработан и апробирован метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием;

- выявлены особенности обобщенной синхронизации, присущие системам с запаздыванием;
- получена зависимость значения параметра связи, отвечающего за установление режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания;
- выявлена степень синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации крысы линии WAG/Rij без лекарств и под действием препарата клонидин;
- продемонстрированы законы изменения показателя Ляпунова в обоих рассматриваемых случаях;
- проанализированы аналогичные результаты для ЭЭГ головного мозга человека, страдающего эпилепсией;
- проведено изучение поведения вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера с использованием двух принципиально различных методов вычисления вероятности наблюдения ламинарной фазы: по времени и по ансамблю;
- определено влияние количества осцилляторов на вероятность детектирования ламинарной фазы в режимах перемежающейся фазовой синхронизации и фазовой синхронизации.

Научная и практическая значимость работы. В диссертационной работе решена научная задача, имеющая большое значение для современной радиофизики в части разработки новых методов расчета спектра показателей Ляпунова для объектов различной природы и анализа многочисленных явлений и закономерностей при помощи разработанных подходов. Результаты настоящей диссертационной работы носят фундаментальный характер и вносят существенный вклад в область исследований обобщенной и перемежающейся фазовой синхронизации. В частности, важное практическое значение имеют разработанные методы расчета показателей Ляпунова для систем с запаздыванием и по временным рядам. Для систем с запаздыванием предложенный метод может использоваться на практике в системах скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации, а метод оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду может найти применение в области нейрофизиологической медицины для диагностики различных заболеваний нервной системы.

Данные и закономерности, полученные при исследовании поведения вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера, носят теоретический характер и имеют перспективы для дальнейшего детального изучения.

Достоверность теоретических результатов, представленных в настоящей диссертационной работе, обоснована выбранными классическими математическими моделями, базовыми методами для их решения и исследования. В качестве изначальных данных были выбраны достоверные, ранее полученные результаты. Для валидации разработанных методов были также использованы дополнительные хорошо зарекомендовавшие себя методики, при этом итоговые результаты хорошо согласуются между собой. Расхождения с существующими опубликованными и общепризнанными научными результатами отсутствуют.

Личный вклад. Исследования, проведенные в рамках настоящей диссертационной работы, осуществлялись автором лично, либо при его непосредственном участии. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы – д.ф.-м.н., профессором Москаленко О.И. Разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием проводилась совместно с научным руководителем и д.ф.-м.н., профессором Короновским А.А.

В рамках диссертационной работы были изучены реальные экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, полученные с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Экспериментальные данные были получены специалистами-нейрофизиологами в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалар и в Институте высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН под руководством д.б.н. Е.Ю. Ситниковой, а также в НИИ кардиологии Саратовского государственного медицинского университета.

Метод расчета показателя Ляпунова для оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам был модифицирован на основе работ д.ф.-м.н., профессора Москаленко О.И. и к.ф.-м.н. Павлова А.С. с учетом специфики решаемой задачи¹².

Апробация работы. Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем института физики ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” (СГУ).

¹²О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Письма в ЖТФ 40 (12) (2014) 66–72; O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Phys. Rev. E 92 (2015) 012913.

Полученные результаты представлялись на международных, всероссийских и региональных научных конференциях, в том числе на 11 и 12 Международной школе-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, 2016, 2019); 18 и 19 Научной школе “Нелинейные волны” (ННГУ и ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018, 2020); 16 и 18 Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” им. А.П. Сухорукова (МГУ, Москва, 2017, 2019); 14 Всероссийской научной школе молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика” (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2019); Всероссийской школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2018-2020); научной конференции “Presentic academic achievements to the world” (СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2016, 2018), а также на студенческих конференциях факультета нелинейных процессов (СГУ им. Н.Г.Чернышевского, Саратов, 2017-2019).

Материалы работы использовались при выполнении грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (проекты № МК-4574.2016.2, № МК-531.2018.2, № МД-21.2020.2), а также гранта Российского научного фонда (№ 19-12-00037).

Публикации. Результаты, изложенные в данной работе, опубликованы в отечественных и зарубежных научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus и рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов диссертаций (всего 7 статей), а также в трудах научных конференций и семинаров (всего 10 статей и тезисов докладов). По результатам исследований получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 104 страницы текста, включая 29 иллюстраций и 2 таблицы. Список литературы содержит 162 источника.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит раздел с обоснованием актуальности диссертационного исследования. Здесь поставлены соответствующие цели, определены научная новизна и практическая значимость полученных результатов, а также представлена информация о достоверности и апробации результатов и основные положения и результаты, выносимые на защиту.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросу о применении показателей Ляпунова для анализа сложной динамики и синхронно-

го поведения в системах с запаздыванием. В начале главы представлен краткий обзор существующих методов и подходов для вычисления спектра показателей Ляпунова в сосредоточенных и распределенных системах, а также отмечены их достоинства и недостатки. Определена необходимость разработки и адаптации методик, способных решить открытые вопросы в области исследований динамики систем с запаздыванием.

Далее представлен и пошагово описан разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием. Основными рассматриваемыми величинами в данном случае выступают состояние системы и ортонормированный набор возмущений этого состояния. Каждое возмущение соответствует одному из показателей в спектре показателей Ляпунова. Все расчеты проводятся для одномерной системы, у которой в качестве состояния выступает скалярная переменная, определенная на интервале времени с длительностью, равной времени запаздывания, при этом верхняя граница интервала совпадает с текущим моментом времени.

Согласно предложенному методу, в начальный момент времени необходимо выбирать возмущения $\tilde{x}_i(\zeta)$ таким образом, чтобы они были ортогональными и с единичной нормой¹³. Первым шагом для нахождения показателей Ляпунова является численное решение системы уравнений, описывающих динамику системы, на достаточном интервале времени. Таким образом, станет известной эволюция во времени опорного состояния, относительно которого рассматривается набор возмущений. Одновременно необходимо осуществить расчет эволюции набора возмущений опорного состояния системы, для чего численно проинтегрировать линеаризованное уравнение эволюции для каждого возмущения опорного состояния.

Далее отслеживается эволюция всех рассматриваемых величин. Через равные промежутки времени осуществляется ортогонализация Грама-Шмидта возмущений опорного состояния, и для каждого возмущения вычисляется слагаемое ляпуновской суммы

$$S_i(M\Gamma) = \sum_{k=0}^M \ln \|\tilde{x}_i(\zeta)\|, \zeta \in (k\Gamma - \tau, k\Gamma), \quad (1)$$

где Γ — интервал времени между применением процедур ортогонализации и нормировки, τ — время запаздывания, $\Gamma > \tau$. Для получения единичной нормы всех возмущений осуществляется перенормировка. Данная последовательность процедур повторяется многократно (M раз), и на каждом шаге

¹³Для получения такого набора возмущений целесообразно использовать процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

считаются суммы по векторам возмущения до перенормировки, но после ортогонализации.

После многочисленных повторов всех описанных выше операций процедуру вычислений спектра значений показателей Ляпунова

$$\Lambda_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \widehat{\Lambda}_i(M\Gamma), \quad (2)$$

где

$$\widehat{\Lambda}_i(M\Gamma) = \frac{S_i(M\Gamma)}{M\Gamma} \quad (3)$$

для систем с запаздыванием можно завершить.

В итоге набор возмущений опорного состояния системы оказывается упорядоченным по величине соответствующих им показателей Ляпунова: первое возмущение соответствует самому старшему показателю Ляпунова, второе – второму по старшинству показателю, и т.д. Следовательно, для получения желаемого количества показателей Ляпунова в спектре необходимо задать такое же количество возмущений. В случае увеличения числа изучаемых показателей, необходимо следить за тем, чтобы шаг дискретизации по времени был меньше отношения времени запаздывания к числу рассматриваемых показателей Ляпунова.

Разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием был апробирован на генераторе с запаздыванием¹⁴:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + kf(x(t-\tau)), \quad (4)$$

где $x(t)$ и $x(t-\tau)$ характеризуют поведение системы в моменты времени t и $(t-\tau)$, $f(x) = a - x^2$ – нелинейная функция с параметром нелинейности a , $a = 1.5$, $\tau = 20$, k – управляющий параметр. В качестве второго примера было рассмотрено уравнение Маккея-Гласса¹⁵:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma x(t), \quad (5)$$

где $x(t)$ – число клеток (эритроцитов) в момент времени t , $n = 21$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$ – управляющие параметры. Было установлено, что предложенный метод позволяет получить значения старших показателей Ляпунова в спектре (в ходе выполнения работ рассчитывалось 9 старших показателей), которые полностью соотносятся с динамическими режимами, реализующимися в системах, что, в частности, может быть подтверждено прямым

¹⁴В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, Письма в ЖТФ 28 (16) (2002) 37–44; А. С. Караваев, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, Письма в ЖТФ 27 (10)(2001) 43–51.

¹⁵М. С. Mackey, L. Glass, Science 197 (1977) 287.

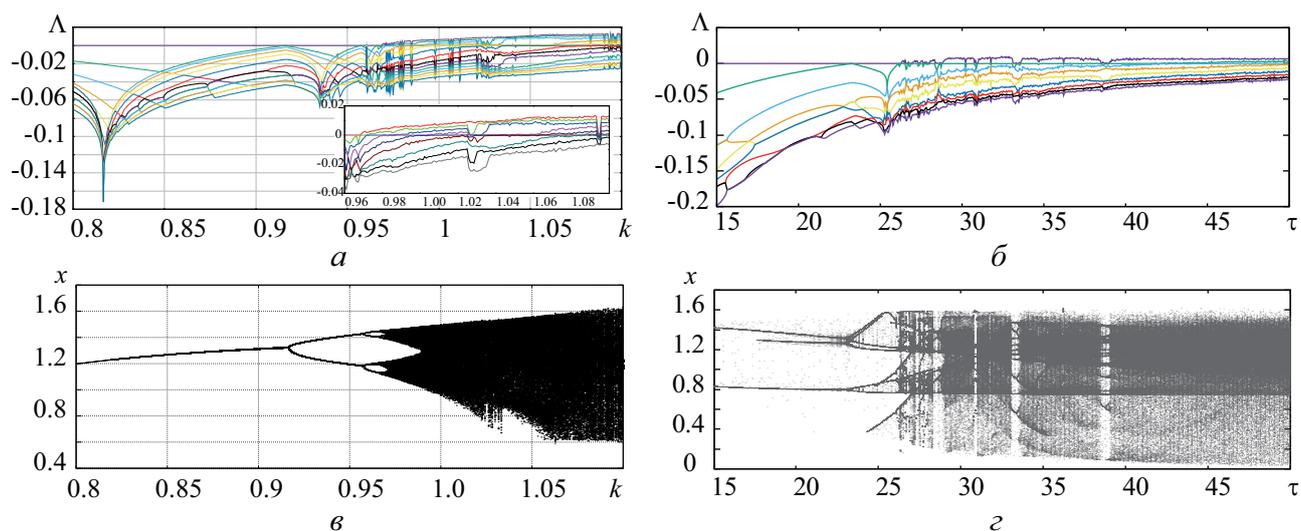


Рисунок 1 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра k для автогенератора с запаздыванием (4) (а) и от времени запаздывания τ для уравнения Маккея-Гласса (5) (б) и соответствующие им бифуркационные диаграммы (в,г)

сопоставлением зависимостей старших показателей Ляпунова от управляющих параметров систем с бифуркационными диаграммами, полученными при варьировании тех же самых управляющих параметров (рисунок 1).

Во **второй главе** изложены результаты исследования общих закономерностей установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием. В качестве моделей исследования в продолжение первой главы выбраны однонаправленно и взаимно связанные генераторы с запаздыванием и уравнения Маккея-Гласса. Для диагностики обобщенной синхронизации использовался метод расчета спектра показателей Ляпунова, разработанный в главе 1. Для однонаправленного типа связи применялся также метод вспомогательной системы. Исследование динамики взаимодействующих систем проводилось путем варьирования значений управляющих параметров, отвечающих за различное количество положительных показателей Ляпунова в автономных системах, а следовательно, характеризующих различную степень их хаотичности. При изучении однонаправленно связанных систем по мере увеличения интенсивности связи между ними наблюдался переход условных положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений с последующим установлением режима обобщенной синхронизации, что полностью соответствует известным теоретическим закономерностям для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами (в качестве примера приведен рисунок 2 (а), построенный для модели Маккея-Гласса с однонаправленным типом связи). Для уточнения результатов

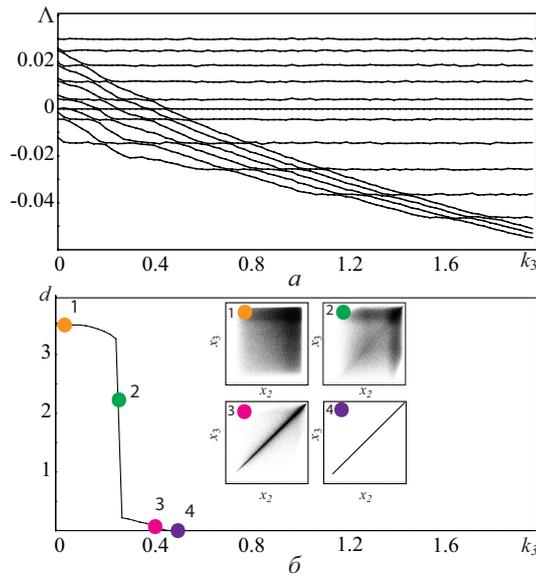


Рисунок 2 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса $\dot{x}_1(t) = f(x_1(t - \tau)) - k_1 x_1(t)$, $\dot{x}_2(t) = f(x_2(t - \tau)) - k_2 x_2(t) + k_3(x_1(t) - x_2(t))$, где $f(x(t - \tau)) = ax(t - \tau)/(1 + (x(t - \tau))^b)$, $a = 2$, $b = 10$, $\tau = 10$, $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.345$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

был применен метод вспомогательной системы, согласно которому, если между идентичными ведомой и вспомогательной системами (но с разными начальными условиями) устанавливается эквивалентность состояний, то в паре ведущей-ведомой систем наступает обобщенная синхронизация. Результатом применения данного метода выступили графики зависимости среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем от параметра связи (рисунок 2 (б)). Из сопоставления полученных результатов с результатами расчета спектра показателей Ляпунова был сделан вывод о том, что режим обобщенной синхронизации детектируется при одних и тех же величинах параметра связи.

Также в ходе проведения исследований обнаружено, что режим обобщенной синхронизации в исследуемых моделях наблюдается независимо от выбора значений управляющих параметров этих систем, однако, пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению данного режима, зависит от выбора значений этих параметров. Наибольшее значение силы связи требуется в случае, когда ведущая система с меньшим числом положительных показателей Ляпунова воздействует на ведомую систему с большим количеством этих показателей. Схожие изменения в спектре показателей Ляпунова наблюдаются также при взаимном типе связи.

Отдельно рассмотрен вопрос о зависимости порога установления обобщенной синхронизации от времени запаздывания. Показано, что при увеличении времени запаздывания порог обобщенной синхронизации сначала монотонно возрастает, а затем выходит на уровень насыщения, величина которого зависит от значений управляющих параметров взаимодействующих систем. Подобное поведение наблюдается как в случае однонаправленной, так и взаимной связи (см. рисунок 3).

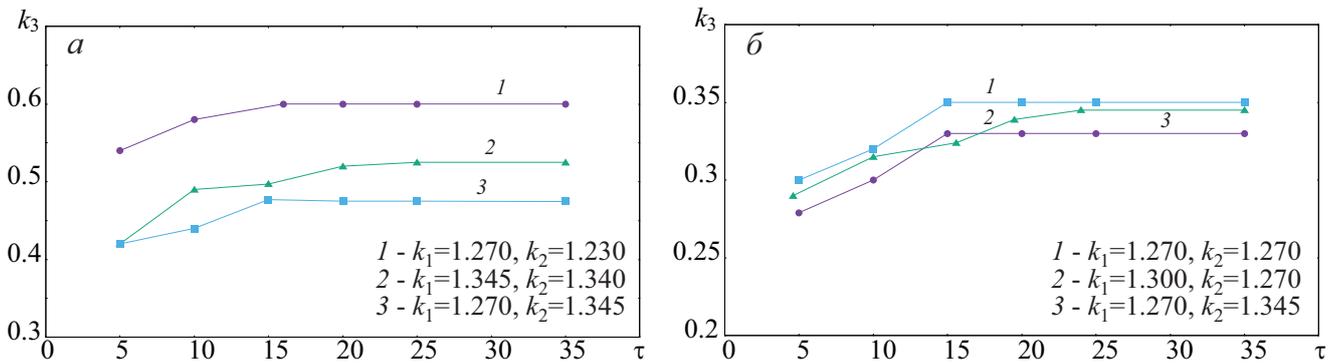


Рисунок 3 — Зависимости порогового значения параметра связи k_3 , соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно (а) и взаимно (б) связанных уравнениях Маккея-Гласса от времени запаздывания τ

Третья глава направлена на изучение фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации в модельных и реальных нейрофизиологических системах. В начале этой главы приведен краткий обзор феноменов фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации, отмечена важность статистических характеристик при исследовании перемежаемости вблизи границы фазовой синхронизации. На примере однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера со слабой расстройкой собственных частот проведено исследование поведения вероятности детектирования ламинарной фазы. В качестве сравнительной характеристики выступала вероятность, рассчитанная с помощью определения средней длительности ламинарных фаз в одной паре осцилляторов на всем временном ряду, а также вероятность, рассчитанная в каждой паре из ансамбля осцилляторов Ресслера на каждом шаге по времени. Два способа определения вероятности детектирования ламинарной фазы показали идентичные результаты: графики зависимостей рассматриваемых величин от параметра связи оказались практически идентичными друг другу. Установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество пар осцилляторов не влияет на факт существования ламинарной фазы, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации при достаточно большом количестве пар вероятность выходит на уровень насыщения.

Вторая часть главы и основной упор сделан на разработанный метод оценки показателя Ляпунова по временному ряду, основанный на модификации работ¹⁶. Основная идея метода базируется на рассмотрении квадратичного отображения в присутствии шума:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega x_n^2 - \varepsilon + \xi_n, \quad (6)$$

где ε, Ω – управляющие параметры, ξ_n – гауссовский шум с математическим ожиданием $\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n, \xi_m \rangle = D\delta(n - m)$, и расчете нулевого показателя Ляпунова по формуле:

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx, \quad (7)$$

где $\rho(x)$ – плотность распределения для значений x , определяемая выражением:

$$\rho(x) = A \exp\left(-\frac{2}{D}\left(\varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3}\right)\right), \quad (8)$$

где A – коэффициент нормировки, D – интенсивность шума. Алгоритм вычисления нулевого показателя Ляпунова сводится к аппроксимации численно полученного распределения разности фаз взаимодействующих систем аналитической закономерностью (8), поиску параметров аппроксимации ε, Ω, D и коэффициента A и вычислению показателя Ляпунова по формуле (7).

Предложенная модификация метода на случай реальных систем, где наблюдается перемежающееся поведение, заключается в установлении взаимосвязи между параметром D и остальными управляющими параметрами системы с помощью сопоставления разложений в ряд Тейлора до второго порядка малости аналитических выражений (8) и

$$\rho_G(x) = A_G \exp(-2B(x - K)^2), \quad (9)$$

определяющего нормальное распределение плотности вероятности (где K и B – аналоги математического ожидания и дисперсии, A_G – нормировочный множитель), в следующем виде:

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon\Omega}{B}}. \quad (10)$$

Предложенный метод применен для оценки нулевого условного показателя Ляпунова по данным электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij. В

¹⁶О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Письма в ЖТФ 40 (12) (2014) 66–72; О. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Phys. Rev. E 92 (2015) 012913.

работе изучены данные ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в двух ее состояниях: в свободном состоянии и под влиянием лекарственного препарата клонидин. В качестве анализируемых сигналов рассматривались разности фаз сигналов, полученных с двух разных областей головного мозга крысы: фронтальной коры и ядра таламуса. Введение фаз сигналов осуществлялось при помощи непрерывного вейвлетного преобразования. Расчет условного нулевого показателя Ляпунова производился в течение пик-волновых разрядов, то есть во время эпилептических приступов.

Применение такого подхода показало, что степень синхронизма пик-волновых разрядов оказывается более высокой у лабораторных крыс, находящихся под действием лекарства. Показатели Ляпунова, полученные для крыс в свободном состоянии и под действием лекарственных препаратов, оказываются отрицательными в обоих случаях, а их отношение оказывается равным $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = 0.64495$, где Λ_1 – нулевой условный показатель Ляпунова, рассчитанный для крысы, находящейся в свободном состоянии, Λ_2 – аналогичный показатель Ляпунова для крысы, находящейся под действием лекарственного препарата клонидин.

Проанализированы зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от номера пик-волнового разряда для обоих рассмотренных случаев (рисунок 4). Показано, что для крысы в свободном состоянии искомая величина Λ_1 остается практически постоянной независимо от номера N пик-волнового разряда. В случае же крысы, находящейся под действием клонидина, абсолютная величина рассматриваемого показателя Ляпунова Λ_2 достаточно сильно растет с увеличением номера пик-волнового разряда в течение первых 12 часов действия препарата. Затем она начинает уменьшаться, достигая постоянных значений, сравнимых по своей величине со значением Λ_1 для крысы в свободном состоянии, когда препарат еще не начал действовать.

Аналогичным способом проанализированы сигналы электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией. Отдельно рассмотрены участки ЭЭГ, соответствующие пик-волновым разрядам, и синхронные участки фоновой активности головного мозга. В результате проведенных расчетов показатели Ляпунова оказались отрицательными для обоих видов активности головного мозга, а их отношение друг к другу вышло равным $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \approx 1.11854$, что позволяет сделать вывод о более высокой степени синхронизма пик-волновых разрядов по сравнению с участками фоновой активности головного мозга человека.

В Заключение подведены итоги диссертационной работы, сформулиро-

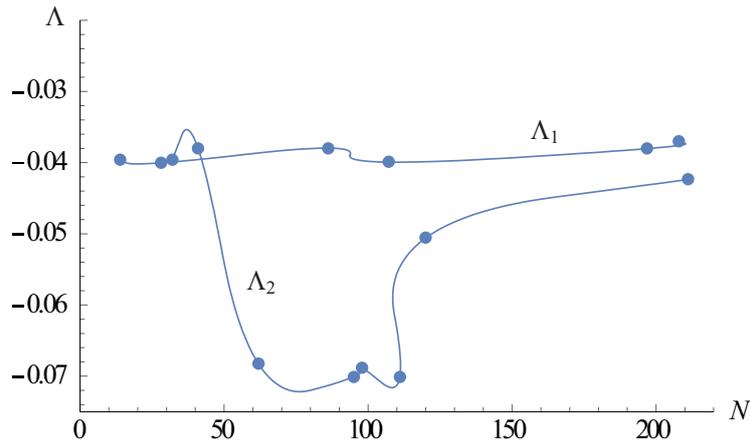


Рисунок 4 — Зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от номера пикового разряда на ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в случае воздействия лекарственных препаратов (Λ_2) и в их отсутствии (Λ_1)

ваны основные результаты и выводы:

1. Разработан и апробирован метод для расчета спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием. Объектами исследования выбраны генератор с запаздыванием и уравнение Маккея-Гласса.
2. При помощи разработанного метода проведено исследование закономерностей установления обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием. Для различных комбинаций управляющих параметров, отвечающих за разное количество положительных показателей Ляпунова в исследуемых системах в отсутствие связи, построен спектр показателей Ляпунова связанных систем. При установлении обобщенной синхронизации обнаружен последовательный переход изначально положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений для обоих типов связи.
3. Для однонаправленного и взаимного типов связи выявлена характерная зависимость порогового значения параметра связи, соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания в виде увеличения его значения с последующим насыщением. Данная величина существенным образом зависит от количества положительных показателей Ляпунова, реализуемых в системе, за что, в свою очередь, отвечают соответствующие управляющие параметры.

4. Изучено поведение вероятности обнаружения ламинарной фазы в однопонаправленно связанных неидентичных осцилляторах Ресслера и их ансамбле. Установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество пар осцилляторов не влияет на существование ламинарной фазы, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации при достаточно большом количестве пар вероятность достигает уровня насыщения.
5. Предложена модификация метода оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанная на вычислении условного нулевого показателя Ляпунова.
6. Предложенный метод применен для исследования перемежающегося поведения в реальных системах: к сигналам электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией, а также к ЭЭГ крыс линии WAG/Rij в случае влияния на них лекарственных препаратов и в их отсутствии.
7. Для крыс линии WAG/Rij в обоих случаях произведена оценка степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации. Продемонстрированы законы изменения показателя Ляпунова крысы под действием лекарства и в его отсутствии. Обнаружено, что пик-волновые разряды лучше синхронизированы под действием лекарства.
8. Проанализированы аналогичные результаты для ЭЭГ головного мозга человека, страдающего эпилепсией. Установлено, что пик-волновые разряды обладают более высокой степенью синхронизма, чем участки фоновой активности головного мозга.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах¹⁷:

- [1] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, О. И. Москаленко, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека, Письма в ЖТФ 43 (10) (2017) 102–110 (Web of Science, Scopus).
- [2] О. I. Moskalenko, **A. D. Plotnikova (A. D. Koloskova)**, M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Intermittent phase synchronization in human epileptic brain, Proc. SPIE 10063 (2017) 1006316 (Web of Science, Scopus).
- [3] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным ЭЭГ лабораторных животных, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 25 (5) (2017) 26–34 (Scopus).
- [4] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием, Письма в ЖТФ 44 (9) (2018) 19–25 (Web of Science, Scopus).

¹⁷ До 2018 года автор диссертации публиковала свои работы под фамилией Колоскова А.Д.

- [5] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, Особенности обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, Письма в ЖТФ 45 (11) (2019) 31–33 (Web of Science, Scopus).
- [6] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, Обобщенная синхронизация в однонаправленно связанных системах с запаздыванием, Изв. РАН. Сер. физическая 84 (1) (2020) 87–89 (Scopus).
- [7] О. И. Moskalenko, А. А. Koronovskii, **А. Д. Plotnikova**, Peculiarities of generalized synchronization in unidirectionally and mutually coupled time-delayed systems, Chaos, Solitons & Fractals 148 (2021) 111031 (Web of Science, Scopus, Q1).
- [8] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для расчета вероятности детектирования фазовой синхронизации по ансамблю с возможностью управления количеством осцилляторов, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661003, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Дата государственной регистрации 16.09.2020.
- [9] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, **А. Д. Плотникова**, Программа для детектирования обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661004, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Дата государственной регистрации 16.09.2020.
- [10] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, **А. Д. Плотникова**, Программа для расчета спектра показателей ляпунова в системах с запаздыванием, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661348, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Дата государственной регистрации 22.09.2020.
- [11] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, О. И. Москаленко, Оценка степени перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе, Материалы 11 Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”, 2016, сс. 91–92.
- [12] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, Оценка степени перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам: модельные системы и реальные нейрофизиологические данные, Труды Всероссийской школы-семинара “Волны-2017” им. А.П.Сухорукова. Нелинейная динамика, 2017, сс. 32–35.
- [13] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека, Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2017, 2017, сс. 35–36.
- [14] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием, XIII научная школа “Нелинейные волны – 2018”. Тезисы докладов молодых ученых, 2018, сс. 70–72.
- [15] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, Применение показателей Ляпунова для диагностики сложных колебательных режимов и синхронного поведения в системах с запаздыванием, Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2018, 2018, сс. 32–33.
- [16] **А. Д. Плотникова (А. Д. Колоскова)**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Применение показателей Ляпунова для диагностики сложных колебательных режимов и синхронного поведения в системах с запаздыванием, Сборник трудов XIII Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 2018, сс. 114–115.
- [17] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, Закономерности установления режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, Труды Всероссийской школы-семинара “Волны-2019” им.А.П.Сухорукова. Нелинейная динамика, 2017, сс. 25–26.
- [18] **А. Д. Плотникова**, Закономерности установления режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2019, 2019, сс. 37–38.
- [19] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, Влияние времени запаздывания на установление обобщенной синхронизации в системах с отклоняющимся аргументом, Материалы 12 международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”, 2019, сс. 90–91.
- [20] **А. Д. Плотникова**, О. И. Москаленко, Общие закономерности установления обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием при различных типах связи, XIX научная школа “Нелинейные волны – 2020”. Тезисы докладов молодых ученых, 2020, сс. 195–196.