

На правах рукописи



КОРНЕЕВ Иван Александрович

КОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМАХ С
МЕМРИСТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

1.3.4. – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2021

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики **Вадивасова Татьяна Евгеньевна**

Официальные оппоненты:

Куркин Семён Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, Автономная некоммерческая организация высшего образования «Университет Иннополис», г. Иннополис, профессор лаборатории нейронауки и когнитивных технологий центра технологий компонентов робототехники и мехатроники.

Круглов Вячеслав Павлович, кандидат физико-математических наук, Саратовский филиал ФГБУН «Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН», г. Саратов, научный сотрудник лаборатории теоретической нелинейной динамики.

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», г. Пермь.

Защита состоится «22» октября 2021 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.392.01 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Университетская, 40, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» и на сайте <https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-01/kandidatskaya-dissertaciya-korneeva-ivana>

Автореферат разослан «_____» _____ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.392.01, к.ф.-м.н., доцент



Слепченков
Михаил Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Исследование особенностей динамики систем, содержащих мемристоры, является актуальным направлением в теории нелинейных колебаний и волн, радиофизике и электронике, а также в области цифровых технологий. Мемристор представляет собой двухполюсник с памятью. Концепция мемристора была предложена Л. Чуа, который рассматривал мемристор как двухполюсник с проводимостью, управляемой магнитным потоком или с сопротивлением, управляемым зарядом¹. В дальнейшем предложенная концепция была обобщена² на случай произвольного двухполюсника, который может быть описан следующими соотношениями:

$$y = G_M(\mathbf{z}, x, t)x, \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, x, t). \quad (1)$$

Здесь x — входной сигнал, y — отклик системы. $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ — векторная переменная, задающая мгновенное состояние мемристора. Его характеристика G_M представляет собой скалярную нелинейную функцию, зависящую от управляющей переменной \mathbf{z} , значение которой связано со входной переменной инерционно, т.е. зависит от предыстории мемристора. Скорость изменения переменной \mathbf{z} задается непрерывной функцией $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Данному определению удовлетворяют, например, такие устройства, как термистор, газоразрядная лампа, цепочка инерционной нелинейности. В настоящее время разработаны реальные мемристоры на основе полупроводниковых и органических материалов, графена, твердотельных оксидных плёнок и др.³ Мемристивные устройства могут найти практическое применение в электронике и компьютерной технике, в частности, для создания элементов памяти⁴, а также в искусственных нейронных сетях, предназначенных для обработки информации⁵. Следует отметить, что реальные мемристоры не способны бесконечно долго сохранять зависимость от предыдущих состояний. Так, в мемристивных устройствах на базе окислов металлов, эффект «забывания» связывают с процессами диффузии носителей заряда.

¹Chua, L.O. Memristor—the missing circuit element // IEEE Transactions on circuit theory. — 1971. — Vol. 18, no. 5. — Pp. 507–519.

²L.O. Chua, S.M. Kang, Memristive Devices and Systems // Proceedings of the IEEE. — 1976. — Vol. 64(2). — Pp. 209–223.

³D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart, R.S. Williams, The missing memristor found // Nature. — 2008. — Vol. 453(7191). — Pp. 80–83.

⁴Y.V. Pershin, M. Di Ventra, Practical Approach to Programmable Analog Circuits With Memristors // IEEE Trans. on Circuits and Systems. — 2010. — Vol. 57(8). — Pp. 1857–1864.

⁵Y.V. Pershin, M. Di Ventra, Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks // Neural Networks. — 2010. — Vol. 23(7). — Pp. 881–886.

Системы, содержащие мемристивные элементы (мемристивные системы), часто встречаются в различных областях физики, а также в биофизике и нейродинамике. Мемристивные связи могут играть существенную роль в поведении ансамблей реальных нейронов⁶. Изучение динамики мемристивных систем важно с фундаментальной точки зрения, поскольку их поведение обладает существенными особенностями, которые пока еще недостаточно изучены. В то же время, данная проблема является актуальной в связи с возможным применением мемристивных устройств в задачах хранения и обработки информации. Примером простой мемристивной системы может служить радиотехнический генератор с колебательным контуром⁷, содержащий мемристивную проводимость.

Одним из свойств мемристивных систем, математические модели которых не учитывают эффект «забывания» мемристивных элементов, является существование в фазовом пространстве линий, состоящих из точек равновесия. Для таких систем характерны притягивающие предельные множества, состоящие из неизолированных точек равновесия и замкнутых орбит, а также бифуркации, происходящие при фиксированных параметрах с изменением начального состояния⁸. Аттрактор генератора с мемристивной проводимостью состоит из непрерывного множества точек равновесия и непрерывного множества замкнутых орбит, заполняющих некоторую поверхность в трехмерном фазовом пространстве. Каждая из таких орбит соответствует установившемуся периодическим колебаниям, но не является предельным циклом, так как не является изолированной. Бифуркации в мемристивном генераторе могут наблюдаться как при изменении управляющего параметра, так и «без параметра», при изменении начальных условий. Бифуркационные механизмы возникновения колебаний, хотя и рассматривались в литературе, однако не были полностью изучены. Так не рассматривался вопрос о том, как влияет на бифуркацию возникновения колебаний мемристивного генератора характеристика мемристора.

Важной задачей является исследование эффектов синхронизации мемристивных систем. Показана возможность адаптивной синхронизации, в том числе в режиме гиперхаоса, в генераторах, содержащих мемристоры⁹.

⁶Ma, Zhang G., Hayat T., Ren G., Model electrical activity of neuron under electric field // *Nonlinear dynamics*. — 2019. — Vol. 95(2). — Pp. 1585–1598.

⁷M. Itoh, L.O. Chua, Memristor Oscillators // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18(11). — Pp. 3183–3206.

⁸B. Fiedler, S. Liebscher, J.C. Alexander, Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. Theory // *Journal of Differential equations*. — 2000. — Vol. 167(1). — Pp. 16–35.

⁹V.T. Pham, C.K. Volos, S. Vaidyanathan, T. Le Tpp, V. Y. A Vu, Memristor-based hyperchaotic system with hidden attractors: dynamics, synchronization and circuitual emulating // *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2015, vol. 8(2), pp. 205–214

Однако вопрос о существовании и особенностях частотно-фазовой синхронизации колебаний мемристивных генераторов остается открытым. Другим направлением исследования является анализ эффектов синхронизации при взаимодействии мемристивно связанных автогенераторов и возбудимых осцилляторов. Интерес к данному направлению исследований, в частности, связан с задачами исследования динамики живых нейронов, взаимодействия которых могут быть смоделированы с помощью мемристивных элементов связи. Работ, посвященных особенностям взаимодействия автоколебательных систем с мемристивной связью, в настоящее время имеется немного. Можно отметить работу, посвященную экспериментальному исследованию двух мемристивно связанных периодических автогенераторов Ван дер Поля на аналоговой модели радиотехнической цепи¹⁰. Был показан эффект фазового захвата в периодических генераторах, однако не вскрыты его особенности, обусловленные мемристивным характером связи. А исследования синхронизации импульсов зажигания в нейронах Хиндмарша-Розе с мемристивной связью¹¹ показали, что эффект синхронизации зависит от начальных условий и установлена полная синхронизация импульсов в режиме хаотической динамики. Такая зависимость отражает мемристивный характер связи, но она не рассматривалась в других работах и, практически, не исследована.

В ряде работ исследовалось распространение волн и образование пространственных структур в ансамблях и сетях с мемристивными связями¹². Важной и интересной является задача синхронизации сложных пространственно-временных режимов во взаимодействующих слоях многослойной сети при мемристивном характере связи слоев¹³. Важно отметить, что пока еще остается много неясного, в том, как влияет мемристивный характер связи элементов ансамбля на пространственно-временную динамику.

Результаты проведенного анализа научных публикаций по теме диссертации свидетельствуют о том, что изучение особенностей динамики мемристивных систем является современной и актуальной научной проблемой нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящейся к задачам радиоп физики.

¹⁰C.K. Volos, I.M. Kyrianiadis, I.N. Stouboulos et al., Synchronization of Chaotic Nonlinear Circuits via a Memristor // Journal of Engineering Science & Technology Review. — 2015. — Vol. 8(2). — Pp. 44–51.

¹¹H. Bao, Y. Zhang, W. Liu, et al. Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera // Nonlinear Dyn. 2020. Vol.100. pp. 937–950

¹²V.T. Pham, A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca, Autowaves in memristive cellular neural networks // International journal of bifurcation and chaos. 2012. Vol. 22(8). P. 1230027

¹³F. Xu, J. Zhang, M. Jin et al. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks // Nonlinear dynamics. — 2018. — Vol. 94(2). — Pp. 775–783.

Целью данной работы является решение актуальной радиофизической задачи, состоящей в установлении и изучении особенностей динамики мемристивных систем: бифуркационных механизмов возникновения колебаний в генераторах, содержащих мемристивную проводимость (мемристивных генераторах); эффектов вынужденной и взаимной синхронизации мемристивных генераторов; эффектов синхронизации периодических и хаотических генераторов, взаимодействующих через мемристор; особенностей формирования бегущих волн в ансамблях мемристивно-связанных автогенераторов и возбудимых осцилляторов с периодическими граничными условиями; эффекта взаимной синхронизации химерных состояний в слоях мультиплексной сети мемристивно связанных хаотических систем; влияния неидеальности мемристивных элементов на динамику мемристивных систем.

Для достижения поставленной цели определены **основные задачи** диссертационного исследования:

1. Исследовать бифуркационные механизмы возникновения колебаний в мемристивном генераторе с различным видом нелинейности и различными характеристиками мемристивной проводимости. Сравнить результаты численного и аналогового моделирования с теоретическими результатами, полученными в рамках квазигармонического приближения.
2. Провести численное и теоретическое исследование эффекта вынужденной синхронизации колебаний мемристивного генератора внешним гармоническим воздействием. Проанализировать влияния начального состояния мемристора на динамику в системе.
3. Исследовать особенности явление синхронизации в двух диссипативно и мемристивно связанных системах, на примере мемристивных генераторов, генераторов ван дар Поля и Анищенко-Астахова. Проанализировать влияния начального состояния мемристивного элемента на границы области синхронизации и на порог полной синхронизации.
4. Исследовать характеристики бегущих волн в ансамбле мемристивно связанных автоколебательных систем: генераторов ван дер Поля и нейронов ФитцХью-Нагумо. Исследовать влияние начальных состояний мемристивных элементов на форму волнового профиля и частоту колебаний во времени в кольце мемристивно связанных нейронов ФитцХью-Нагумо в возбудимом режиме.
5. На примере простой модели однородной мультиплексной двухслойной сети логистических отображений в режиме хаотической динамики с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивным взаимодействием слоев рассмотреть возможность полной синхронизации сложных кластерных режимов, таких как химерные состояния.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В генераторе с идеальным мемристором Чуа, проводимость которого принимает одно из двух постоянных значений в зависимости от значений управляющей переменной, при вариации параметра, контролирующего подкачку энергии в систему, могут наблюдаться как жесткая, так и мягкая бифуркации возникновения колебаний, в которых принимают участие непрерывные множества точек равновесия и замкнутых кривых. Жесткий бифуркационный сценарий имеет место в генераторе с постоянной отрицательной проводимостью и состоит в возникновении непрерывного множества замкнутых кривых конечного размера. Мягкий сценарий возникновения колебаний реализуется в случае кубической характеристики активного элемента и аналогичен суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. В результате бифуркации в этом случае рождается непрерывное множество замкнутых кривых бесконечно малого радиуса.
2. В генераторе с постоянным отрицательным сопротивлением и идеальным мемристором, проводимость которого задается гладкой функцией управляющей переменной, при вариации параметра, контролирующего подкачку энергии в систему, происходит мягкая бифуркация возникновения колебаний. Эта бифуркация соответствует суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа и для различных точек на линии равновесия происходит не одновременно, а при различных значениях управляющего параметра.
3. Частота и фаза колебаний мемристивного генератора с идеальной мемристивной проводимостью могут быть захвачены при внешнем периодическом воздействии или вследствие взаимодействия с другим генератором. При этом граница области синхронизации зависит от начального состояния системы и, при фиксированных параметрах системы, может управляться с помощью начального значения переменной, задающей состояние мемристора.
4. Граница полной синхронизации систем со сложной динамикой, как сосредоточенных, так и распределенных, взаимодействующих через мемристивные элементы связи, зависит от начального состояния этих элементов связи, причем эта зависимость сохраняется и в случае, когда мемристоры не являются строго идеальными, а характеризуются конечным, но достаточно длительным временем памяти.
5. В ансамбле возбудимых осцилляторов с мемристивными связями и периодическими граничными условиями можно управлять характеристиками бегущих волн возбуждения (формой импульсов и периодом колебаний осцилляторов), меняя начальные состояния мемристоров связи, причем

влияние начальных состояний имеет место не только в случае идеальных мемристоров, но и в случае мемристоров с конечным, но достаточно длительным временем памяти.

Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в следующем: Установлены детали бифуркационных механизмов возникновения колебаний в генераторе с мемристивной проводимостью при кусочно-гладкой и гладкой характеристиках мемристора. Впервые результаты численного моделирования были подтверждены теоретическими результатами, а также с результатами аналогового моделирования.

Впервые установлен эффект фазового захвата для мемристивных генераторов периодических колебаний и установлена зависимость границ частотно-фазовой синхронизации от начальных условий, в частности, от начального состояния мемристора. Показано существование порога синфазной синхронизации двух взаимодействующих мемристивных генераторов периодических сигналов. Показано, что границы области частотно-фазовой синхронизации периодических генераторов с расстройкой частот, связанных через мемристор, зависят от начального состояния мемристора.

Установлена важность наличия или отсутствия у мемристора эффекта забывания. Численно и, частично, в аналоговом эксперименте, показано, что малое отклонение от идеального случая приводит к исчезновению большинства особенностей мемристивных систем. Впервые установлено, что граница полной синхронизации сосредоточенных и распределенных систем со сложной динамикой при взаимодействии через неидеальные мемристоры сохраняет определенную зависимость от начального состояния мемристивных элементов связи, если они обладают достаточно длинной памятью.

Показано, что при связи через идеальные мемристоры форма бегущей волны зависит от начальных условий, в частности от начальных состояний мемристоров связи. Для кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо в возбужденном режиме впервые обнаружено, что скорость распространения волны по кольцу существенно зависит от начальных состояний мемристоров связи. Показано, что данная зависимость частично сохраняется при неидеальных мемристорах связи с длительной памятью.

Научная и практическая значимость результатов диссертации определяется тем, что в работе рассматриваются особенности динамики, бифуркации и эффекты синхронизации важного с теоретической и практической точек зрения и малоизученного класса колебательных систем, который составляют системы, содержащие мемристивные устройства. Полученные результаты существенным образом дополняют существующие на сегодняшний день представления нелинейной теории колебаний. Установлены основные би-

бифуркационные сценарии возникновения периодических колебаний в генераторе с мемристивной проводимостью для различных характеристиках мемристора и активного нелинейного сопротивления. Показана особая роль начальных условий при вынужденной и взаимной синхронизации мемристивных генераторов, а также при синхронизации «обычных» периодических и хаотических генераторов, взаимодействующих через мемристивные элементы связи. Выявлено значение эффекта забывания мемристивных элементов, который существенным образом влияет на динамику мемристивных систем. Установлена важная роль мемристивных связей в ансамблях автогенераторов и возбудимых осцилляторов. Показано, что характеристики волновых процессов зависят от выбора начальных состояний мемристивных элементов связи. Полученные результаты свидетельствуют о возможности управления волновыми процессами в возбудимых системах с помощью выбора начальных состояний мемристоров связи.

Достоверность научных результатов работы подтверждается: согласованием данных, полученных различными методами, включающими численное моделирование, аналоговые эксперименты и приближенные теоретические построения в рамках квазигармонического анализа; отсутствием противоречий с уже известными результатами, полученными другими авторами, и установившимися представлениями в данной области знаний.

Личный вклад заключается в получении, обработке и анализе данных в ходе численных и натурных экспериментов, а также аналитическими методами в квазигармоническом приближении. Автором разработаны программы, с помощью которых проводились численные расчеты и обработка экспериментальных данных. Также автор принимал участие в постановке задач, интерпретации и обсуждении результатов, и написании научных статей.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах: «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (Саратов, 2014–2017); «Saratov Fall Meeting» (Саратов, 2016, 2018, 2020); «Dynamics, Bifurcations and Chaos» (Нижний Новгород, 2017, 2018); «Workshop on Control of Self-Organizing Nonlinear Systems» (Лютерштадт-Виттенберг, Германия, 2019); XIX научная школа «Нелинейные волны – 2020» (Нижний Новгород, 2020).

Гранты. Исследования проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-32-90030, № 20-52-12004) и Российского научного фонда (проект № 20-12-00119).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 рецензируемых научных журналах [1-10], входящих в системы Web of

Science, Scopus, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. Одна работа опубликована в сборнике тезисов конференции [11]. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [12,13].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Материал диссертационной работы изложен на 160 страницах, содержит 52 иллюстрации и список цитируемой литературы из 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, сформулирована цель работы, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** рассматриваются особенности поведения радиотехнического генератора периодических колебаний, содержащего мемристор (рисунок 1,а). Он состоит колебательного контура, элемента с отрицательным сопротивлением с вольт-амперной характеристикой $U_N(I)$ и мемристор с управляемой проводимостью $W_M(\varphi)$. Уравнения генератора в безразмерных переменных имеют вид:

$$\dot{x} = \alpha(y - G_M(z)x), \quad \dot{y} = -x - f(y), \quad \dot{z} = x, \quad (2)$$

где $x \sim v$ – безразмерное напряжение, $y \sim I$ – безразмерный ток, z – переменная, управляющая мемристором. Функции $f(y)$ и $G_M(z)$ является безразмерным эквивалентом функций $U_N(I)$ и $W_M(\varphi)$. В рассматриваются два вида характеристик мемристора: кусочно-линейная характеристика (мемристор Чуа) $G_M = a \vee b$, при $|z| > 1$ и $|z| \leq 1$ и гладкая характеристика $G_M = a + bz^2$. Также рассматриваются два вида вольт-амперных характеристик активного элемента: линейная характеристика $f(y) = -\beta y$ и кубическая характеристика $f(y) = -\beta_1 y + \beta_3 y^3$. Во всех рассмотренных случаях Аттрактор системы (2) в режиме существования колебаний состоит из поверхности, образованной всюду плотными замкнутыми кривыми, соответствующими периодическим колебаниям, и линии равновесий (рисунок 1,б,в).

В разделе 1.3 исследуются бифуркации в генераторе (2) с кусочно-линейным мемристором Чуа. Показано, что при вариации параметра, управляющего подкачкой энергии в систему (β или β_1), могут наблюдаться как

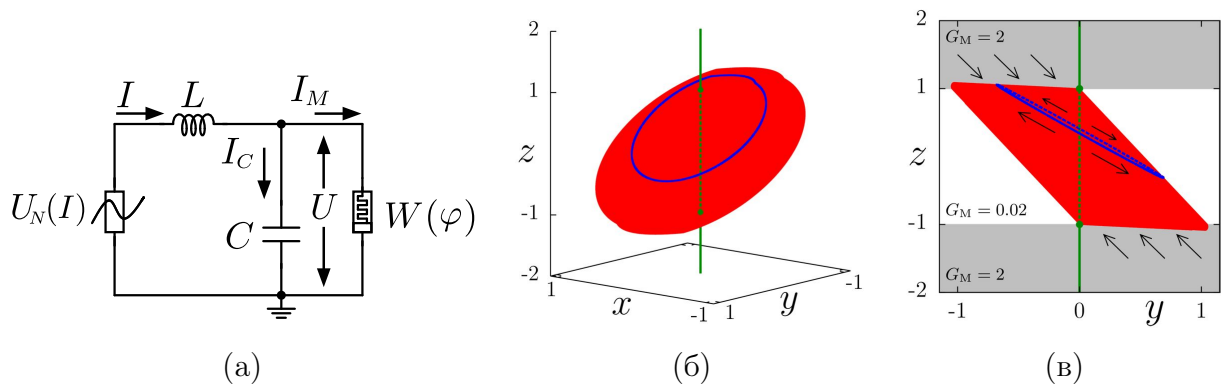


Рис. 1: Схема исследуемой системы (а) и аттрактор системы (2) с мемристором Чуа и постоянной отрицательной проводимостью (б) и его проекция (в).

жесткий, так и мягкий сценарий возникновения колебаний. Особенность как жестких, так и мягких бифуркационных сценариев в генераторе с мемристором Чуа состоит в том, что в них принимают участие непрерывное множество точек равновесия и замкнутых кривых. Жесткий бифуркационный сценарий установлен для генератора с постоянной отрицательной проводимостью. Он состоит в возникновении множества замкнутых кривых конечного размера и связан с бифуркацией, аналогичной С-бифуркации предельного цикла в системах с негладкими правыми частями уравнений. Мягкий сценарий возникновения колебаний установлен в случае, активный элемент описывается полиномом третьей степени. Он аналогичен суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. В результате бифуркации в этом случае рождается множество замкнутых кривых бесконечно малого радиуса.

Кроме бифуркаций, происходящих при вариации управляющего параметра были установлены бифуркации без параметра. В случае постоянной отрицательной проводимости и активного элемента с кубической вольт-амперной характеристикой бифуркация без параметра носит один и тот же характер: при смещении вдоль линии равновесий (вдоль оси OZ) в направлении уменьшения абсолютной величины переменной z происходит рождение замкнутой кривой бесконечно-малого радиуса. Затем размер замкнутой кривой растет до некоторого значения (рисунок 1,в).

Проведенные численные исследования хорошо соответствуют результатам теоретического анализа, а также согласуются с результатами натурального эксперимента. Аналоговое моделирование и численные расчеты показали, что если время памяти мемристора сколь угодно велико, но конечно, то в фазовом пространстве не существует линии равновесий. Вместо нее остается единственная точка равновесия в начале координат. Предельное множество, состоящее из неизолированных замкнутых орбит, вырождается в единственный предельный цикл. Бифуркации предельных множеств при вариации управ-

ляющего параметра превращаются в «обычные» бифуркации рождения предельных циклов. Однако если мемристивный элемент близок к идеальному мемристору в системе наблюдаются длительные переходные процессы, в течении которых фазовая траектория может находиться вблизи аттрактора системы с идеальным мемристором, воспроизводя форму соответствующей поверхности.

Для мемристивного генератора (2) с гладкой характеристикой мемристора и постоянной отрицательной проводимостью была установлена мягкая бифуркация при изменении управляющего параметра β , аналогичная суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Такой сценарий отличается от мягкой бифуркации в генераторе с мемристором Чуа тем, что наблюдается для различных точек на линии равновесия не одновременно, а при различных значениях управляющего параметра. При этом бифуркация без параметра, происходящая при смещении вдоль линии равновесий в направлении уменьшения абсолютной величины переменной z , также полностью аналогична суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с аналитическими результатами, полученными в квазигармоническом приближении для усредненных уравнений, описывающих динамику амплитуд и фаз (рисунок 2).

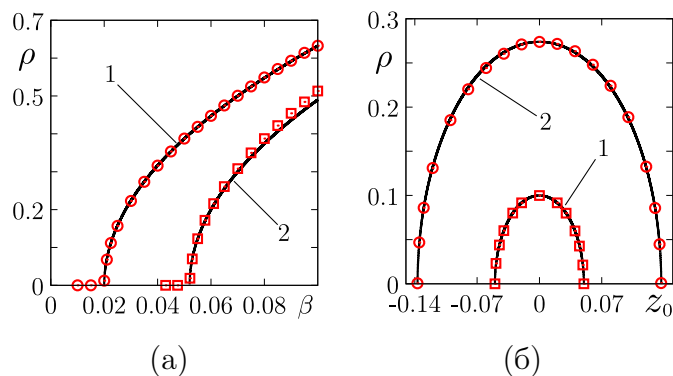


Рис. 2: Сравнение аналитических и численных результатов для амплитуды колебаний в системе (2) с гладкой характеристикой мемристора: (а) зависимости амплитуды колебаний переменной $x(t)$ от параметра β , полученные аналитически при $z_0 = 0$ (черная кривая 1) и $z_0 = 0.2$ (черная кривая 2) и рассчитанные численно при соответствующих начальных условиях (круги и квадраты); (б) зависимости амплитуды колебаний переменной $x(t)$ от начального значения z_0 полученные аналитически при $\beta = 0.022$ (черная кривая 1) и $\beta = 0.035$ (черная кривая 2) и рассчитанные численно (круги и квадраты).

Во **второй главе** рассматриваются особенности синхронизации в мемристивных системах. Для мемристивных генераторов периодических колебаний было установлено явление как вынужденной, так и взаимной синхронизации фазы и частоты. В разделе 2.2 исследуется гармоническое внеш-

нее воздействие на генератор (2) с гладкой характеристикой мемристора и постоянной отрицательной проводимостью. Оно приводит к фазовому захвату, который наблюдается в автоколебательных системах. Границы области вынужденной синхронизации зависят от начальных условий, в частности от начального состояния мемристора, задаваемого величиной z_0 . Эффект фазового захвата и зависимость границ области захвата от начального состояния мемристора были установлены не только методами численного моделирования, но и аналитически, с использованием квазигармонического приближения, причем полученные аналитические и численные результаты находятся в хорошем соответствии (рисунок 3).

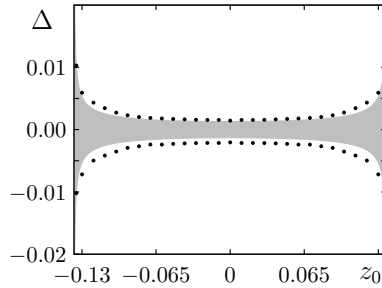


Рис. 3: Интервал значений расстройки Δ , соответствующий режиму вынужденной синхронизации мемристорного генератора, в зависимости от начального значения z_0 при $B = 0.001$, $x(0) = y(0) = 0$. Черные кружки соответствуют численным расчетам, затонированная область – результатам, полученным аналитически в фазовом приближении. Параметры системы: $\alpha = 1$, $\beta = 0.035$, $\gamma = 1$, $a = 0.02$, $b = 0.8$

В разделе 2.3 рассматривается синхронизация двух диссипативно-связанных мемристорных генераторов, уравнения которых имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 - G(z_1)x_1 + k(x_2 - x_1), \quad \dot{y}_1 = -x_1 + \beta y_1, \quad \dot{z}_1 = x_1 - \delta z_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - G(z_2)x_2 - k(x_2 - x_1), \quad \dot{y}_2 = p(-x_2 + \beta y_2), \quad \dot{z}_2 = x_2 - \delta z_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр p определяет отношение частот невзаимодействующих генераторов. Мемристорная проводимость задавалась гладкой функцией $G(z) = a + bz^2$, где $a = 0.02$, $b = 0.8$. Уравнения, описывающие динамику мемристорных переменных в общем случае содержат малый параметр δ , который определяет неидеальность мемристорных элементов. Для генераторов с идеальными мемристорами ($\delta = 0$) была установлена зависимость границ частотно-фазовой синхронизации в генераторах с расстройкой частот от начального значения переменной состояния мемристорных элементов и показана непрерывная зависимость границ синхронизации от этой величины. Было показано существование порога полной (синфазной) синхронизации даже в случае идентичных генераторов (без расстройки). То есть, для того, чтобы колебания в парциальных системах полностью совпадали, требуется сила связи, превышающая

некоторое пороговое значение. Наличие порога для полной синхронизации мемристивных генераторов объясняется различиями периодов колебаний в идентичных парциальных мемристивных системах с разными начальными условиями. Пороговое значение коэффициента связи при этом зависит от начальных условий.

В разделе 2.4 исследуются два генератора ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. Уравнения системы в безразмерных записываются как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 + (\gamma - x_1^2)x_1 - kG_M(z)(x_1 - x_2), & \dot{y}_1 &= x_1, & \dot{z} &= x_1 - x_2 - \delta z, \\ \dot{x}_2 &= -py_2 + (\gamma - x_2^2)x_2 - kG_M(z)(x_2 - x_1), & \dot{y}_2 &= x_2, & G_M &= a + bz^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где параметр p задаёт отношение частот невзаимодействующих генераторов. Показано, что в периодических генераторах, связанных через мемристор, также наблюдалась зависимость эффекта синхронизации от начального состояния системы. Численно и аналитически, с использованием методов квазигармонического анализа, было показано, что границы области синхронизации генераторов с частотной расстройкой зависят от начального значения переменной состояния мемристора связи (рисунок 4). Если учесть неидеаль-

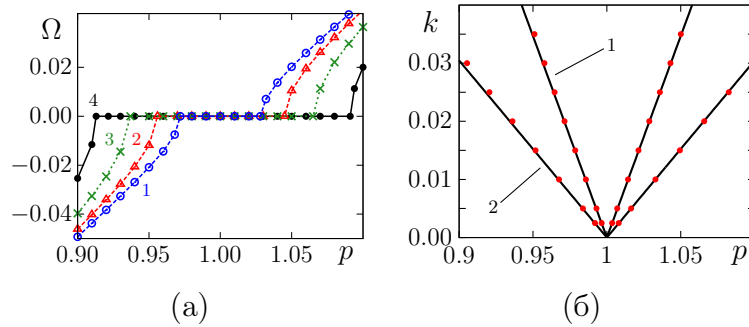


Рис. 4: (а) Зависимость средней разностной частоты Ω от частотной расстройки p для различных начальных значений z : $z(0) = 0$ (кривая 1), $z(0) = -0.25$ (кривая 2), $z(0) = -0.5$ (кривая 3), $z(0) = -0.75$ (кривая 4); (б) Границы области синхронизации, полученные численно (кружки) и теоретически (линия). Границы 1 соответствуют начальным условиям $z(0) = 0$. Границы 2 строятся для начальных условий $z(0) = -0.5$. Другие начальные условия: $x_1(0) = 0.5$, $y_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.5$, $y_2(0) = -0.4$.

ный характер мемристора, то указанные выше особенности синхронизации периодических колебаний исчезают, как в случае синхронизации мемристивных генераторов с диссипативной связью, так и в случае синхронизации генераторов с мемристивной связью. При малом параметре забывания, когда мемристивный элемент сохраняет память о начальном состоянии в течении длительного времени, в системе можно наблюдать длительные переходные процессы к синхронному состоянию, зависящие от начальных условий. Од-

нако при любых начальных условиях в пределе всё равно установится один и тот же режим (синхронный или не синхронный).

В разделе 2.5 рассматривается задача о синхронизации хаотических колебаний в системах с мемристивной связью. Численно исследуются два мемристивно связанных идентичных генератора Анищенко-Астахова, которые описываются следующей системой уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1z_1 + kG_M(w)(x_2 - x_1), & \dot{z}_1 &= -gz_1 + gF(x_1), \\ \dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2z_2 + kG_M(w)(x_1 - x_2), & \dot{z}_2 &= -gz_2 + gF(x_2), \\ \dot{y}_1 &= -x_1, & \dot{y}_2 &= -x_2, & \dot{w} &= -\delta w + x_1 - x_2, & F(x) &= x(x + |x|)/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь функция $F(x_{1,2})$ задает характер инерционной нелинейности генераторов. Функция $G_M(w) = 1 - \mu w^2$ описывает мемристивный элемент связи, а w – управляющая переменная мемристора связи, δ – параметр, определяющий неидеальность мемристора. В системе (5) наблюдается эффект полной хаотической синхронизации и имеет место зависимость порога синхронизации от начальных условий. Показано, что порогом синхронизации можно существенным образом управлять, изменяя начальное состояние мемристивного элемента связи. Зависимость порога синхронизации хаоса от начального значения переменной, определяющей состояние мемристивного элемента связи, наблюдается не только в случае идеального мемристора, но сохраняется и для неидеального мемристора, если параметр забывания достаточно мал (рисунок 5). Те же эффекты получены на модельной системе двух логистических отображений с мемристивной связью.

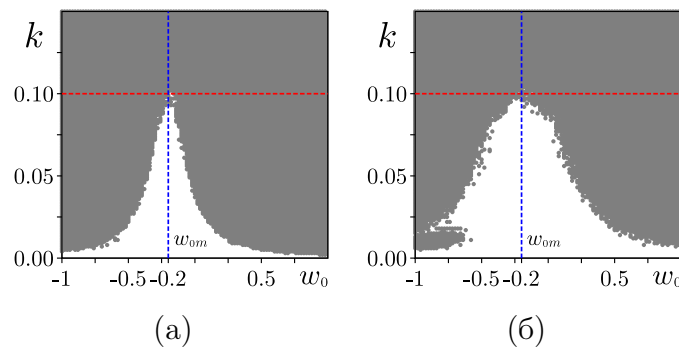


Рис. 5: Области синхронных (серый цвет) и несинхронных (белый цвет) колебаний двух генераторов (5) на плоскости $w_0 - k$, полученные при $\gamma = 0$ (а) и $\gamma = 0.001$ (б) Другие параметры и начальные условия: $m = 1.5$; $g = 0.2$; $\mu = 40$; $x_1(0) = 0.5$; $y_1(0) = 0.1$; $z_1(0) = 0.1$; $x_2(0) = -0.5$; $y_2(0) = -0.1$; $z_2(0) = 0.2$

В **третьей главе** диссертации приведены результаты исследования двух моделей ансамбля осцилляторов с локальными мемристивными связями и периодическими граничными условиями ($x_{i\pm N} = x_i$, $y_{i\pm N} = y_i$). Первая

модель, представляет собой кольцо идентичных мемристивно связанных автогенераторов Ван дер Поля. Она описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (\varepsilon - x_i^2)x_i - y_i + k[G_M(z_i)(x_{i+1} - x_i) + G_M(z_{i-1})(x_{i-1} - x_i)], \\ \dot{y}_i &= x_i, \quad \dot{z}_i = -\delta z_i + x_i - x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

где функция $G_M(z) = a + bz^2$ задает характеристику мемристоров связи, малый параметр δ , определяет неидеальность мемристивных элементов.

В качестве второй модели, выбрано кольцо мемристивно связанных идентичных нейронов ФитцХью-Нагумо. Отдельный осциллятор ансамбля в этом случае, в зависимости от значений параметров, находился либо в автоколебательном, либо в возбуждимом режиме. Это позволило выявить различие во влиянии мемристивности связей на волновой процесс в цепочке в автоколебательном и возбуждимом режимах. Уравнения кольца нейронов ФитцХью-Нагумо имеют вид, аналогичный (6):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (x_i - y_i - \alpha x_i^3)/\varepsilon + k[G_M(z_{i-1})(x_{i-1} - x_i) + G_M(z_i)(x_{i+1} - x_i)], \\ \dot{y}_i &= \gamma x_i - y_i + \beta, \quad \dot{z}_i = -\delta z_i + x_i - x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Исследование систем (6) и (7) в автоколебательном режиме показало, что в случае автоколебательного характера элементов ансамбля, форма установившегося профиля бегущих волн в распределенной системе с мемристивными связями меняется при изменении начального распределения мемристивных переменных z_i). Можно предположить, что это изменение носит непрерывный характер, т.е. малое изменение профиля $z_i(0)$ сразу же приводит к изменению профиля волны, по аналогии с изменением границы области синхронизации в двух мемристивно связанных генераторах с частотной расстройкой. Такая чувствительность формы волны к начальным состояниям мемристивных элементов связи наблюдается как в режиме квазигармонических автоколебаний в кольце осцилляторов Ван дер Поля, так и в режиме сильно релаксационных автоколебаний, характерном для кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Меняя начальное распределение $z_i(0)$ можно в достаточно широких пределах изменять форму волнового профиля, оставаясь в режиме заданной моды (т.е. заданного числа пространственных колебаний на длине системы).

Исследование кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо (7) в возбуждимом режиме показало, что влияние начальных состояний мемристоров особенно сильно проявляется в режиме возбуждимой динамики элементов кольца. Если в автоколебательном режиме выбор начальных состояний влияет только на форму волнового профиля, то в возбуждимом режиме наблюдается сильная зависимость как формы волны, так и скорости распространения волны и, соответственно, периода колебаний осцилляторов во времени от начальных

состояний элементов связи. Меняя начальное значение переменных состояния мемристоров, можно в широком диапазоне менять скорость распространения волны и период колебаний, а также полностью исключить распространение возмущения вдоль кольца (рисунок 6,а). Отмеченные особенности динамики

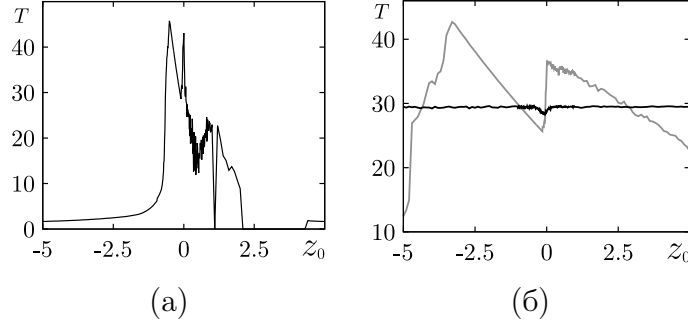


Рис. 6: Период колебаний T волны от начальных распределений z_0 : (а) в случае идеальной мемристивной связи $\delta = 0$, (б) с неидеальной мемристивной связью: серая кривая $\delta = 0.0001$ и черная кривая $\delta = 0.001$.

ансамблей наблюдаются и в случае, когда элементы связи являются не идеальными мемристорами (рисунок 6,б). Однако, в этом случае, значение параметра забывания δ должно быть очень малым, чтобы характерное время памяти мемристоров было на несколько порядков больше периода колебаний осцилляторов.

В последнем разделе Главы 3 исследуется распределенная система, представляющая собой двухслойную однородную мультиплексную сеть логистических отображений с мемристивной связью между слоями. Слои связанных логистических отображений, демонстрируют не только хаотическое поведение во времени, но и сложные пространственные структуры (химерные состояния). Сеть описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_j(n+1) &= f[x_j(n)] + \frac{\sigma}{2P} \sum_{i=j-P}^{j+P} (f[x_i(n)] - f[x_j(n)]) + kG_M[z_j(n)] (f[y_j(n)] - f[x_j(n)]), \\
 y_j(n+1) &= f[y_j(n)] + \frac{\sigma}{2P} \sum_{i=j-P}^{j+P} (f[x_i(n)] - f[x_j(n)]) + kG_M[z_j(n)] (f[x_j(n)] - f[y_j(n)]), \\
 z_j(n+1) &= [1 - \delta z_j(n)] + \varepsilon[x_j(n) - y_j(n)], \quad x_{j \pm N}(n) = x_j(n), \quad y_{j \pm N}(n) = y_j(n) \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Слои полностью идентичны, и каждый из них представляет собой кольцо отображений с нелокальной связью, которая характеризуется коэффициентом связи σ и количеством соседей с каждой стороны P для каждого элемента внутри кольца. Элементы двух слоев локально мемристивной инерционной связью. Прочность сцепления слоев определяется коэффициентом k . Характеристика элементов межслойной связи задается выражением $G_M(z) = 1 - \mu z^2$. Динамика элементов сети при отсутствии связи описывает-

ся одномерной отображением $f(x) = \alpha x(1 - x)$. Описываются эффекты, связанные с влиянием начального состояния мемристивных связей на переход к режиму полной синхронизации пространственно-временной динамики слоев. Для разных значений параметра забывания δ построены области синхронного и несинхронного поведения. Показана зависимость порога синхронизации от начального состояния мемристивных связей и установлена та же закономерность эволюция областей синхронного и несинхронного поведения с ростом δ , что и для двух мемристивно связанных логистических отображений, и двух мемристивно связанных генераторов хаоса (5).

В **заключении** сформулированы выводы и приведены **основные результаты** работы, которые состоят в следующем:

1. Численными и аналитическими методами установлено, что для мемристивного генератора с идеальным мемристором Чуа, проводимость которого принимает два значения в зависимости от величины управляющей переменной, и постоянной отрицательной проводимостью имеет место жесткая бифуркация возникновения колебаний. Если активный элемент описывается полиномом третьей степени, то наблюдается мягкая бифуркация.
2. В генераторе с идеальным мемристором, имеющем гладкую характеристику, и активным элементом, задаваемом полиномом третьей степени, имеет место мягкая бифуркация рождения колебаний, которая отличается от мягкой бифуркации в генераторе с мемристором Чуа тем, что для различных точек на линии равновесия наблюдается не одновременно, а при различных значениях управляющего параметра.
3. Бифуркации в мемристивном генераторе могут наблюдаться при постоянных значениях параметров и вариации начальных условий.
4. Численно и аналитически установлен эффект частотно-фазовой синхронизации периодических колебаний генератора с идеальной мемристивной проводимостью. Вынужденная синхронизация мемристивного генератора и взаимная синхронизация двух мемристивных генераторов с расстройкой собственных частот показывает зависимость границ фазового захвата от начальных состояний мемристоров. Такая зависимость имеет место в случае идеальных мемристоров и исчезает при учете эффекта забывания.
5. Методом численного моделирования выявлена особенность полной (синфазной) синхронизации периодических колебаний двух диссипативно-связанных идентичных мемристивных генераторов, состоящая в наличии порогового значения коэффициента связи, значение которого зави-

сит от начальных состояний мемристивных элементов. В случае наличия эффекта забывания данная зависимость исчезает.

6. Методами численного моделирования и теоретического анализа в рамках квазигармонического приближения установлен эффект взаимной частотно-фазовой синхронизации генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. Численно и аналитически определена зависимость границ области синхронизации от начального состояния мемристивной связи. Показано, что влияние конечной памяти мемристивной связи приводит к исчезновению указанной зависимости.
7. С помощью численных методов на примере генераторов с инерционной нелинейностью (генераторов Анищенко-Астахова) и одномерных логистических хаотических отображений показано существование эффекта полной синхронизации мемристивно связанных идентичных генераторов хаоса. Установлено влияние начального состояния мемристора связи на порог полной синхронизации хаоса как в случае идеального мемристора, так и для мемристора с конечной, но достаточно длительной памятью.
8. Методами компьютерного моделирования установлено влияние начальных состояний мемристивных связей на форму пространственного профиля бегущих волн в одномерных ансамблях периодических автоколебательных элементов, связанных через идеальные мемристоры при периодических граничных условиях. Эффект такого влияния установлен как для ансамбля генераторов ван дер Поля в квазигармоническом режиме, так и для ансамбля осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме сильно-релаксационных колебаний.
9. Методами компьютерного моделирования установлены особенности формирования волн возбуждения в кольцо мемристивно связанных нейронов ФитцХью-Нагумо в возбудимом режиме. Показано влияние начальных состояний мемристивных элементов на форму волнового профиля и частоту импульсов возбуждения во времени в случае идеальной мемристивной связи и при конечной памяти мемристивных элементов.
10. Численное исследование однородной мультиплексной двухслойной сети логистических отображений в режиме хаотической динамики с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивным взаимодействием слоев показало возможность полной синхронизации химерных состояний, формирующихся в слоях без связи. Установлено, что пороговое значение коэффициента межслойной связи, обеспечивающее режим полной синхронизации слоев, зависит от начального состояния мемристивных элементов как в случае идеального характера мемристивных связей, так и при наличии достаточно слабого эффекта забывания.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. V.V. Semenov, I.A. Korneev, P.A. Arinushkin, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects // The European Physical Journal Special Topics. — 2015. — Vol. 224(8). — Pp. 1553–1561.
2. I.A. Korneev, T.E. Vadivasova, V.V. Semenov, Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria // Nonlinear Dynamics. — 2017. — Vol. 89(4). — Pp. 2829–2843.
3. I.A. Korneev, V.V. Semenov. Andronov–Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria // Chaos. — 2017. — Vol. 27(8). — Pp. 081104.
4. И.А. Корнеев, О.Г. Шабалина, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор // Известия высших учебных заведений. ПНД. — 2018.— Т.26,№2.— С.24–40.
5. I.A. Korneev, A.V. Slepnev, V.V. Semenov, T.E. Vadivasova, Forced synchronization of an oscillator with a line of equilibria// The European Physical Journal Special Topics. — 2020. — Vol. 229(12). — Pp. 2215–2224.
6. I.A. Korneev, V.V. Semenov, T.E. Vadivasova, Synchronization of periodic self-oscillators interacting via memristor-based coupling // International journal of bifurcation and chaos. — 2020. — Vol. 30(7). — Pp. 2050096.
7. И.А. Корнеев, А.В. Слепнев, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. — 2020. — Т. 20(3). — С. 210–221.
8. И.А. Корнеев, А.В. Слепнев, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // Известия высших учебных заведений. ПНД. — 2020. — Т. 28(3). — С. 324–340.
9. I.A. Korneev, V.V. Semenov, A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova, Complete synchronization of chaos in systems with nonlinear inertial coupling // Chaos, Solitons & Fractals. — 2021. — Vol. 142. — Pp. 110459.
10. I.A. Korneev, V.V. Semenov, A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova, The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. — 2021. — Vol. 147. — Pp. 110923.
11. И.А. Корнеев, В.В. Семенов, А.В. Слепнёв, Т.Е. Вадивасова, Особенности динамики и вынужденная синхронизация мемристивного осциллятора // Тезисы докладов XIX научной школы «Нелинейные волны — 2020». — Россия, Нижний Новгород. — С. 140–141.
12. И.А. Корнеев, А.В. Слепнёв, Т.Е. Вадивасова, Программа для численного исследования вынужденной синхронизации мемристивного автогенератора. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619548. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.06.2021.
13. И.А. Корнеев, А.В. Слепнёв, Т.Е. Вадивасова, Программа для численного анализа пространственно-временной динамики ансамбля нейронов ФитцХью – Нагумо с мемристивной связью. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619547. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.06.2021.