

На правах рукописи



СЕРГЕЕВ Константин Сергеевич

**КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ И ВОЛНОВЫЕ
ЯВЛЕНИЯ В УПОРЯДОЧЕННЫХ И
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ АНСАМБЛЯХ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ**

Специальность 01.04.03 — Радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2018

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Четвериков Александр Петрович

Официальные оппоненты: **Некоркин Владимир Исаакович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН «Институт прикладной физики РАН»
заведующий отделом нелинейной динамики

Сатаев Игорь Рустамович,
кандидат физико-математических наук,
Саратовский филиал ФГБУН
«Институт радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН»
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Защита состоится « » 2018 г. в ч. мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Автореферат разослан « ____ » _____ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.243.01, д.ф.-м.н.



Аникин Валерий
Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одно из актуальных направлений современной нелинейной динамики связано с изучением процессов в разного рода решетках и цепочках взаимодействующих консервативных и активных элементов. Для этой области исследований характерно моделирование больших ансамблей из множества компонентов, которые тем или иным образом связаны друг с другом. Природа парциальных элементов и связей между ними может в значительной степени различаться. Интерес к задачам подобного рода подтверждается большим количеством работ по моделированию динамики ансамблей, выполненных в последние годы.

Существует два больших класса систем взаимодействующих элементов, демонстрирующих сложное поведение. К первому относятся ансамбли и решетки простейших элементов – точечных частиц с нелинейным взаимодействием между ними. Ко второму – системы осцилляторов, связанных в простейшем случае линейными силами. Интерес к исследованию систем первого рода был во многом инициирован известной работой Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама¹, в которой рассматривались особенности динамики плотной одномерной цепочки точечных консервативных частиц, связанных посредством нелинейных сил.

Динамика таких ансамблей заметно обогащается и усложняется, если парциальными элементами являются не консервативные, а так называемые активные частицы, в которых энергия окружающей среды трансформируется в кинетическую энергию направленного движения. Подобные модели описывают целый класс физических систем с общим названием «активное вещество» (active matter), которые активно изучаются теоретически и экспериментально^{2,3,4}. Существуют модели активного вещества, в которых движение частиц происходит не только в результате преобразования энергии окружающей среды в кинетическую, но и за счет флуктуаций. Подобные модели принято называть моделями активных броуновских частиц (АБЧ)⁵, и

¹Studies of nonlinear problems. / E. Fermi, J. R. Pasta, S. M. Ulam // Los Alamos Nat. Lab. Report LA-1940. — 1965. — in Collected Papers of Enrico Fermi, Univ. Chicago Press. — Pp. 978–988.

²Active particles in complex and crowded environments / C. Bechinger, R. Leonardo, H. Lowen et al. // Rev. Mod. Phys. — 2016. — Vol. 88.

³A theory for the phase behavior of mixtures of active particles / S.C. Takatori, J.F. Brady // Soft Matter. — 2015. — Vol. 11, no. 40. — Pp. 7920–31.

⁴Synergetic Phenomena in Active Lattices / V. I. Nekorkin, M.G. Velarde. — Springer Series in Synergetics, 2002.

⁵Active Brownian Particles: From Individual to Collective Stochastic Dynamics / P. Romanczuk, M. Bar, W. Ebeling et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. — 2012. — Vol. 202, no. 1. — Pp. 1–162.

их динамика более разнообразна по сравнению с динамикой консервативных броуновских частиц.

Ключевым моментом, отличающим консервативные частицы от активных, является «подвод» энергии у последних, который может осуществляться различными способами. Приток энергии в уравнениях движения можно описать, как силу отрицательного трения в направлении движения. Для этого вводится нелинейное трение $\gamma(\vec{r}, \vec{v})$ как функция, в общем случае зависящая от скорости и координаты частицы. В фазовом пространстве \vec{r}, \vec{v} есть области, внутри которых $\gamma(\vec{r}, \vec{v}) < 0$. Иногда используются модели, в которых трение зависит только от координаты, но не от скорости; динамика ансамблей с такими центрами энергетической накачки является сложной и обсуждалась, например, в ⁶. Типичным примером модели с нелинейным трением является модель Рэля с параболическим коэффициентом отрицательного трения, хотя существуют модели и с другими характеристиками нелинейного трения⁷.

Кроме типа диссипации, модели ансамблей связанных частиц различаются характером взаимодействия. В простейшем случае консервативных броуновских частиц взаимодействие сводится к их упругим соударениям. Однако в моделях активных броуновских частиц могут реализоваться и иные способы связи элементов ансамбля. Один из них основан на механизме выравнивания направлений движения частиц через общее поле скоростей. Такой подход применялся, например, в модели Викчека⁸ и был значительно развит в дальнейшем. Идея взаимодействия посредством общего поля скоростей получила развитие и в других моделях так называемых «самодвижущихся» частиц^{9,10}.

Большую часть моделей с взаимодействием через выравнивание скоростей можно отнести к неплотным неупорядоченным ансамблям частиц. Для упорядоченных ансамблей (решеток) в большей степени характерно взаимодействие посредством потенциальных сил различной природы. В простей-

⁶Ebeling, W. Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility / W. Ebeling, F. Schweitzer, B. Tilch // *BioSystems*. — 1999. — Vol. 49. — Pp. 17–29.

⁷Brownian particles far from equilibrium. / U. Erdman, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, F. Schweitzer // *Eur. Phys. J. B*. — 2000. — Vol. B15. — Pp. 105–113.

⁸Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles / T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — Pp. 1226–1229.

⁹Self-propelled particles with selective attraction–repulsion interaction: from microscopic dynamics to coarse-grained theories / R. Großmann, L. Schimansky-Geier, P. Romanczuk // *New Journal of Physics* — 2013 — Vol. 15.

¹⁰Swarming and Pattern Formation due to Selective Attraction and Repulsion / P. Romanczuk, L. Schimansky-Geier // *Interface Focus*. — 2012. — Vol. 2, no. 6. — Pp. 746–756.

шем случае в качестве таких связей могут выступать линейные силы упругости^{11,12}.

Предположение о линейном характере сил упругости упрощает анализ модели, однако изучение динамики активных решеток, элементы которых связаны нелинейными силами, представляет большой интерес, поскольку даже консервативные нелинейные решетки демонстрируют весьма богатую колебательную и волновую динамику. В решетках с нелинейными связями обнаружено большое количество распределенных и локализованных нелинейных возбуждений, таких как дискретные солитоны и бризеры¹³. В качестве нелинейных сил, связывающих элементы решетки в таких моделях часто рассматриваются силы потенциалов Морзе, Тоды и Леннарда-Джонса.

Так, в частности, в известной математической модели ДНК Пейрарда-Бишопа-Доксуа¹⁴ используется потенциал Морзе для описания связи консервативных частиц внутри нуклеотида и модифицированный параболический потенциал для описания стэкингового взаимодействия. В такой цепочке возбуждается много типов колебаний и волн, но больший интерес представляют те из них, которые потенциально можно использовать для транспорта заряженных частиц вдоль ДНК^{15,16}.

Однако, динамика нелинейной решетки из активных частиц изучена в меньшей степени. Так, например, большая доля работ в этой области выполнена на основе модели Тоды-Рэлея^{17,18}, хотя не исключается использование моделей с другими нелинейными потенциалами.

Исследования отмеченных выше проблем продолжают интенсивно развиваться, показателем чего является большое количество работ в этой области науки, изданных за последние годы. Поэтому задачи настоящей диссертационной работы, посвященной изучению колебательных и волновых явлений

¹¹Collective motion dynamics of active solids and active crystals / E. Ferrante, A.E. Turgut, M. Dorigo, C. Huepe // *New Journal of Physics*. — 2013. — Vol. 15.

¹²Spontaneous membrane formation and self-encapsulation of active rods in an inhomogeneous motility field / J. Grauer, H. Lowen, L.M.C. Janssen // *Phys. Rev. E*. — 2018. — Vol. 97. — P. 022608.

¹³Дискретные бризеры в кристаллах / Дмитриев С.В., Корзникова Е.А., Баимова Ю.А., Веларде М.Г. // *УФН* — 2016. — №186 — стр. 471–488.

¹⁴Dynamics and thermodynamics of a nonlinear model for DNA denaturation / T. Dauxois, M. Peyrard, A.R. Bishop // *Phys. Rev. E*. — 1993. — Vol. 47, no. 1. — Pp. 684–695.

¹⁵Nonlinear dynamics of excitations in DNA / N.S. Fialko, V.D. Lakhno // *Physics Letters A*. — 2000. — Vol. 278. — P. 108.

¹⁶On the possibility that local mechanical forcing permits directionally-controlled long-range electron transfer along DNA-like molecular wires with no need of an external electric field / A.P. Chetverikov, W. Ebeling, V.D. Lakhno et al. // *The European Physical Journal B*. — 2016. — Vol. 89, no. 4. — P. 101.

¹⁷Self-oscillations in ring Toda chains with negative friction / W. Ebeling, P.S. Landa, V.G. Ushakov // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. 63, no. 4. — P. 8.

¹⁸Dissipative Toda-Rayleigh lattice and its oscillatory modes / V.A. Makarov, E. del Rio, W. Ebeling, M.G. Velarde // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. E64. — Pp. 366011–366014.

в решетках и ансамблях активных и консервативных взаимодействующих частиц, принадлежат к самым актуальным проблемам современной радиофизики, нелинейной динамики и теории колебаний и волн.

Целью работы является исследование свойств упорядоченных и неупорядоченных ансамблей активных и консервативных частиц, связанных потенциальными нелинейными силами, включая изучение локализованных возбуждений, таких как диссипативные дискретные солитоны, мобильные дискретные бризеры, диссипативные дискретные бризеры, и анализ динамики метастабильных возбуждений с различным временем жизни.

Для достижения поставленных целей в рамках диссертационной работы решаются следующие **задачи**:

1. Исследование влияния степени неравновесности активных частиц на коллективную динамику одномерной цепочки с нелинейной потенциальной связью между частицами.
2. Определение стационарных мод и метастабильных возбуждений в двумерной решетке активных частиц; сопоставление полученных результатов с данными для консервативной решетки.
3. Изучение особенностей динамики малого неупорядоченного ансамбля активных частиц с взаимодействием через выравнивание скорости.
4. Исследование мобильных дискретных бризеров в цепочках частиц с двумя характерными временными масштабами на примере молекулы ДНК

Основным **методом исследований** является численное моделирование, включающее численное решение уравнений динамики активных и консервативных частиц с последующим анализом полученных данных при помощи программ, разработанных автором.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В одномерных цепочках активных частиц, связанных нелинейными потенциальными силами, пространственные моды, возникающие из стохастических начальных возмущений, имеют вид неравномерно распределенных по длине цепочки диссипативных солитонов и являются метастабильными состояниями с временем жизни, экспоненциально растущим с числом частиц в цепочке. Стационарные состояния (аттракторы) цепочек с периодическими граничными условиями, в которые трансформируются со временем метастабильные моды, имеют вид диссипативных кноидальных волн с равномерным распределением диссипативных солитонов по длине цепочки. В аналогичной цепочке с нелокальной связью возможно также установление стационарных мод, в пространственном распределении которых присутствуют равномерно распределенные кластеры из нескольких солитонов.

2. Под воздействием шума в цепочке активных частиц возможно переключение мод, причем преимущественное направление переключений определяется интенсивностью шума.
3. В двумерных плотноупакованных решетках активных частиц реализуются локализованные метастабильные состояния в виде солитоноподобных волн различной конфигурации, трансформирующихся со временем в состояние с полной синхронизацией движения частиц (трансляционную моду). В пространстве параметров существуют области, в которых решетка активных частиц обладает способностью восстанавливать свою структуру после локализованного внешнего воздействия, а также области, в которых локализованное внешнее воздействие ведет к возникновению метастабильного локализованного возбуждения – диссипативного краудидона.
4. Для малых неупорядоченных ансамблей активных частиц, взаимодействующих через общее поле скоростей, в пространстве параметров существуют области бистабильности, границы которых связаны с исчезновением одного стационарного распределения скорости частиц и возникновением распределения другой конфигурации. Внутри областей бистабильности устанавливается одно из двух возможных стационарных состояний с разными вероятностными распределениями скорости. Воздействие аддитивного шума приводит к смене режима бистабильности на режим бимодальности, в котором реализуются с наибольшей вероятностью два значения скорости частиц.
5. Для возбуждения в молекуле ДНК устойчивых мобильных дискретных бризеров достаточно обеспечить начальное возмущение скоростей или координат нескольких нуклеотидных пар вблизи одного из закрепленных концов молекулы в равновесном состоянии.

Научная новизна результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые показано, что в цепочках активных частиц, связанных нелинейными потенциальными силами, состояние с неравномерным пространственным распределением диссипативных солитонов является метастабильным и соответствует длительному переходному процессу к стационарному состоянию-аттрактору с равномерным пространственным распределением солитонов. Установлено, что длительность метастабильной стадии экспоненциально растет с увеличением числа частиц в цепочке.
2. Установлено, что в цепочке активных частиц с нелокальной связью, осуществляемой посредством нелинейных потенциальных сил, существуют

стационарные состояния нового типа, пространственные распределения которых содержат равномерно распределенные кластеры из нескольких солитонов.

3. Впервые показано, как в цепочке активных частиц, связанных нелинейными потенциальными силами, управлять преимущественным направлением переключения между модами посредством изменения интенсивности шумового воздействия.
4. Установлено, что в цепочках осцилляторов Рэлея (линейных осцилляторов с нелинейным трением) возможно возбуждение стационарных состояний, пространственное распределение которых включает локализованные структуры с характерным масштабом, отличающимся от пространственного масштаба возбуждения за пределами локализованной структуры.
5. Впервые определены основные типы метастабильных возбуждений в двумерной треугольной решетке активных частиц, связанных потенциальными силами. Впервые найдены условия, необходимые для возбуждения и распространения краудионов в двумерных решетках активных частиц. Показано, что время жизни и длина пробега краудионов в решетках активных частиц значительно выше, чем в консервативных решетках.
6. Впервые обнаружено, что в пространстве параметров малых ($N < 100$) ансамблей активных частиц, взаимодействующих через общее поле скоростей, существуют области бимодальности, в которых в стационарном распределении скорости частиц ансамбля существуют два различных значения скорости, реализующиеся с наибольшей вероятностью.
7. Впервые показано, как за счет выбора начальных возмущений координат и скоростей в группе нуклеотидных пар эффективно возбудить мобильный бризер с заданным направлением движения.

Научная и практическая значимость диссертационной работы состоит в том, что полученные научные результаты расширяют современные представления теории колебаний и волн о динамике ансамблей активных неосциллирующих элементов.

Изложенные в настоящей работе результаты могут найти применение при решении задач, связанных с транспортом заряженных частиц в молекулярных решетках, а также задач, связанных с разработкой метаматериалов.

Полученные данные позволяют провести параллели между динамикой цепочек неосциллирующих частиц и динамикой цепочек осцилляторов.

Проведенные исследования влияния шумового воздействия на ансамбли активных неосциллирующих элементов вносят определенный вклад в статистическую радиофизику, а обнаруженные индуцированные шумом эффекты могут быть применены при разработке основанных на использовании источников шума методов управления неравновесными многомерными системами.

Разработанное программное обеспечение может быть применено для анализа колебательных и волновых процессов в молекулярных решетках.

Материалы диссертации частично используются в курсах лекций по теории колебаний и волн.

В диссертационную работу включены материалы исследований, проведенных автором в рамках выполнения работ по гранту РФФИ №15-02-02288, международному гранту Немецкого Физического Общества DFG SFB-911 и грантам РФФИ № 16-12-10175 и №16-11-10163.

Достоверность научных выводов подтверждается воспроизводимостью результатов численных экспериментов, выполненных в рамках разных подходов, а так же сопоставлением полученных результатов с данными, известными из литературных источников, и данными аналитических решений.

Апробация работы. Основные результаты научных исследований были представлены на 12 международных конференциях:

- Международная конференция “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic systems: Unraveling Complexity”, 19–21 мая 2014, Саратов, Т.Е. Vadivasova, К.С. Sergeev “Noise induced transition in a small ensemble of active Brownian particles”
- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 23–26 сентября 2014, Саратов, К.С. Sergeev, А.Р. Chetverikov “Behaviour of ensemble of active Brownian particles under influence of active and passive noise”
- Международная конференция “Dynamics, Bifurcations and Chaos”, 20–24 июля 2015, Нижний Новгород, К.С. Sergeev, Т.Е. Vadivasova “Dynamics of ensemble of active Brownian particles interacting via Morse potential forces”
- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 21–25 сентября 2015, Саратов, К.С. Sergeev, А.Р. Chetverikov “Dissipative solitons in ensemble of active Brownian particles interacting via Morse potential forces”
- Международная конференция “International conference on Control of Complex systems and Networks”, 4–8 сентября 2016, Германия, Херингсдорф, К.С. Sergeev, А.Р. Chetverikov “Noise influence on steady states and metastable modes in a nonlinear chain of interacting non-oscillating elements”

- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 27–30 сентября 2016, Саратов, K.S. Sergeev, A.P. Chetverikov “Metastable modes in Morse-Rayleigh chain”
- Международная конференция «Математическая биология и биоинформатика», 16-21 октября 2016, Пущино, Лахно В.Д., Сергеев К.С., Четвериков А.П. «Транспорт заряда мобильными бризерами в молекуле ДНК, возмущенной начальными смещениями нуклеотидных пар»
- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 25–30 сентября 2017, Саратов, K.S. Sergeev, A.P. Chetverikov “Structure formation in chain of nonlocal coupled active elements”
- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 25–30 сентября 2017, Саратов, K.S. Sergeev, A.P. Chetverikov “Spatial structures formation in two-dimensional ensemble of active particles”
- V Российская конференция «Метастабильные состояния и флуктуационные явления» 17-19 октября 2017, Екатеринбург, Четвериков А.П., Сергеев К.С. «Динамика метастабильных состояний в ансамбле взаимодействующих активных частиц, эволюционирующих под влиянием шума»
- Научная школа «Нелинейные волны – 2018», 26 февраля – 4 марта 2018, Нижний Новгород, Сергеев К.С., Четвериков А.П. «Плоские солитоны в двумерной решетке активных частиц»
- Международная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии», 2–3 июля 2018, Саратов, Сергеев К.С., Четвериков А.П. «Локализованные нелинейные волны в двумерной решетке активных частиц»

Личный вклад заключается в выполнении всего объема численного моделирования, обработке и анализе полученных результатов. Все численные эксперименты проводились при помощи программного обеспечения, разработанного автором. Также автор принимал активное участие в постановке задач.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях: 7 статьях в журналах, рекомендованных ВАК [1–7] и 5 работах в сборниках тезисов конференций [8–12]).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации **147** страниц текста с **58** рисунками. Список литературы содержит **116** наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели, задачи и методы исследования, описываются структура и объем работы, формулируются научная новизна работы и положения, выносимые на защиту, обосновывается достоверность полученных результатов и отмечается их научная и практическая значимость.

В первой главе излагаются результаты исследований динамики одномерной цепочки активных частиц с трением Рэлея, связанных силами потенциала Морзе. Динамика каждой частицы описывается уравнением в безразмерных переменных

$$\ddot{q}_i - \mu\left(1 - \frac{\dot{q}_i^2}{v^2}\right)\dot{q}_i = (1 - e^{q_i - q_{i+1}})e^{q_i - q_{i+1}} - (1 - e^{q_{i-1} - q_i})e^{q_{i-1} - q_i} + \sqrt{2D_E}\xi_i(t). \quad (1)$$

Здесь $q_i = b(x_i - i\sigma)$ – безразмерное отклонение i -той частицы от положения равновесия, b – жесткость потенциальных сил, точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$, где ω_M – частота линейных колебаний частиц цепочки за счет связи, σ определяет равновесное расстояние между соседними частицами, v – модуль стационарного значения безразмерной скорости частиц, μ – безразмерный коэффициент трения, $\xi_i(t)$ – источник белого Гауссова шума с нулевым средним, а D_E – интенсивность шума. Предполагается, что уравнения удовлетворяют периодическим граничным условиям. В качестве начальных условий используется либо упорядоченные наборы скоростей и смещений частиц, либо состояния с равномерным пространственным распределением частиц, $q_i = 0$, и стохастическим распределением их скоростей, $\dot{q}_i = v_{s0}\xi_i$ (здесь v_{s0} – величина начальных возмущений скорости, а ξ_i – случайная величина с нормальным распределением).

В цепочке, описываемой уравнением (1), могут распространяться диссипативные дискретные солитоны в виде максимумов скорости и плотности частиц. Эти солитоны условно можно считать локализованными на трех частицах.

Обнаружено, что при старте со случайных начальных возмущений солитоны формируются группами (кластерами), размеры которых зависят от параметров цепочки (см. рисунок 1). В большинстве случаев наиболее вероятно возникновение кластера из 4-5 солитонов.

В рассматриваемой цепочке с периодическими граничными условиями устойчивым является состояние с равномерным распределением солитонов, тогда как состояние, в котором диссипативные солитоны распределены нерав-

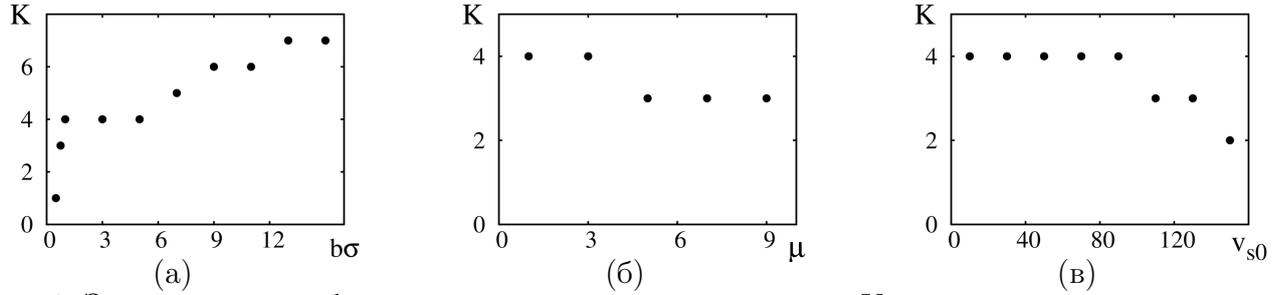


Рис. 1: Зависимость наиболее вероятного размера кластеров K от управляющих параметров: (а) от параметра $b\sigma$ при $\mu = 1; v_{s0} = 10$; (б) от параметра μ при $b\sigma = 5; v_{s0} = 10$; (в) от параметра v_{s0} при $b\sigma = 5; \mu = 1$.

номерно, является нестабильным, а процесс перехода к стационарному равномерному распределению солитонов занимает существенное время, зависящее от параметров.

Обнаружено, что существенное влияние на длительность установления состояния с равномерным распределением солитонов оказывает длина и параметры цепочки (рисунок 2). Видно, что зависимости от числа частиц N и от параметров $\mu, b\sigma$ могут быть аппроксимированы экспоненциальной функцией $\tau(b\sigma, \mu, N) = 1000\exp(-3.2b\sigma + 0.285N + 2.1\mu)$.

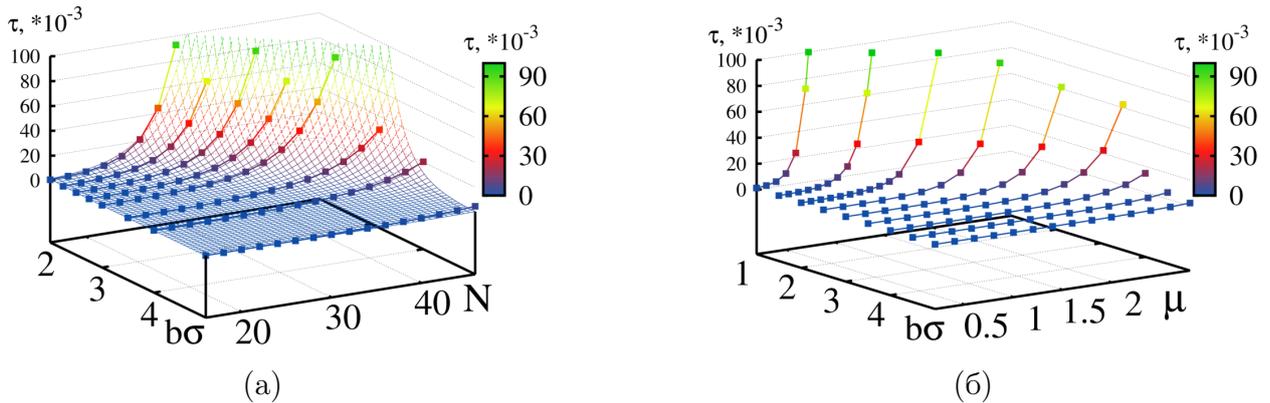


Рис. 2: (а) семейство зависимостей длительности переходного процесса от числа частиц N при различных значениях $b\sigma$ при $\mu = 1$ (линии с точками) и соответствующая аппроксимация функцией $\tau(b\sigma, 1, N) = 1000\exp(-3.2b\sigma + 0.285N + 2.1)$; (б) семейство зависимостей длительности переходного процесса от параметров μ и $b\sigma$ в цепочке из $N = 20$ частиц.

Обнаружено, что при нелокальной связи, когда каждая i -я частица связана не только с двумя ближайшими соседями, но и с двумя частицами с номерами $i + 2$ и $i - 2$, стационарными являются не только моды с равномерным распределением диссипативных солитонов в цепочке, но и состояния с равномерным распределением кластеров из нескольких солитонов. Исследовано влияние начальных условий и значений параметров на вероятность реализации того или иного стационарного состояния.

В качестве инструмента для точного количественного анализа поведения солитонов использован структурный динамический фактор (СДФ), содержащий информацию об эволюции во времени пространственных струк-

тур, образуемых частицами. В простейшем случае структурный динамический фактор $S(\omega, k)$ определяется как

$$S(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \langle \rho_{1d}(k, \tau) \rho_{1d}(-k, 0) \rangle d\tau, \quad (2)$$

где угловые скобки указывают на усреднение по множеству реализаций, ω и k – частота и волновое число, $\rho_{1d}(x, \tau)$ и $\rho_{1d}(k, \tau)$ – функция плотности цепочки и ее пространственное преобразование Фурье. Зависимость $S(\omega, k)$ позволяет определить число солитонов, а ширина ее пика указывает, является режим стационарным или метастабильным.

Исследовано влияние стохастического воздействия на динамику солитонов. Показано, что при повышении интенсивности шума солитоны могут возбуждаться и разрушаться, а соотношение вероятностей увеличения и уменьшения числа солитонов зависит от интенсивности шума.

Обнаружено, что форма распределений $P(k)$, где $P(k)$ – вероятность обнаружить в системе k солитонов в произвольный момент времени, меняется в зависимости от интенсивности шума. При низкой интенсивности шума ($D_E = 0.05$, рис. 3 а) вероятность уменьшения числа солитонов больше, чем вероятность возрастания. С увеличением интенсивности шума растет вероятность переключений в моды с большим числом солитонов. На рисунке 3 б показано состояние с почти «плоским» распределением при $D_E = 0.0672$, что примерно соответствует равенству вероятностей увеличения и уменьшения числа солитонов. Наконец, при большой интенсивности шума $D_E = 0.08$ наиболее вероятны переключения на моды с большим числом солитонов.

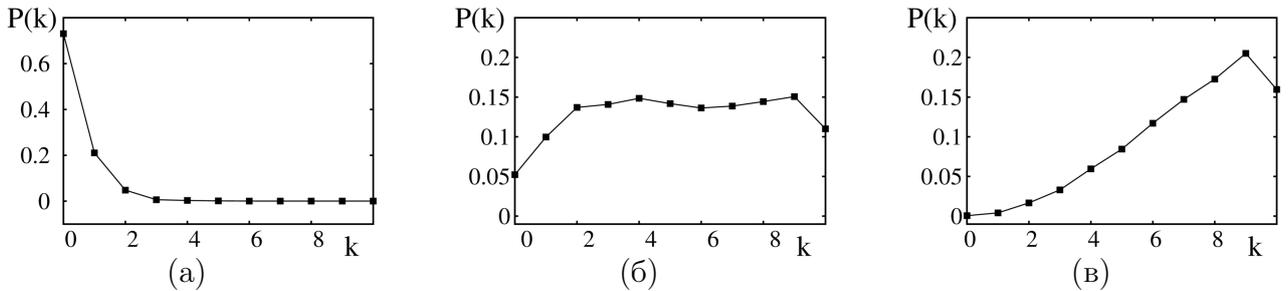


Рис. 3: Стационарные вероятностные распределения $P(k)$ для различных значений интенсивности шума: а) $D_E = 0.05$, б) $D_E = 0.0672$, в) $D_E = 0.08$.

Введена плотность вероятности $\rho(k, \tau) = w_k(\tau)p(k)$, такая, что вероятность обнаружить цепочку в состоянии с k солитонами в интервале времени $[\tau; \tau + d\tau]$ равна $\rho(k, \tau)d\tau$.

Путем аппроксимации результатов численных экспериментов показано, что плотности вероятности $w_k(\tau)$ можно описать экспоненциальной функцией в виде $w_k(\tau) = \lambda(k) e^{-\lambda(k)\tau}$, где величина $\lambda(k)$ характеризует, как часто происходят переключения из моды k за единицу времени.

Величина $p(k)$ представляет собой вероятность переключения на моду с k солитонами; обнаружено, что $p(k)$ растет с увеличением k , однако вид

аппроксимирующей функции сильно зависит от интенсивности шума и меняется от экспоненциального до квадратичного.

Кроме того, в работе проанализированы различия динамики цепочки неосциллирующих частиц и цепочки осцилляторов Рэлея, динамика которых описывается уравнением

$$\ddot{q}_i - \mu\left(1 - \frac{\dot{q}_i^2}{v^2}\right)\dot{q}_i + \omega_r^2 q_i = (1 - e^{q_i - q_{i+1}})e^{q_i - q_{i+1}} - (1 - e^{q_{i-1} - q_i})e^{q_{i-1} - q_i}. \quad (3)$$

Здесь величина ω_r представляет собой частоту собственных колебаний осцилляторов Рэлея, выраженную в единицах ω_M , где ω_M – частота малых колебаний, определяемых связью между частицами.

Обнаружено, что в диапазоне $1.2\omega_M \lesssim \omega_r \lesssim 6\omega_M$ соотношение частот таково, что возникают особые возбуждения, подобные бризерам в консервативных решетках, которые уместно обозначить термином «диссипативный бризер». Видно (рис. 4 а, б), что существует особая пространственная

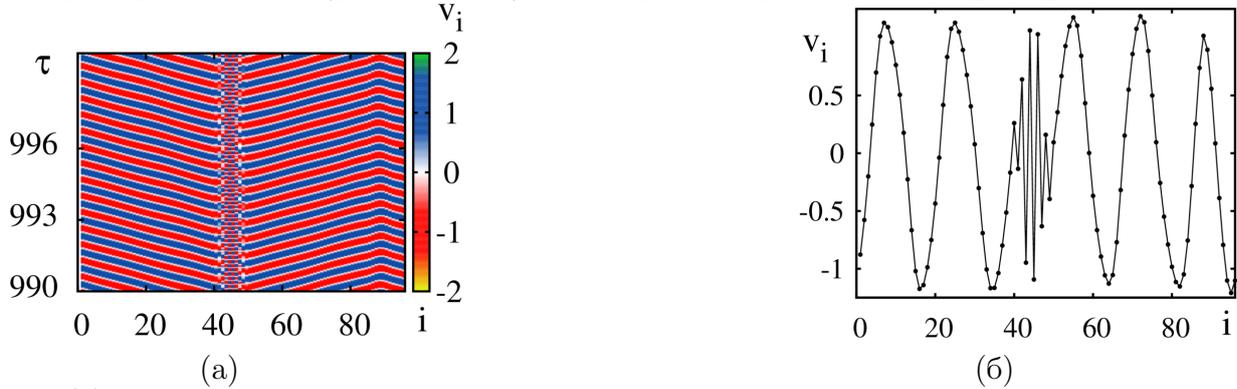


Рис. 4: (а) пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая диссипативный бризер; (б) мгновенный пространственный профиль ансамбля в момент времени $\tau = 990$. $\omega_r = 1.3\omega_M$, $b\sigma = 5$, $\mu = 4$.

структура с четкими границами, локализованная на частицах с номерами $i = 41 \dots 48$. В оставшейся части ансамбля инициируется распространение двух бегущих в противоположных направлениях волн. Обнаружено, что колебания осцилляторов, на которых локализован бризер, носят ангармонический характер.

В зависимости от начальных условий диссипативный бризер может быть локализован на различном количестве частиц (четном либо нечетном), а также может быть неподвижным либо мобильным.

Показано, что диссипативные бризеры в цепочках осцилляторов Рэлея, связанных силами потенциала Морзе, представляют собой локализованные возбуждения с неограниченными временем жизни.

Результаты, представленные в первой главе, отражены в публикациях [3, 7].

Во **второй главе** излагаются результаты исследования двумерной плотноупакованной решетки активных частиц с трением Рэлея, связанных

посредством сил укороченного потенциала Морзе. Динамика i -той частицы описывается уравнением в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{q}}_i - \mu \left(1 - \frac{|\dot{\vec{q}}_i|^2}{v_0^2}\right) \dot{\vec{q}}_i = \\ = \sum_{|\vec{q}_i^k| < R} \frac{\vec{q}_i^k}{|\vec{q}_i^k|} \left[\left(e^{b\sigma - |\vec{q}_i^k|} - e^{2(b\sigma - |\vec{q}_i^k|)} \right) \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{|\vec{q}_i^k|}{2\nu} - d}} - \frac{1}{2b} \frac{e^{2(b\sigma - |\vec{q}_i^k|)} - 2e^{b\sigma - |\vec{q}_i^k|}}{2\nu(e^{\frac{|\vec{q}_i^k|}{2\nu} - d} + 1)^2} \cdot e^{\frac{|\vec{q}_i^k|}{2\nu} - d} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{q}_i = b\vec{r}_i$ – безразмерная координата, $\dot{\vec{q}}_i = \frac{\omega_M}{b}\vec{v}_i$ – безразмерная скорость, точками обозначается дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$, σ – равновесное расстояние между частицами. Параметр μ – безразмерный коэффициент нелинейного трения, величина $|\vec{q}_i^k|$ – безразмерное расстояние между i -той и k -той частицами, а $\frac{\vec{q}_i^k}{|\vec{q}_i^k|}$ – единичный вектор, указывающий направление от i -той частицы к k -той, v_0 – стационарное значение безразмерной скорости частицы, d и ν – параметры модифицированного потенциала Морзе, значения которых выбираются таким образом, что величина укороченного потенциала и его производной равны нулю, если расстояние между частицами превышает радиус обрезания R .

Показано, что основное стационарное состояние активной решетки – трансляционное движение решетки как целого со скоростью \vec{v}_0 (скорости всех частиц равны по величине и сонаправлены) с равномерным пространственным распределением частиц и с дефектами в виде вакансий и междуузельных частиц. Трансляционная мода способна восстанавливать пространственную структуру после локального внешнего воздействия.

Помимо стационарных мод, выбором начальных условий для частиц в решетке можно возбуждать множество типов метастабильных состояний, представляющих собой длительные процессы перехода к стационарной моде.

Обнаружено, что наиболее долгоживущим метастабильным состоянием треугольной решетки является плоская солитоноподобная волна (далее для краткости – «плоский солитон») (рисунок 5 а). В общем случае возможно существование нескольких солитонов. Кроме плоских волн, в двумерной решетке можно формировать локализованные возмущения в виде солитонов с фронтом конечной ширины (подковообразных солитонов, см. рис. 5 б). Их время жизни линейно зависит от ширины фронта, пока ширина фронта мала; при большой начальной ширине фронта зависимость насыщается, поскольку время жизни ограничивается явлениями модуляционной неустойчивости. В предельном случае солитон может быть возбужден только в одном ряду, такой тип возмущений представляет собой квазиодномерный солитон.

При старте из состояния со стохастическим начальным распределением скоростей наблюдается переходной процесс с нерегулярным поведением частиц, завершающийся переходом в режим трансляции.

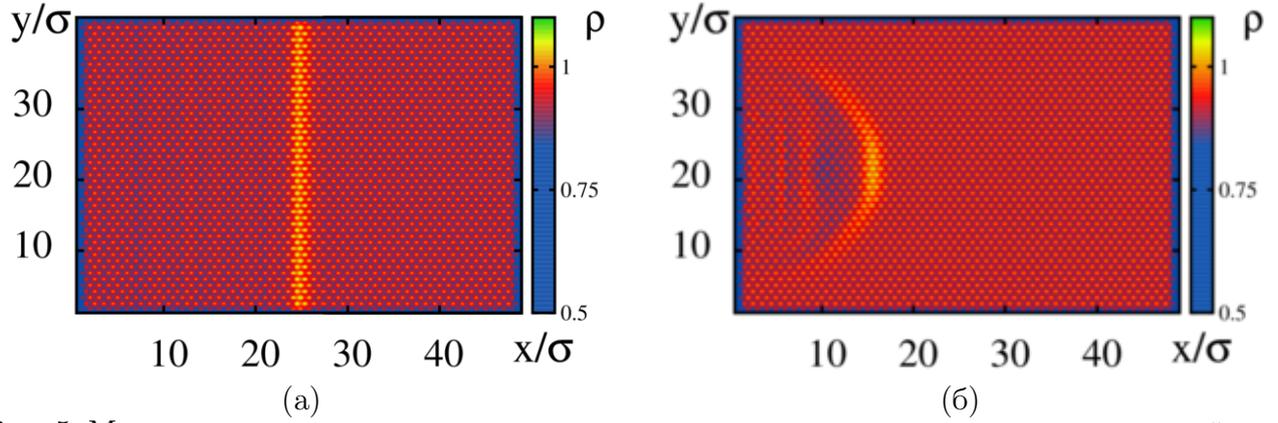


Рис. 5: Мгновенные пространственные распределения плотности частиц в треугольной решетке 48×48 частиц при возбуждении (а) одного солитона, распространяющегося вдоль оси x ; (б) подковообразного солитона, в начальный момент локализованного на 15 частицах. $b\sigma = 5$, $\mu = 1.41$, $v_0 = 0.14\omega_M\sigma$.

Исследовано поведение квазиодномерных солитонов и краудионов (солитоноподобных возбуждений, распространение которых сопровождается переносом частиц) в активных решетках для асимптотических случаев. Когда коэффициент трения μ мал, динамика решетки активных частиц аналогична динамике консервативной решетки. Возбуждается краудион, способный распространяться вдоль любой кристаллографической оси в обоих направлениях независимо от величины v_0 . Если первоначальной энергии частицы недостаточно для преодоления потенциального барьера, возбуждается квазиодномерный солитон.

В случае, когда коэффициент трения μ большой, а стационарное значение скорости v_0 мало, возбуждение краудионов невозможно; возникают только диссипативные солитоны.

Наконец, когда и коэффициент трения μ , и стационарное значение скорости v_0 достаточно велики, в решетке возможно возбуждение долгоживущих ($\tau \gtrsim 1000/\omega_M$) краудионов. Минимальная необходимая для их запуска начальная энергия уменьшается с ростом μ .

Результаты, представленные во второй главе, отражены в публикации [6].

В **третьей главе** исследуется поведение неупорядоченного ансамбля двумерных активных броуновских частиц с кусочно-линейным трением, взаимодействие которых происходит таким образом, что частицы ансамбля стремятся выровнять свои скорости со средней скоростью ансамбля. Динамика частиц определяется уравнениями

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \gamma(1 - |\vec{v}_i|)\vec{e}_{i,v} + \mu(\vec{u}_{A_i} - \vec{v}_i) + \sqrt{2D_E} \begin{pmatrix} \xi_{i,x} \\ \xi_{i,y} \end{pmatrix} + \sqrt{2D_v}\xi_{i,v}\vec{e}_{i,v} + \sqrt{2D_\phi}\xi_{i,\phi}\vec{e}_{i,\phi}, \quad (5)$$

где \vec{r}_i и \vec{v}_i – безразмерный радиус-вектор и скорость i -той частицы, $\vec{e}_{i,v}$ и $\vec{e}_{i,\phi} \perp \vec{e}_{i,v}$ – единичные векторы, указывающие направление скорости и перпен-

дикуляр к направлению скорости, $\gamma = 1$ – коэффициент кусочно-линейного отрицательного трения, μ – безразмерный коэффициент взаимодействия, \vec{u}_{A_i} – средняя скорость ансамбля, D_E – интенсивность независимых источников аддитивного шума $\xi_{i,x}$, $\xi_{i,y}$, воздействующих на координаты частиц, D_v и D_ϕ – интенсивности источников мультипликативного шума $\xi_{i,v}$ и $\xi_{i,\phi}$, воздействующих на величину и направление скорости частиц, соответственно.

Известно, что для описания макроскопического поведения бесконечно большого ансамбля активных броуновских частиц можно использовать гидродинамическое описание, в рамках которого ансамбль движущихся частиц представляется в виде непрерывного гидродинамического потока¹⁹. При анализе результатов его применения было обнаружено, что в ансамбле частиц при увеличении интенсивности шума D_ϕ происходит индуцированный шумом переход от упорядоченного состояния (когда скорости всех частиц сонаправлены и равны по величине) к неупорядоченному (когда направления движения частиц не согласованы). Такой переход может сопровождаться явлением бистабильности в некоторой области значений D_ϕ , что выражается в сосуществовании двух различных стационарных распределений скорости частиц при заданной интенсивности шума. Однако условия применения гидродинамического подхода при описания динамики малого ансамбля могут выполняться недостаточно точно, если число элементов невелико.

Установлено, что в ансамбле из 100 частиц и менее индуцированный шумом переход не сопровождается явлениями бистабильности, если параметр μ меньше определенного значения. На рис. 6 а показана нижняя граница значения параметра μ , только при превышении которой переход к неупорядоченному состоянию сопровождается бистабильностью.



Рис. 6: (а) граница существования области бистабильности на параметрической плоскости N, μ ; (б) стационарные вероятностные распределения $p(v_x, v_y = 0)$ в случае, когда переход «порядок-беспорядок» сопровождается бистабильностью ($\mu = 5, D_E = 0$), полученные при двух значениях интенсивности шума: $D_\phi = 0.225$ (кривая 1) и $D_\phi = 0.228$ (кривая 2).

Показано, что в отсутствие эффектов бистабильности распределение скорости произвольно выбранной частицы меняется плавно. При бистабиль-

¹⁹Active Brownian particles and active fluctuations with velocity-alignment / R. Großmann, L. Schimansky-Geier, P. Romanczuk // New Journal of Physics. – 2012. – Vol. 14.

ности происходит разрушение одного стационарного распределения и формирование другого (рис. 6 б): при $D_\phi = 0.225$ система находится в упорядоченном состоянии (кривая 1), но при незначительном увеличении интенсивности шума происходит жесткая стохастическая бифуркация – ансамбль резко переходит в неупорядоченное состояние (кривая 2).

Показано, что при введении аддитивного шума с интенсивностью D_E в сечении поверхности $p(v_x, v_y)$ будет не два, а четыре максимума (бимодальное распределение скорости). С ростом интенсивности аддитивного шума D_E область бимодальности исчезает, а пороговое значение интенсивности мультипликативного шума D_ϕ , при котором происходит индуцированный шумом переход, уменьшается.

Результаты, представленные в третьей главе, отражены в публикациях [1, 2].

Четвертая глава посвящена исследованию динамики дискретных бризеров в молекуле ДНК. Исследование проводится в рамках модели Пейрарда-Бишопа-Доксуа (ПБД) ¹⁴. Из гамильтониана приближенной модели ПБД следует уравнение движения частиц в каждой нуклеотидной паре в безразмерных переменных:

$$\ddot{q}_i + \Gamma \dot{q}_i = e^{-q_i}(e^{-q_i} - 1) + \omega_{bond}^2 \{(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) + \rho f_i(q_{i,i-1,i+1})\}. \quad (6)$$

Здесь $q_i = by_i$ – безразмерное смещение i -го нуклеотида от положения равновесия, точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$, ω_M – частота линейных колебаний нуклеотидов в нуклеотидной паре, ω_{bond} – безразмерная частота в единицах ω_M малых линейных колебаний нуклеотида, возникающих за счет его связи с соседями, ρ определяет степень нелинейности взаимодействия, а функция f_i с коэффициентом ρ описывает нелинейную поправку к линейной силе связи между нуклеотидными парами:

$$f_i = (q_{i-1} - q_i)[1 + 0.5\alpha(q_{i-1} - q_i)]e^{-\alpha(q_{i-1} + q_i)} + (q_{i-1} - q_i)[1 + 0.5\alpha(q_{i-1} - q_i)]e^{-\alpha(q_{i-1} - q_i)}. \quad (7)$$

На рисунке 7 представлены результаты моделирования при существенном возмущении трех ($K = 3$) частиц, приобретающих безразмерные значения скорости $v_{20} = v_{30} = v_{40} = -2$; видно, что формируется устойчивый мобильный дискретный бризер. В среднем на одну пару цепочки из 50 частиц приходится кинетическая энергия $T_{kin} = 0.04$ (в единицах $2D$, см. рис. 7 б), которая слабо рассеивается при движении вдоль оси молекулы. Малое рассеяние энергии связано с тем, что частота колебаний бризера лежит ниже граничной частоты зоны пропускания молекулы ДНК.

Обнаружено, что для обеспечения максимальной длины пробега бризера «пятно возбуждения» должно быть расположено непосредственно на кон-



Рис. 7: Мобильный бризер в ДНК с закрепленными концами при $v_{20} = v_{30} = v_{40} = -2$, $q_{i0} = 0$. (а) – эволюция распределений координат $q_i(\tau)$ частиц, (б) – зависимость кинетической энергии цепочки T_{kin} (нормированной на число частиц N) от времени. $N = 50$, $\omega_{bond} = 0.4$, $\Gamma = 0.001$.

це молекулы, а оптимальным является возмущение $K = 2 \dots 4$ нуклеотидных пар.

Обнаружено, что если в начальный момент времени несколько смежных нуклеотидных пар вблизи закрепленного конца молекулы растягиваются, то также формируется узкий мобильный бризер, аналогичный возбужденному за счет возмущения начальной скорости с сопоставимым уровнем начальной энергии. Еще лучше формируется бризер при начальном сжатии смежных нуклеотидных пар, поскольку такие начальные условия обеспечивают большую начальную энергию при одинаковых по величине смещениях частиц.

Таким образом, установлены условия для эффективного запуска мобильных дискретных бризеров в молекуле ДНК, и показано, что бризеры не критичны к отклонению параметров и начальных условий от оптимальных значений.

Результаты, представленные в четвертой главе, отражены в публикациях [4, 5].

В **заключении** сформулированы **выводы** и приведены основные **результаты** работы, которые состоят в следующем:

1. Показано, что в цепочках активных частиц с нелинейной потенциальной связью возможно возбуждение метастабильных состояний с неравномерным пространственным распределением дискретных диссипативных солитонов (максимумов плотности и скорости частиц), представляющих собой длительные переходные процессы, заканчивающиеся с установлением равномерного пространственного распределения солитонов. Определены характерные времена жизни метастабильных состояний при различных значениях параметров. В частности, обнаружено, что длительность переходных процессов нарастает по экспоненте с ростом количества частиц в ансамбле.

2. Показано, что в цепочке активных частиц с нелокальной связью между ними возникают новые виды стационарных состояний в виде равномерно распределенных кластеров различного числа солитонов.
3. Обнаружено, что в цепочках осцилляторов Рэлея возможно возбуждение диссипативных дискретных бризеров.
4. Установлено, что под влиянием шума в цепочке активных частиц происходит переключение мод (возбуждение и разрушение солитонов). Преимущественное направление переключений зависит от интенсивности шума; шум малой интенсивности уменьшает число солитонов, тогда как увеличение интенсивности шума стимулирует возбуждение новых солитонов.
5. Установлено, что в двумерных решетках активных частиц возможно возбуждение нескольких типов метастабильных состояний, включая одиночные плоские солитон-подобные волны и состояния с несколькими равномерно распределенными плоскими солитон-подобными волнами, подковообразные и квазиодномерные солитон-подобные волны, краудиноны. Все метастабильные состояния трансформируются со временем в наиболее устойчивую трансляционную моду (режим полной синхронизации), которая является аттрактором решетки в пространстве скоростей.
6. При глобальном взаимодействии поведение двумерного ансамбля частиц, взаимодействующих через общее поле, состоящего из $10 < N < 300$ частиц, соответствует поведению ансамблей с бесконечным числом частиц. В частности, наблюдаются индуцированные шумом переходы между упорядоченным и неупорядоченным состояниями ансамбля. Показано, что для малых ($N < 100$) ансамблей в пространстве параметров существует область бистабильности, внутри которой сосуществуют два различных стационарных распределения скорости. В области бистабильности каждое из двух стационарных состояний с разными вероятностными распределениями скорости частиц может быть реализовано селективно соответствующим заданием начальных условий. Границы области бистабильности обусловлены жесткими стохастическими бифуркациями исчезновения одного вероятностного распределения скорости и возникновения другого. При уменьшении числа частиц в ансамбле область бистабильности смещается в сторону больших значений коэффициента жесткости связи между частицами. В присутствии аддитивного шума явление бистабильности сменяется явлением бимодальности, состоящим в существовании двух значений абсолютной величины скорости частицы, при которых реализуется максимальная плотность вероятности. Мож-

но выделить область бимодальности в пространстве параметров, границы которой соответствуют мягким стохастическим бифуркациям, идентифицируемым по возникновению (исчезновению) экстремумов вероятностного распределения скорости.

7. В молекулах ДНК с закрепленными концами можно возбуждать мобильные дискретные бризеры за счет начального возмущения скорости или координат небольшого числа смежных нуклеотидных пар, расположенных у одного из концов цепочки, если взаимодействие между нуклеотидными парами превышает определенный порог. Мобильные бризеры возбуждаются как при положительном направлении одинаковых возмущений скорости (от оси), так и при отрицательном (к оси), причем параметры бризеров (скорость, частота колебаний, энергия, ширина) примерно одинаковы в обоих случаях, если возбуждается одинаковое число пар и сопоставимы энергии возмущений. Длина пробега бризера может составлять несколько десятков межпарных расстояний и не критично зависит от значений параметров, однако оптимальные условия формирования соответствуют начальному возмущению 2-4 смежных пар, расположенных вплотную к одному из концов молекулы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Сергеев, К.С.* Индуцированный шумом переход в малом ансамбле активных броуновских частиц / К.С. Сергеев, Т.Е. Вадивасова, А.П. Четвериков // *Письма в журнал технической физики*. — 2014. — Т. 40, № 21. — стр. 88–96.
2. *Сергеев, К.С.* Динамика ансамбля активных броуновских частиц, управляемых шумом / К.С. Сергеев, Т.Е. Вадивасова, А.П. Четвериков // *Математическая биология и биоинформатика*. — 2015. — Т. 10, № 1. — стр. 72–87.
3. *Сергеев, К.С.* Метастабильные возбуждения в цепочке Морзе–Рэля / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // *Нелинейная динамика*. — 2016. — Т. 2, № 3. — стр. 341–353.
4. *Четвериков, А.П.* Возбуждение мобильных дискретных бризеров в ДНК начальными возмущениями смещений или скоростей нескольких смежных нуклеотидных пар / А.П. Четвериков, К.С. Сергеев, В.Д. Лахно // *Математическая биология и биоинформатика*. — 2017. — Т. 12, № 2. — стр. 375–384.

5. Четвериков, А.П. Захват и транспорт зарядов в ДНК мобильными дискретными бризерами / А.П. Четвериков, К.С. Сергеев, Лахно В.Д. // *Математическая биология и биоинформатика*. — 2018. — Т. 13, № 1. — стр. 1-12
6. Stationary modes and localized metastable states in triangular lattice of active particles / K.S. Sergeev, S.V. Dmitriev, E.A. Korznikova, A.P. Chetverikov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 195-207
7. Chetverikov, A.P. Dissipative Solitons and Metastable States in a Chain of Active Particles / A.P. Chetverikov, K.S. Sergeev, E. del Rio // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2018. — Vol. 28, no. 08. — P. 1830027.
8. Vadivasova, T.E. Noise induced transition in a small ensemble of active brownian particles / T.E. Vadivasova, K.S. Sergeev // *Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic systems: Unraveling Complexity*. — Saratov: 2014. — May 19-21. — P. 49
9. Sergeev, K.S. Noise influence on steady states and metastable modes in a nonlinear chain of interacting non-oscillating elements / K.S. Sergeev, A.P. Chetverikov // *International conference on Control of Complex systems and Networks*. — Heringsdorf, Germany: 2016. — September 4-8. — P. 71
10. Лахно, В.Д. Транспорт заряда мобильными бризерами в молекуле ДНК, возмущенной начальными смещениями нуклеотидных пар / В.Д. Лахно, К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // VI международная конференция «Математическая биология и биоинформатика». — Пущино: 2016. — 16-21 октября. — стр. 26-27
11. Сергеев, К.С. Плоские солитоны в двумерной решетке активных частиц / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // XVIII научная школа «Нелинейные волны». — Нижний Новгород: 2018. — 26 февраля – 4 марта. — стр. 170–171.
12. Сергеев, К.С. Локализованные нелинейные волны в двумерной решетке активных частиц / К.С. Сергеев, А.П. Четвериков // *Материалы Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии»*. — Саратов: 2018. — 2-3 июля. — стр. 355–359.