



Фан Тхань Чунг

**АНАЛИЗ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЯЗКОУПРУГИЕ  
ПЛАСТИНКИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛЕЙ  
С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Научный руководитель:

**Шитикова Марина Вячеславовна**  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет», научный центр по  
фундаментальным исследованиям в области  
естественных и строительных наук,  
главный научный сотрудник

Официальные оппоненты:

**Радченко Владимир Павлович**  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «Самарский государственный  
технический университет», кафедра «Прикладная  
математика и информатика», заведующий кафедрой

**Босяков Сергей Михайлович**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусский государственный университет  
кафедра теоретической и прикладной механики  
доцент

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Тульский государственный  
университет», г. Тула

Защита состоится «28» июня 2018г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, к.9, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского и на сайте <http://www.sgu.ru/research/dissertation-council/d-212-243-10>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Сафонов Роман Анатольевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Элементы строительных конструкций (балки, пластинки, оболочки) часто подвергаются ударным воздействиям при погрузке и разгрузке, транспортировке, монтаже и в процессе эксплуатации. Натурные наблюдения и экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что ударные воздействия могут вызывать появление трещин и даже разрушение этих элементов, что может привести, в конечном счёте, к повреждению конструкции в целом.

Поскольку пластинки часто используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при ударных воздействиях является весьма актуальным, особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия.

**Основной целью** диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, ударника в виде шара и мишени в виде пластинки, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений с последующим численным анализом.

**Тематика работы.** Содержание диссертации соответствует п. 2 «Теория моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой», п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела».

**Научная новизна.** Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды могут иметь разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде тонкой пластинки типа Уфлянда-Миндлина.

Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина, вязкоупругие свойства которой вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта – моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет варьировать вязкостью в контактной зоне, так как в процессе ударного взаимодействия могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности пластинки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной ударных волн в виде поверхностей сильного разрыва, которые затем распространяются вдоль

вязкоупругой пластинки с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В контактной зоне решение строится при помощи обобщенной теории Герца, что требует расшифровки сложных операторных выражений, которые приводят к линейным комбинациям дробных операторов Ю.Н. Работнова.

Найдены приближенные решения полученных систем уравнений с использованием малого параметра, которым является время протекания ударного процесса. Проведенные численные исследования показали, что при увеличении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия сферического ударника с вязкоупругой пластинкой типа Уфлянда-Миндлина без учета и с учетом растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

Исследована реакция на низкоскоростной удар предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки в случае, когда ее динамическое поведение описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. При этом контактное взаимодействие между жестким ударником и мишенью моделируется обобщенной контактной силой Герца, так как предполагается, что вязкоупругие свойства пластины проявляются только внутри зоны контакта и описываются при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными ввиду того факта, что в процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри зоны контакта пластины и сферы, в результате чего возникают более свободные перемещения молекул относительно друг друга и в конечном итоге происходит уменьшение вязкости материала пластины внутри области контакта.

Показано, что если круглая пластина подвержена действию постоянной сжимающей силы, равномерно распределенной по ее срединной плоскости вдоль граничной окружности, то в процессе удара по такой предварительно напряженной пластинке возбуждается нестационарная волна поперечного сдвига (поверхность сильного разрыва), которая затем распространяется со скоростью, зависящей от сжимающей силы. При определенной критической величине сжимающей силы, скорость нестационарной волны равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта, что, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри зоны контакта, что может привести к разрушению контактной области.

Показано, что для упругой пластины критическая сжимающая сила ведет к увеличению скорости контактного пятна с течением времени, в результате чего может происходить отделение жесткой шайбы (зоны контакта) с дальнейшим выталкиванием ее из пластины. Если внутри зоны контакта начинает проявляться вязкость материала пластинки, то она смягчает удар, и в этом случае скорость контактного пятна последовательно растет от нуля до определенной максимальной величины и затем снова уменьшается до нуля.

**Достоверность** базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. Полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка при устремлении параметра дробности к единице.

**Практическая ценность.** Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе эксплуатации могут подвергаться различным ударным воздействиям, приводящим к изменению свойств соударяющихся тел в зоне контакта.

Данные научные исследования выполнялись в соответствии с планом научно-исследовательских работ международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ФГБОУ ВО «ВГТУ» в рамках проекта РФФИ «Анализ ударного взаимодействия вязкоупругих балок, пластин и оболочек с учетом сдвиговой и объемной релаксации на основе дробных операторов Ю.Н. Работнова» (проект № 17-01-00490).

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались: 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного технического университета в 2015-2017 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; 3) на 7й международной конференции по математическому моделированию в инженерных науках (7<sup>th</sup> International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES'16), в Дубровнике, Хорватия, 28-30 сентября 2016 года; 4) на международной конференции по прикладной математике, вычислительным и инженерным наукам (2016 International Conference on Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering) в Риме, Италия, 5-7 ноября 2016 года.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, 3 из которых в международных научных изданиях, проиндексированных в базах данных Web of Science и Scopus.

**Личное участие автора.** Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, были получены лично соискателем и опубликованы совместно с научным руководителем, который определил основные направления исследования в процессе выполнения научного проекта РФФИ. В совместных

публикациях диссертант участвовал в решении задач, поставленных перед ним руководителем, лично проводил все численные исследования и их анализ.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на авторов и источник заимствования.

**Структура и объём работы** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 142 страницах машинописного текста, содержит 46 рисунков и список использованных источников из 188 наименований.

**На защиту выносятся** следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара, разработанной ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде пластинки Уфлянда-Миндлина с учетом растяжения ее срединной поверхности;
- анализ динамического поведения упругой пластинки Кирхгофа-Лява под действием контактной силы в вязкой среде при помощи введения в рассмотрение нового структурного параметра для описания демпфирующих свойств среды за счет использования производной дробного порядка;
- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих, упругих или жестких ударников с вязкоупругими пластинками с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса;
- решение задачи о низкоскоростном ударе по предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинке Уфлянда-Миндлина с использованием обобщенного контактного закона Герца в предположении, что вязкоупругие свойства пластины проявляются только внутри зоны контакта и описываются при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, практическая значимость работы, а также дана краткая аннотация по главам.

**В первой главе** приводится критический анализ научной литературы, посвященной анализу ударных воздействий на тонкие вязкоупругие пластинки и методов их решения. В обзоре Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В., опубликованном в 2007 году в журнале *Shock and Vibration Digest*, отмечается, что постановка задачи ударного взаимодействия включает в себя несколько ключевых аспектов, совокупность которых определяет метод решения поставленной краевой динамической задачи, а именно:

- (а) выбор закона контактного взаимодействия: нелинейный закон Герца или его линейная аппроксимация;
- (б) свойства материалов соударяющихся тел: упругие, вязкоупругие, термоупругие, упруго-вязко-пластические;
- (в) учет влияния распространяющихся нестационарных волн приводит к необходимости использования волновой теории удара, т.е. к выбору гиперболических определяющих уравнений для балок типа Тимошенко и для

пластин типа Уфлянда-Миндлина; в противном случае используют уравнения балок Бернулли-Эйлера и пластин Кирхгофа-Лява;

(г) наличие предварительного напряжения в мишени.

Задачи ударного взаимодействия тонкостенных конструкций относятся к наиболее сложным среди прочих динамических задач. Обзоры статей, связанных с применением моделей с дробным производными и операторами для решения задач ударного взаимодействия, можно найти в работах С. Абрата, В. Гольдсмита, Л.Б. Грещука, Ю.А. Россихина, М.В. Шитиковой. Тем не менее, насколько известно автору, исследование ударного взаимодействия вязкоупругих пластин с применением моделей с дробными производными проводилось лишь в нескольких работах.

В данной диссертационной работе, выполненной соискателем под руководством профессоров Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В., делается обобщение предыдущих методов и подходов, разработанных в рамках их школы, на решение задач ударного воздействия на вязкоупругие пластинки Уфлянда-Миндлина с учетом растяжения ее срединной поверхности и наличия предварительного напряжения.

**Вторая глава** посвящена анализу ударного воздействия вязкоупругого шара по упругой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта с дробными производными. При этом вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными (Рис.1).

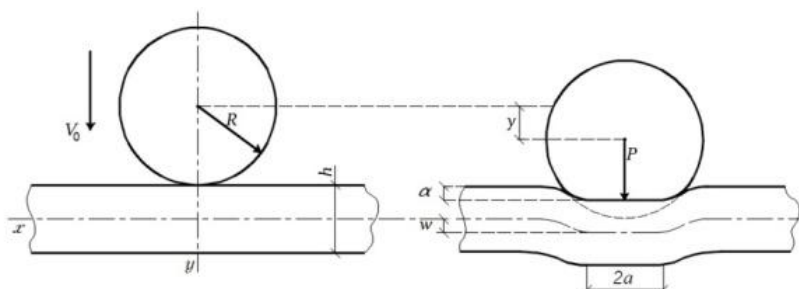


Рис.1. Схема ударного взаимодействия сферического ударника с пластинкой Кирхгофа-Лява

При этом предполагается, что коэффициент Пуассона не зависит от времени в процессе деформирования, а в качестве известного оператора выбирается оператор Юнга, определяемый по формуле

$$\tilde{E} = E_1 \left( 1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1} \right), \quad (1)$$

где  $E_1$  - релаксированный модуль упругости,  $\tau_{\sigma_1}$  - время ретардации,  $\gamma_1$  ( $0 < \gamma_1 \leq 1$ ) - параметр дробности,  $D^{\gamma_1}$  - дробная производная Римана-Лиувилля

$$D^{\gamma_1} x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t') dt'}{\Gamma(1 - \gamma_1)(t - t')^{\gamma_1}}, \quad (2)$$

$\Gamma(1 - \gamma_1)$  - гамма-функция,  $x(t)$  - произвольная функция.

Уравнения движения вязкоупругого ударника радиуса  $R$  и массы  $m$  и упругой прямоугольной пластины с размерами  $a$  и  $b$  и толщины  $h$  записываются в следующем виде:

$$m\ddot{w}_2 = -P(t), \quad (3)$$

$$\frac{D}{\rho h} \nabla^2 w_1 + \frac{\mu}{\rho h} D^{\gamma_1} w_1 + \dot{w}_1 = \frac{1}{\rho h} P(t) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{b}{2}\right), \quad (4)$$

где  $P(t)$  - контактная сила,  $\nabla^2 = (\partial/\partial x + \partial/\partial y)^2$ ,  $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_1^2)$  - цилиндрическая жесткость,  $w_1(x, y, t)$  - прогиб пластины,  $E_1$ ,  $\nu_1$  и  $\rho$  - ее модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность соответственно,  $x$  и  $y$  - декартовы координаты,  $\delta(x - a/2)$  - дельта-функция Дирака, точки обозначают производную по времени,  $\mu$  - коэффициент вязкости,  $D^{\gamma_1} w_1$  - дробная производная Римана-Лиувилля, определяемая выражением (2).

Второй член в уравнении (4) описывает действие сил внешнего трения, возникающих в окружающей среде Кельвина-Фойгта с дробными производными в процессе колебаний пластины от воздействия контактной силы  $P(t)$ .

К уравнениям (3) и (4) добавим следующие начальным условия:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, 0) = 0, \quad \dot{w}_1(x, y, 0) = 0, \\ w_2(0) = 0, \quad \dot{w}_2(0) = V_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V_0$  - начальная скорость ударника в момент удара.

Дважды интегрируя уравнение (3), получим

$$w_2(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' + V_0 t. \quad (6)$$

Раскладывая перемещение  $w_1(x, y, t)$  шарнирно-опертой пластины Кирхгофа-Лява по собственным функциям

$$w_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

и подставляя (7) в уравнение (4) с учетом ортогональности синусов на отрезках  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , получим бесконечную систему несвязанных уравнений

$$\ddot{x}_{mn}(t) + \frac{\mu_{mn}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 x_{mn}(t) = F_{mn} P(t), \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

где  $\mu_{mn}$  - коэффициент вязкости гармоники с индексами  $m$  и  $n$ ,  $x_{mn}(t)$  - обобщенные перемещения,  $\Omega_{mn}$  - собственная частота  $mn$ -той гармоники

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \text{ и } F_{mn} = \frac{1}{\rho h} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2}.$$

С учетом гипотезы Рэлея о пропорциональности между упругой и вязкой матрицами, т.е.,

$$\frac{\mu_{mn}}{\rho h} = \Omega_{mn}^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}, \quad (9)$$

где  $\tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$  - коэффициент пропорциональности, уравнение (8) принимает вид



$$\ddot{x}_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 (1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1}) x_{mn}(t) = F_{mn} P(t). \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает вынужденные колебания осциллятора Кельвина-Фойгта с дробной производной.

Для того чтобы получить решение уравнения (4), необходимо определить функцию Грина  $G_{mn}(t)$  для каждой формы колебаний осциллятора (10)

$$G_{mn}(t) = A_{0mn}(t) + A_{mn} e^{-\alpha_{mn} t} \sin(\omega_{mn} t - \varphi_{mn}), \quad (11)$$

где индексы  $mn$  обозначают порядковый номер осциллятора,  $A_{mn}$  - амплитуда,  $\alpha_{mn}$  - коэффициент демпфирования, а  $\omega_{mn}$  и  $\varphi_{mn}$  - частота и фаза колебаний соответственно.

Из соотношения (11) следует, что функция Грина является суммой двух слагаемых, одно из которых  $A_{0mn}(t)$  описывает дрейф положения равновесия и определяется интегралом, включающим функцию распределения динамических и реологических параметров, в то время как второе слагаемое является произведением двух функций, зависящих от времени, экспоненты и синусоиды, и описывает затухающие колебания вокруг дрейфующего положения равновесия.

В третьем параграфе функция Грина (11) найдена при помощи метода преобразования Лапласа.

Зная функцию Грина, решение уравнения (2) принимает вид

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \int_0^t G_{mn}(t-t') P(t') dt'. \quad (12)$$

Введем теперь в рассмотрение величину, характеризующую относительное сближение шара и пластинки, т.е. проникновение упругой сферы в упругую пластину или локальное смятие материалов ударника и мишени

$$y(t) = w_2(t) - w_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right), \quad (13)$$

которая связана с контактной силой при помощи обобщенного закона Герца

$$P(t) = \tilde{k} y^{3/2}, \quad \tilde{k} = \frac{4}{3} \sqrt{R E'} \quad (14)$$

где  $\tilde{k}$  - оператор, зависящий от геометрии и вязкоупругих свойств ударника и упругих свойств мишени, которые согласно принципу соответствия Вольтерра описываются оператором  $E'$

$$\frac{1}{E'} = J' = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \quad (15)$$

и  $\tilde{\nu}_2$  и  $\tilde{E}_2$  - операторы для вязкоупругой шара (ударника).

Для получения интегро-дифференциального уравнения для величин  $y(t)$  и  $P(t)$ , необходимо определить вид оператора  $\tilde{E}_2$ .

Следуя работам Ю.Н. Работнова и Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, предположим, что объемный модуль материала ударника является постоянной величиной, т.е.

$$\frac{\tilde{E}_2}{1 - 2\tilde{\nu}_2} = \frac{E_{\infty}}{1 - 2\nu_{\infty}}, \quad (16)$$

где  $E_\infty$  и  $\nu_\infty$  - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для материала ударника соответственно.

Из соотношения (16) можно найти, что зависящий от времени оператор Пуассона записывается в виде

$$\tilde{\nu}_2 = \nu_\infty + \frac{1}{2}(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right), \quad (17)$$

где  $\mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right)$  - безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова

$$\mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{i2}^{\gamma_2} \right) = \frac{1}{1 + \tau_{i2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2}} \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (18)$$

Теперь подставляя выражение (17) в контактный закон (14) с учетом уравнений (6), (12) и (13), получаем интегральное уравнение для определения контактной силы

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{4\sqrt{R}} \right)^{2/3} \left[ \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty} \right) P(t) + \frac{(1-2\nu_\infty)^2}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t-t'}{\tau_{\varepsilon_2}} \right) P(t') dt' + \right. \\ & \left. + \frac{3\nu_\sigma}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t-t'}{\tau_{\sigma_2}} \right) P(t') dt' \right]^{2/3} = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' + V_0 t - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{m\pi}{2} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t G_{mn}(t-t') P(t') dt', \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t}{\tau_{i2}} \right) = \frac{t^{\gamma_2-1}}{\tau_{i2}^{\gamma_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{i2})^{\gamma_2 n}}{\Gamma[\gamma_2(n+1)]} \quad (20)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, которая при  $\gamma = 1$  переходит в обычную экспоненту, а оператор  $\tilde{k}$ , входящий в (14), имеет вид

$$\tilde{k} = \frac{4\sqrt{R}}{3} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{R}}{3d} \left[ 1 - e_1 \mathfrak{E}_\gamma^* \left( t_1^{\gamma_2} \right) - e_2 \mathfrak{E}_\gamma^* \left( t_2^{\gamma_2} \right) \right] \quad (21)$$

Теперь с учетом (21) нелинейное интегральное уравнение для определения величины  $y(t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} y(t) = & V_0 t - \frac{4\sqrt{R}}{3dm} \int_0^t [y^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t'-t''}{t_j} \right) y^{3/2}(t'') dt''] (t-t') dt' - \\ & - \frac{4\sqrt{R}}{3d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{m\pi}{2} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t G_{mn}(t-t') [y^{3/2}(t') - \\ & - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t'-t''}{t_j} \right) y^{3/2}(t'') dt''] dt'. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как процесс ударного взаимодействия является кратковременным, т.е. при выполнении условия  $t/\tau_i \ll 1$ , то, как это было показано в классических работах К.С. Cole и Р.Н. Cole и Ю.Н. Работнова, дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова (20) можно с достаточной точностью заменить более простым выражением

$$\varepsilon_\gamma \left( -\frac{t}{t_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma_2-1}}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \quad (j=1,2). \quad (23)$$

Тогда функция Грина  $G_{mn}(t)$ , которая стремится к нулю при  $t=0$ , согласно предельной теореме

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{G}_{mn}(p) p = G(0) = 0, \quad (24)$$

записывается в виде

$$G_{mn}(t) \approx t A_{mn} \omega_{mn} \cos \varphi_{mn}. \quad (25)$$

С учетом соотношений (23)-(25), уравнение (22) сводится к

$$y(t) = V_0 t - \frac{4\sqrt{R}}{3d} \left( \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \omega_{mn} \cos \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t [y^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^{t'} (t'-t'')^{\gamma_2-1} y^{3/2}(t'') dt''] (t-t') dt'. \quad (26)$$

Далее получены приближенные аналитические решения уравнений (26) и найдены выражения, по которым можно подсчитать основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, максимальные значения контактной силы и локального смятия, а также времена, при которых указанные величины достигают своих максимальных значений.

Численные исследования проведены в седьмом параграфе, которые подтвердили выводы аналитических выкладок. В частности показано, что при увеличении параметра дробности  $\gamma_2$  от 0, что соответствует упругому материалу ударника, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу, свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной,

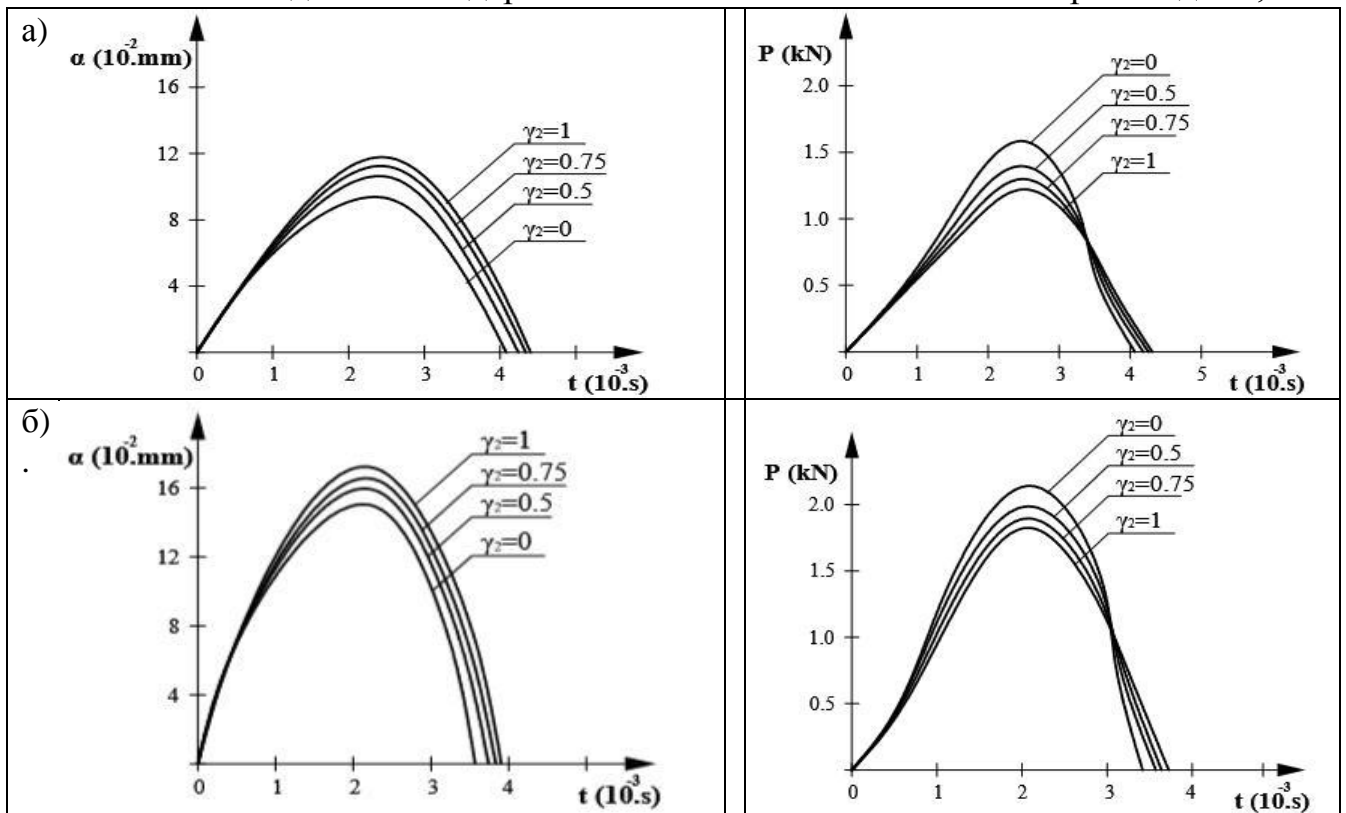


Рисунок 2. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае  $\gamma_1=0.5$ ,  $R=2$ см,  $h=12$ мм и начальной скорости удара  $V_0$ : а) 5м/с, б) 10м/с

максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растёт. Увеличение  $h$  приводит к увеличению как максимального значения контактной силы, так и продолжительности контакта, при этом чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т. е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта.

На рисунке 2 приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени в случае ударного взаимодействия для различных значений начальной скорости удара и параметров дробности.

**Третья глава** посвящена анализу динамического поведения вязкоупругой пластины типа Уфлянда-Миндлина с учетом влияния растяжения ее срединной поверхности на процесс деформирования во время удара вязкоупругим сферическим ударником (Рис.3).

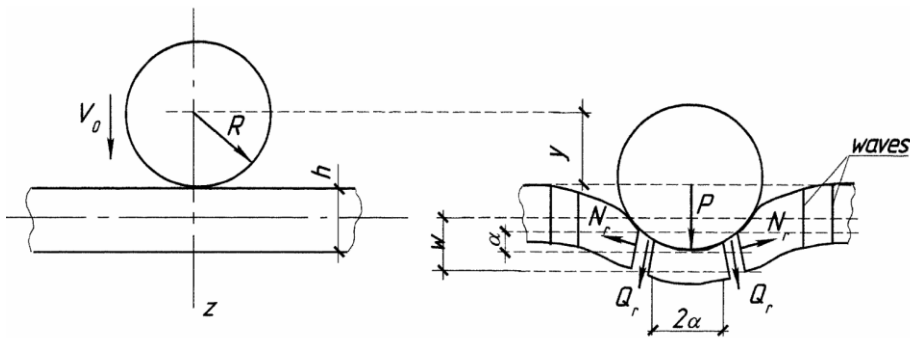


Рис.3. Схема ударного взаимодействия сферического ударника с пластинкой Уфлянда-Миндлина

Некоторая искомая функция  $Z$  за фронтами волновых поверхностей  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  может быть представлена в виде лучевого ряда, следуя Россихину Ю.А.,

$$Z(r,t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]^{(\alpha)} \Big|_{t=\frac{r}{G^{(\alpha)}}} \left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}}\right)^k H\left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}}\right), \quad (27)$$

где  $[Z_{,(k)}]^{(\alpha)} = [\partial^k Z / \partial t^k]^{(\alpha)} = Z_{,(k)}^{+(\alpha)} - Z_{,(k)}^{- (\alpha)}$  - скачки производных  $k$ -ого порядка по времени от искомой функции  $Z$  на волновых поверхностях  $\Sigma_{\alpha}$ , т.е. при  $t = r / G^{(\alpha)}$ ,  $r$  - полярный радиус, верхние индексы "+" и "-" означают, что величины вычисляются непосредственно перед и за волновыми фронтами соответственно,  $H(t - r / G^{(\alpha)})$  - единичная функция Хевисайда.

Поскольку процесс ударного взаимодействия является скоротечным, то в лучевом ряде (27) можно ограничиться только членами нулевого порядка, т.е.

$$Z(r,t) = \sum_{\alpha=1}^2 [Z]^{(\alpha)} \Big|_{t=\frac{r}{G^{(\alpha)}}} H\left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}}\right). \quad (28)$$

Для определения разрывов искомых величин, сначала необходимо записать определяющие уравнения, описывающие динамическое поведение вязкоупругой изотропной пластины Уфлянда-Миндлина в полярной системе координат  $(r, \varphi)$

$$\frac{1}{r}(N_r - N_{\varphi}) + \frac{\partial N_r}{\partial r} = \rho h \ddot{u}_r, \quad \frac{1}{r}(M_r - M_{\varphi}) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_r, \quad (29,30)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \ddot{w}, \quad N_r = \frac{\tilde{E}h}{1 - \tilde{\sigma}^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tilde{\sigma} \frac{u_r}{r} \right), \quad (31.32)$$

$$N_\varphi = \frac{\tilde{E}h}{1 - \tilde{\sigma}^2} \left( \frac{u_r}{r} + \tilde{\sigma} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad M_r = \tilde{D} \left( \frac{\partial \beta_r}{\partial r} + \tilde{\sigma} \frac{\beta_r}{r} \right), \quad (33,34)$$

$$M_\varphi = \tilde{D} \left( \frac{\beta_r}{r} + \tilde{\sigma} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} \right), \quad Q_r = Kh \tilde{\mu} \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} - \beta_r \right), \quad (35,36)$$

где  $N_r$  и  $N_\varphi$  - силы, действующие в плоскости пластины в направлениях  $r$  и  $\varphi$  соответственно,  $M_r$  и  $M_\varphi$  - изгибающие моменты,  $Q_r$  - поперечная сила,  $w$  - прогиб плиты,  $u_r$  - перемещение вдоль радиуса,  $\beta_r$  - угол поворота нормали в направлении  $r$ ,  $\rho$  - плотность,  $h$  - толщина пластины,  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{E}$  - операторы сдвига и Юнга соответственно,  $\tilde{\sigma}$  - оператор Пуассона,  $\tilde{D} = \tilde{E}h^3 / 12(1 - \tilde{\sigma}^2)$  - оператор цилиндрической жесткости,  $K = \pi^2 / 12$  - коэффициент сдвига, а точки обозначают производные по времени.

Затем применим к уравнениям (29) и (31) кинематическое условие совместности для физических компонент тонких тел,

$$G[\partial Z / \partial r] = -[\dot{Z}] + \delta[Z] / \delta t \quad (37)$$

где  $\delta / \delta t$  -  $\delta$ -производная Томаса по времени от функции, заданной на движущейся поверхности. Внутри ударного слоя выполняется соотношение

$$\partial Z / \partial r \approx -G^{-1} \partial Z / \partial t. \quad (38)$$

Интегрируя полученные уравнения с учетом (38) по времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  и устремляя затем  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$[N_r] = -\rho h G[v_r], \quad [Q_r] = -\rho h G[W] \quad (39)$$

При  $t > 0$  перемещение центра шара  $z(t)$  может быть представлено в виде

$$z = w + \alpha, \quad (40)$$

где  $\alpha$  - вдавливание ударника в результате местного смятия материалов мишени и ударника внутри зоны контакта.

Тогда уравнение движения части пластинки, находящейся в контакте с шаром, и уравнение движения шара имеют вид

$$2\pi a N_r \frac{\partial w}{\partial r} + 2\pi a Q_r + P(t) = \rho h \pi a^2 \ddot{w}, \quad (41)$$

$$m \ddot{z} = -P(t), \quad (42)$$

где  $a(t)$  - радиус зоны контакта,  $P(t)$  - контактная сила.

Уравнения (41) и (42) решаются с учетом формул (39), а также следующих начальных условий:

$$z|_{t=0} = 0, \quad \dot{z}|_{t=0} = V_0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (43)$$

К уравнениям (41) и (42) добавим соотношения, которые следуют из обобщенной контактной теории Герца

$$P(t) = \frac{4\sqrt{R}}{3} \tilde{k} \alpha^{3/2}, \quad a = \sqrt{\alpha R}, \quad (44)$$

где

$$\tilde{k} = \left( \frac{1 - \tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1}, \quad (45)$$

при этом индексы "1" и "2" относятся к вязкоупругой пластинке и вязкоупругому шару соответственно. Операторы, которые действуют в зоне контакта, базируются на модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Для того чтобы выразить контактную силу  $P(t)$  через перемещение  $\alpha(t)$ , нужно расшифровать оператор  $\tilde{k}$ . Процедура вычисления этого оператора, а также его обратного оператора, подробно описана в работах Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. Так, было показано, что оператор  $k$  записывается в виде

$$\tilde{k} = \mathfrak{a}_\infty^{-1} \left[ 1 - \sum_{j=1}^4 M_j \mathfrak{e}_\gamma^* (T_j^\gamma) \right], \quad (46)$$

где

$$\mathfrak{a}_\infty = \frac{1 - \sigma_{1\infty}^2}{E_{1\infty}} + \frac{1 - \sigma_{2\infty}^2}{E_{2\infty}}, \quad (47)$$

а неизвестные константы  $M_j$  и  $T_j$  можно определить из системы уравнений

$$1 + \sum_{k=1}^4 \frac{n_k \tau_k^{-\gamma}}{\tau_k^{-\gamma} - T_j^{-\gamma}} = 0, \quad (48)$$

$$1 + \sum_{j=1}^4 \frac{M_j T_j^{-\gamma}}{\tau_k^{-\gamma} - T_j^{-\gamma}} = 0.$$

С учетом соотношений (46)-(48), контактная сила определяется в следующем виде:

$$P(t) = k_\infty \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{e}_\gamma \left( -\frac{t-t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (49)$$

где  $k_\infty = 4\sqrt{R} / 3\mathfrak{a}_\infty$ .

Используя уравнение (49), соотношение (42) можно переписать в виде

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} \int_0^t \left[ \alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^{t'} \mathfrak{e}_\gamma \left( -\frac{t'-t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t-t') dt'. \quad (50)$$

Перепишем уравнение (41) в виде

$$M \alpha \dot{W} = -e \alpha^{3/2} W - g \alpha^{1/2} W + k_\infty \left[ \alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{e}_\gamma \left( -\frac{t-t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (51)$$

где

$$e = \frac{2G_\infty^{(1)2} (1 - \sigma_\infty) M}{h \sqrt{R} G_\infty^{(2)} \sigma_\infty}, \quad g = \frac{2G_\infty^{(2)} M}{\sqrt{R}}, \quad M = \rho h \pi R.$$

Заметим, что поскольку ударный процесс является кратковременным, то в интегралах, входящих в уравнения (50) и (51), функцию  $\mathfrak{e}_\gamma(-t/T_j)$  можно представить в виде (23). Тогда уравнения (50) и (51) можно переписать в виде

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} \int_0^t \left[ \alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^{t'} \frac{(t' - t'')^{\gamma-1}}{T_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t - t') dt', \quad (52)$$

$$M \alpha \dot{W} = - (e \alpha^{3/2} + g \alpha^{1/2}) W + k_\infty \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \frac{(t - t'')^{\gamma-1}}{T_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \quad (53)$$

Присоединяя формулу (40) к уравнениям (52) и (53), получим замкнутую систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций:  $z(t)$ ,  $w(t)$  и  $\alpha(t)$ .

Анализ полученных решений и численные исследования приведены в четвертом параграфе. Показано, что за счет растяжения срединной поверхности мишени происходит увеличение продолжительности контакта между ударником и мишенью, максимального значения величины  $\alpha$ , а также времени, при котором смятие достигает своего максимума, и это увеличение возрастает с увеличением коэффициента  $e/g$ , который контролирует растяжение срединной поверхности пластинки.

Из рисунка 4, на котором приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени для различных значений параметра дробности, видно, что при увеличении параметра  $\gamma$  от 0, что соответствует упругому материалу ударника и мишени, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу,

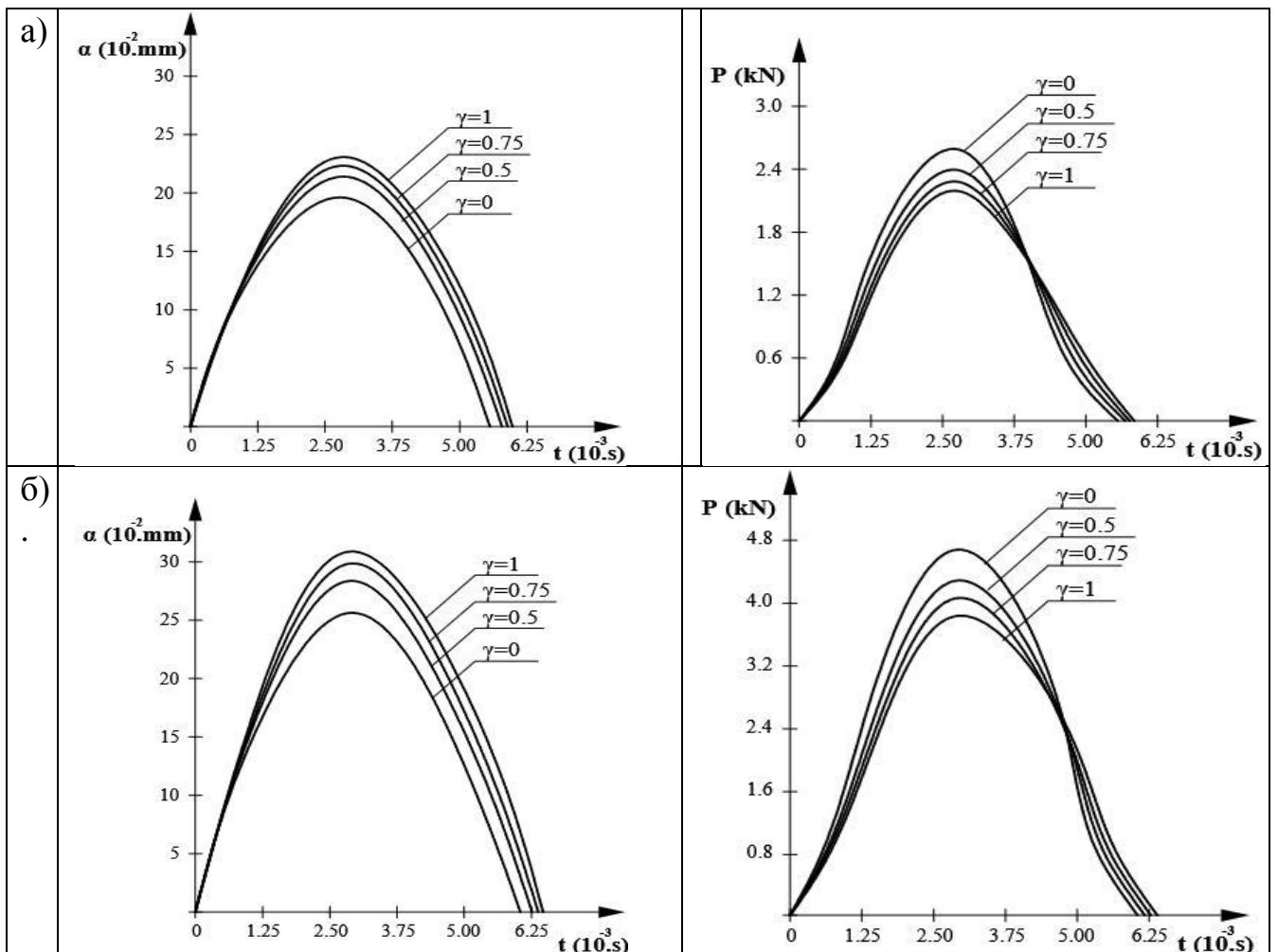


Рисунок 4. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае  $R=2\text{см}$ ,  $h=12\text{мм}$  и начальной скорости удара  $V_0$ : а)  $15\text{м/с}$ , б)  $20\text{м/с}$

свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение начальной скорости удара ведет к увеличению локального смятия и максимального значения контактной силы.

**В четвертой главе** исследуется реакция на низкоскоростной удар предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки в случае, когда ее динамическое поведение описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформации поперечного сдвига.

Уравнения движения предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки Уфлянда-Миндлина в полярной системе координат с началом координат в центре пластины имеют следующий вид:

$$D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - D \frac{\varphi}{r^2} + K \mu h \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\varphi}, \quad (54)$$

$$K \mu h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) = \rho h \ddot{w} + N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (55)$$

где  $w$  - прогиб пластины,  $\varphi$  - угол поворота нормали к срединной поверхности пластины,  $r$  - полярный радиус,  $h$  - толщина пластины,  $\rho$  - ее плотность,  $K = 5/6$  - коэффициент сдвига,  $N$  - постоянная сжимающая сила, действующая в радиальном направлении,  $D = Eh^3 / 12(1 - \sigma^2)$  - изгибная жесткость,  $E$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  - продольный модуль, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

Записывая уравнения (54) и (55) внутри ударного слоя с учетом выражения (38), а затем интегрируя полученные соотношения по времени  $t$  от  $t$  до  $t + \Delta t$  и устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\rho G_1^2 = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad \rho G_2^2 = K \mu - N / h. \quad (56)$$

Из выражения (56) видно, что скорость волны поперечного сдвига зависит от величины предварительного напряжения.

Для дальнейшего анализа необходимо определить поперечную силу  $Q_r$ . С этой целью разделим соотношение (55) на два уравнения

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \ddot{w} + N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad Q_r = K \mu h \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right). \quad (57)$$

Дифференцируя (57) один раз по времени и применяя условие совместности (38) с учетом выражения (56), получим

$$Q_r = -K \mu h G_2^{-1} W, \quad (58)$$

где  $W = \dot{w}$ .

Уравнение движения части пластины, вступающей в контакт со сферическим ударником, и уравнение движения шара имеют вид

$$2\pi a(t) Q_r + P(t) = \rho h \pi a^2(t) \dot{w} + 2\pi a(t) N \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (59)$$

$$m \ddot{z} = -P(t), \quad (60)$$



где радиус зоны контакта  $a(t)$  и контактная сила  $P(t)$  определяются при помощи обобщенной контактной теории Герца (44) с оператором  $\tilde{k}$  в случае жесткого ударника в виде

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2}, \quad (61)$$

зависящего от вязкоупругих операторов  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$ , которые справедливы внутри зоны контакта и основаны на модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Таким образом, оператор, соответствующий модулю Юнга, имеет вид:

$$\tilde{E}_1 = E_\infty \left[ 1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right] \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (62)$$

где  $E_\infty$  и  $E_0$  - нерелаксированный (мгновенный модуль упругости или «стеклянный» модуль) и релаксированный (длительный модуль упругости или «резиновый» модуль) модули упругости и

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) Z(t) = \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left( \frac{t-t'}{\tau_i} \right) Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (63)$$

Зная зависящие от времени операторы и используя алгебру безразмерных операторов Ю.Н. Работнова и алгоритм, подробно изложенный в главе 3, найдем оператор жесткости в случае удара жестким сферическим ударником по вязкоупругой пластинке

$$\tilde{k} = \frac{E_\infty}{1 - \sigma_\infty^2} \left[ 1 - \sum_{j=1}^2 m_j \mathfrak{E}_\gamma^* (t_j^\gamma) \right], \quad (64)$$

где

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{B(1 - \sigma_\infty)}{(1 - 2\sigma_\infty)}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \frac{D(1 + \sigma_\infty)}{(1 - 2\sigma_\infty)}.$$

Тогда с учетом выражений (64) и (63) для определения основных характеристик контактного взаимодействия получаем следующие интегральные уравнения:

$$P(t) = k_\infty \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 m_j \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t-t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (65)$$

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} \int_0^t \left[ \alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 m_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_\gamma \left( -\frac{t'-t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t-t') dt', \quad (66)$$

где

$$k_\infty = \frac{4\sqrt{R}}{3} \frac{E_\infty}{1 - \sigma_\infty^2}.$$

Теперь учитывая формулу (61) и соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -G_2^{-1} W, \quad (67)$$

которое получается из (38), если заменить функцию  $Z$  на функцию  $w$ , уравнения (59) и (60) могут быть записаны в виде

$$M \alpha \dot{W} + g \alpha^{1/2} W = P(t), \quad (68)$$

$$m \dot{W} + m \ddot{\alpha} = -P(t), \quad (69)$$

где  $P(t)$  определяется из уравнения (65),  $M = \rho\pi hR$  и  $g = 2MG_2R^{-1/2}$ .

Система разрешающих уравнений (68) и (69) с учетом соотношения (23) принимает вид:

$$M\alpha\dot{W} + g\alpha^{1/2}W = k_\infty \left[ \alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (70)$$

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k_\infty \left[ \alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (71)$$

где

$$\Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left( \frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right).$$

Когда  $N \rightarrow N_{crit} = K\mu h$ , т.е. скорость волны поперечного сдвига стремится к нулю  $G_2 \rightarrow 0$ , пластинка находится в критическом состоянии, так как вся энергия ударного взаимодействия сконцентрирована в зоне контакта, что может привести к разрушению конструкции внутри контактной зоны.

Предположим, что сжимающая сила  $N$  в пластинке достигла своего критического значения. Тогда в результате удара жесткого тела по плите возникает только одна волна в пластине, которая в дальнейшем распространяется со скоростью  $G_1$ , а вторая волна оказывается «запертой» внутри контактной области. В этом случае, коэффициент  $g = 0$  и уравнение (70) сводится к

$$M\alpha\dot{W} = k_\infty \left[ \alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right]. \quad (72)$$

Если в качестве первого приближения положить  $\alpha \approx V_0 t$ , тогда уравнение (72) принимает вид

$$\dot{W} = \frac{k_\infty V_0^{1/2}}{M} \left[ t^{1/2} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) t^{1/2+\gamma} \right]. \quad (73)$$

Интегрируя (73), получим

$$W = \frac{k_\infty V_0^{1/2}}{M} \left[ \frac{2}{3} t^{3/2} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) \frac{1}{3/2+\gamma} t^{3/2+\gamma} \right]. \quad (74)$$

Далее получены частные решения уравнения (73) и найдены выражения, по которым можно подсчитать основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, максимальные значения контактной силы и локального смятия, а также времена, при которых указанные величины достигают своих максимальных значений.

Численные исследования проведены в третьем параграфе, которые подтвердили выводы аналитических выкладок. На рисунке 5 приведены временные зависимости локального смятия пластинки для различных значений предварительно приложенной постоянной сжимающей силы  $N$ , из которого видно, что при увеличении параметра сжимающей силы от нуля до критического значения, соответствующего запиранию нестационарной волны поперечного сдвига внутри контактной области, максимальное значение локального смятия уменьшается, а время контакта растет.

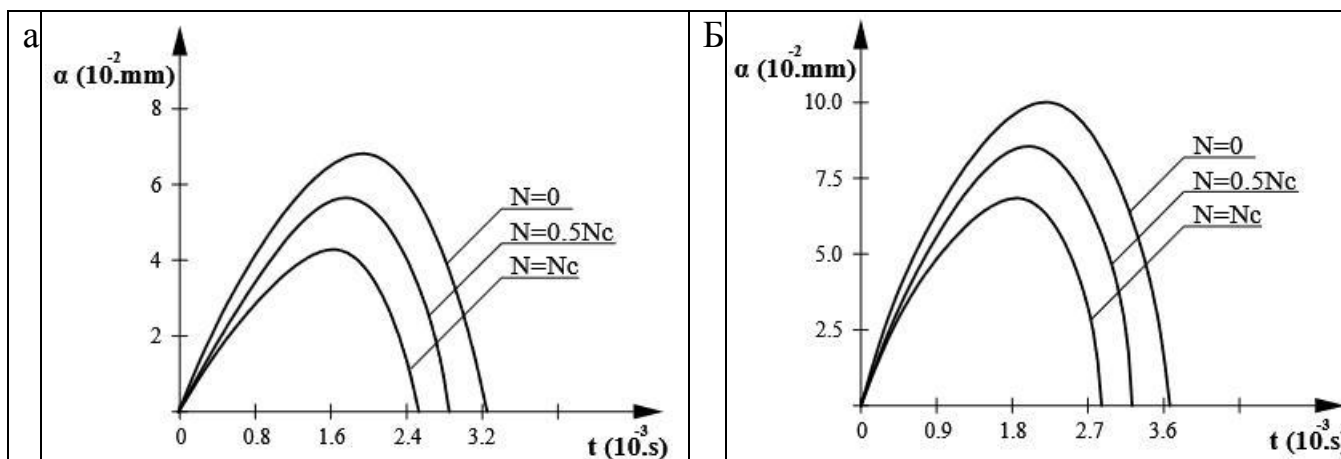


Рисунок 5. Зависимость локального смятия от времени в случае  $\gamma=0.5$ , начальной скорости удара  $V_0=10\text{м/с}$ , радиуса шара  $R=2\text{см}$  и толщины предварительно напряженной пластинки  $h$ : а) 8мм, б) 12мм для различных значений сжимающей силы

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника  $\gamma_2$  и среды  $\gamma_1$  имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

2. Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде пластинки.

3. Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина, уравнения динамического поведения которой учитывают инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Вязкоупругие свойства пластинки вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта используется модель стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности пластинки.

4. Решена задача об ударе жесткого шара по предварительно напряженной вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина. Показано, что при определенной критической величине сжимающей силы скорость нестационарной волны сдвига равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта, которое, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и

распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри контактной области, что может привести к разрушению контактной области.

5. Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой пластинкой Уфлянда-Миндлина с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности, а также с учетом и без учета предварительного напряжения. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений контактной силы и локального смятия материалов пластинки и шара в зоне контакта, а также к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

### Публикации автора

#### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. **Phan Thanh Trung**, Analysis of the viscoelastic sphere impact against a viscoelastic Uflyand-Mindlin plate considering the extension of its middle surface / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // Shock and Vibration. - 2017. - V. 2017, Article ID 5652023, 12 p. (*проиндексировано в базах данных Web of Science и Scopus*)

2. **Phan Thanh Trung**, Impact of a viscoelastic sphere against an elastic Kirchhoff-Love plate embedded into a fractional derivative Kelvin-Voigt medium / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // International Journal of Mechanics. - 2017. - V. 11. - P. 58-63. (*проиндексировано в базе данных Scopus*)

3. **Phan Thanh Trung**, Low-velocity impact response of a pre-stressed isotropic Uflyand-Mindlin plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // ITM Web of Conferences. - 2017. - V. 9, Article ID 03005, 5 p. (*проиндексировано в базе данных Web of Science*)

#### Статьи и материалы конференций

4. **Phan Thanh Trung**, Application of the fractional derivative Kelvin-Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff-Love plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // WSEAS Transactions on Mathematics. - 2016. - V. 15. - P. 498-501.

5. **Phan Thanh Trung**, Low-velocity impact response of a pre-stressed isotropic Uflyand-Mindlin plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // *CD Abstracts of the 2016 International Conference Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering (AMCSE), Rome, Italy, 5-7 November, 2016, 5 pages.*

6. **Phan Thanh Trung**, Application of the fractional derivative Kelvin-Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff-Love plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // *CD Abstracts of the 7<sup>th</sup> International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES'16, Dubrovnik, Croatia, 28-30 September, 2016, 4 pages.*

Подписано в печать 26.04.2018 г. Формат 60x84 1/16

Бумага писчая. Усл.-печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 120 экз. Заказ № 84

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий ФГБОУ ВО «ВГТУ». 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября,84