

Чернышов Николай Юрьевич

**СИНХРОНИЗАЦИЯ РЕАКТИВНО СВЯЗАННЫХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ**

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Саратов – 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на кафедре динамических систем на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент
Тюрюкина Людмила Владимировна

Официальные оппоненты: **Купцов Павел Владимирович**, доктор физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., кафедра «Приборостроение», профессор.

Казаков Алексей Олегович, кандидат физико-математических наук, НИУ «Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде, кафедра фундаментальной математики, доцент, лаборатория топологических методов в динамике старший научный сотрудник; Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, кафедра теории управления и динамики систем, старший преподаватель.

Ведущая организация: Юго-Западный государственный университет, г. Курск

Защита состоится 15 февраля 2018 года в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Автореферат разослан «___»_____ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Аникин Валерий Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике. Описание различных систем в терминах взаимодействующих осцилляторов используется в радиофизике, электронике, лазерной физике, биофизике, химии. Осциллятор Ван дер Поля является одной из базовых моделей радиофизики и теории колебаний¹. Соответственно, возникает задача описания связанных осцилляторов такого типа. Благодаря универсальности осциллятора Ван дер Поля задачи о связанных осцилляторах и их редуцированных вариантах в виде укороченных уравнений или фазовых моделей появляются в микроволновой электронике², лазерной физике³, динамике контактов Джозефсона⁴, биофизике⁵, робототехнике⁶ и других областях.

При описании связанных осцилляторов важным является вопрос о том как именно они связаны. Один из возможных вариантов – это диссипативная связь, которая в традиционной радиофизической интерпретации⁷ организована через резистор. В этом случае в уравнения входит разность обобщенных скоростей осцилляторов. Другая возможность – это реактивная связь, которая осуществляется через индуктивность. В уравнения в этом случае входит разность самих значений переменных. Несмотря на общность постановки задачи, эти два случая связи существенно отличаются друг от друга. В качестве одного из актуальных примеров реактивной связи можно указать задачу об ионных ловушках⁸. В таких ловушках ионы «заперты» с помощью переменных СВЧ полей, ограничивающих радиальные колебания ионов и постоянного электрического поля, ограничивающего осевое движение. При использовании сегментированной ловушки с множеством электродов возникает цепочка ионов,

¹ Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 494 с

² Sze H., Price D., Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircators // J. Appl. Phys. 1990, vol. 67, № 5, p. 2278-2282.

³ Rampaloni E., Lapucci A. Locking-range analysis for three coupled lasers // Opt. Lett., 1993, vol. 18, p. 1881-1883.

⁴ Valkering T.P., Hooijer C.L.A., Kroon M.F. Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // Physica D, 2000, vol. 135, № 1, p. 137-153.

⁵ Dutra M.S., de PinaFilho A.C., Romano V.F.. Modeling of a bipedal locomotor using coupled nonlinear oscillators of Van der Pol // Biol. Cybern., 2003, vol. 88, p. 286–292.

⁶ Kobayashi J., Ohkawa . Force control system with nonlinear oscillator for manipulator in oscillatory motion // Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics December 15 -18, 2007, Sanya, China.

⁷ Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360 с.

⁸ Lee T. E., Cross M. C. Pattern formation with trapped ions // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, p. 143001.

расположенных в своих потенциальных ямах. Число элементов в цепочке может быть различным. При этом нелинейность обеспечивает ангармоничность колебаний ионов в ловушке. Внешнее лазерное излучение в зависимости от его частоты может приводить как к диссипации, так и к «раскачиванию» ионов. Ионы в цепочке связаны через кулоновское отталкивание, так что связь является чисто консервативной. В случае двух или трех ионов получается система укороченных уравнений с реактивной связью. Для большого числа элементов возникает комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау с реактивной связью. Авторы отмечают, что подобные системы могут представлять интерес для реализации элементов квантовых компьютеров, а также, что подобная модель применима к описанию массива наноразмерных резонаторов¹.

Задача о двух осцилляторах с разными типами связи детально исследована². Особенность реактивной связи состоит в необходимости учета членов второго порядка по константе связи – в первом порядке вклад каждого осциллятора взаимно уничтожается³. Соответственно, появляются новые моменты, отсутствующие в фазовом приближении для диссипативной связи. Во-первых, для реактивной связи характерна специфическая форма языка синхронизации в виде сужающегося по корневому закону острия. Во-вторых – это появление бистабильности, когда возможны как синфазный, так и противофазные устойчивые режимы синхронизации. Задачи о динамике большого числа осцилляторов, а также неавтономных моделей из нескольких реактивно связанных осцилляторов изучены в гораздо меньшей степени по сравнению со случаем диссипативной связи. Можно указать на работы⁴, где рассмотрена задача о внешнем воздействии на систему двух реактивно связанных осцилляторов. Однако фазовая модель не построена, не исследован наиболее интересный случай малых амплитуд сигнала, не выполнено обобщение на большее число осцилляторов. На необходимость учета квадратичных эффектов по параметру связи указывалось в работах⁵, однако исследование зависимости картины от величины параметра связи не выполнено, и, кроме того, авторы ограничились случаем совпадающих собственных частот осцилляторов и рассматривают большие массивы осцилляторов. Существенной для классификации режимов связанных

¹ Отметим, что переход к наноразмерным системам приводит к моделям квантовых осцилляторов Ван дер Поля.

² Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360 с. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 494 с. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009, 437 p.

³ Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics, 1980, vol. 15, p. 387-399. Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D, 2004, vol. 189, № 1-2, p. 8-30. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D, 2009, vol. 238, No 14, p. 1203-1215.

⁴ Анищенко В.С., Николаев С.М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика, 2008, том 4, №1, с. 39-56. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Chaos, 2008, vol. 18, p. 037123.

⁵ Rosenau P., Pikovsky A. Phase Compactons in Chains of Dispersively Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 94, p. 174102. Pikovsky A., Rosenau P. Phase compactons // Physica D, 2006, vol. 218, p. 56–69.

осцилляторов является работа¹. Отметим также достаточно большое число недавних публикаций по диссипативно связанным системам, в частности², включая случай «активной» связи, т.е. отрицательных значений коэффициента связи³. Однако столь же широкое исследование для случая реактивной связи отсутствует.

Цель и задачи работы

Целью настоящей работы является установление особенностей колебательных режимов разного типа в случае низкоразмерного ансамбля реактивно связанных осцилляторов Ван дер Поля. Существенным моментом каждого исследования является переход к уравнениям динамики фаз осцилляторов.

Решаются следующие задачи по исследованию динамики:

- 1) возбуждаемых внешним сигналом двух реактивно связанных осцилляторов Ван дер Поля;
- 2) трех реактивно связанных в цепочку осцилляторов;
- 3) возбуждаемых внешним сигналом трех связанных в цепочку осцилляторов;
- 4) трех реактивно связанных в кольцо осцилляторов.

Научная новизна

1. Получены внутренне согласованные фазовые уравнения для задач о воздействии внешнего сигнала на два и три реактивно связанных осциллятора, а также для трех связанных в цепочку и кольцо осцилляторов.

2. Проведен бифуркационный анализ четырех полученных фазовых моделей.

3. С помощью карт ляпуновских показателей для моделей связанных фазовых осцилляторов исследовано устройство пространства параметров собственных частот осцилляторов, а также плоскости параметров частота

¹ Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths J. Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Phys. Rev.*, 2009, vol. 79, p. 046209.

² Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, p. 30003. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, с. 237–252. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. On the road towards multidimensional tori // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, No 6, p. 2371–2376. Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*, 2013, vol. 244, No 1, p. 36–49.

³ Astakhov S., Fujiwara N., Gulay A., Tsukamoto N., Kurths J. Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, p. 032908. Hong H., Strogatz S.H. Kuramoto Model of Coupled Oscillators with Positive and Negative Coupling Parameters: An Example of Conformist and Contrarian Oscillators // *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, p. 054102.

воздействия – амплитуда воздействию для неавтономных систем. Указаны области параметров периодических и квазипериодических режимов с разным числом несоизмеримых частот. Обсуждены отличия случаев цепочки и кольца из трех реактивно связанных осцилляторов.

4. Выявлено устройство пространства параметров с точки зрения разных типов двухчастотных режимов, для чего применен метод «карт торов».

5. Проведены исследования для исходных уравнений и выполнено сопоставление с фазовой моделью с точки зрения устройства пространства параметров. Выявлены значения параметров и области их изменения, когда фазовая модель эффективна, а также определенные отличия, возникающие при увеличении связи.

Методология и методы исследования

В настоящей работе используются аналитические методы получения укороченных и фазовых уравнений; аналитический бифуркационный анализ; численный бифуркационный анализ с помощью программы MatCont. Используется построение фазовых портретов, метод карт ляпуновских показателей, визуализирующий периодические режимы, квазипериодические режимы с разным числом несоизмеримых частот и хаос; метод «карт торов», позволяющий выявлять и классифицировать различные типы двухчастотных квазипериодических режимов.

Теоретическая и практическая значимость работы

Полученные результаты дополняют разделы теории колебаний, относящиеся к задачам о динамике автономных и неавтономных ансамблей, состоящих из нескольких осцилляторов Ван дер Поля. При этом выполненное исследование сочетает как аналитические, так и численные методы. В силу универсальности использованной базовой модели, полученные результаты могут быть использованы для разнообразных конкретных задач, среди которых можно указать ионные ловушки, связанные устройства микроволновой электроники, например, связанные виркаторы, различные генераторы ритмов в робототехнике и т.д.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения и результаты.

1. Фазовые модели систем двух и трех возбуждаемых внешним сигналом осцилляторов, а также соединенных в цепочку или кольцо трех автоколебательных элементов в случае реактивной связи оказываются эффективными и качественно правильно передают характер реализующихся

режимов для значений нормированного на управляющий параметр коэффициента связи до величин порядка 0.2-0.3.

2. Области квазипериодических колебаний в двумерных фазовых моделях с реактивной связью устроены как системы языков встроенные в область трехчастотных колебаний. Реактивная связь допускает частичный захват фазы осцилляторов без непосредственной связи между собой, а также, в отличие от диссипативно связанных осцилляторов, захват внешней гармонической силой осциллятора, на который это воздействие не оказывается.

3. В трехмерной фазовой модели трех реактивно связанных осцилляторов во внешнем поле наблюдаются также четырехчастотные режимы, тогда как трехчастотные встроены в них в виде языков. Перекрывание языков трехчастотных режимов при повышении амплитуды внешнего воздействия в этой системе приводит к возникновению хаотических режимов.

4. Для возбуждаемых внешним сигналом реактивно связанных осцилляторов Ван дер Поля и автономных систем в виде цепочки и кольца из трех элементов картина бифуркаций существенно отличаются от той, что имеет место в случае диссипативной связи. В фазовой модели с реактивной связью типичной оказывается бифуркация Андронова-Хопфа, приводящая к специфической частичной синхронизации всех осцилляторов, и отсутствуют характерные для случая диссипативной связи вырожденные седло-узловые бифуркации.

Достоверность результатов

Достоверность результатов работы определяется использованием в расчетах известных, апробированных численных методов, соответствием качественного описания результатам численного моделирования. А также соответствием результатов аналитических и численных методов в области эффективности аналитических моделей.

Личный вклад соискателя

Постановка задач и обсуждение результатов в главах 1-4 проводились совместно с научным руководителем и соавторами совместных работ. Аналитический бифуркационный анализ в первой главе выполнен совместно с Л.В. Тюрюкиной, а во второй главе – лично соискателем. Численный бифуркационный анализ полностью выполнен автором с использованием пакета MatCont. Анализ результатов численной симуляции выполнен совместно с научным руководителем.

Публикации и апробация. Основные результаты диссертационной работы были представлены в виде докладов на X международной школе "Хаотические автоколебания и образование структур" (Саратов, 2013),

Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород, 2013 г.), Международной конференции «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» (Саратов, 2014), на IV, VI, VII и VIII Всероссийских конференциях молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2009, 2011 - 2013), школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2008–2012).

Частично результаты диссертации получены в процессе выполнения работ, поддержанных грантом Президента РФ поддержки Ведущей научной школы России "Фундаментальная нелинейная динамика и ее приложения" и проекта РФФИ № 12-02-31465.

По результатам диссертации опубликовано 12 работ, из них 6 статей [1-6] в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, и 6 тезисов докладов [7-12].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы и содержит 184 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы исследования, цель работы, научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** исследуется система двух реактивно связанных осцилляторов Ван дер Поля, на один из которых производится внешнее гармоническое воздействие:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\lambda - x^2) \dot{x} + (1 - \frac{\Delta}{2})x + \varepsilon(x - y) &= A \sin(ft), \\ \ddot{y} + (\lambda - y^2) \dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{2})y + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, y – динамические переменные; λ – управляющий параметр, отвечающий за бифуркацию Андронова-Хопфа в автономных невозбуждаемых несвязанных осцилляторах; Δ – расстройка осцилляторов по собственной частоте колебаний, причем центральная частота выбрана единичной; ε – параметр реактивной связи между осцилляторами; A и f – амплитуда и частота внешнего воздействия.

В параграфе 1.1 диссертации в рамках традиционных предположений уравнения (1.1) методом медленно меняющихся амплитуд приводятся к комплексным укороченным уравнениям. Затем, в предположении о слабом возмущении автономных орбит получены соответствующие фазовые уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= -\frac{\Delta}{2} - 2\Omega + \varepsilon(1 - \cos \theta) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(2\theta) - \frac{A}{2} \sin(\varphi_1), \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\Delta}{2} - 2\Omega + \varepsilon(1 - \cos \theta) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(2\theta).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь φ_1, φ_2 – фазы осцилляторов, $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ – относительная фаза, Ω – отстройка частоты внешнего воздействия от центральной, т.е. $\Omega = 1 + f$. Отметим, что параметр λ при этом устраняется перенормировкой. Существенная особенность уравнений (1.2) состоит в том, что учитываются эффекты второго порядка по величине связи, что принципиально в случае реактивной связи (в отличие от диссипативной).

Состояния равновесия системы (1.2) отвечают режимам полной синхронизации осцилляторов. В параграфе 1.2 аналитически найдены и проанализированы линии седло-узловых бифуркаций на плоскости частота-амплитуда внешнего воздействия, что отвечает одному из возможных сценариев разрушения полной синхронизации. При этом выделяются два качественно разных случая: когда автономные осцилляторы демонстрируют режим биений, и когда они захвачены, соответственно, $|\Delta| > \varepsilon^2$ и $|\Delta| < \varepsilon^2$. Во втором случае область синхронизации имеет два острия, отвечающие захвату внешним сигналом синфазной и противофазной мод автономной системы.

Это исследование в параграфе 1.3 дополнено численным бифуркационным анализом, результаты которого представлены на рис.1. Этот анализ выявляет несколько бифуркационных механизмов разрушения синхронизации. Основные механизмы разрушения синхронизации состоят: в слиянии устойчивого и неустойчивого равновесий, субкритической бифуркации Андронова-Хопфа, в результате которой исчезает устойчивое равновесие, и в возможности седло-узловой бифуркации устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Все механизмы проиллюстрированы с помощью фазовых портретов. Картина бифуркаций включает также бифуркации коразмерности два: точки Богданова-Такенса, обобщенной бифуркации Андронова-Хопфа, вырожденные точки сборки.

Особенность системы состоит в возможности фазовой бистабильности, что проявляется в сосуществовании разных типов устойчивых режимов (равновесий, предельных циклов, инвариантных кривых), что также проиллюстрировано соответствующими фазовыми портретами.

В разделе 1.3 система фазовых уравнений (1.2) также была исследована численно с помощью карт показателей Ляпунова. Для их построения в каждой точке плоскости параметров (Ω, A) вычислялись оба ляпуновских показателя системы (1.2) и затем эта плоскость окрашивалась в различные цвета так, чтобы визуализировать различные режимы колебаний: полной синхронизации (показатели отрицательные), двухчастотной квазипериодичности (один показатель отрицательный, один – нулевой) и трехчастотной квазипериодичности (два нулевых показателя). Такие карты выявляют также

сложное устройство областей трехчастотной квазипериодичности, в которые встроены языки двухчастотных режимов более высокого порядка.

Более детально тип двухчастотных языков может быть описан с помощью карт торов, для которых классификация режимов осуществляется по числу существенных пересечений инвариантной кривой сторон фазового квадрата со сторонами 2π на плоскости относительных фаз осцилляторов.

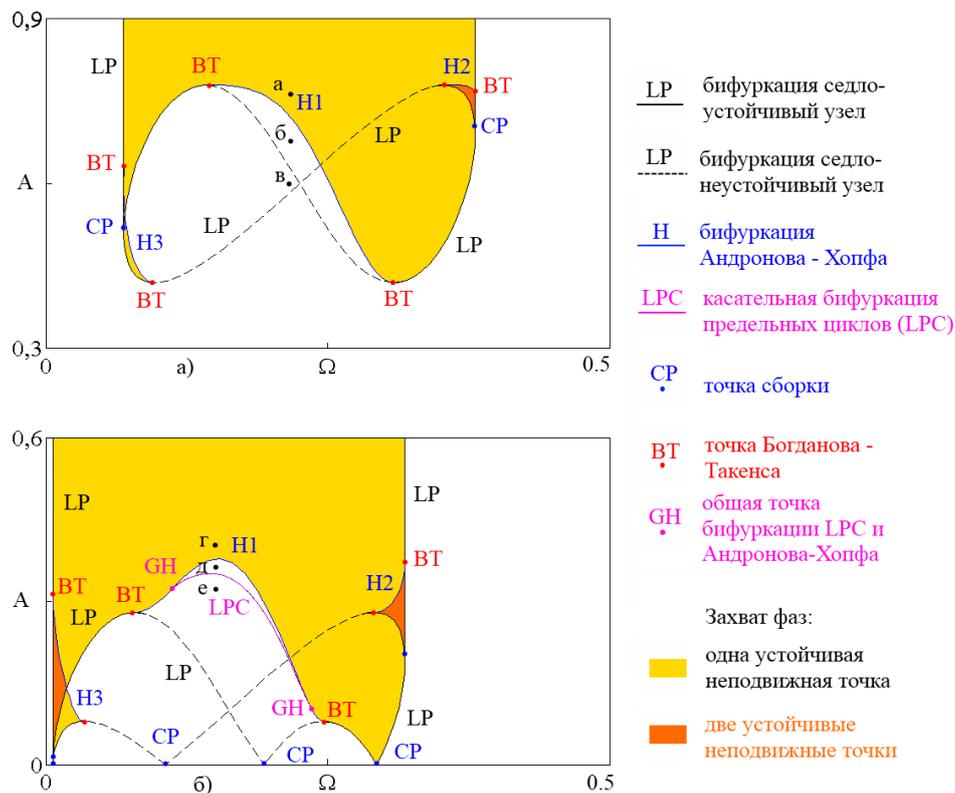


Рис. 1. Бифуркационное устройство плоскости параметров отстройка частота внешнего воздействия от средней частоты осцилляторов Ω – амплитуда внешнего воздействия A для уравнений (1.2); а) $\Delta=0.3$, $\varepsilon=0.3$, б) $\Delta=0.05$, $\varepsilon=0.3$. Буквы соответствуют фазовым портретам, представленным в диссертации.

В параграфе 1.4 диссертации проводится сопоставление устройства плоскости частота-амплитуда внешнего воздействия (Ω , A) исходной системы (1.1) с фазовой моделью (1.2) с помощью метода карт показателей Ляпунова. Показано, что при выбранных параметрах фазовая модель хорошо передает особенности устройства пространства параметров исходной системы, что выражается в высокой степени сходства пространства (Ω , A) фазовой модели и (f , A) исходной системы. Для исходной системы, однако, дополнительно появляются области хаоса, рис.2.

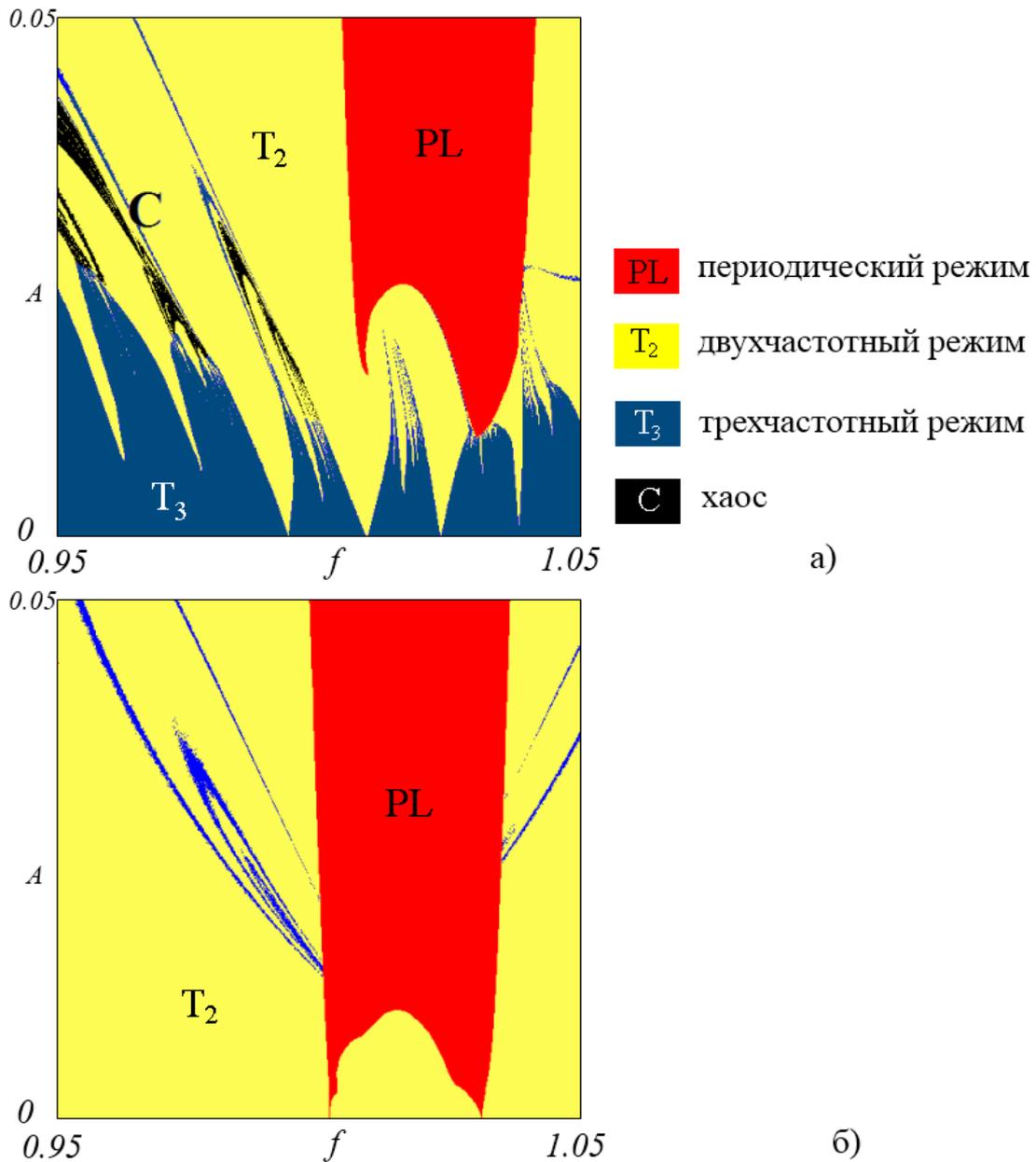


Рис. 2 Карты ляпуновских показателей системы (1.1); а) $\lambda=0.1$, $\Delta = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, б) $\lambda=0.1$, $\Delta=0.005$, $\varepsilon = 0.03$.

Во **второй главе** рассматривается система трех осцилляторов Ван дер Поля реактивно связанных в цепочку:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(2y - x - z) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(z - y) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta_{1,2}$ – отстройки частоты второго и третьего осцилляторов от частоты первого, которая принята равной единице, ε – параметр связи.

В параграфе 2.1 с помощью метода медленно меняющихся амплитуд получены корректные фазовые уравнения с точностью до необходимых в этом случае квадратичных членов по величине связи:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \Delta_1 + 2\varepsilon^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \\
&- \varepsilon^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - \varepsilon^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) - \varepsilon \cos(\theta_2) + \varepsilon, \\
\dot{\theta}_2 &= -\Delta_1 + \Delta_2 + 2\varepsilon^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - \\
&- \varepsilon^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \varepsilon^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) - \varepsilon \cos(\theta_1) + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\theta_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_3$ – относительные фазы осцилляторов.

Для сопоставления со случаем диссипативной связи в параграфе 2.2 дано рассмотрение случая цепочки из трех диссипативно связанных осцилляторов. Для диссипативной связи в фазовой модели разрушение полной синхронизации на плоскости частотных расстройок (Δ_1, Δ_2) происходит на отрезках четырех прямых линий, которым отвечают вырожденные седло-узловые бифуркации, когда одновременно сливаются устойчивое и неустойчивое равновесие с двумя седлами. При переходе к исходной системе эта картина существенно модифицируется, теперь возможны как классические линии седло-узловых бифуркаций, так и бифуркации Неймарка-Сакера.

Далее обсуждаются особенности случая реактивной связи. В параграфе 2.3 обсуждаются свойства симметрии фазовых уравнений реактивно связанных осцилляторов (2.2). Эта симметрия связана с резонансными условиями для парциальных частот, в результате чего плоскость параметров (Δ_1, Δ_2) зеркально симметрична относительно линий $\Delta_2=0$ и $\Delta_2=2(\Delta_1-\varepsilon)$.

В параграфе 2.4 плоскость параметров реактивно связанных фазовых осцилляторов (2.2) исследуется с помощью численного бифуркационного анализа. Отличие от случая диссипативной связи состоит в том, что вырожденные линии седло-узловых бифуркаций расщепляется. Также оказывается возможной бифуркация Андронова-Хопфа и точки коразмерности два, рис.3. Еще одно отличие от случая диссипативной связи состоит в том, что вид конфигурации бифуркационных линий теперь зависит от параметра связи. Представлены результаты для $\varepsilon=0.2, 0.3, 0.6$. Установлено, что область фазовой синхронизации имеет форму четырех лепестков с указанными свойствами симметрии. Каждый из лепестков отвечает определенному типу синхронизации: синфазному, противофазному, смешанному. В поведении системы также проявляется бистабильность, выражающаяся в том, что в фазовом пространстве могут сосуществовать два синхронных режима отличающихся разностью фаз между осцилляторами.

В параграфе 2.5 плоскость частотных расстройок (Δ_1, Δ_2) рассмотрена с помощью карт показателей Ляпунова и карт торов. Эти методы позволяют выявить тонкую организацию плоскости параметров, включающую систему различных языков двухчастотных режимов, погруженных в область трехчастотных режимов.

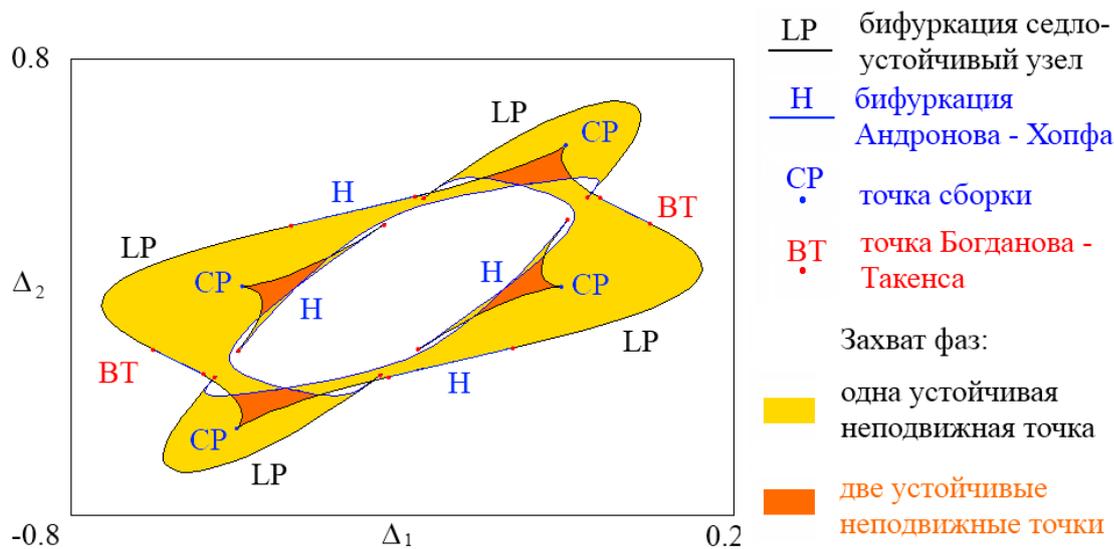


Рис. 3. Бифуркационные линии системы (2.2) цепочки трех реактивно связанных фазовых осцилляторов, $\varepsilon=0.3$

В параграфе 2.6 проводится сравнение численного бифуркационного анализа исходной системы трех реактивно связанных осцилляторов (2.1) с аналогичными результатами фазовой модели (2.2). Рассмотрены различные значения параметра связи и показано, что фазовые уравнения (2.2) хорошо описывают систему (2.1) в случае значений параметра связи $\varepsilon < 0.4$. В случае $\varepsilon=0.6$ два лепестка синхронизации перекрываются, а граница области синхронизации представляется бифуркацией Неймарка-Сакера, соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа в фазовых уравнениях, как показано на рисунке 4.

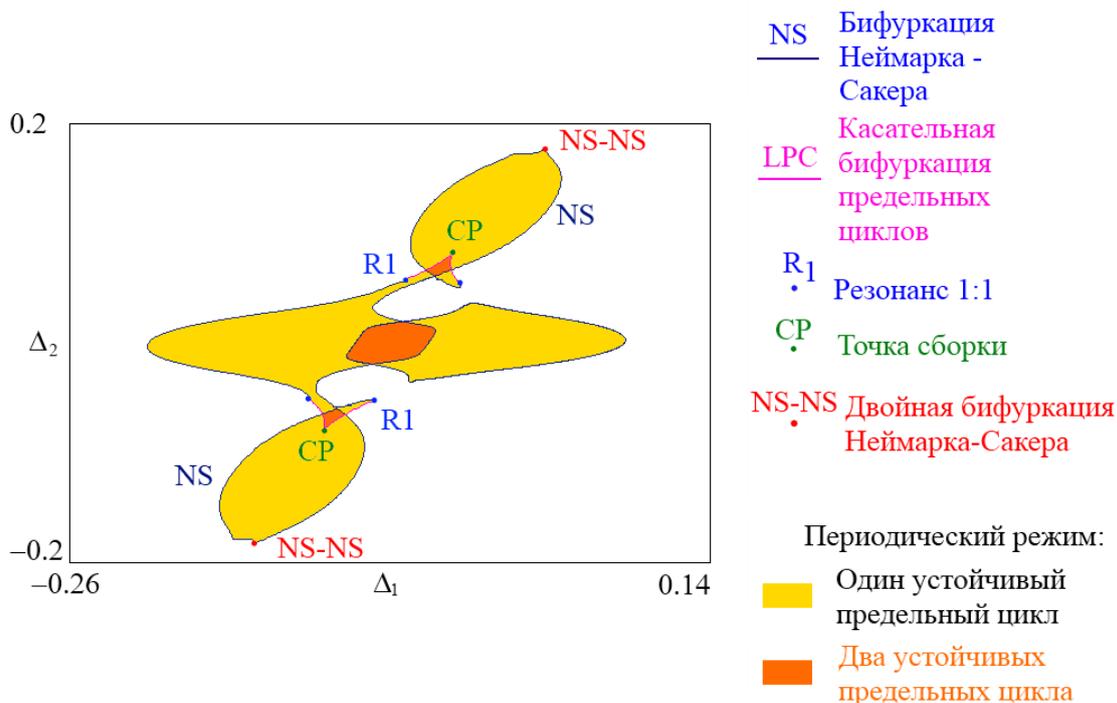


Рис. 4. Бифуркационные линии цепочки трех реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (2.1), $\lambda=0.1$, $\varepsilon=0.06$

Для исходной системы картина зависит также и от управляющего параметра λ , отвечающего за отрицательное трение (так на рис.4 $\lambda=0.1$). При возрастании управляющего параметра λ устройство области полной синхронизации существенно усложняется, на плоскости частотных расстройок осцилляторов появляются языки периодических режимов более высокого порядка, возникает структура резонансной паутины Арнольда, а также области хаоса, невозможные в фазовой модели.

В третьей главе рассматривается система реактивно связанных осцилляторов во внешнем поле, описываемая уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= A \cos(ft), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(2y - x - z) &= A \cos(ft), \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(z - y) &= A \cos(ft).\end{aligned}\tag{3.1}$$

В параграфе 3.1 получено в необходимом приближении соответствующее фазовое уравнение, аналогично тому, как это сделано в первой и второй главах.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1(t) &= -\frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_1) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) - \\ &- \frac{1}{2} A \cos(\phi_1) + \Delta_1 - 2\Omega - \varepsilon^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_1 - \phi_2) - \varepsilon \cos(\phi_1 - \phi_2) + \varepsilon, \\ \dot{\phi}_2(t) &= \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_1) \cos(\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) - \\ &- \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_2) \cos(\phi_3 - \phi_2) + \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_3) \cos(\phi_3 - \phi_2) - \\ &- \frac{1}{2} A \cos(\phi_2) + \Delta_2 - 2\Omega + \varepsilon^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\phi_3 - \phi_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \\ &+ \varepsilon^2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_2 - \phi_3) - \varepsilon \cos(\phi_1 - \phi_2) - \varepsilon \cos(\phi_2 - \phi_3) + 2\varepsilon, \\ \dot{\phi}_3(t) &= \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_2) \cos(\phi_3 - \phi_2) - \frac{1}{4} A \varepsilon \sin(\phi_3) \cos(\phi_3 - \phi_2) - \\ &- \frac{1}{2} A \cos(\phi_3) + \Delta_3 - 2\Omega - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos(\phi_3 - \phi_2) + \\ &+ \varepsilon^2 \sin(\phi_2 - \phi_3) \cos(\phi_3 - \phi_2) - \varepsilon \cos(\phi_1 - \phi_2) + \varepsilon.\end{aligned}\tag{3.2}$$

В параграфе 3.2 фазовые уравнения (3.2) исследуются с помощью карт показателей Ляпунова. При этом, в зависимости от начальных условий в фазовом пространстве могут сосуществовать синхронные и двухчастотные квазипериодические режимы, или квазипериодические режимы с разным

числом несоизмеримых частот, а также двухчастотные квазипериодические режимы и хаос.

Внешнее воздействие может индуцировать возникновение также четырехчастотных типов колебаний в ситуации, когда при отсутствии внешнего воздействия наблюдаются двухчастотные.

В параграфе 3.3 диссертации построены карты торов и показано, что в фазовом пространстве могут сосуществовать двухчастотные квазипериодические режимы с разными числами вращения, а также что образование кластеров осцилляторов зависит от выбора начальных условий.

В параграфе 3.4 результаты ляпуновского анализа фазовых уравнений (3.2) сравниваются с ляпуновским анализом исходных уравнений цепочки (3.1).

В **четвертой главе** исследуется кольцо трех реактивно связанных осцилляторов. В параграфе 4.1 рассматривается переход с помощью метода медленно меняющихся амплитуд от исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(2x - y - z) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \varepsilon(2y - x - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \varepsilon(2z - y - x) &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

к фазовым уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \Delta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(\theta_1) - \varepsilon^2 \sin(2\theta_1) - \frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \\ &- \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_2) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta_2) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \\ &- \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(2(\theta_1 + \theta_2)) - \frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) + \varepsilon \cos(\theta_2) - \varepsilon \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta_1) + \frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(\theta_2) - \varepsilon^2 \sin(2\theta_2) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \\ &- \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(2(\theta_1 + \theta_2)) - \frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) - \varepsilon \cos(\theta_1) + \varepsilon \cos(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

В параграфе 4.2 представлен численный бифуркационный анализ пространства частотных расстройек. Область синхронизации в пространстве (Δ_1, Δ_2) , изображенная на рисунке 5, представлена двумя листами, один из которых близок к треугольнику, а второй имеет форму трех лепестков. Первый отвечает синфазной синхронизации, тогда как три лепестка второго отвечают синфазной синхронизации двух осцилляторов и противофазной третьего. Лист с тремя лепестками содержит область самопересечения и связанную с этим мультистабильность.

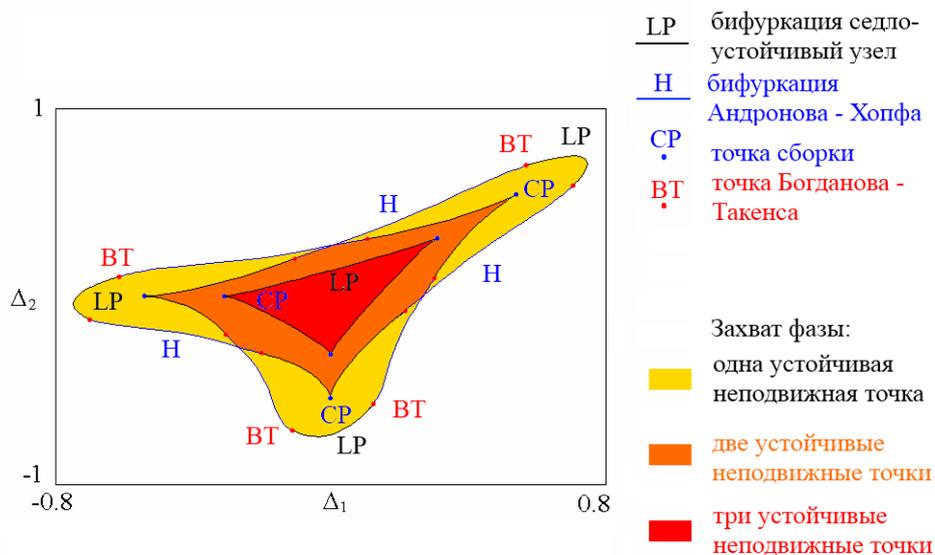


Рис. 5. Бифуркационные линии системы фазовых уравнений кольца реактивно связанных осцилляторов построенные, $\varepsilon=0.3$

В параграфе 4.3 производится сравнение пространства параметров фазовых уравнений 4.2 с исходными дифференциальными уравнениями кольца трех реактивно связанных осцилляторов.

Диссертация завершается **заключением** и библиографическим списком, состоящим из 72 позиций.

Основные результаты и выводы

1. Для задач о внешнем возбуждении двух осцилляторов Ван дер Поля внешним сигналом, динамики цепочки и кольца из трех осцилляторов, а также цепочки из трех осцилляторов во внешнем поле аналитически получены фазовые уравнения, учитывающие необходимые при описании этого типа связи квадратичные по ее величине члены. Фазовая модель оказывается эффективной в качественном и в значительной степени в количественном плане даже для достаточно большого значения нормированного параметра связи ε .

2. Картина режимов и бифуркационные сценарии их изменения для реактивной связи существенно отличаются от случая диссипативной связи и существенно сложнее. Так для цепочки из трех осцилляторов возможны режимы полной синфазной и противофазной синхронизации, а также два смешанных типа колебаний. Типичной для всех задач становится возможность бифуркации Андронова-Хопфа в фазовых уравнениях, что приводит к новому по сравнению с диссипативной связью механизму частичной синхронизации всех осцилляторов. В исходной системе ей отвечает бифуркация Неймарка-Сакера. Кроме того типичными оказываются бифуркации коразмерности два, такие как точки сборки, Богданова-Такенса (резонанса 1:1 в исходной системе) и др. Отличием исходной системы от фазовых уравнений при больших

значениях параметра связи ε является возникновение двойной бифуркации Неймарка-Сакера коразмерности 2.

3. Для реактивной связи радикально возрастают возможности разных типов мультистабильности. Могут сосуществовать как режимы полной, так и отвечающие квазипериодическим колебаниям частичной синхронизации различных типов и в разных сочетаниях. В случае системы из трех осцилляторов во внешнем поле также могут сосуществовать двух- и трехчастотные квазипериодические режимы, а также хаотические и двухчастотные режимы колебаний.

4. Случаи объединения осцилляторов в цепочку или кольцо в случае реактивной связи приводят к заметно разному устройству плоскости частотных расстроек осцилляторов с точки зрения конфигурации бифуркационных линий и точек, а также устройства карт ляпуновских показателей. Например, пространство частотных отстроек цепочки осцилляторов зеркально симметрично по двум осям, тогда как пространство частотных отстроек кольца осцилляторов обладает «трехлучевой» симметрией. Для исходной системы симметрии нарушаются тем сильнее, чем хуже работает фазовая модель.

5. В фазовых уравнениях системы двух реактивно связанных осцилляторов с внешним воздействием при малом значении параметра связи $\varepsilon=0.05$ продемонстрирована бифуркация коразмерности два: общая точка бифуркации Андронова-Хопфа и касательной бифуркации предельных циклов. В фазовых уравнениях кольца реактивно связанных осцилляторов была обнаружена бифуркация коразмерности три, связанная с взаимодействием линии седло-узловой бифуркации с неустойчивым узлом со точкой сборки двух седел и устойчивого узла.

Публикации по теме диссертации

1. Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, №1. С. 81-90.
2. Кузнецов А.П., Чернышов Н.Ю., Тюрюкина Л.В. Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, №1. С. 11-25.
3. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация в фазовой модели трех связанных лазеров. // Квантовая электроника. 2014. Т. 44, № 1. С.7-22.
4. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация и многочастотные колебания в низкоразмерных ансамблях осцилляторов. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, №1. С. 27-54.
5. Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Sataev I.R., Chernyshov N.Yu. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators //

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. Vol. 19, no 4. P. 1203–1212.

6. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Chernyshov N.Yu., Sedova Yu.V. Oscillations and Synchronization in a System of Three Reactively Coupled Oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no 1. P. 1650010.
7. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов Ван дер Поля // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 13-15 сентября 2011 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. С. 172-173.
8. Чернышов Н.Ю., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация трех реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 24-26 сентября 2012 г. Саратов : Изд-во Сара. ун-та, 2012. С. 171-172.
9. Чернышов Н.Ю., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.. Синхронизация и динамика в системе трех реактивно связанных осцилляторов // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 3-5 сентября 2013 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С. 256-257.
10. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю. Синхронизация и динамика трех реактивно связанных осцилляторов : Материалы X международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур", Саратов, 7-12 октября 2013 г. Саратов, 2013. С.117.
11. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Chernyshov N. Yu. Synchronization and dynamics of three reactively coupled oscillators // International Conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov. Nizhni Novgorod, Russia, July 1-5, 2013 : Book of Abstracts. Nizhny Novgorod, 2013. P.72-73.
12. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Chernyschov N.Yu. Features of the dynamics of oscillators with reactive coupling : Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» 19-23 May 2014. Saratov: Saratov State University, 2014, P. 31-32.