

На правах рукописи



Франус Дмитрий Валерьевич

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ
МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА В
ЗАДАЧАХ ОФТАЛЬМОЛОГИИ**

Специальность 01.02.08 —
«Биомеханика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2017

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Бауэр Светлана Михайловна

Официальные оппоненты: **Бегун Пётр Иосифович**,
доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)", профессор кафедры прикладной механики и инженерной графики

Няшин Юрий Иванович, доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пермский национальный исследовательский политехнический университет", профессор кафедры теоретической механики и биомеханики

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого"

Защита состоится 15 сентября 2017 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 на базе ФГБОУ ВО "СГУ имени Н.Г. Чернышевского" по адресу: г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 9 учебны корпус, 018 аудитория. С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке СГУ.

Автореферат разослан июля 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.243.10, к.ф.-м.н.



Сафонов Роман Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертационной работы. Последние годы уделяется всё большее внимание созданию математических конечно-элементных моделей различных процессов в биологических системах. Такое моделирование позволяет лучше понять причины и механизмы развития различных явлений в биологических структурах человека, помогает в разработке новых методик лечения различных заболеваний и аномалий.

Глаз человека представляет собой сложную биомеханическую структуру. Внешняя оболочка глаза – фиброзная или корнеосклеральная оболочка – состоит из роговицы и склеры. Склера занимает более 90% всей фиброзной оболочки глаза человека, поэтому в некоторых задачах роговица не включается в модель, а оболочка глаза рассматривается как сферическая. Однако в ряде случаев, когда важно понять, например, как изменяется напряженно-деформированное состояние внешней оболочки глаза при измерении внутриглазного давления (ВГД) или после рефракционных операций, меняющих толщину или кривизну роговицы, необходимо учесть и свойства роговицы.

Цель работы. Исследование влияния различных параметров корнеосклеральной оболочки глаза на её напряжённно-деформированное состояние при измерении внутриглазного давления, после рефракционной операции, а также после введения интравитреальной инъекции. Более конкретно задачи работы можно сформулировать следующим образом:

1. Анализ влияния параметров роговицы на показатели внутриглазного давления при его измерении с помощью нагружения штампом с плоским основанием.
2. Оценка влияния формы корнеосклеральной оболочки на изменение внутриглазного давления при интравитреальных инъекциях.
3. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойной роговой оболочки до и после рефракционных операций.
4. Анализ влияния расположения удаляемого материала стромы при кераторефракционной операции по коррекции дальновозкости на упругие свойства роговой оболочки глаза.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана компьютерная математическая трёхмерная конечно-элементная модель многослойной корнеосклеральной оболочки, включающая в себя склеру и роговую оболочку, состоящую из четырёх слоёв: эпителия, боуеновой мембраны, стромы и десцеметовой оболочки. Компьютерная модель позволяет изменять различные геометрические характеристики, в том числе общие и локальные толщины различных слоёв оболочек, и варьировать упругие характеристики каждого слоя, используемого в модели.
2. Получены соотношения для поправочных коэффициентов при определении значения истинного внутриглазного давления в случае различных толщин роговой оболочки в её центре.
3. Построены зависимости объём–давление при интравитреальных инъекциях для корнеосклеральных оболочек эллипсоидальной формы с удлинённой и укороченной передне-задней осью (ПЗО) глаза.
4. Исследованы различные варианты операций типа LASIK и IntraLASIK. Показано, что если удаляется кольцевой слой меньшего диаметра и срезаётся более толстая роговая «крышка», то в результате данной коррекции наблюдаются большие деформации и смещения в области утончения роговицы, происходит большее снижение изгибной жёсткости роговицы.

Научная новизна:

- построена новая компьютерная модель нагружения роговой оболочки штампом с плоским основанием для различных значений толщины и радиусов кривизны роговой оболочки в её центре (без учёта кератоконуса);
- получены соотношения тангенциальных и радиального модулей упругости склеры, при которых могло бы выполняться строгое условие несжимаемости ткани склеры;
- получены значения поправочных коэффициентов для определения внутриглазного давления в зависимости от толщины роговой оболочки в её центре;
- создана биомеханическая модель эллипсоидальной корнеосклеральной оболочки переменной толщины для разных значений длины передне-задней оси глаза, заполненной жидкостью;

- проведён расчёт изменения истинного внутриглазного давления в зависимости от объёма дополнительно вводимой жидкости для эллипсоидальной формы корнеосклеральной оболочки;
- разработана биомеханическая модель многослойной роговой оболочки глаза, описывающая изменение напряжённо-деформированного состояния, после коррекции зрения при дальнозоркости;
- выполнен численный анализ различных вариантов расположения удаляемого слоя при операции типа LASIK и IntraLASIK при дальнозоркости. Определены области предпочтительные для проведения операции по коррекции зрения (наибольшее сокращение внешнего радиуса кривизны, сохранение внутреннего радиуса кривизны, и равномерность деформаций после нагружения).

Практическая значимость. Разработанная параметрическая конечно-элементная модель эллипсоидальной корнеосклеральной оболочки (позволяющая изменять геометрические и механические характеристики) может быть использована для дальнейших научных исследований в области офтальмологии. В том числе, как инструмент врача офтальмолога для определения наиболее эффективной области удаления кольцевого слоя и проведения операции по коррекции зрения с учётом особенностей конкретного пациента.

Аналитические соотношения и функциональные зависимости, полученные при решении задачи о влиянии введения дополнительного объёма жидкости на изменение внутриглазного давления в зависимости от параметров глаза, позволяют определить допустимый объём лекарственного раствора при интравитреальной инъекции для конкретных случаев. Полученные значения поправочных коэффициентов позволят точнее определять значение внутриглазного давления в зависимости от толщины роговой оболочки в её центре.

Результаты диссертационной работы обсуждались с практикующими врачами-офтальмологами из Чебоксарского и Санкт-Петербургского филиалов ФГБУ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. Академика С.Н. Федорова».

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается корректностью постановки математической задачи, а также сравнением численных и клинических результатов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 27 ноября 2012 г.,

- международной научной конференции по механике «Седьмые Поляховские чтения», посвящённой 110-летию со дня рождения профессора К.И. Страховича, 2–6 февраля 2015 г.,
- XLVI международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» 6–9 апреля 2015 г.,
- международной конференции «Устойчивость и процессы управления», посвященной 85-летию со дня рождения проф., чл.-корр. РАН В.И. Зубова, 5–9 октября 2015 г.,
- международном европейском конгрессе «European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering» (ECCOMAS) 5-10 июня 2016 г.,
- всероссийской конференции молодых ученых с международным участием «Практическая биомеханика 2016» 19–22 октября 2016 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в восьми печатных изданиях [1–8], две из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1, 6].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 150 страниц с 62 рисунками и 26 таблицами. Список литературы содержит 128 наименований.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся задачи, формулируется цель, новизна и практическая значимость работы.

Первая глава посвящена описанию строения различных структур глаза, рефракционных операций и интравитреальных инъекций, используемых в последующем при построении конечно-элементной математической модели.

Во второй главе приведено описание проблемы измерения показателей внутриглазного давления тонометром Маклакова. В этом случае о ВГД судят на основе полученного диаметра зоны контакта тонометра с роговицей.

В данной главе представлено трёхмерное конечно-элементное моделирование контактной задачи нагружения многослойной роговой оболочки штампом с плоским основанием в программном математическом пакете ANSYS. Исследуется изменение напряжённо-деформированного состояния

роговой оболочки при нагружении штампами различного веса, в частности, проверяется наличие возможного «отрыва» поверхности плоского штампа от роговицы внутри зоны контакта. А также изучается вопрос о влиянии толщины роговой оболочки и её слоёв при приложении плоского штампа на показатели внутриглазного давления.

Разработанная биомеханическая модель корнеосклеральной оболочки включает в себя следующие элементы: четырёхслойную роговую оболочку, склеральную оболочку, и плоский штамп. На рисунке 1 представлена модель в сечении плоскостью YZ с нанесённой сеткой элементов.

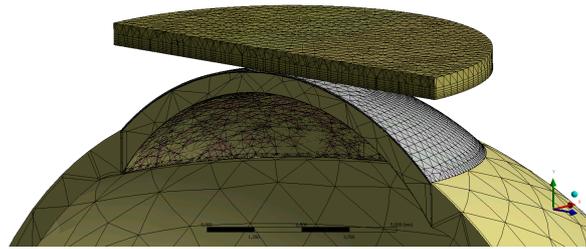


Рис. 1 - Сечение конечно-элементной модели плоскостью YZ с нанесённой сеткой

Известно, что роговица и склера являются оболочками, для которых модуль упругости в направлении толщины роговицы существенно меньше,

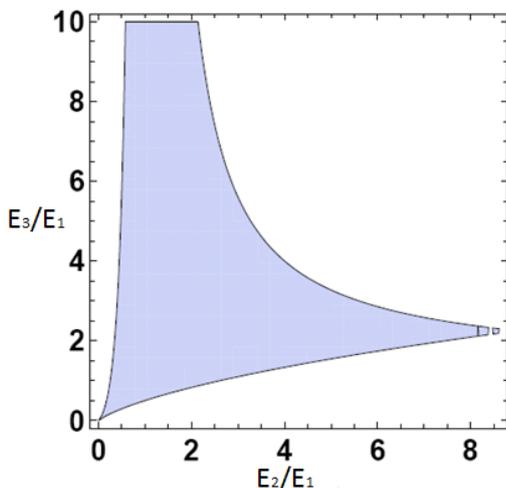


Рис. 2 - График возможных соотношений модулей упругостей в различных направлениях при несжимаемости

дого слоя.

Корнеосклеральная оболочка моделируется двумя сопряжёнными сферическими сегментами: роговицей, состоящей из четырёх слоёв, и склеры. Для построения конечно-элементной модели прилагаемого плоского штампа

чем тангенциальные модули упругости (Иомдина Е.Н., Ghosh S., Scheinbeim J.I.). В этом случае материал роговицы можно рассматривать только как близкий к несжимаемому. Для трансверсально-изотропного несжимаемого тела при условии положительной определённости упругого потенциала получены ограничения (см. рис. 2) на модули упругости:

$$E_1^2 - 4E_3E_1 < 0, \frac{E_3}{E_1} > \frac{1}{4} \quad (1)$$

В построенной конечно-элементной модели значения модулей упругости в тангенциальном направлении и в направлении толщины отличаются друг от друга в 20 раз для каж-

используется изотропный материал с коэффициентом модуля Юнга, равным $2 * 10^{11}$ Па, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ (сталь), вес штампа принимается равным 5, 7.5, 10 и 15 г.

Для построения компьютерной конечно-элементной модели существенным является корректная постановка граничных условий. Предлагаются такие граничные условия, которые отвечают осесимметричному нагружению оболочки, позволяя её равномерное раздувание, но препятствуют сдвигам, кручению и смещению оболочки как жёсткого целого. Применяется жёсткая фиксация внешней поверхности сечения склеры в экваториальной зоне глазного яблока в перпендикулярном направлении, а также жёсткая фиксация внешней поверхности сечения склеры плоскостью XU в направлении оси Z , и плоскостью YZ – в направлении оси X . Такой выбор граничных условий связан с предположением, что корнеосклеральная оболочка является осесимметричным телом вращения, и при её нагружении плоскости проходящие через ось вращения (симметрии) не могут смещаться в перпендикулярном направлении.

В результате конечно-элементного моделирования при нагружении плоским штампом весом 5 г в зоне контакта на самом краю имеется ярко выраженное «кольцо» (см. рис. 3), соответствующее минимальным перемещениям, близким по значению к нулю. Причём эти минимальные перемещения

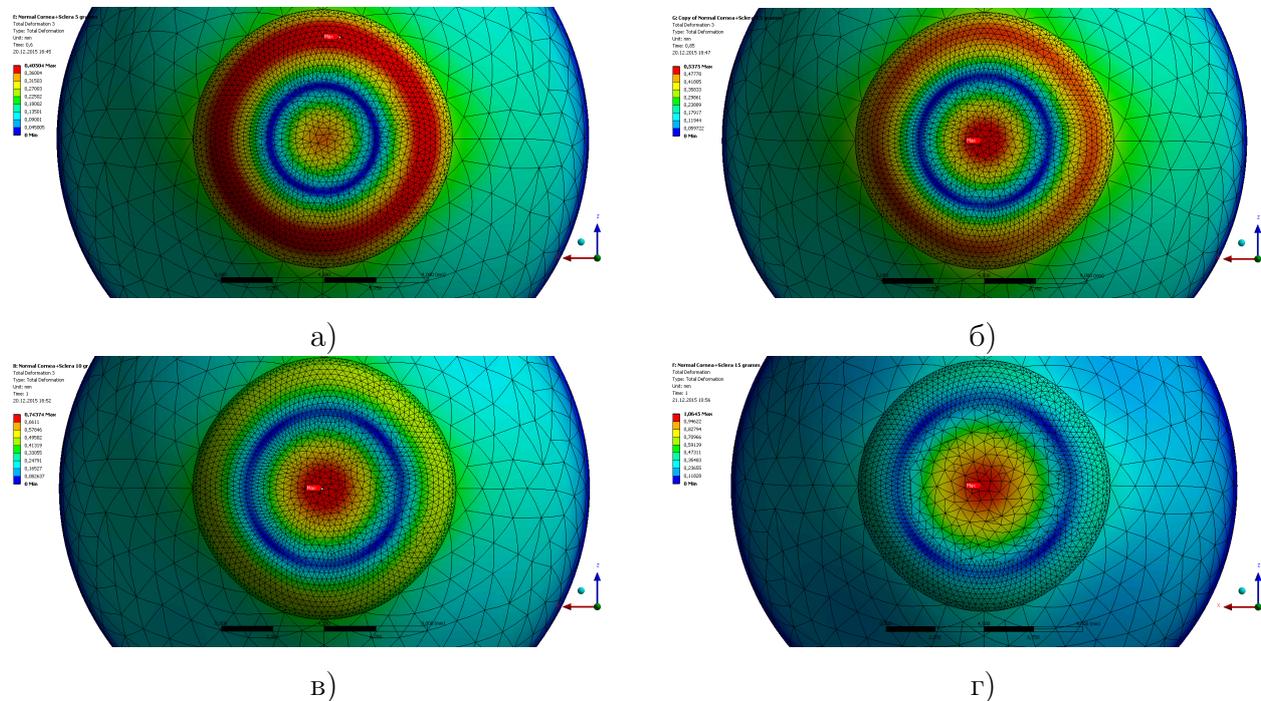


Рис. 3 - Перемещения роговой оболочки (вид сверху) при нагружении плоским штампом весом: а) 5 г, б) 7,5 г, в) 10 г, г) 15 г

переходят в максимальные перемещения (порядка 0,4 мм) роговой оболочки

вне зоны контакта также в форме кольца. При увеличении массы плоского штампа до 7,5 г диаметр зоны контакта увеличивается, и появляется еще одна область контакта, соответствующая максимальным перемещениям – в центре роговой оболочки. Последующее увеличение массы штампа до 10 г приводит к увеличению перемещений в центре и увеличению диаметра зоны контакта. Полученные данные аппроксимируются методом наименьших квадратов в виде полиномов:

$$P_5 = 4,6d^2 - 56,68d + 188,2 \quad (2)$$

$$P_{7.5} = 2,18d^2 - 32,94d + 138,5 \quad (3)$$

$$P_{10} = 0,09d^2 - 9,09d + 79,6 \quad (4)$$

$$P_{15} = -0,004d^2 - 8,13d + 86,4 \quad (5)$$

Однако, сделанные выводы справедливы только для тех параметров корнеосклеральной оболочки, при которых проведен расчет. Так, например,

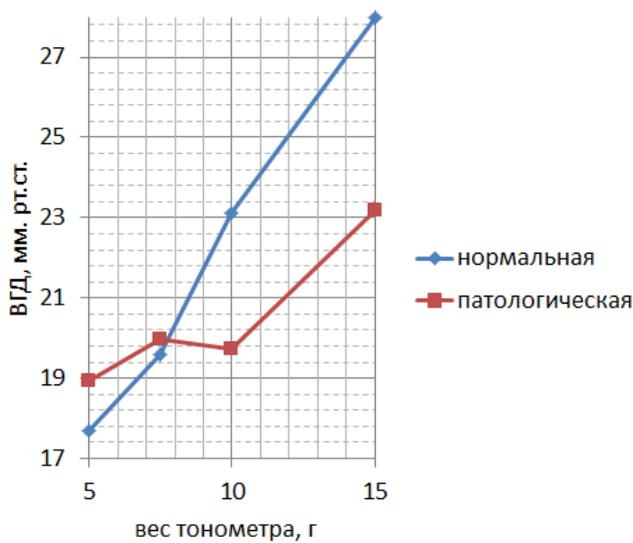


Рис. 4 - Эластотонометрические кривые:

нормальная ($E_{i-stroma} = 0.3$ МПа,

$E_{i-sklera} = 5$ МПа) и патологическая

($E_{i-stroma} = 0.5$ МПа, $E_{i-sklera} = 10$ МПа)

увеличения модуля упругости склеры до $E_i = 10$ МПа. Эластотонометрия традиционно применяется для выявления ранней патологии гидродинамики глаза и оценивает биомеханические особенности фиброзной оболочки, что представляет большой практический интерес.

Для точной оценки риска возникновения различных глазных заболеваний, в том числе, развития и прогрессирования глаукомы, важно точнее определять внутриглазное давление (ВГД) и, значит, понимать, как толщина

роговицы в центре может влиять на показатели ВГД. Несмотря на то, что до сих пор не найдена взаимосвязь между истинным внутриглазным давлением, толщиной роговой оболочки в центре и аппланационным внутриглазным давлением, полученным при помощи измерения соответствующим тонометром, ряд авторов (Choplin N.T., Lundy D.S.) считают, что давление необходимо корректировать на 1 мм рт.ст. при каждом изменении толщины роговой оболочки на 20 мкм отличающегося от среднего значения (540 мкм).

В третьем разделе второй главы исследуется влияние толщины многослойной роговой оболочки на показатели внутриглазного давления. Получено уравнение для определения поправочного коэффициента значения ВГД:

$$P_{i_corr} = 33,26h^2 - 49,85h + 17,79 \quad (6)$$

В результате конечно-элементного моделирования получены формулы, которые можно использовать на практике. Построенная модель нагружения роговой оболочки плоским штампом позволяет проводить расчёт значения внутриглазного давления в зависимости от веса прикладываемого штампа, внутреннего и внешнего радиусов кривизны, и толщины роговой оболочки в её центре. Также конечно-элементная модель является достаточной для проведения дальнейших исследований в части эластотонетрии и расчёта поправочных коэффициентов при различных показателях ВГД, измеряемых тонометром Маклакова любого веса, в зависимости от толщины роговицы, которые могут помочь в оценке биомеханических свойств роговицы и склеры.

Полученные результаты подтверждают клинические наблюдения (Аветисов Э.С., Братко О.В., Шевченко М.В.) о существенном влиянии толщины роговой оболочки в её центре на показатели внутриглазного давления.

Третья глава посвящена исследованию влияния интравитреальных инъекций на внутриглазное давление. Рассмотрено несколько простейших математических моделей, одна из которых учитывает нелинейность.

Для оценки изменения объёма сферической оболочки используется соотношение:

$$\Delta V = \frac{4\pi R^3}{B} \ln \left(\frac{PR}{2Ah} + 1 \right), \quad (7)$$

где A и B – физические константы. В последующем результаты моделирования сопоставляются с данными, полученными из соотношения (7), а также с клиническими данными.

Проведён расчёт значения физической константы B в уравнении (7) для различных видов рефракции с изменением длины передне-задней оси. При этом вводятся предположения, что константа A равна модулю упругости

склеры E . На основании моделирования получено соотношение, аппроксимирующее изменение коэффициента B :

$$B = 0,007l^2 - 0,45l + 9,43 \quad (8)$$

В построенной модели введён параметр, учитывающий диапазон длины ПЗО l от 19 до 28 мм. Рассматривается форма склеры состоящей из сферического и эллипсоидального сегментов. Сферический сегмент склеральной оболочки имеет переменную толщину, которая изменяется от 1 мм у роговицы до 0,8 мм, и далее до 0,6 мм в экваториальной зоне (месте крепления наружных мышц) и далее равномерно увеличивается до 1,2 мм к основанию. Дополнительно для повышения точности расчётов корнеосклеральная оболочка наполняется вязкой жидкостью, которая моделирует внутреннее ядро глаза (стекловидное тело, хрусталик, водянистая влага в передней и задней камерах).

Решается обратная задача методом последовательных приближений, то есть меняется давление на внутреннюю поверхность оболочки, проводится расчёт изменения объёма.

Проведены расчёты изменения ВГД при интравитреальном введении лекарственного раствора для различных по форме оболочек глаза. На рис. 5 представлены деформации в сечении корнеосклеральной оболочки глаза с длиной ПЗО 19 мм.

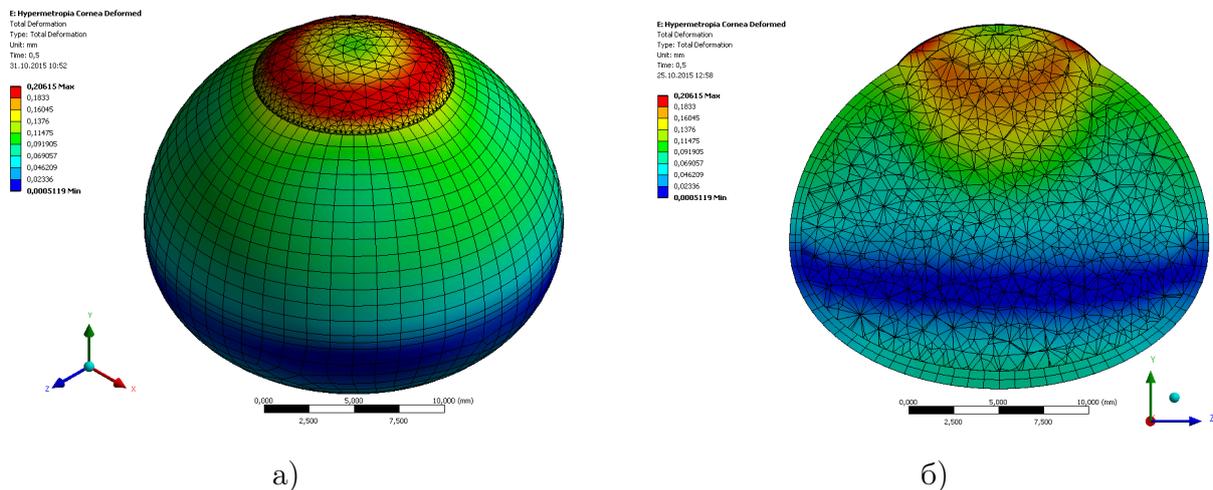


Рис. 5 - Деформированная корнеосклеральная оболочка при ПЗО 19 мм
а) изометрия, б) сечение

Результаты численного моделирования хорошо согласуются с клинической практикой, когда при интравитреальной инъекции в глазное яблоко с более короткой длиной ПЗО наблюдается существенное повышение внутриглазного давления по сравнению с более длинной передне-задней осью. Получены

удобные для практического применения соотношения для оценки изменения внутриглазного давления при введении дополнительного объёма жидкости в стекловидное тело. При «стандартных» инъекций – это 0,02, 0,05, и 0,1 мл:

$$\Delta P_{0,02} = 0,04l^2 - 2,8l + 55,6 \quad (9)$$

$$\Delta P_{0,05} = 0,1l^2 - 6,34l + 130,6 \quad (10)$$

$$\Delta P_{0,1} = 0,18l^2 - 12,23l + 255,5, \quad (11)$$

где l – длина передне-задней оси, измеряемая в мм и находящаяся в диапазоне от 19 до 28 мм.

На основе полученных расчётных данных построены графики аналитической зависимости изменения объёма от изменения внутриглазного давления для различных длин ПЗО:

$$\begin{aligned} \Delta V_{28} &= 1,75\Delta P - 0,12, \Delta V_{27} = 1,69\Delta P + 0,09, \Delta V_{26} = 1,62\Delta P + 0,12, \\ \Delta V_{25} &= 1,55\Delta P + 0,1, \Delta V_{24} = 1,47\Delta P + 0,04, \Delta V_{23} = 1,41\Delta P + 0,05, \\ \Delta V_{22} &= 1,33\Delta P - 0,11, \Delta V_{21} = 1,26\Delta P - 0,23, \Delta V_{20} = 1,18\Delta P - 0,62, \\ \Delta V_{19} &= 1,13\Delta P - 0,16. \end{aligned} \quad (12)$$

где ΔP – величина изменения ВГД (от 0 до 75 мм рт.ст.), а ΔV – величина изменения внутреннего объёма (в мм³). Нижний индекс у ΔV обозначает соответствующую длину ПЗО глазного яблока.

Анализ полученных соотношений (12) даёт общее для различных длин ПЗО соотношение, изменения ВГД в зависимости от изменения объёма:

$$\Delta P = \frac{\Delta V}{0.07l - 0.23} \quad (13)$$

Проведено сравнение с клиническими данными. Получается расхождение в пределах 30 процентов.

В четвёртой главе исследуются задачи, связанные с рефракционными операциями. Первая часть этой главы посвящена оценке изменения показателей внутриглазного давления после кераторефракционной коррекции дальнозоркости.

Для оценки напряжённо-деформированного состояния роговицы построена конечно-элементная модель в математическом программном пакете ANSYS, в которой в зоне абляции моделируется дополнительный слой (см. рис. 6) с низкими значениями модулей упругости ($E = 0,01 - 0,001$ МПа), симулирующий удалённый материал. С такими же упругими характеристиками моделируется и срез рогового лоскута.

Приводятся распределения контактных напряжений, получаемые при воздействии тонометрами Гольдмана и Маклакова (10 г) при измерении ВГД

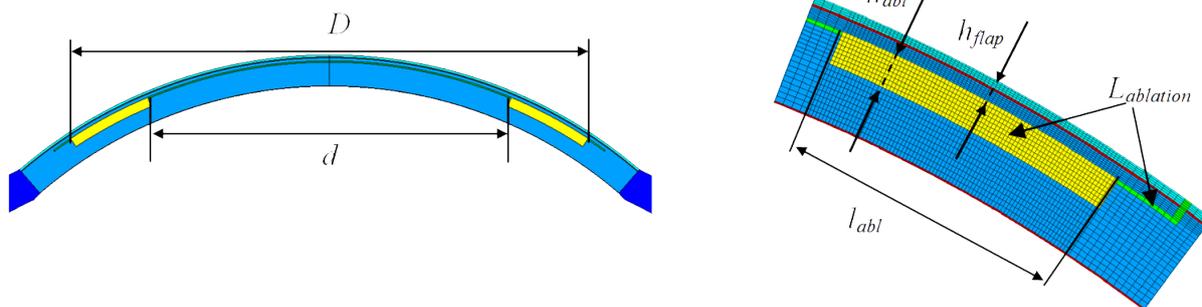


Рис. 6 - Параметры удаляемого при операциях LASIK и IntraLASIK слоя роговой ткани

после операций LASIK (удаляемый слой ближе к центру) и IntraLASIK (дальше от центра). Проведённые для различных параметров срезаемого рогового лоскута и удаляемого в результате рефракционных операций слоя роговой ткани расчёты показали, что после операций IntraLASIK роговица деформируется более равномерно, чем после LASIK. После операции LASIK наблюдаются большие деформации и смещения в области утончения роговицы (см. рис. 7).

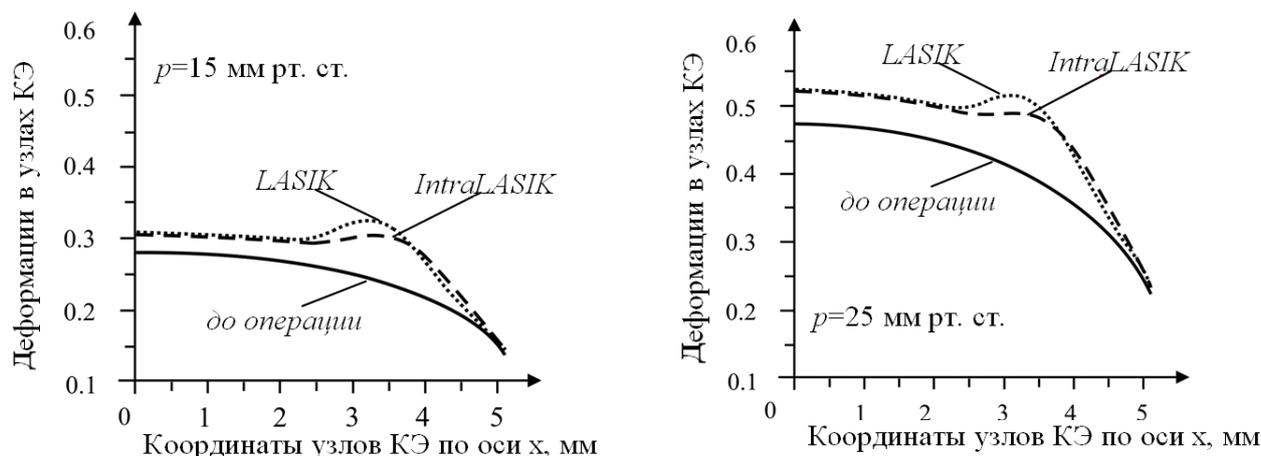


Рис. 7 - Значения деформаций в узлах внутренней поверхности роговицы до и после операций

В результате моделирования получено, что изменение толщины роговицы за счёт удаления кольцевого слоя при операциях по коррекции дальности зрения, как и в случае коррекции близорукости, приводит к уменьшению изгибной жёсткости роговицы и, следовательно, к уменьшению показателей ВГД, получаемых апланационными тонометрами Гольдмана и Маклакова. По данным расчётов, изменение показателей ВГД зависит и от внутреннего, и от внешнего радиуса удаляемого кольцевого слоя, глубины зоны абляции, а также толщины формируемого рогового лоскута. При этом изменения показателей ВГД, полученные с помощью тонометра Маклакова, существенно

меньше изменений ВГД, получаемых тонометром Гольдмана. Показания тонометра Гольдмана оказываются более чувствительными к любым изменениям в геометрических параметрах роговицы.

Во второй части четвёртой главы рассмотрен случай, когда удаляется кольцо с поверхности роговицы, то есть происходит изменение геометрии роговой оболочки (на рисунке 8 представлен общий вид конечно-элементной модели).

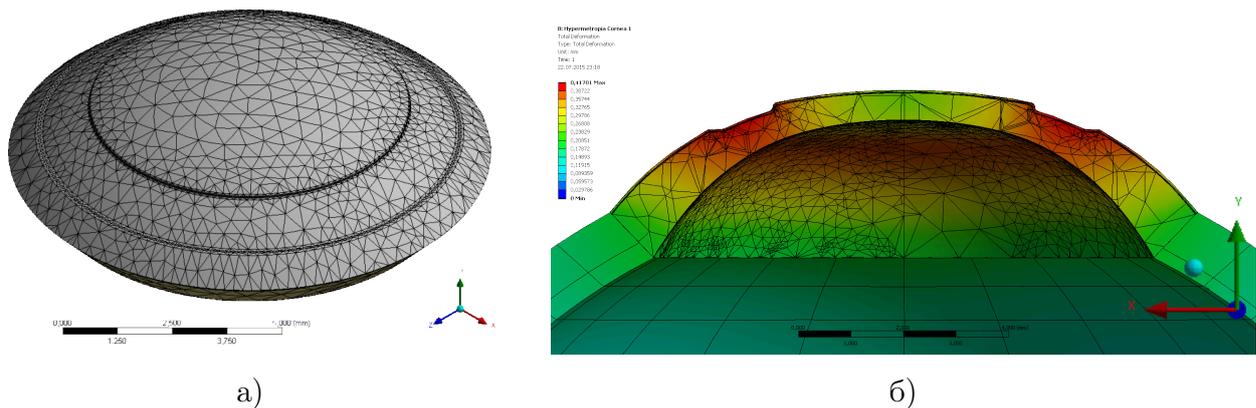


Рис. 8 - а) Общий вид модели роговой оболочки после удаления кольцевого слоя, б) сечение деформированной роговицы при дальнорюкости

Использовались четыре варианта модели, описывающей напряжённо-деформированное состояние роговицы после операций. Объём удаляемого слоя во всех случаях принимался одинаковым.

По итогам моделирования на рисунке 8 б) видно, что максимальные деформации располагаются в форме кольца и имеют минимальные значения в центре и на краю роговой оболочки. При этом стоит отметить, что максимальные деформации в этом кольце наблюдаются ближе к внешней поверхности, то есть в слоях эпителия и боуменовой оболочки. Десцеметова оболочка менее всех подвержена деформации и лучше сохраняет свою форму. Величина деформаций в центре роговой оболочки примерно на 40% меньше, чем в месте удаления кольцевого слоя.

Построены и проанализированы кривые параболического вида перемещений профилей внутренней поверхности роговицы в различных случаях. Рассчитаны аппроксимирующие соотношения на основании графиков перемещений профиля внутренней поверхности, из которых получены значения радиуса кривизны внутренней поверхности в центре роговой оболочки после нагружения.

Проведено исследование влияния изменения внутриглазного давления после интравитреальной инъекции объёмом 0,05 мл на роговую оболочку по-

сле коррекции дальновзоркости. Нагружение конечно-элементной модели роговой оболочки внутренним давлением проведено согласно клиническим данным. В результате проведения серии расчётов получают профили внутренней поверхности, на основании которых проведён расчёт радиуса кривизны внутренней поверхности.

Также проведена верификация построенной расчётной модели с помощью дополнительных двух конечно-элементных моделей, одна из которых характеризует роговую оболочку в случае эметропии (нормальная рефракция), а вторая при коррекции аномалии рефракции – близорукости. Полученные в процессе аналогичного моделирования результаты сопоставлялись с имеющимися клиническими данными.

Полученные данные по максимальным нормальным прогибам хорошо коррелируются с теоретическими и клиническими данными.

В заключении приведены основные результаты работы, выносимые на защиту.

Публикации автора по теме диссертации

1. Франус, Д. В. Влияние толщины многослойной роговой оболочки на показатели внутриглазного давления / Д. В. Франус // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т.17, – вып.2. – С. 209-218. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-209-218.
2. Франус, Д. В. Изменение напряжённно-деформированного состояния корнеосклеральной оболочки глаза после введения интрасклеральных инъекций / Д. В. Франус. // Практическая биомеханика: Материалы докладов Всероссийской конференции молодых учёных с международным участием. Под ред. проф. Л. Ю. Коссовича – Саратов. – 2016. – С. 64-66.
3. Франус, Д. В. Изменение напряжённно-деформированного состояния корнеосклеральной оболочки глаза человека после введения инъекции / Д. В. Франус. // Устойчивость и процессы управления: Материалы III Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения профессора, чл. -корр. РАН В.И. Зубова – СПб. : Издательский Дом Фёдоровой Г.В., 2015. – С. 499-500.
4. Франус, Д. В. О математических моделях тонографии / Д. В. Франус. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». – СПб. : СПбГУ, 2013. – С. 42-52.

5. Франус, Д. В. Особенности напряженно-деформированного состояния роговицы глаза после лазерной коррекции гиперметропии / Д. В. Франус. // Процессы управления и устойчивость. – 2015. – Т.2 №1. – С. 322-327.
6. Франус, Д. В. Оценка изменения напряженно-деформированного состояния глаза и показателей ВГД после рефракционной коррекции гиперметропии / С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Д. В. Франус, Л. А. Федотова // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т.19 №2. – С. 136-143.
7. Franus, D. V. Change in the stress-strain state of the cornea after refractive surgery / D. V. Franus. // International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading. – 2015. – P. 73-76.
8. Franus, D. V. Finite-element model of intraocular pressure measurement by Maklakov applanation tonometer / D. V. Franus. // Proceedings of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress 2016). – 2016. – Vol.4. – P. 6631-6636.