На правах рукописи

Зыонг Туан Мань

АНАЛИЗ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Научный руководитель: **Россихин Юрий Алексеевич**
Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор
Шитикова Марина Вячеславовна
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук, главный научный сотрудник

Официальные оппоненты: **Михасев Геннадий Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусский государственный университет, кафедра био- и наномеханики, заведующий кафедрой

Мурашкин Евгений Валерьевич
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов

Защита состоится «15» сентября 2017 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, к. 9, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского и на сайте http://www.sgu.ru/research/dossertation-council/d-212-243-10

Автореферат разослан «___ » ____________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Сафонов Роман Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение динамических контактных задач является актуальной задачей для тех отраслей науки и техники, где приходится иметь дело с ударными нагрузками. В процессе удара необходимо изучать такие физические явления, как динамическая реакция конструкции, продолжительность контактного взаимодействия, распространение поверхностей сильного разрыва, которые зарождаются в момент удара и затем распространяются вдоль соударяющихся тел. Для комплексного анализа таких явлений особенно важным является разработка аналитических методов исследования, которые позволяют получить оценки для предельных случаев и являются базой для дальнейшего развития и апробации численных методов.

В течение последних десятилетий ученые и инженеры уделяли большое внимание решению задач, касающихся ударного взаимодействия тел. Обзоры исследований в этой области приведены в работах В. Гольдсмита, S. Abrate, Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, в которых отмечается, что большинство работ посвящено анализу ударного взаимодействия упругих тел.

Поскольку балки, пластинки и оболочки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при ударных воздействиях является весьма актуальным, особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия. Ю.А. Россихин и М.В. Шитикова неоднократно демонстрировали в своих многочисленных исследованиях взаимосвязь дробных операторов, описывающих свойства вязкоупругих сред, с дробными экспоненциальными операторами Ю.Н. Работнова, предложенными для изучения наследственных сред, чтобы объяснить физический смысл дробного параметра в задачах удара и соединить его с изменениями в микроструктуре материала.

Известно, что дробные операторы способны моделировать эффект наследственной памяти, поскольку его эволюция во времени лучше описывается дробными дифференциальными уравнениями, в то время как стандартные математические модели с производной целого порядка, в том числе нелинейные модели, не работают должным образом во многих случаях. Эволюция во времени описывается дробным параметром, который может изменяться от нуля до единицы, позволяя варьировать вязкостью. Это явление возможно, потому что структура материала в пределах контактной зоны соударяющихся тел может быть повреждена при ударе, в результате чего происходит уменьшение вязкости.

В последнее время научный коллектив под руководством профессоров Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. продвинулся значительно вперед других исследователей и является пионером в решении задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел с использованием различных моделей, содержащих операторы дробного порядка, поскольку владеет алгеброй безразмерных дробных операторов, которая позволяет с успехом расшифровывать сложнейшие операторы, которые встречаются в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих ударников и мишеней.

Часть этих исследований, касающихся моделирования и изучения процессов ударного взаимодействия двух сферических оболочек, обладающих вязкоупругими свойствами или приобретающих такие свойства в течение времени контакта, была выполнена диссертантом и подробно изложена в последующих главах.

Основной целью диссертационной работы является обобщение волновой теории удара, построенной ранее профессорами Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для упругих тел, на случай ударного взаимодействия сферических оболочек, свойства которых могут быть упругими, вязкоупругими или приобретать вязкоупругие свойства в зоне контакта в процессе ударного взаимодействия, а также получение определяющих интегро-дифференциальных уравнений контактного взаимодействия вязкоупругих сферических оболочек на основе моделей, содержащих дробные операторы, и приближенное аналитическое решение полученных уравнений, позволяющее определить такие основные характеристики ударного взаимодействия, как зависимость контактной силы и локального смятия материалов соударяющихся тел от времени, а также время контактного взаимодействия.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п. 2 «Теория моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой», п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

Научная новизна. Впервые решены контактные динамические задачи, возникающие в процессе соударения двух сферических оболочек или при ударе оболочки по мишени в виде вязкоупругой или жесткой пластинки. При этом в области контакта применяется закон Герца, обобщенный для вязкоупругих тел на основе моделей с дробными операторами, а вне области контакта решение строится при помощи лучевого метода, который представляет собой один из методов малого параметра, и этим малым параметром является время. Для процессов, быстро протекающих во времени, метод лучевых рядов имеет неоспоримые преимущества перед другими методами, поскольку позволяет получать аналитические решения в виде временных зависимостей основных характеристик ударного процесса.

Достоверность базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

Практическая ценность. Полученные результаты в виде аналитических зависимостей контактной силы и локального смятия от времени могут быть использованы в различных проектных организациях при расчетах ударных взаимодействий различных конструкций, свойства которых могут изменяться в процессе контакта, а также при разработке таких средств защиты как шлемы для спортсменов, пожарных, военных, которые могут испытывать ударные нагрузки в различных критических ситуациях.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2014-2016 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; 3) на 9й международной конференции по механике сплошных сред (9th International Conference on Continuum Mechanics CM '15) в Риме, Италия, 7-9 ноября 2015 года; 4) на 44й международной летней школе-конференции по современным проблемам механики (Advanced Problems in Mechanics APM-2016) в Санкт-Петербурге 27 июня – 2 июля 2016 года; 5) на 7й международной конференции по математическим моделям в инженерных науках (7th International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES’16) в Дубровнике, Хорватия, 28 – 30 сентября 2016 года.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в шести научных работах, из них две в изданиях, проиндексированных в международных базах данных Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, были получены лично соискателем и опубликованы совместно с научным руководителем, который определил основные направления исследования в процессе выполнения международного научного проекта РФФИ. В совместных публикациях диссертант участвовал в решении задач, поставленных перед ним руководителем, лично проводил все численные исследования.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на автора или источник заимствования.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка используемой литературы из 160 наименований. Работа изложена на 116 страницах и содержит 21 рисунок.

На защиту выносятся следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара упругих тел на случай ударного взаимодействия вязкоупругих тел с вязкоупругой сферической оболочкой;
- анализ динамического поведения двух соударяющихся сферических оболочек, упругие свойства которых могут изменяться в зоне контакта в процессе удара, при помощи введения в рассмотрение нового структурного

параметра за счет использования вязкоупругой модели, содержащей производные дробного порядка;

- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих или упругих ударников в виде сферических оболочек с вязкоупругими или жесткими мишенями, в качестве которых могут выступать вязкоупругие или жесткие сферические оболочки или пластинки, с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, практическая значимость работы, а также дана краткая аннотация по главам.

В первой главе приводится обзор научной литературы, посвященной исследованию задач соударения сферических тел, когда, по крайней мере, одно из них обладает вязкоупругими свойствами, и методов их решения.

Отмечается, что в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих тел, контактная сила $F_{\text{cont}}(t)$ связана с локальным смятием материалов соударяющихся тел $\alpha(t)$ при помощи обобщенного закона Герца

$$F_{\text{cont}}(t) = \tilde{k}\alpha^{3/2}, \tag{1}$$

в котором оператор жесткости $\tilde{k}$ зависит от времени и учитывает геометрию и вязкоупругие свойства соударяющихся тел (в отличие от случая соударения упругих тел, когда коэффициент жесткости при ударе является константой).

Так, в случае соударения двух сферических оболочек оператор $\tilde{k}$ имеет вид

$$\tilde{k} = \frac{4\sqrt{R'}}{3}E^* , \tag{1}$$

где оператор E^* зависит от сочетания свойств материалов соударяющихся тел:

а) две вязкоупругие сферические оболочки

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} , \tag{2}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \tag{3}$$

где R_1 и R_2 - радиусы сферических оболочек, $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ и $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ - зависящие от времени операторы Пуассона и Юнга соответственно первой и второй сферических оболочек;

б) вязкоупругая сферическая оболочка и вязкоупругая пластинка ($R_1 = \infty$)

$$R' = R_2 , \tag{4}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}; \tag{5}$$

в) вязкоупругая сферическая оболочка и жесткая пластинка (когда модуль упругости пластинки намного больше значения нерелаксированного модуля упругости оболочки)

$$R' = R_2 \ , \tag{6}$$

$$E^* = \frac{\tilde{E}_2}{1-\tilde{\nu}_2^2}; \tag{7}$$

г) вязкоупругая сферическая оболочка и жесткая сферическая оболочка

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \ , \tag{8}$$

$$E^* = \frac{\tilde{E}_2}{1-\tilde{\nu}_2^2}. \tag{9}$$

Из соотношений (2) и (4) следует, что для определения оператора $\tilde{k}(t)$ необходимо прежде всего задаться априори или найти экспериментальные зависимости операторов Юнга и Пуассона. В инженерной практике задачу зачастую упрощают, считая коэффициент Пуассона, не зависящим от времени. Однако экспериментальные данные, приведенные в многочисленных публикациях, в том числе и в работах академика Ю.Н. Работнова, показывают, что для большинства вязкоупругих материалов коэффициент Пуассона не является константой.

Таким образом, для решения задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел необходимо умение работать с операторными выражениями. Академиком Ю.Н. Работновым была введена дробно-экспоненциальная функция в 1948, а позже были предложены вязкоупругие модели, содержащие операторы дробного порядка, которые хорошо описывали экспериментальные данные по вязкоупругим материалам. Была разработана алгебра дробных операторов, имеющих размерность, что осложняло их использование для решения сложных краевых задач.

В данной диссертационной работе была использована алгебра безразмерных дробных операторов, развитая в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, которая позволяет расшифровывать сложнейшие операторы, встречающиеся в задачах ударного взаимодействия двух вязкоупругих сферических оболочек.

Вторая глава посвящена изучению ударного взаимодействия двух сферических оболочек (рис. 1) на основе волновой теории удара, разработанной для случая соударения упругих сферических оболочек Россихиным Ю.А. и Шитиквой М.В, согласно которой в момент удара в точке касания (или в точке контакта) двух сталкивающихся сфер зарождаются две нестационарные волновые линии (поверхности сильного разрыва), которые затем распространяются в виде расходящихся кругов вдоль сферических поверхностей со скоростями упругих волн

$$G_1^{(i)} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i\left(1-\nu_i^2\right)}} \quad , \quad G_2^{(i)} = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}} \quad \left(i=1,2\right),$$

где $i=1,2$ относится к первой и второй сферическим оболочкам, E_i и ν_i - модули упругости и коэффициенты Пуассона каждой из оболочек соответственно, μ_i - модули сдвига.

Решение вне области контакта может быть построено при помощи лучевого метода, который позволяет определить основные динамические характеристики полей напряжений и деформаций при распространении поверхностей сильного разрыва, зарождающихся в оболочках в момент удара и затем распространяющихся в виде расходящихся кругов.

Во втором параграфе представлена модель соударения двух сферических оболочек для случая, когда вязкоупругие свойства сталкивающихся тел проявляются только в месте контакта в результате изменения микроструктуры оболочек в процессе контактного взаимодействия и описываются с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Вне области контакта материал оболочек остается упругим с нерелаксированными величинами модуля упругости.

Используя принцип соответствия Вольтерра, согласно которому упругие константы в уравнении движения контактной области двух сферических оболочек могут быть заменены соответствующими вязкоупругими операторами, уравнение, описывающее соударение двух упругих оболочек, можно довольно легко обобщить для случая соударения двух одинаковых упругих оболочек, обладающих местными вязкоупругими свойствами в пределах контактной зоны. Тогда уравнения движения контактной области двух сферических оболочек могут быть записаны в виде

$$\rho_1 \pi a^2 h_1 \dot{v}_{z1} = 2\pi a h_1 \sigma_{rz1} + \tilde{k}\alpha^{3/2} \ , \tag{10}$$

$$\rho_2 \pi a^2 h_2 \dot{v}_{z2} = 2\pi a h_2 \sigma_{rz2} - \tilde{k}\alpha^{3/2} \ , \tag{11}$$

где a - радиус контактного пятна, h_i и ρ_i (i=1,2) – толщины и плотности материалов оболочек, точки над величинами обозначают производную по времени, тильда над величинами говорит о том, что соответствующее значение вычисляется на границе контактной области, т.е. при $r=a$, а $r,\theta,z=x_3$ - цилиндрическая система координат с центром в начальной точке контакта сферических оболочек (рис. 2).

Учитывая, что $a^2 = R'\alpha$ и

$$\sigma_{rzi} = \rho_i\left(G_1^{(i)} - G_2^{(i)}\right)\frac{\left(a^2\right)^{\cdot}}{2R_i} - \rho_i\left(G_1^{(i)}\frac{a^2}{R_i^2} + G_2^{(i)}\right)v_{zi} \ , \tag{12}$$

находим

$$\rho_1 \pi R' \alpha h_1 \dot{v}_{z1} =$$
$$= 2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 \left[\left(G_1^{(1)} - G_2^{(1)} \right) \frac{R' \dot{\alpha}}{2R_1} - \left(G_1^{(1)} \frac{R'}{R_1^2} \alpha + G_2^{(1)} \right) v_{z1} \right] + \tilde{k} \alpha^{3/2} \ , \qquad (13)$$

$$\rho_2 \pi R' \alpha h_2 \dot{v}_{z2} =$$
$$= 2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{R' \dot{\alpha}}{2R_2} - \left(G_1^{(2)} \frac{R'}{R_2^2} \alpha + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right] - \tilde{k} \alpha^{3/2} \qquad (14)$$

К уравнениям (14) и (15) следует добавить следующее уравнение:

$$v_{z2} - v_{z1} = \dot{\alpha} - V \ , \qquad (15)$$

где $V = V_{02} - V_{01}$.

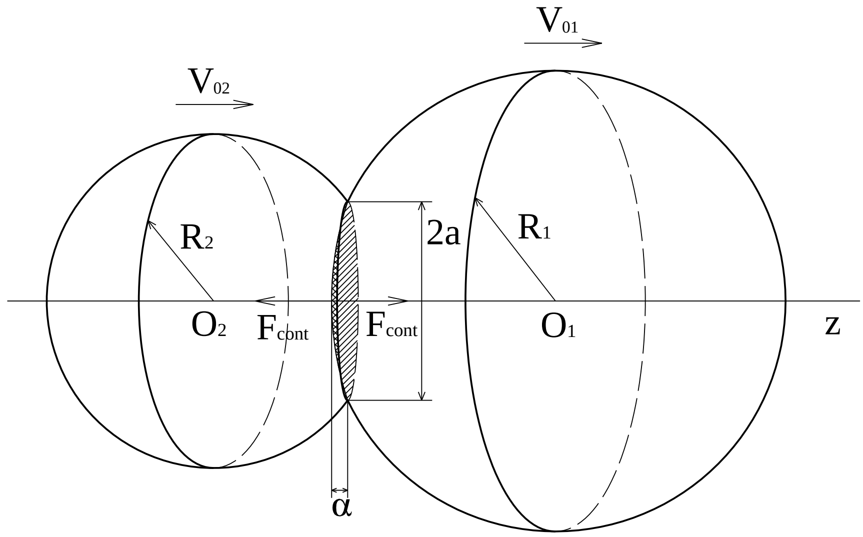

Рисунок 1. Схема центрального соударения двух сферических оболочек

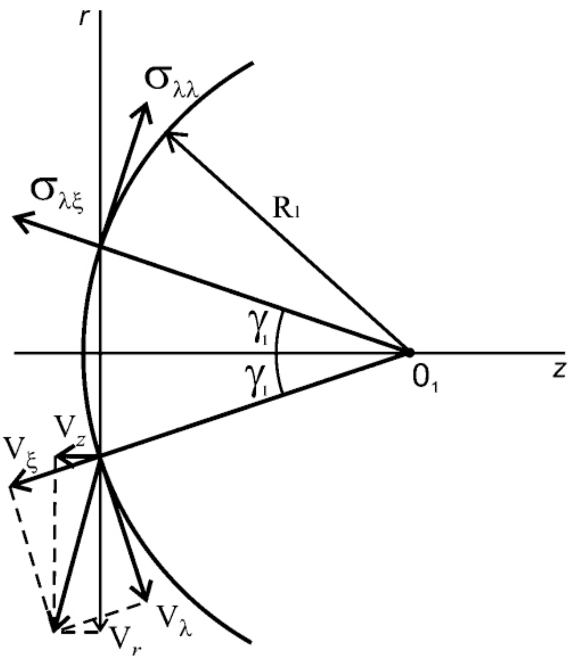

Рисунок 2. Схема скоростей и напряжений в элементе оболочки на границе контактной области

Предположим, что одномерные процессы в вязкоупругом материале в контактной области описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной, т.е.

$$\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_0 \left(\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon \right), \tag{16}$$

где σ - напряжение, ε - деформация, E_0 - релаксированный модуль упругости, τ_ε и τ_σ - времена релаксации и ретардации, при этом выполняется следующее важное соотношение между параметрами вязкоупругой среды:

$$\frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} = \frac{E_\infty}{E_0}, \tag{17}$$

и

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} x(t') dt' \tag{18}$$

- дробная производная Римана-Лиувилля, $\Gamma(1-\gamma)$ - гамма-функция, $\gamma(0 < \gamma \le 1)$ - параметр дробности и $x(t)$ - некоторая функция.

Экспериментальные данные показывают, что для большинства вязкоупругих материалов объемной релаксацией можно пренебречь по сравнению со сдвиговой релаксацией, т.е. считать, что объемный модуль упругости K остается постоянным в процессе механического нагружения этого материала, следовательно, справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\tilde{E}}{1-2\tilde{\nu}} = \frac{E_\infty}{1-2\nu_\infty}, \tag{20}$$

где E_∞ и ν_∞ - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона соответственно.

Выражая напряжение σ через деформацию ε или деформацию ε через напряжение σ из соотношения (17) с учетом (18), находим

$$\sigma = E_\infty \left(1 - \nu_\varepsilon \frac{1}{1+\tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \right) \varepsilon, \tag{21}$$

или

$$\varepsilon = J_\infty \left(1 + \nu_\sigma \frac{1}{1+\tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \right) \sigma, \tag{22}$$

где $J_0 = E_0^{-1}$ и $J_\infty = E_\infty^{-1}$ - релаксированное и нерелаксированное значения податливости материала соответственно, а параметры вязкоупругого материала ν_ε и ν_σ представляют собой дефекты модулей

$$\nu_\varepsilon = \frac{J_0 - J_\infty}{J_0} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}, \qquad \nu_\sigma = \frac{J_0 - J_\infty}{J_\infty} = \frac{E_\infty - E_0}{E_0}.$$

В соотношения (21) и (22) входит один и тот же оператор, который является безразмерным оператором Ю.Н. Работнова, т.е.

$$\ni_\gamma^*\left(\tau_i^\gamma\right)=\frac{1}{1+\tau_i^\gamma D^\gamma}\ . \tag{23}$$

Тогда уравнения (21) и (22) можно записать в виде

$$\sigma=E_\infty\left[\varepsilon-\nu_\varepsilon\int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t'}{\tau_\varepsilon}\right)\varepsilon\left(t-t'\right)dt'\right], \tag{24}$$

$$\varepsilon=J_\infty\left[\sigma+\nu_\sigma\int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t'}{\tau_\sigma}\right)\sigma\left(t-t'\right)dt'\right]. \tag{25}$$

Уравнения (24) и (25) являются соотношениями Больцмана-Вольтерра со слабо сингулярными ядрами наследственности $\ni_\gamma\left(-\dfrac{t}{\tau_i}\right)$, которые затухают при $t\to\infty$, при этом резольвентные ядра определяются одной и той же функцией

$$\ni_\gamma\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)=\frac{t^{\gamma-1}}{\tau_i^\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(t/\tau_i\right)^{\gamma n}}{\Gamma\left[\gamma\left(n+1\right)\right]}\ , \tag{26}$$

предложенной Ю.Н. Работновым в 1948 году и названной им дробно-экспоненциальной функцией.

Для дальнейших вычислений операторы, входящие в уравнения (24) и (25), удобно переписать в виде

$$\tilde{E}=E_\infty\left[1-\nu_\varepsilon \ni_\gamma^*\left(\tau_\varepsilon^\gamma\right)\right], \tag{27}$$

$$\tilde{J}=J_\infty\left[1+\nu_\sigma \ni_\gamma^*\left(\tau_\sigma^\gamma\right)\right]. \tag{28}$$

Тогда используя теорему умножения безразмерных операторов Ю.Н. Работнова

$$\ni_\gamma^*\left(\tau_\varepsilon^\gamma\right)\ni_\gamma^*\left(\tau_\sigma^\gamma\right)=\frac{\tau_\varepsilon^\gamma \ni_\gamma^*\left(\tau_\varepsilon^\gamma\right)-\tau_\sigma^\gamma \ni_\gamma^*\left(\tau_\sigma^\gamma\right)}{\tau_\varepsilon^\gamma-\tau_\sigma^\gamma}\ , \tag{29}$$

получим оператор Пуассона для вязкоупругого материала

$$\tilde{\nu}=\nu_\infty+\frac{1}{2}\left(1-2\nu_\infty\right)\nu_\varepsilon \ni_\gamma^*\left(\tau_\varepsilon^\gamma\right), \tag{30}$$

где параметр вязкоупругого материала ν_ε представляет собой дефект модулей

Затем используя алгебру безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова, развитую в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, можно расшифровать оператор $(1-\tilde{\nu}_i^2)\tilde{E}_i^{-1}$, и следовательно, определить операторы E^* и $\tilde{k}$, которые позволяют в итоге записать интегро-дифференциальное уравнение для локального смятия $\alpha(t)$в виде:

$$
\alpha\ddot{\alpha}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\left(G_1\frac{1}{2R}\alpha+G_2\right)\alpha^{1/2}\dot{\alpha}+
$$
$$
+\text{æ}\left[\alpha^{3/2}-m_1\int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t'}{t_1}\right)\alpha^{3/2}(t-t')dt'-m_2\int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t'}{t_2}\right)\alpha^{3/2}(t-t')dt'\right]= \quad (31)
$$
$$
=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\left(G_1\frac{1}{2R}\alpha+G_2\right)\alpha^{1/2}V,
$$

где $\text{æ}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3\rho\pi h\sqrt{R}}\,\dfrac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2}=\dfrac{4\sqrt{2}G_1^2}{3\pi h\sqrt{R}}$.

Так как процесс соударения двух оболочек является кратковременным, т.е. если выполняется условие ($t/\tau_i \ll 1$), то, как это было показано в работах Ю.Н. Работнова и K.S. Cole и R.H. Cole, дробно-экспоненциальную функцию (26) можно с достаточной точностью заменить более простым выражением

$$
\ni_\gamma\left(-\frac{t}{t_i}\right)\approx\frac{t^{\gamma-1}}{t_i^\gamma\Gamma(\gamma)}, \quad (32)
$$

т.е. учесть первый член ряда в формуле (26). Более того, из (23) следует, что

$$
\text{э}^*_{\gamma_2}\left(\tau^\gamma\right)\approx\tau^{-\gamma}I^\gamma,
$$

где I^γ - дробный интеграл.

В этом случае уравнение (31) принимает вид

$$
\alpha\ddot{\alpha}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\left(G_1\frac{1}{2R}\alpha+G_2\right)\alpha^{1/2}\dot{\alpha}+
$$
$$
+\text{æ}\left[\alpha^{3/2}-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{m_1}{t_1^\gamma}+\frac{m_2}{t_2^\gamma}\right)\int_0^t (t-t')^{\gamma-1}\alpha^{3/2}(t')dt'\right]= \quad (33)
$$
$$
=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\left(G_1\frac{1}{2R}\alpha+G_2\right)\alpha^{1/2}V.
$$

В третьем параграфе рассмотрено соударение двух вязкоупругих оболочек, вязкоупругие свойства которых описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными целыми производными. В процессе удара происходит разрушение поперечных межмолекулярных связей в пределах контактной области сталкивающихся тел, что приводит к более свободным перемещениям молекул по отношению друг к другу и, наконец, к снижению вязкости материала оболочки в зоне контакта. Это обстоятельство позволяет описать поведение материалов сталкивающихся сферических оболочек внутри контактной области при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, так как изменение параметра дробности (порядка дробной производной) позволяет регулировать вязкость материалов оболочек. Поэтому параметр дробности можно рассматривать в качестве структурного параметра.

При изучении ударных взаимодействий вязкоупругих тел необходимо использовать обобщенный закон Герца (1). В этом случае уравнения движения контактной области можно привести к виду

$$\pi R'\alpha\dot{v}_{\xi 1} - \frac{4}{3}\frac{(R')^{1/2}}{æ_{\infty}\rho_1 h_1}\left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^{4} M_j \int_0^t \ni_{\gamma}\left(-\frac{t'}{t_j}\right)\alpha^{3/2}\left(t-t'\right)dt'\right] = \tag{34}$$

$$= -2\pi(R')^{1/2}\alpha^{1/2}G_{2\infty}^{(1)}v_{\xi 1}\ ,$$

$$\pi R'\alpha\dot{v}_{\xi 2} + \frac{4}{3}\frac{(R')^{1/2}}{æ_{\infty}\rho_2 h_2}\left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^{4} M_j \int_0^t \ni_{\gamma}\left(-\frac{t'}{t_j}\right)\alpha^{3/2}\left(t-t'\right)dt'\right] = \tag{35}$$

$$= -2\pi(R')^{1/2}\alpha^{1/2}G_{2\infty}^{(2)}v_{\xi 2}\ .$$

Далее в четвертом параграфе получены приближенные аналитические решения уравнений (33), (34) и (35) и найдены выражения, по которым можно подсчитать основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, максимальные значения контактной силы и локального смятия, а также времена, при которых указанные величины достигают своих максимальных значений.

На рисунке 3 приведены зависимости контактной силы и локального смятия от времени в случае соударения двух одинаковых вязкоупругих сферических оболочек для различных значений параметра дробности при начальной скорости соударения V=10м/с. Из рисунка 3 видно, что с увеличением радиусов оболочек величины локального смятия и максимального значения контактной силы возрастают, при этом время контакта возрастает с увеличением параметра дробности от нуля до единицы. Из рисунка 3 следует, что чем больше параметр дробности, т.е. чем сильнее проявляются вязкие свойства материалов оболочек в зоне контактного взаимодействия, тем больше максимальное значение смятия и меньше максимум контактной силы, при этом все кривые для локального смятия, соответствующие параметрам дробности $0<\gamma<1$, находятся между кривыми, построенными для двух предельных случаев: $\gamma=0$ и $\gamma=1$.

В пятом параграфе рассмотрен частный случай удара вязкоупругой сферической оболочки радиусом R по вязкоупругой пластинке со скоростью V_0, когда вязкоупругие свойства соударяющихся тел описываются моделью стандартного линейного тела. Сравнение временных зависимостей локального смятия и контактной силы в случае соударения двух сферических оболочек и удара сферической оболочки по вязкоупругой пластинке показал, что механическая система «сферическая оболочка-ударник + пластинка-мишень» является более жесткой, чем механическая система, состоящая из двух контактирующих сферических оболочек. Другими словами, в первом случае время контакта меньше, а значения локального смятия и контактной силы больше, чем в случае ударного взаимодействия двух вязкоупругих сферических оболочек.

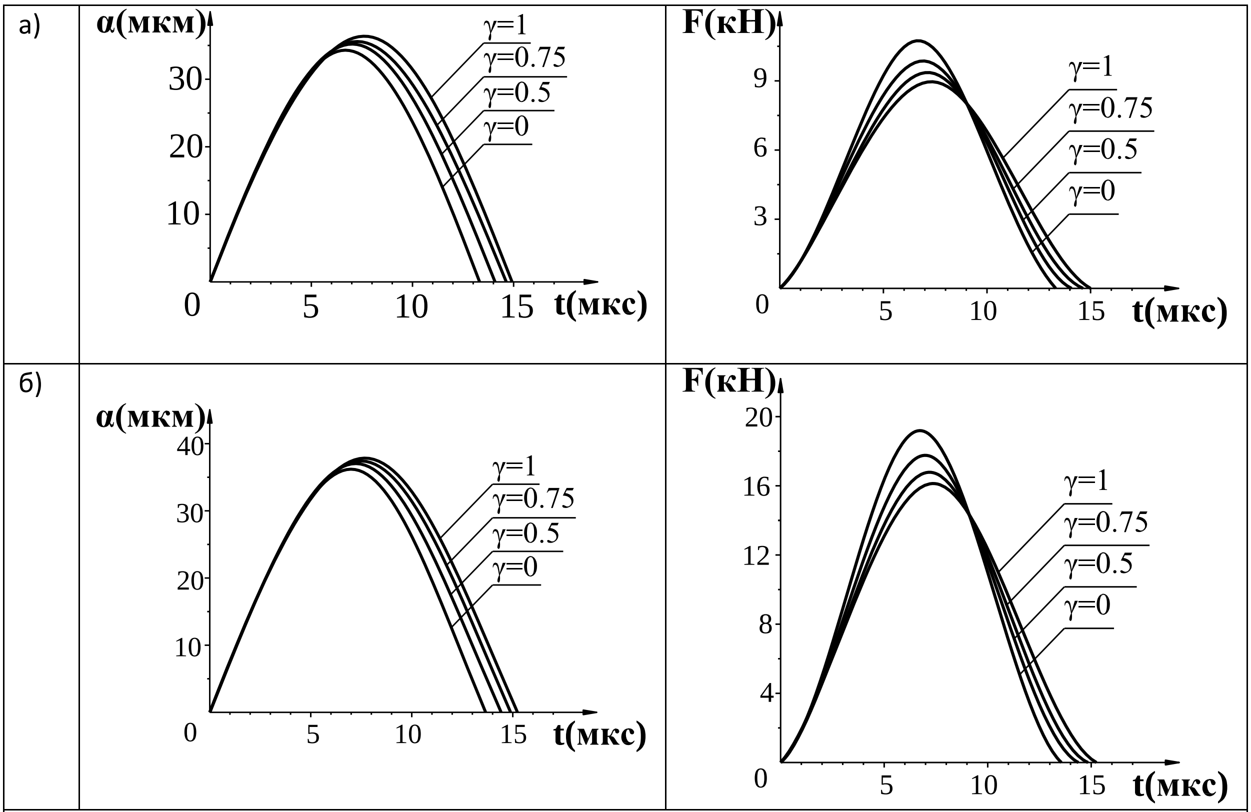

Рисунок 3. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае соударения двух одинаковых вязкоупругих сферических оболочек при $h_1 = h_2 = 0.05м,\ \nu_{1\infty} = \nu_{2\infty} = 0.25,\ \rho_1 = \rho_2 = 2600\frac{кг}{м^3},\ E_{10} = E_{20} = 100ГПа,$ $E_{1\infty} = E_{2\infty} = 110ГПа,\ \tau_1 = \tau_3 = 0.001c, V_0 = 10м/c,$ радиусы оболочек: а) $R_1 = R_2 = 1м$, б) $R_1 = R_2 = 3м$

В третьей главе рассмотрены некоторые частные случаи, которые могут иметь важное практическое значение: удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой пластинке и соударение одной сферической оболочки по другой, находящейся в покое, при этом ударяющиеся тела могут обладать различными свойствами.

В первом параграфе рассмотрена задача о нормальном ударе вязкоупругой сферической оболочки с начальной скоростью V_0 по жесткой пластинке (рис. 4), т.е. пластинке, нерелаксированный модуль упругости которой намного больше соответствующего модуля упругости материала оболочки, когда вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными производными целого порядка.

В этом случае движение контактной области с радиусом a под действием поперечной силы $2\pi a h \sigma_{rz}\big|_{r=a}$ и контактной силы F_{cont}, задаваемой при помощи обобщенного закона Герца (1) с оператором жесткости (8), описывается следующей системой двух уравнений:

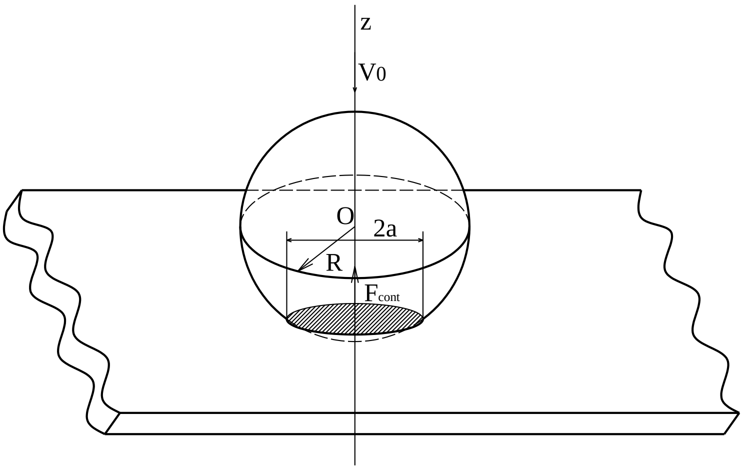

Рисунок 4. Схема нормального удара вязкоупругой сферической оболочки о бесконечную жесткую пластинку

$$\rho\pi a^2 h\dot{v}_z = 2\pi a h \sigma_{rz}\big|_{r=a} + F_{cont} \ , \qquad (36)$$

$$V_0 - v_z\big|_{r=a} = \dot{\alpha} \ , \qquad (37)$$

при этом динамическое условие совместности при $a/R \ll 1$ имеет вид:

$$\sigma_{rz}\big|_{r=a} = -\rho G_2 v_z\big|_{r=a} \ . \qquad (38)$$

Подставляя (37) и (38) в (36) и учитывая, что $a^2 = R\alpha$, получим

$$\rho\pi R\alpha h\dot{v}_z\big|_{r=a} = -2\pi\left(R\alpha\right)^{1/2} h\rho G_2 v_z\big|_{r=a} + \tilde{k}\alpha^{3/2} \ . \qquad (39)$$

Для решения уравнения (38), нужно определить оператор $\tilde{k}$, а для этого надо расшифровать оператор $\tilde{E}/\left(1-\tilde{\nu}^2\right)$

$$\frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} = \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2}\left[1 - m_1 \ni_\gamma^*\left(t_1^\gamma\right) - m_2 \ni_\gamma^*\left(t_2^\gamma\right)\right], \qquad (40)$$

где

$$t_1^\gamma = \frac{2\left(1+\nu_\infty\right)\tau_\varepsilon^\gamma}{2\left(1+\nu_\infty\right)+\nu_\varepsilon\left(1-2\nu_\infty\right)}; \qquad m_1 = \frac{3}{2}\frac{\left(1-\nu_\infty\right)\nu_\varepsilon}{2\left(1+\nu_\infty\right)+\nu_\varepsilon\left(1-2\nu_\infty\right)},$$

$$t_2^\gamma = \frac{2\left(1-\nu_\infty\right)\tau_\varepsilon^\gamma}{2\left(1-\nu_\infty\right)-\nu_\varepsilon\left(1-2\nu_\infty\right)}; \qquad m_2 = \frac{3}{2}\frac{\left(1+\nu_\infty\right)\nu_\varepsilon}{2\left(1-\nu_\infty\right)-\nu_\varepsilon\left(1-2\nu_\infty\right)},$$

Уравнение (39) с учетом (37) и (40), а также начальных условий

$$\alpha\big|_{t=0} = 0 \ , \qquad \dot{\alpha}\big|_{t=0} = V_0 \ , \qquad (41)$$

сводится к

$$\ddot{\alpha} + \text{æ}\left[\alpha^{\frac{1}{2}}(t) - \Delta_\gamma \alpha^{-1}\int_0^t \left(t-t'\right)^{\gamma-1}\alpha^{3/2}\left(t'\right)dt'\right] = 0 \qquad (42)$$

где $\text{æ} = \dfrac{4E_\infty}{3\pi\sqrt{R}\rho h\left(1-\nu_\infty^2\right)}$, $\qquad \Delta_\gamma = \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{j=1}^{2}\dfrac{m_j}{t_j^\gamma}$.

Если $\gamma = 0$, то есть оболочка является упругой, приближенное аналитическое решение имеет вид

$$t_{cont}^{(0)} \approx \left(\frac{15}{4}\frac{V_0^{1/2}}{\text{æ}}\right)^{2/3}, \qquad t_{max}^{(0)} \approx \left(\frac{3}{2}\frac{V_0^{1/2}}{\text{æ}}\right)^{2/3}, \tag{43}$$

$$F_{\max}^0 \approx \frac{4}{3}\frac{E_\infty\sqrt{R}}{1-\nu_\infty^2}\left[\alpha_{max}^0\right]^{3/2}, \qquad \alpha_{max}^{(0)} \approx \frac{3}{5}V_0 t_{max}^{(0)} . \tag{44}$$

Если $\gamma = 1$, то есть вязкоупругие свойства оболочки описываются моделью стандартного линейного тела с целыми произвоными,

$$t_{cont}^{(1)} = t_{cont}^{(0)} + \frac{4}{35}\Delta_1 t_{cont}^{(0)\,2}, \qquad t_{max}^{(1)} = t_{max}^{(0)} + \frac{4}{25}\Delta_1 t_{max}^{(0)\,2}, \tag{45}$$

$$F_{\max}^1 \approx \frac{4}{3}\frac{E_\infty\sqrt{R}}{1-\nu_\infty^2}\left[\left(\alpha_{max}^1\right)^{3/2} - \frac{6}{15}\Delta_1 V^{3/2} t^{5/2}\right], \qquad \alpha_{max}^{(1)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{12}{175}\Delta_1 t_{max}^{(0)\,2} . \tag{46}$$

При $0 < \gamma < 1$ и 1. Решение имеет вид

$$t_{cont}^{(\gamma)} \approx t_{cont}^{(0)} + \epsilon, \qquad \epsilon = \frac{5}{2}\Delta_\gamma \frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma\right)\frac{t_{cont}^{(0)\,1+\gamma}}{(3/2+\gamma)(5/2+\gamma)} . \tag{47}$$

$$t_{max}^{(\gamma)} \approx t_{max}^{(0)} + \epsilon_1, \qquad \epsilon_1 = \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma\right)\frac{t_{max}^{(0)\,1+\gamma}}{(3/2+\gamma)} . \tag{48}$$

$$\alpha_{max}^{(\gamma)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{9}{2}V_0\Delta_\gamma \frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma\right)\frac{t_{max}^{(0)\,1+\gamma}}{(3/2+\gamma)(5/2+\gamma)} . \tag{49}$$

Во втором параграфе проведен сравнительный анализ двух задач: о нормальном ударе вязкоупругой сферической оболочки с начальной скоростью V_0 по жесткой сферической оболочке, находящейся в покое на жесткой пластине (рис. 5), когда вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными производными целого порядка, и об ударе жесткой сферической оболочки по неподвижной вязкоупругой сферической оболочке, расположенной на жесткой пластине (рис. 6). Поведение же материала сферической оболочки в области контакта будем описывать с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

В этих случаях оператор жесткости $\tilde{k}$ в обобщенном законе Герца определяется при помощи соотношений (9) и (10). Тогда определяющее уравнение для первой задачи принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \text{æ}\left[\alpha^{\frac{1}{2}}(t) - \Delta_\gamma \alpha^{-1}\int_0^t (t-t')^{\gamma-1}\alpha^{\frac{3}{2}}(t')dt'\right] = 0 . \tag{50}$$

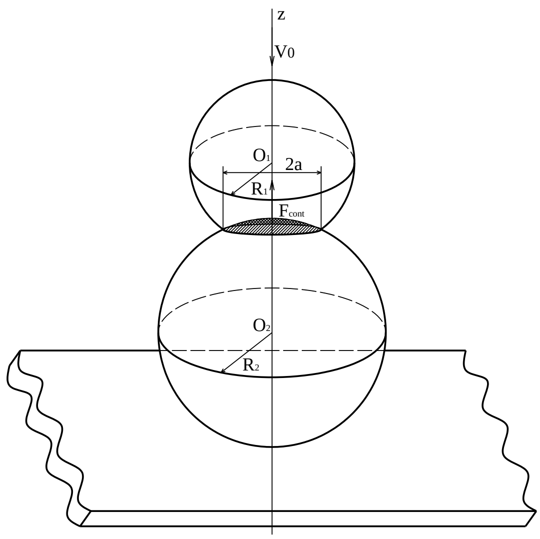

Рисунок 5. Схема нормального удара вязкоупругой сферической оболочки по жесткой сферической оболочке

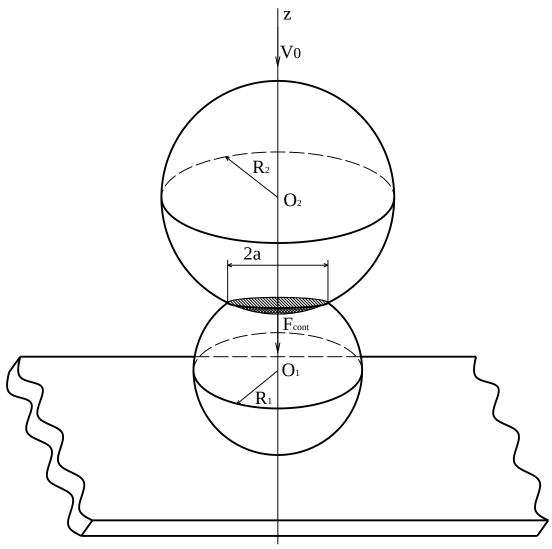

Рисунок 6. Схема нормального удара жесткой сферической оболочки по вязкоупругой сферической оболочке

При ударе жесткого ударника по вязкоупругой сферической оболочке, расположенной на жесткой пластине (рис. 6), уравнение движения жесткой сферы массы m имеет вид

$$m\ddot{z} = -\tilde{k}\alpha^{3/2}, \quad \dot{z} = v_z\big|_{r=a} + \dot{\alpha}. \tag{51}$$

Из уравнений (51) находим

$$m\dot{v}_z\big|_{r=a} = -m\ddot{\alpha} - \tilde{k}\alpha^{3/2} \;, \tag{52}$$

или с учетом динамического условия совместности (38)

$$\left(\rho\pi R_1\alpha h + m\right)\dot{v}_z\big|_{r=a} = -m\ddot{\alpha} - 2\pi\left(R_1\alpha\right)^{1/2} h\rho G_2\, v_z\big|_{r=a} \;. \tag{53}$$

Показано, что уравнение (53) сводится к уравнению (50), что говорит о том, что две задачи, которые изначально описываются разными системами интегро-дифференциальных уравнений, имеют одинаковые решения, т.е. эти задачи взаимообратные.

На рис. 6 и 7 приведены временные зависимости локального смятия и контактной силы для различных сочетаний значений параметров оболочек. Увеличение размеров оболочек приводит к увеличению как максимального значений контактной силы и локального смятия.

Основные результаты работы

Основным результатом настоящей диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений.

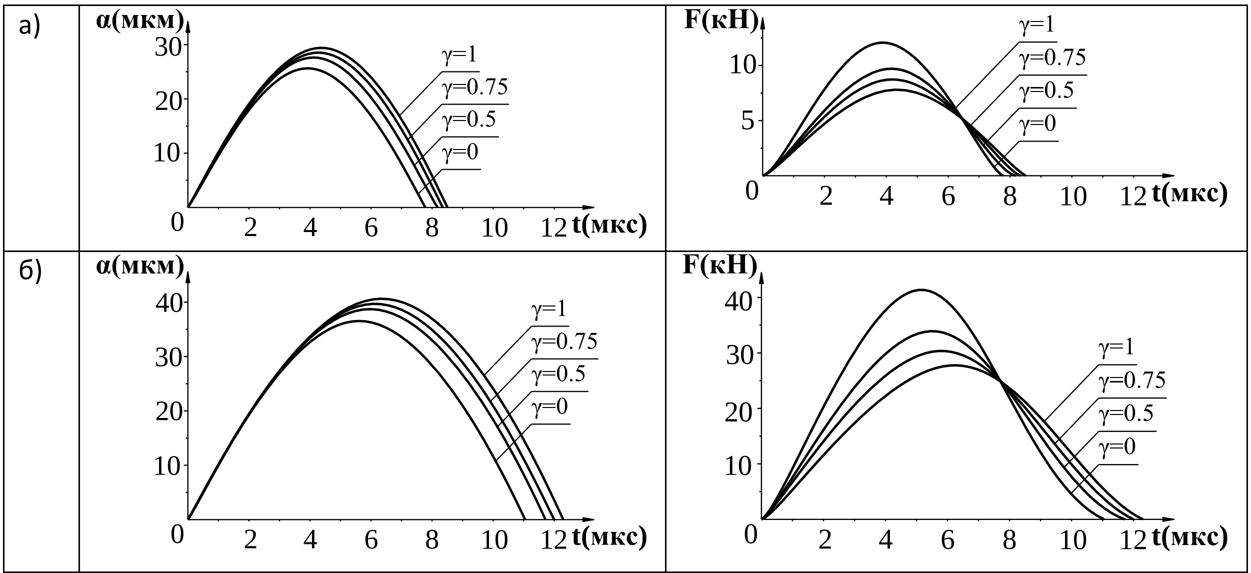

Рисунок 7. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае соударения вязкоупругой и жесткой сферических оболочек; свойства материалов $h_1 = h_2 = 0.05м,\ \nu_\infty = 0.25,\ \rho_1 = \rho_2 = 2600\dfrac{кг}{m^3},\ E_0 = 100ГПа,$ $E_\infty = 110ГПа,\ \tau_\varepsilon = 0.001c, V_0 = 10м/c,$ радиусы оболочек: а) $R_1 = R_2 = 1м$, б) $R_1 = R_2 = 3м$.

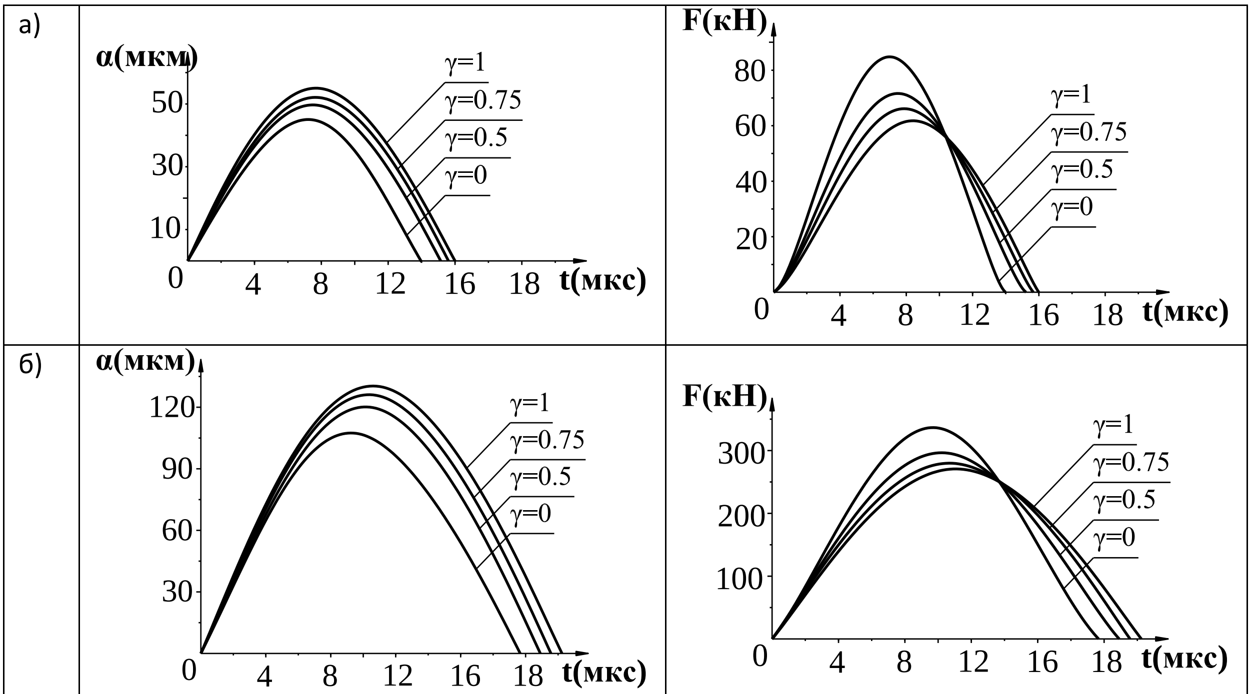

Рисунок 8. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае соударения вязкоупругой сферической оболочки и жесткой пластинки; свойства материалов $h_1 = h_2 = 0.05м,\ \nu_\infty = 0.25,$ $\rho_1 = \rho_2 = 2.6\dfrac{кН}{м^3},\ E_0 = 100ГПа,\ E_\infty = 110ГПа,\ \tau_\varepsilon = 0.001c,\ R_2 = 3м,$ начальная скорость удара: а) $V_0 = 10м/c$, б) $V_0 = 20м/c$.

1. Волновая теория удара обобщена на случай соударения двух сферических оболочек. При помощи лучевого метода определены основные динамические характеристики полей напряжений и деформаций при распространении поверхностей сильного разрыва, зарождающихся в оболочках в момент удара и затем распространяющихся в виде расходящихся кругов. На основе построенной теории решена задача о соударении двух упругих сферических оболочек, при этом контактная сила определяется при помощи классического контактного закона Герца.

2. Предложена модель соударения двух сферических оболочек для случая, когда вязкоупругие свойства сталкивающихся тел проявляются только в месте контакта в результате изменения микроструктуры оболочек в процессе контактного взаимодействия и описываются с помощью модели стандартного линейного тела с дробными производными. Вне области контакта материал оболочек остается упругим с нерелаксированным значением модуля упругости. Используя принцип соответствия Вольтерра, разрешающие уравнения, описывающие процесс контактного взаимодействия упругих оболочек, были обобщены на случай соударения оболочек, приобретающих вязкоупругие свойства в пределах контактной области. С этой целью классический закон Герца был обобщен путем замены коэффициента жесткости при ударе на соответствующий вязкоупругий оператор, учитывающий геометрию соударяющихся тел и зависящие от времени вязкоупругие аналоги модулей упругости и коэффициентов Пуассона.

3. Решена задача о соударении двух вязкоупругих сферических оболочек, вязкоупругие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела с производными целого порядка. Изменение вязких свойств внутри контактной зоны описывается при помощи обобщенного закона, в котором вязкоупругий оператор, пропорциональный цилиндрической жесткости, расшифровывается при помощи алгебры безразмерных операторов Ю.Н. Работнова. Получены интегро-дифференциальные уравнения для контактной силы и величины локального смятия.

4. Кратковременность процесса ударного взаимодействия позволила получить приближенные аналитические решения, на основе которых определены основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, время, при котором контактная сила и локальное смятие достигают своих максимальных значений и сами максимальные значения.

5. Рассмотрены частные случаи ударного взаимодействия вязкоупругой сферической оболочки по вязкоупругой или жесткой пластинке, а также удар сферической оболочки по второй оболочке, которая находится в состоянии покоя. Построены приближенные решения с использованием малого параметра, которым является время протекания ударного процесса.

6. Полученные временные зависимости контактной силы и локального смятия могут быть использованы в различных проектных организациях при

расчетах ударных взаимодействий различных конструкций, свойства которых могут изменяться в процессе контакта.

7. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

Публикации автора

<u>*Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ*</u>

1. Duong Tuan Manh, Modelling of the collision of two viscoelastic spherical shells / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Duong Tuan Manh // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2016. - Vol. 20, № 4. - P.481-509 (проиндексировано в базах данных Web of Science и Scopus, импакт-фактор журнала равен 1.12 в WoS).

2. Duong Tuan Manh, Comparative analysis of two problems of the impact interaction of rigid and viscoelastic spherical shells / Rossikhin Y., Shitikova M., Duong Tuan Manh // *International Journal of Mechanics.* – 2017. - Vol. 11. - P. 6-11 (проиндексировано в базе данных Scopus).

<u>*Статьи и материалы конференций*</u>

3. Duong Tuan Manh, Analysis of the collision of two elastic spherical shells / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Duong Tuan Manh // *Mechanics, Energy, Environment* (ISBN: 978-1-61804-346-7), *Energy, Environment and Structural Engineering Series* (ISSN: 2227-4359), Vol.42. - P. 107-111, WSEAS Publishers, 2015.

4. Duong Tuan Manh, Modeling of the dynamic response of a viscoelastic plate by a viscoelastic spherical shell / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Duong Tuan Manh // *Book of Abstracts of the XLIV International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"*, Санкт Петербург, 27.06.2016 - 01.07.2016. - P. 42.

5. Duong Tuan Manh, Normal impact of a viscoelastic spherical shell against a rigid plate / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Duong Tuan Manh // *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. - 2016. - Vol. 11. - P. 125-128.

6. Duong Tuan Manh, Analysis of the impact of a viscoelastic spherical shell against a rigid plate / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Duong Tuan Manh // *CD Abstracts of the 7th International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES'16*, Dubrovnik, Croatia, 28-30 September, 2016, 2 pages.

Подписано в печать 26.06.2017 г. Формат 60x84 1/16
Бумага писчая. Усл.-печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 120 экз. Заказ № 152

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий ФГБОУ ВО «ВГТУ». 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября,84