

На правах рукописи



Эстрада Меза Мария Гуаделупе

**Анализ динамического поведения вязкоупругих балок  
при ударных воздействиях с использованием моделей,  
содержащих дробные операторы**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Научный руководитель:

**Шитикова Марина Вячеславовна**  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет», научный центр по  
фундаментальным исследованиям в области  
естественных и строительных наук, главный  
научный сотрудник

Официальные оппоненты:

**Радченко Владимир Павлович**  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «Самарский государственный  
технический университет», кафедра «Прикладная  
математика и информатика», заведующий кафедрой

**Босяков Сергей Михайлович**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусский государственный университет  
кафедра теоретической и прикладной механики  
доцент

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный  
университет», г. Ульяновск

Защита состоится «26» апреля 2017 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, к. 9, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского и на сайте <http://www.sgu.ru/research/dossertation-council/d-212-243-10>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Сафонов Роман Анатольевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Анализ динамического поведения конструкций при нестационарных воздействиях, с точки зрения фундаментальных исследований и инженерных приложений, имеет важное значение, потому что им подвергаются практически все конструкции на различных этапах жизненного цикла: при изготовлении и монтаже, при эксплуатации в нормальных и экстремальных условиях. Одним из наиболее сложных динамических эффектов, который представляет особый интерес для специалистов в области расчета и проектирования различных элементов конструкций и которому посвящена настоящая работа - это ударное взаимодействие тел, исследование которого становится все более важным для современных инженеров из-за необходимости использования современных легких материалов для изготовления тонкостенных элементов конструкций.

Явление ударного воздействия представляет собой динамические нагрузки непродолжительной и высокой интенсивности; при этом, несмотря на кратковременное действие, они могут носить потенциально катастрофический характер, и даже в случаях низкой скорости удара часто приводят к незначительным внутренним повреждениям сооружений, не обнаруживаемым при визуальном осмотре. Это, в свою очередь, может служить предпосылкой серьезных повреждений конструкций и, в конечном счете, к значительным нарушениям в их функционировании.

В течение десятилетий ученые и инженеры уделяли большое внимание решению проблем, касающихся ударного взаимодействия тел. Обзоры исследований в этой области приведены в работах В. Гольдсмита, S. Abrate, Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, в которых отмечается, что большинство работ посвящено анализу ударного взаимодействия упругих тел.

Поскольку балки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при ударных воздействиях является весьма актуальным, особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия. Ю.А. Россихин и М.В. Шитикова неоднократно демонстрировали в своих многочисленных исследованиях взаимосвязь дробных операторов, описывающих свойства вязкоупругих сред, с дробными экспоненциальными операторами Ю.Н. Работнова, предложенными для изучения наследственных сред, чтобы объяснить физический смысл дробного параметра в задачах удара и соединить его с изменениями в микроструктуре материала.

При изучении задач взаимодействия вязкоупругих тел возникают следующие вопросы: действительно ли полезны эти модели с дробными производными? Какая новая информация может быть получена при помощи этих моделей по сравнению с обычными моделями? Ответом на эти вопросы является тот факт, что дробные операторы способны моделировать эффект наследственной памяти, поскольку его эволюция во времени лучше

описывается дробными дифференциальными уравнениями, в то время как стандартные математические модели с производной целого порядка, в том числе нелинейные модели, не работают должным образом во многих случаях. Эволюция во времени описывается дробным параметром, который может изменяться от нуля до единицы, позволяя варьировать вязкостью. Это явление возможно, потому что структура материала в пределах контактной зоны соударяющихся тел может быть повреждена при ударе, в результате чего происходит уменьшение вязкости.

В последнее время научный коллектив под руководством профессоров Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. продвинулся значительно вперед других исследователей и является пионером в решении задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел с использованием различных моделей, содержащих операторы дробного порядка, поскольку владеет алгеброй безразмерных дробных операторов, которая позволяет с успехом расшифровывать сложнейшие операторы, которые встречаются в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих ударников и мишеней.

Часть этих исследований, касающихся задач низкоскоростного удара жесткого, упругого или вязкоупругого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде, или вязкоупругой балке типа Тимошенко, была выполнена диссертантом и подробно изложена в последующих главах.

**Основной целью** диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений.

**Тематика работы.** Содержание диссертации соответствует п. 2 «Теория моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой», п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

#### **Научная новизна.**

1. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

2. Волновая теория удара, разработанная для анализа ударного взаимодействия упругих тел, обобщена на случай учета вязкоупругих свойств ударника и/или мишени в виде балки.

3. Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко, вязкоупругие свойства которой вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта - моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник».

4. Полученные системы уравнений решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

5. Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой балкой Тимошенко с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

**Достоверность** базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

**Практическая ценность.** Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе эксплуатации могут подвергаться различным ударным воздействиям, приводящим к изменению свойств соударяющихся тел в зоне контакта.

Данные научные исследования выполнялись в соответствии с планом научно-исследовательских работ международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ФГБОУ ВО «ВГТУ» в рамках международного проекта РФФИ и Национального научного фонда Тайваня «Использование дробных операторов Ю.Н. Работнова для описания динамического поведения бетонных конструкций в процессе удара» (проект № 14-08-92008).

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2014-2016 годах; 2) на семинарах

международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; 3) на 9й международной конференции по механике сплошных сред (9th International Conference on Continuum Mechanics CM '15) в Риме, Италия, 7-9 ноября 2015 года; 4) на 44й международной летней школе-конференции по современным проблемам механики (Advanced Problems in Mechanics APM-2016) в Санкт-Петербурге 27 июня – 2 июля 2016 года; 5) на 23м международном конгрессе по звуку и колебаниям (23rd International Congress on Sound & Vibration, ICSV23) в Афинах, Греция, 10 – 14 июля 2016 года.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в шести печатных работах, из них три в изданиях, проиндексированных в международных базах данных Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

**Личный вклад автора.** Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, были получены лично соискателем и опубликованы совместно с научным руководителем, который определил основные направления исследования в процессе выполнения международного научного проекта РФФИ. В совместных публикациях диссертант участвовала в решении задач, поставленных перед нею руководителем, лично проводила все численные исследования.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на автора или источник заимствования.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка используемой литературы из 172 наименований. Работа изложена на 120 страницах, содержит 18 рисунков и 1 таблицу.

**На защиту выносятся** следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара упругих тел на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде балки Тимошенко с учетом растяжения ее срединной поверхности;
- анализ динамического поведения упругой балки Бернулли-Эйлера под действием контактной силы в вязкой среде при помощи введения в рассмотрение нового структурного параметра для описания демпфирующих свойств среды за счет использования производной дробного порядка;
- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих, упругих или жестких ударников с вязкоупругими балками с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Автор выносит благодарность Заслуженному деятелю науки РФ, доктору физико-математических наук, профессору Россихину Ю.А. за консультации и обсуждение работы на всем протяжении ее выполнения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, практическая значимость работы, а также дана краткая аннотация по главам.

**В первой главе** приводится критический анализ научной литературы, посвященной исследованию задач ударного взаимодействия и методов их решения.

Отмечается, что в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих тел, контактная сила  $P(t)$  связана с локальным смятием материалов соударяющихся тел  $\alpha(t)$  при помощи обобщенного закона Герца

$$P(t) = \tilde{k}\alpha^{3/2}, \quad (1)$$

в котором оператор жесткости  $\tilde{k}$  зависит от времени и учитывает геометрию и вязкоупругие свойства соударяющихся тел (в отличие от случая соударения упругих тел, когда коэффициент жесткости при ударе является константой). Так, в случае удара шара по балке оператор  $\tilde{k}$  имеет вид

$$\tilde{k} = \frac{4}{3}\sqrt{RE^*}, \quad (2)$$

где  $R$  - радиус шара, а вязкоупругие свойства шара и балки согласно принципу Вольтерра описываются оператором  $E^*$ .

Оператор  $E^*$  зависит от сочетания свойств материалов балки (мишени) и шара (ударника):

а) вязкоупругие ударник и мишень

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1 - \tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\nu}_1$ ,  $\tilde{\nu}_2$  и  $\tilde{E}_1$ ,  $\tilde{E}_2$  - зависящие от времени операторы Пуассона и Юнга соответственно вязкоупругой балки и вязкоупругого шара;

б) вязкоупругий ударник и упругая мишень

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \quad (4)$$

где  $\nu_1$  и  $E_1$  - коэффициент Пуассона и модуль Юнга упругой балки;

в) упругий ударник и вязкоупругая мишень

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1 - \tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (5)$$

где  $\nu_2$  и  $E_2$  - коэффициент Пуассона и модуль Юнга упругого шара;

г) жесткий ударник (когда модуль упругости ударника намного больше значения нерелаксированного модуля упругости мишени) и вязкоупругая мишень

$$E^* = \frac{\tilde{E}_1}{1 - \tilde{\nu}_1^2}. \quad (6)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что для определения оператора  $\tilde{k}(t)$  необходимо прежде всего задаться априори или найти экспериментальные зависимости операторов Юнга и Пуассона. В инженерной практике задачу зачастую упрощают, считая коэффициент Пуассона, не зависящим от времени. Однако экспериментальные данные, приведенные в многочисленных публикациях, в том числе и в работах академика Ю.Н. Работнова, показывают, что для большинства вязкоупругих материалов коэффициент Пуассона не является константой.

Таким образом, для решения задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел необходимо умение работать с операторными выражениями. Академиком Ю.Н. Работновым была введена дробно-экспоненциальная функция в 1948, а позже были предложены вязкоупругие модели, содержащие операторы дробного порядка, которые хорошо описывали экспериментальные данные по вязкоупругим материалам. Была разработана алгебра дробных операторов, имеющих размерность, что осложняло их использование для решения сложных краевых задач.

В данной диссертационной работе была использована алгебра безразмерных дробных операторов, развитая в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, которая позволяет расшифровывать сложнейшие операторы, встречающиеся в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих ударников и мишеней.

**Вторая глава** посвящена анализу балок Бернулли-Эйлера на ударные воздействия. В первом параграфе показано, что, вопреки укоренившимся взглядам на различие в колебаниях балки Бернулли-Эйлера при наличии внешнего и внутреннего трения, если перейти к обобщенным перемещениям и использовать гипотезу Рэлея о пропорциональности матриц упругости и демпфирования, то никакого различия между этими трениями не существует, поскольку в обоих случаях получаются одни и те же уравнения. Иначе говоря, и в том и в другом случаях балку можно считать упругой, а среду, в которой она колеблется, вязкой.

Система уравнений, описывающая динамическое поведение системы «вязкоупругий ударник – упругая мишень» в вязкой среде (рисунок 1), демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, имеет вид

$$m\ddot{y} = -P(t), \quad (7)$$

$$E_1 I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu D^{\gamma_1} w + \rho A \ddot{w} = P(t) \delta \left( x - \frac{L}{2} \right), \quad (8)$$



где  $m$  - масса шара,  $y$  - его перемещение,  $w(x,t)$  - прогиб балки,  $I$  - момент инерции поперечного сечения балки относительно главной оси,  $A$  - площадь поперечного сечения балки,  $\rho$  - плотность,  $\mu$  - коэффициент вязкости,  $\delta(x - \frac{L}{2})$  - дельта-функция Дирака,  $x$  - координата вдоль оси балки, точки над величинами обозначают частные производные по времени.

Слагаемое  $\mu D^{\gamma_1} w$  представляет собой силу вязкого сопротивления, появляющуюся при колебании балки в вязкой окружающей среде,  $\gamma_1$  ( $0 < \gamma_1 \leq 1$ ) – параметр дробности, т.е. порядок дробной производной Римана-Лиувилля

$$D^{\gamma_1} x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)} x(t') dt', \quad (9)$$

а  $\Gamma(1-\gamma_1)$  – гамма-функция.

В отличие от традиционного моделирования вязких сил сопротивления через производные по времени первого порядка, в настоящем исследовании используются производные по времени дробного порядка  $D^{\gamma}$ , так как это позволяет получить модальные коэффициенты демпфирования, зависящие от собственных частот колебаний, что соответствует экспериментальным данным.

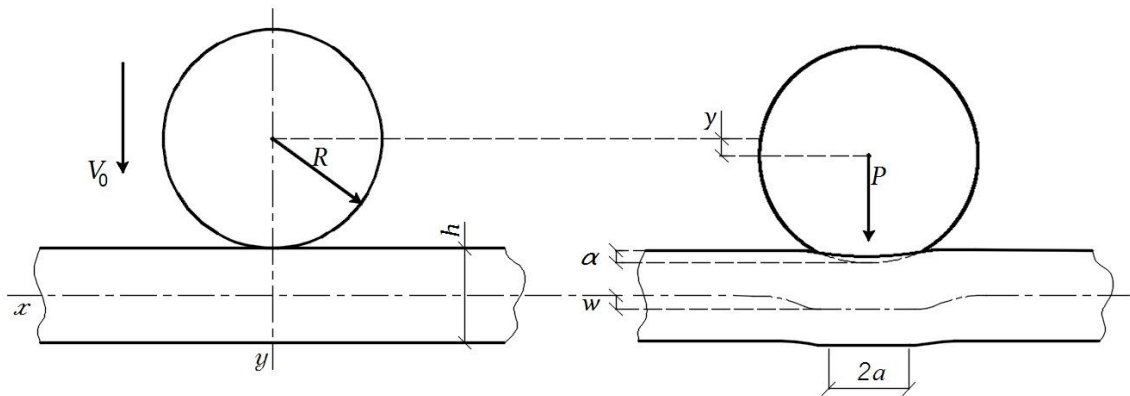


Рисунок 1. Схема ударного взаимодействия вязкоупругого шара с балкой Бернулли-Эйлера

К уравнениям (7) и (8) следует присоединить следующие начальные условия:

$$w(x,0) = 0, \quad \dot{w}(x,0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = V_0, \quad (10)$$

где  $V_0$  - начальная скорость шара в момент удара.

Раскладывая перемещение  $w(t)$  для шарнирно опертой балки Бернулли-Эйлера по собственным функциям  $W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) T_n(t), \quad (11)$$

где  $T_n(t)$  - обобщенные перемещения, подставляя соотношения (11) в уравнение (8) и учитывая ортогональность собственных функций на отрезке от 0 до  $L$ , получим бесконечную систему несвязанных уравнений

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{\mu_n}{\rho A} D^{\gamma_1} T_n(t) + \Omega_n^2 T_n(t) = F_n P(t) \quad (n=1,2,\dots), \quad (12)$$

каждое из которых описывает вынужденные колебания вязкоупругого осциллятора под действием силы, где  $\mu_n$  - коэффициент вязкости  $n$ -ой гармоники,  $\Omega_n$  - собственные частоты колебаний балки

$$\Omega_n^2 = \frac{E_1 I}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4, \quad (13)$$

$$\text{и } F_n = \frac{2}{\rho A L} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Учитывая гипотезу Рэлея о пропорциональности матриц упругости и вязкости, т.е.

$$\frac{\mu_n}{\rho A} = \Omega_n^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}, \quad (14)$$

где  $\tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$  - коэффициент пропорциональности ( $\tau_{\sigma_1}$  - время ретардации), уравнение (12) сводится к уравнению колебаний осциллятора на основе модели Кельвина-Фойгта с дробной производной.

Для того чтобы найти решение уравнения (8), необходимо найти функцию Грина  $G_n(t)$  для каждого осциллятора (12)

$$G_n(t) = A_{0n}(t) + A_n e^{-\alpha_n t} \sin(\omega_n t - \varphi_n), \quad (15)$$

где индекс  $n$  указывает порядковый номер осциллятора,  $A_n$  - амплитуда,  $\alpha_n$  - коэффициент затухания, а  $\omega_n$  и  $\varphi_n$  - частота и фаза соответственно. Из уравнения (15) видно, что функция Грина содержит два члена, один из которых,  $A_{0n}(t)$ , описывает дрейф положения равновесия и представляет собой интеграл, включающий функцию распределения динамических и реологических параметров, в то время как другой член представляет собой произведение двух зависящих от времени функций, экспоненты и синусоиды, и описывает затухающие колебания вокруг дрейфующего положения равновесия. Во втором параграфе функция Грина (15) найдена при помощи метода преобразования Лапласа.

В третьем параграфе с помощью найденной функции Грина строится решение для перемещений балки

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \int_0^t G_n(t-t') P(t') dt', \quad (16)$$

и вводится величина, характеризующая относительное сближение шара и

балки, т.е. локальное смятие материалов упругой балки вязкоупругого шара

$$\alpha(t) = y(t) - w\left(\frac{L}{2}, t\right), \quad (17)$$

которое связано с контактной силой при помощи обобщенного закона Герца соотношениями (1), (2) и (4), а перемещение шара  $y(t)$  находится в результате двойного интегрирования уравнения (7)

$$y(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t')dt' + V_0 t. \quad (18)$$

Для того чтобы получить интегро-дифференциальное уравнения для величин  $\alpha(t)$  и  $P(t)$ , необходимо задать вид оператора  $\tilde{E}_2$ .

Предположим, что вязкоупругие свойства материала ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной

$$\sigma + \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \sigma = E_0 \left( \varepsilon + \tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \varepsilon \right), \quad (19)$$

где  $\gamma_2$  - параметр дробности ударника,  $\tau_{\varepsilon_2}$  и  $\tau_{\sigma_2}$  - времена релаксации и ретардации,  $E_0$  - релаксированный модуль упругости.

Тогда, оператор  $\tilde{E}_2$  имеет вид

$$\tilde{E}_2 = E_\infty \left[ 1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) \right], \quad (20)$$

где

$$\nu_\sigma = \frac{J_0 - J_\infty}{J_\infty} = \frac{E_\infty - E_0}{E_0}, \quad \nu_\varepsilon = \frac{J_0 - J_\infty}{J_0} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}, \quad \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_\sigma} = \frac{J_\infty}{J_0} = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}}{\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}}, \quad (21)$$

$E_\infty$  и  $\nu_\infty$  - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона материала шара,  $J_0$  и  $J_\infty$  - релаксированная и нерелаксированная податливости материала ударника, а  $\mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right)$  - безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова

$$\mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{i_2}^{\gamma_2} \right) = \frac{1}{1 + \tau_{i_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2}} \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (22)$$

Следуя Ю.Н. Работнову, предположим, что объемный модуль упругости материала ударника является постоянной величиной, тогда оператор Пуассона можно записать в виде

$$\nu_2 = \nu_\infty + \frac{1}{2} (1 - 2\nu_\infty) \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left( \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right). \quad (23)$$

Затем используя алгебру безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова, развитую в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, можно расшифровать оператор  $(1 - \tilde{\nu}_2^2) \tilde{E}_2^{-1}$ , и следовательно, определить операторы  $E^*$  и  $\tilde{k}$ , которые позволяют в итоге записать интегро-дифференциальное уравнение для контактной силы  $P(t)$  в виде:

$$P(t) = k \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left( -\frac{t-t''}{\tau_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (24)$$

где

$$\mathfrak{E}_{\gamma_2} \left( -\frac{t}{\tau_{i2}} \right) = \frac{t^{\gamma_2-1}}{\tau_{i2}^{\gamma_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{i2})^{\gamma_2 n}}{\Gamma[\gamma_2(n+1)]} \quad (i = \varepsilon, \sigma) \quad (25)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, которая при  $\gamma = 1$  переходит в обычную экспоненту.

Так как процесс ударного воздействия является кратковременным ( $t/\tau_{i2} \ll 1$ ), то, как это было показано в работах Ю.Н. Работнова и К.S. Cole и Р.Н. Cole, дробно-экспоненциальную функцию (25) можно с достаточной точностью заменить более простым выражением

$$\mathfrak{E}_{\gamma_2} \left( -\frac{t}{t_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma_2-1}}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)}, \quad (26)$$

которое является первым членом ряда в соотношении (25).

Учитывая формулу (26) и тот факт, что для малых значений времени  $t$  функция Грина  $G_n(t)$  пропорциональна  $t$  и принимает вид

$$G_n(t) \approx t A_n \omega_n \cos \varphi_n, \quad (27)$$

окончательно получим

$$\alpha(t) = V_0 t - k \left( \frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t \left[ \alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^{t'} (t' - t'')^{\gamma_2-1} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t - t') dt', \quad (28)$$

$$P(t) = k \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^t (t - t'')^{\gamma_2-1} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \quad (29)$$

Из уравнения (29) видно, что контактная сила в случае ударного взаимодействия балки с вязкоупругим ударником меньше, чем в случае упругого ударника.

Далее получены приближенные аналитические решения уравнений (28) и (29) и найдены выражения, по которым можно подсчитать основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, максимальные значения контактной силы и локального смятия, а также времена, при которых указанные величины достигают своих максимальных значений.

В четвертом параграфе рассмотрен частный случай удара жесткого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде.

Численные исследования проведены в пятом параграфе, которые подтвердили выводы аналитических выкладок. В частности показано, что при увеличении параметра дробности  $\gamma_2$  от 0, что соответствует упругому материалу ударника, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу, свойства

которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение размеров поперечного сечения балки приводит к увеличению как максимального значения контактной силы, так и продолжительности контакта, при этом чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т. е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта.

На рисунке 2 приведены зависимости контактной силы (а) и локального смятия (б) от времени в случае ударного взаимодействия балки Бернулли-Эйлера с жестким ударником (пунктирные линии) и упругим ударником (сплошные линии) при  $\gamma_2 = 0$ , а также с вязкоупругим ударником (сплошные линии при  $0 < \gamma_2 \leq 1$ ). Из рисунка 2а видно, что чем жестче ударник, тем больше максимум контактной силы и короче продолжительность контакта.

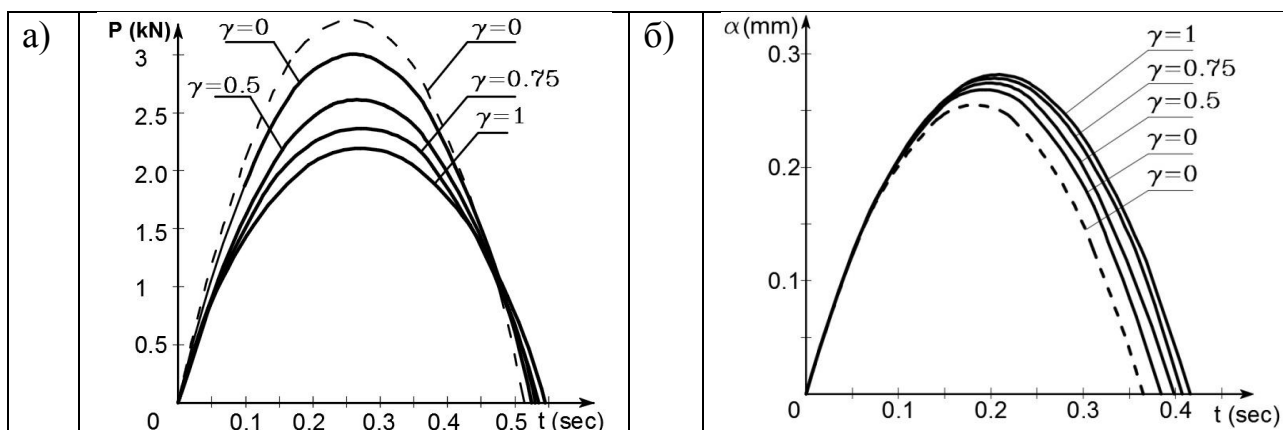


Рисунок 2. Зависимость контактной силы (а) и локального смятия (б) от времени в случае вязкоупругого (сплошные линии) и жесткого (пунктирные линии) ударника для (а)  $V_0=10\text{м/с}$ ,  $R=2\text{см}$  и поперечного сечения балки  $10 \times 20\text{см}$  и (б)  $V_0=10\text{м/с}$ ,  $R=2\text{см}$  и поперечного сечения балки  $15 \times 25\text{см}$

**Третья глава** посвящена анализу вязкоупругих балок типа Тимошенко, демпфирующие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела, на ударные воздействия.

Известно, что в задачах соударения предварительно напряженных тонких тел часто необходимо учитывать напряжение в срединной поверхности, которое также называется многими авторами как «мембранный эффект» или «мембранные усилия». Обобщение волновой теории удара на случай учета растяжения срединной поверхности в задачах поперечного удара упругого шара по упругой балке Тимошенко, пластинке Уфлянда-Миндлина и тонкостенной балке открытого профиля было развито в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой.

В данной диссертационной работе в первом параграфе третьей главы ставится задача обобщить волновую теорию удара на случай соударения

сферического ударника и вязкоупругой балки (рисунок 3), свойства которой задаются с помощью модели стандартного линейного твердого тела с обычными производными. Динамическое поведение такой балки с учетом растяжения ее срединной поверхности описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \dot{V}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A \dot{W}, \quad -\frac{\partial M}{\partial x} + Q = \rho I \dot{\Psi}, \quad (30)$$

$$N = AE_{\infty} \left[ 1 - \nu_{\varepsilon} \varepsilon_1^* (\tau_{\varepsilon}) \right] \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = KA\mu_{\infty} \left[ 1 - n \varepsilon_1^* (t_{\varepsilon}) \right] \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (31)$$

$$M = -IE_{\infty} \left[ 1 - \nu_{\varepsilon} \varepsilon_1^* (\tau_{\varepsilon}) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (32)$$

где  $M$ ,  $Q$  и  $N$  - изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила соответственно,  $u$  и  $w$  - продольное и поперечное перемещения,  $\psi$  - угол поворота поперечного сечения вокруг оси  $x$ ,  $V = \dot{u}$ ,  $W = \dot{w}$ ,  $\Psi = \dot{\psi}$ ,  $K$  - коэффициент сдвига, который зависит от формы поперечного сечения балки.

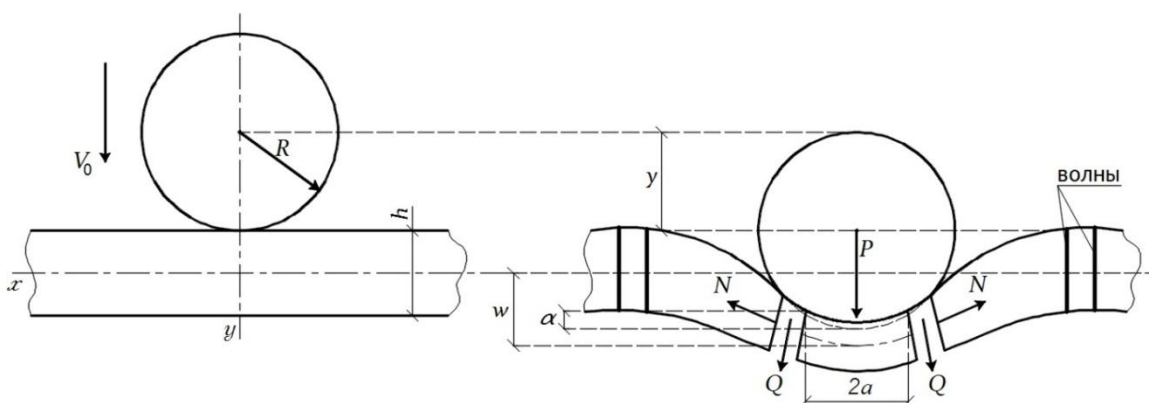


Рисунок 3. Схема ударного взаимодействия упругого сферического ударника и вязкоупругой балки типа Тимошенко

В процессе удара предполагается, что балка состоит из тонких слоев, прикрепленных друг к другу по краям, и после удара волны распространяются от границы области контакта, а волновые фронты являются параллельными плоскостями (рисунок 4).

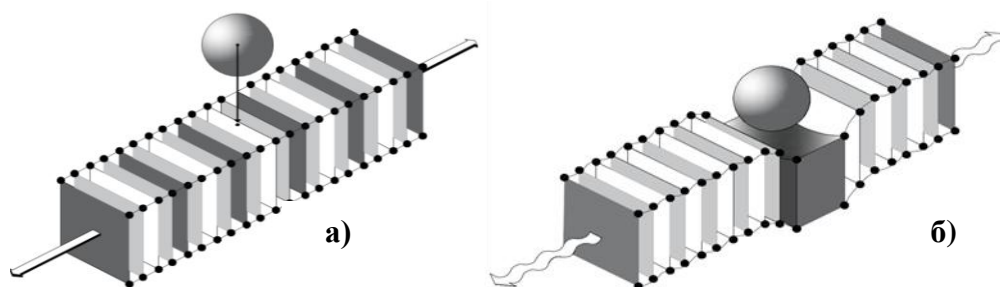


Рисунок 4. Схема взаимодействия тел: а) до и б) во время удара

В уравнениях (31) и (32) операторы, соответствующие модулю Юнга и модулю сдвига для случая, когда вязкоупругие свойства балки описываются моделью стандартного линейного тела, имеют вид:

$$\tilde{E} = E_{\infty} [1 - v_{\varepsilon} \mathfrak{E}_1^*(\tau_{\varepsilon})], \quad (33)$$

$$\tilde{\mu} = \mu_{\infty} [1 - n \mathfrak{E}_1^*(t_{\varepsilon})], \quad (34)$$

где  $v_{\varepsilon} = \frac{E_{\infty} - E_0}{E_{\infty}} = \frac{\Delta E}{E_{\infty}}$  - дефект модуля, (35)

$$\mathfrak{E}_1^*(\tau_i) Z(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_i} Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (36)$$

$\mu_{\infty}$  - нерелаксированное значение модуля сдвига,  $n$  и  $t_{\varepsilon}$  - константы,  $Z(t)$  - искомая функция,  $E_{\infty}$  и  $E_0$  - нерелаксированный (мгновенный модуль упругости, или "стекловидный" модуль) и релаксированный модуль упругости (длительный модуль упругости, или "каучуковый" модуль), которые связаны со временем релаксации  $\tau_{\varepsilon}$  и временем ретардации  $\tau_{\sigma}$  следующим соотношением:

$$\frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\sigma}} = \frac{E_0}{E_{\infty}}. \quad (37)$$

Если задаться оператором  $\tilde{E}$  в виде соотношения (33), а оператор трехосного растяжения - сжатия  $\tilde{K}$  согласно экспериментальным данным считать независимым от времени, т.е.  $\tilde{K} = K_{\infty}$ , где  $K_{\infty}$  - нерелаксированный модуль, тогда коэффициент Пуассона становится зависящим от времени оператором

$$\tilde{\nu} = \nu_{\infty} + \frac{1}{2} (1 - 2\nu_{\infty}) v_{\varepsilon} \mathfrak{E}_1^*(\tau_{\varepsilon}), \quad (38)$$

где  $\nu_{\infty}$  - нерелаксированное значение коэффициента Пуассона.

Удар происходит в момент времени  $t=0$  (рисунок 3). Когда  $t > 0$ , перемещение центра шара  $y$  может быть представлено в следующем виде:

$$y = w + \alpha, \quad (39)$$

где  $\alpha$  - квазистатическое смятие материалов ударника и мишени, которое связано с контактной силой  $P(t)$  по формулам (1) и (2) согласно обобщенному закону Герца, где оператор жесткости для вязкоупругой мишени и упругого ударника имеет вид (5).

В процессе удара происходит разрушение молекулярных связей в области контакта балки с ударником, в результате чего молекулы начинают свободнее перемещаться по отношению друг к другу, и экспериментальные данные показывают, что в итоге происходит уменьшение вязкости материала балки в зоне контакта. Это обстоятельство позволяет описать поведение материала балки в области контакта с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, поскольку изменение параметра дробности (порядка дробной производной) позволяет

регулировать вязкость материала балки от ее первоначального значения при  $\gamma = 1$  до её полного отсутствия при  $\gamma = 0$ .

Таким образом, внутри зоны контакта в операторах (33), (34) и (38) заменим  $\varepsilon_1^*(\tau_i)Z(t)$ , что с учетом выше изложенных рассуждений является вполне обоснованным, на

$$\varepsilon_\gamma^*(\tau_i^\gamma)Z(t) = \int_0^t \varepsilon_\gamma \left( -\frac{t-t'}{\tau_i} \right) Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (40)$$

где  $\varepsilon_\gamma(-t/\tau_i)$  - дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова (25).

Уравнение движения контактной области, которая ограничена плоскостями  $x = \pm a$  (рисунок 3)

$$a(t) = \sqrt{\alpha R}, \quad (41)$$

под действием контактной силы (1) записывается в виде

$$2N \frac{\partial w}{\partial x} + 2Q + P(t) = 2aF \rho \dot{w}. \quad (42)$$

Решение системы уравнений (7) и (42) возможно при начальных условиях (10).

При сделанных выше предположениях относительно области контакта в процессе ударного взаимодействия распространяются нестационарные продольные и поперечные волны (поверхности сильного разрыва) от границы зоны контакта. Искомая функция  $Z(x,t)$  за фронтом волновой поверхности представляется в виде лучевого ряда:

$$Z(x,t) = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]_{t=z/G^{(\beta)}} \left( t - \frac{x}{G^{(\beta)}} \right)^k H \left( t - \frac{x}{G^{(\beta)}} \right), \quad (43)$$

где  $[Z_{,(k)}] = Z_{,(k)}^+ - Z_{,(k)}^- = [\partial^k Z / \partial t^k]$  - скачки производных  $k$ -ого порядка по времени искомой функции  $Z(z,t)$  на волновой поверхности, верхние индексы  $+$  и  $-$  означают, что данная величина вычисляется непосредственно перед и за волновым фронтом, индекс  $\beta$  указывает на порядковый номер волны, а именно:  $\beta = 1$  для продольной волны и  $\beta = 2$  для поперечной волны,  $H(t)$  - функция Хевисайда и  $G^{(\beta)}$  - нормальная скорость распространения поверхности разрыва.

Для определения коэффициентов лучевого ряда (43) необходимо продифференцировать определяющие уравнения (31)-(32) раз по времени, вычислить их разность на разных сторонах волновой поверхности  $\Sigma$  и применить условие совместности для разрывов  $k+1$ -ого порядка функции  $Z$ , которое имеет следующий вид:

$$G \left[ \frac{\partial Z_{,(k)}}{\partial x} \right] = - [Z_{,(k+1)}] + \frac{d [Z_{,(k)}]}{dt}, \quad (44)$$

где  $d/dt$  - полная производная по времени функции  $Z_{,(k)}(z,t)$  на движущейся поверхности разрыва.



Поскольку лучевой ряд (43) представляет собой ряд Тейлора, переменной величиной в котором служит расстояние от поверхности разрыва до границы контактной области, а процесс удара является кратковременным, то данная переменная – малая величина, лучевой ряд сходится, и, следовательно, можно, во-первых, ограничиться нулевыми членами лучевых рядов (43), и во-вторых, пренебречь волнами, отраженными от торца балки, считая, что они достигают зоны контакта после отскока ударника от балки.

Используя динамические условия совместности можно найти скорости двух типов нестационарных волн:  $G_{\infty}^{(1)} = (E_{\infty} / \rho)^{1/2}$  - продольно-изгибной волны и  $G_{\infty}^{(2)} = (K\mu_{\infty} / \rho)^{1/2}$  - поперечной волны, а также соотношения:

$$N = -\rho A G_{\infty}^{(1)} V, \quad Q = -\rho A G_{\infty}^{(2)} W, \quad M = \rho I G_{\infty}^{(1)} \Psi. \quad (45)$$

Подставляя выражения (45) с учетом формулы, связывающей величину  $V$  с поперечной деформацией при растяжении

$$V = -v_{\infty}^{-1} G_{\infty}^{(1)} \frac{\alpha}{h}, \quad (46)$$

в уравнение движения контактной области (42), а соотношение (39) в уравнение движения ударника (7), а затем складывая полученные уравнения и учитывая вид оператора  $E^*$  внутри контактной области, приходим к системе двух уравнений, состоящей из дифференциального уравнения

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} + l\alpha^{1/2}\dot{W} + (e\alpha + g)W = 0 \quad (47)$$

и интегро-дифференциального уравнения

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k \left[ \alpha^{3/2}(t) - \sum_{i=1}^2 e_i \int_0^t \varepsilon_{\gamma} \left( -\frac{t-t'}{t_i} \right) \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (48)$$

которая позволяет найти зависимость от времени значений  $W$  и  $\alpha$ .

Во втором параграфе изучено динамическое поведение вязкоупругой балки типа Тимошенко при ударных воздействиях без учета растяжения для различных сочетаний свойств ударника и мишени: рассмотрен удар упругого, вязкоупругого или жесткого шара по вязкоупругой балке. Анализ полученных решений и численные исследования приведены в третьем параграфе. Показано, что за счет растяжения срединной поверхности мишени происходит увеличение продолжительности контакта между ударником и мишенью, максимального значения величины  $\alpha$ , а также времени, при котором смятие достигает своего максимума, и это увеличение возрастает с увеличением коэффициента  $e/g$ , который контролирует растяжение срединной поверхности балки.

На рисунках 5 и 6 приведены зависимости безразмерных величин  $\alpha^*$  и  $P^*$  от безразмерного времени  $t^*$  (сплошные и пунктирные кривые подсчитаны соответственно без и с учетом растяжения срединной поверхности мишени), из которых видно, что увеличение безразмерного параметра  $\chi_1$ , который

отвечает за вязкие свойства системы (в то время как безразмерный параметр  $\chi_2$  зависит от начальной скорости удара и скоростей распространения продольной волны и волны поперечного сдвига в балке), приводит к увеличению максимального значения местного смятия и времени контакта. Чем больше параметр  $\chi_1$ , тем сильнее влияние растяжения срединной поверхности балки на продолжительность контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности  $\gamma$ .

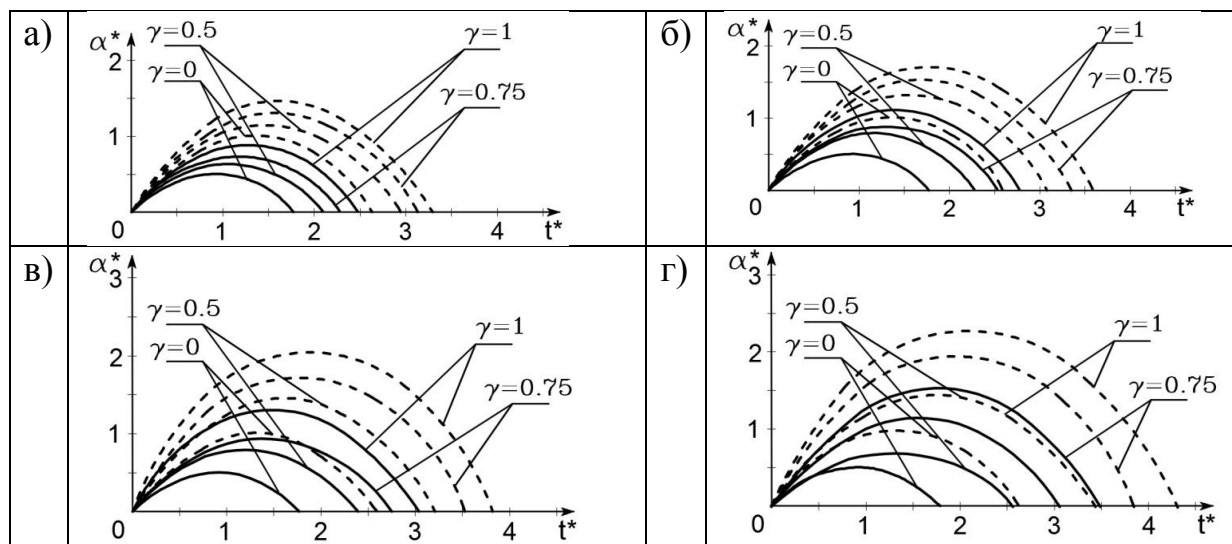


Рисунок 5. Зависимость безразмерной величины  $\alpha^*$  от безразмерного времени  $t^*$  при  $\chi_2 = 0.5$  и а)  $\chi_1 = 1$ , б)  $\chi_1 = 1.5$ , в)  $\chi_1 = 2$ , г)  $\chi_1 = 2.5$

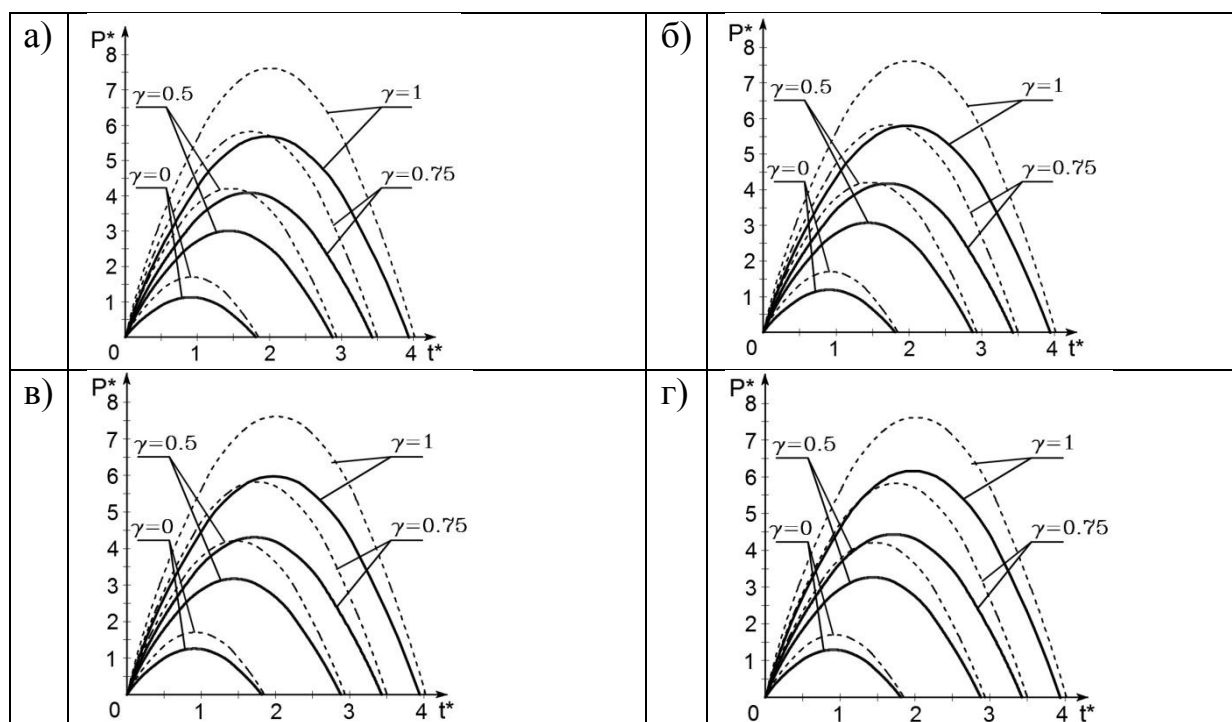


Рисунок 6. Зависимость безразмерной контактной силы  $P^*$  от безразмерного времени  $t^*$  при  $\chi_2 = 0.5$  и а)  $\chi_1 = 1$ , б)  $\chi_1 = 1.5$ , в)  $\chi_1 = 2$ , г)  $\chi_1 = 2.5$

## Основные результаты работы

Основным результатом настоящей диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений.

Следует отметить следующие ключевые результаты:

1. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта построено при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

2. Существующая волновая теория удара для анализа ударного взаимодействия упругих тел обобщена на случай учета вязкоупругих свойств ударника и/или мишени в виде балки, при этом оператор Пуассона считается зависящим от времени.

3. Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко, вязкоупругие свойства которой вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта - моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник».

4. Полученные системы уравнений решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

5. Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой балкой Тимошенко с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

## Публикации автора

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Estrada Meza M.G. Impact response of a Timoshenko-type viscoelastic beam with due account for the extension of its middle surface / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada Meza M.G. // SpringerPlus. – 2016. - Vol. 5, № 1. - P.1-18 (проиндексировано в базах данных Web of Science и Scopus, импакт-фактор журнала равен 0.982 в WoS).

2. Estrada Meza M.G. Modeling of the impact response of a beam in a viscoelastic medium / Rossikhin Y., Shitikova M., Estrada Meza M.G. // Applied Mathematical Sciences. – 2016. - Vol. 10, Issues 49-52. - P. 2471-2481 (проиндексировано в базе данных Scopus).

3. Estrada Meza M.G. Impact response of an elastic beam in a viscoelastic medium / Rossikhin Y., Shitikova M., Estrada Meza M.G. // Proceedings of the 23rd International Congress on Sound and Vibration: From Ancient to Modern Acoustics, ICSV 2016; Athens, Greece, 10-14 July 2016; P. 1-8, Publisher: International Institute of Acoustics and Vibrations, 2016, ISBN: 978-960992262-3 (проиндексировано в базе данных Scopus).

### Статьи и материалы конференций

4. Estrada Meza M.G. Dynamic response of a Timoshenko-type viscoelastic beam impacted by an elastic sphere / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada Meza M.G. // *Mechanics, Energy, Environment* (ISBN: 978-1-61804-346-7), *Energy, Environment and Structural Engineering Series* (ISSN: 2227-4359), Vol.42. P. 18-23, WSEAS Publishers, 2015.

5. Guadalupe Estrada Meza M. Modeling of the dynamic response of a Timoshenko-type viscoelastic beam by a viscoelastic sphere / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada Meza M.G. // *Book of Abstracts of the XLIV International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"*, Санкт Петербург, 27.06.2016 - 01.07.2016, P. 59.

6. Estrada Meza M.G. Impact response of an elastic beam in a viscoelastic medium / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada Meza M.G. // *Book of Abstracts of ICSV 2016 - 23rd International Congress on Sound and Vibration*; Athens, Greece, 10-14 July 2016. - P. 185.

Подписано в печать 21.02.2017 г. Формат 60x84 1/16  
Бумага писчая. Усл.-печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 120 экз. Заказ № 37

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий ФГБОУ ВО «ВГТУ». 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября,84