

На правах рукописи



Москалик Анна Давидовна

**Аналитический метод приближённого решения
краевых задач установившейся ползучести
с возмущёнными границами**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2017

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» в ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель:

Радченко Владимир Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Прикладная математика
и информатика», ФГБОУ ВО «Самарский
государственный технический университет»

Официальные оппоненты:

Локощенко Александр Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией ползучести и
длительной прочности Института механики
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Овчинников Игорь Георгиевич,
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры «Транспортное
строительство» ФГБОУ ВО «Саратовский
государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Самарский национальный
исследовательский университет имени
академика С.П. Королева», г. Самара

Защита состоится « 26 » апреля 2017 г. в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.243.10 при ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», расположенном по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, к. 9, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского и на сайте <http://www.sgu.ru/research/dissertation-council/d-212-243-10>.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н.



Сафонов Роман Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Усовершенствование существующих и создание принципиально новых технологий изготовления элементов конструкций, в частности – тонкостенных и толстостенных труб, не может решить проблему допусков на геометрические параметры изделий. И в настоящее время существуют отраслевые стандарты, например, на разностенность труб, что приводит к возмущению внутренней границы по отношению к внешней. Такого рода флуктуации в условиях существующей нелинейности определяющих уравнений ползучести приводят к искажению полей напряжений и деформаций по сравнению с осесимметричной постановкой задачи.

Методы аналитического решения краевых задач с возмущёнными границами разработаны в основном на основе метода малого параметра лишь для различных видов упругопластического деформирования. В теории ползучести соответствующие аналитические решения на основе метода малого параметра практически отсутствуют, хотя следует отметить, что в достаточной мере разработаны аналитические методы приближённого решения стохастических краевых задач ползучести для случая возмущённых реологических характеристик материала.

В условиях ползучести необходимо считаться не только с вопросами разрушения деталей при заданном уровне нагрузок – длительной прочностью, но и с максимально возможной деформацией (перемещением, величиной прогиба и т.д.), которые задаются на стадии проектирования, исходя из особенностей эксплуатации конструкции. Деформация ползучести, развивающаяся во времени, может привести к уменьшению зазора сопрягаемых деталей, уменьшению толщины стенки изделия (в частности – трубы) и другим изменениям геометрических размеров. Отсюда естественным образом возникает задача оценки показателей надёжности по деформационным критериям отказа.

Вопросы проверки адекватности построенных приближенных аналитических решений и проблема их сходимости также остаются открытыми не только в упругопластической области, но и в условиях ползучести.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цели настоящей работы.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью работы является разработка метода построения приближённых аналитических решений двумерных краевых задач установившейся ползучести с возмущёнными границами

на основе метода малого параметра, их применение к исследованию напряженно-деформированного состояния несоосной толстостенной трубы и трубы с эллиптически возмущенной внешней границей и оценке показателей надёжности рассмотренных элементов конструкций по деформационному критерию отказа.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- 1) разработка метода построения приближённого аналитического решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущенной внешней границей;
- 2) построение приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно;
- 3) построение приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущенной внешней границей, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до второго порядка приближения включительно;
- 4) анализ приближённых аналитических решений для толстостенной несоосной трубы и трубы с эллиптически возмущенной границей и численных решений указанных задач методом конечных элементов, исследование погрешности аналитических решений по отношению к численным решениям;
- 5) разработка вероятностных методов определения показателей надёжности толстостенной трубы со стохастически возмущенными внешними границами по деформационному критерию отказа.

Методология и методы исследования. Методологическую основу исследования составило совместное использование теории установившейся ползучести и метода возмущений для построения приближённых аналитических решений соответствующих краевых задач. Численные результаты получены методом конечных элементов с использованием программного комплекса ANSYS. В качестве инструментария при решении конкретных прикладных стохастических задач использовались методы математической статистики и теории случайных процессов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- 1) разработан аналитический метод приближённого решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущённой внешней границей в условиях плоского деформированного состояния;
- 2) построено приближённое аналитическое решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно;
- 3) построено приближённое аналитическое решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до второго порядка приближения включительно;
- 4) проведён сравнительный анализ приближённых аналитических решений задач для несоосной толстостенной трубы и трубы с эллиптически возмущённой границей с соответствующими численными решениями методом конечных элементов в частных случаях, выполнено исследование погрешности приближённых аналитических решений по отношению к численным решениям;
- 5) разработаны вероятностные методы определения показателей надёжности толстостенной трубы со стохастически возмущёнными внешними границами по деформационному критерию отказа.

Практическая значимость работы заключается в разработке аналитических методов приближённого решения краевых задач установившейся ползучести с возмущёнными границами для толстостенной трубы на основе метода малого параметра, построении приближённых аналитических решений до второго и третьего порядков приближений, апостериорному исследованию их сходимости и погрешности, что является, с одной стороны, важным вкладом в дальнейшее развитие соответствующего теоретического раздела механики деформируемого твёрдого тела. С другой стороны, разработанная методика определения показателей надёжности толстостенных труб со стохастически возмущёнными внешними границами на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач позволяет научно-обоснованно подходить к проблеме назначения ресурса этих элементов конструкций в условиях установившейся ползучести материала по деформационному критерию отказа.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) аналитический метод приближённого решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с произвольно возмущёнными внешними границами на основе метода малого параметра с учетом членов до третьего порядка включительно в условиях плоского деформированного состояния;
- 2) приближённые аналитические решения краевых задач установившейся ползучести для несоосной толстостенной трубы и для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей;
- 3) результаты исследования влияния возмущения границ на напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы в широком диапазоне изменения величины параметра возмущения в условиях установившейся ползучести;
- 4) методики оценки показателей надёжности толстостенных труб со стохастически возмущённой границей на основе полученных приближённых аналитических методов решения краевых задач установившейся ползучести по деформационному критерию отказа;
- 5) качественные и количественные результаты, полученные при решении краевых задач для трубы с возмущёнными границами и оценке надёжности в условиях установившейся ползучести.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов исследований подтверждается: адекватностью имеющихся модельных представлений физической картине исследуемых процессов в условиях ползучести материала; корректностью использования законов механики деформируемого твердого тела, положений теорий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теорий случайных функций и надёжности, апробированных численных методов и информационных технологий при решении задач методом конечных элементов; апостериорным исследованием сходимости построенных аналитических решений и сопоставлением результатов расчёта разработанных решений методом малого параметра с численным решением методом конечных элементов в частных случаях.

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: на Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара,

2013 г.), на Восьмой Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014 г.), на Четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 2014 г.), на Десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2016 г.), на Девятой Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Воронеж, 11–16 сентября 2016 г.), на XXV Всероссийской школьно-конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2016 г.), на XXIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (г. Самара, 2016 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК [1]–[4].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В работах в соавторстве диссертанту принадлежит совместная постановка задач, лично им получены все основные результаты и выполнен их анализ. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с профессором, д.ф.–м.н. В. П. Радченко, причем вклад диссертанта был определяющим.

Внедрение. Результаты диссертационной работы использованы в учебном процессе кафедры «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «СамГТУ» и включены в лекционный материал дисциплин: «Численные методы решения краевых задач», «Современные приближённые аналитические методы решения краевых задач», «Стохастические краевые задачи реологии и надёжность элементов конструкций».

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 166 страниц, из них 165 страниц основного текста, включая 41 рисунок, и приложение. Список литературы включает 159 наименований на 18 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе приводится краткий обзор существующих методов и результатов исследования нелинейных задач реологического деформирования твердого тела. Одним из часто применяемых методов решения является метод малого параметра, используемый в работах В.И. Астафьева, Г.И. Быковцева, Б.А. Друянова, А.А. Ильюшина, Л.М. Качанова, Дж. Коула, Н.В. Минаевой, А. Найфэ, Ю.Н. Немиша, Ю.Н. Радаева, В.П. Радченко и Н.Н. Попова с соавторами, Л.В. Степановой, Y. Haitian, G. Xinglin и многих других.

Для случая упругопластического деформирования проанализированы подходы к применению метода возмущений, изложенные в монографии Д.Д. Ивлева^[1], а также в работах его коллег и учеников: А.П. Кержаева, Б.Г. Миронова, С.В. Никитина, А.В. Тихонова, С.О. Фоминых и др.

Особое внимание уделено решениям внешних краевых задач, в которых реологические свойства среды предполагаются постоянными, а возмущению подвержены границы твердого тела. Здесь один из подходов состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений на основе метода малого параметра. Впервые задача установившейся ползучести разностенной и овальной труб исследована в первом приближении в монографии Л.М. Качанова^[2], существуют попытки решения задач установившейся ползучести с возмущенной внешней границей в работах В.П. Радченко и Е.В. Башкиновой. Линеаризация по параметру, характеризующему геометрию тела, использована А.А. Ильюшиным, Д.Д. Ивлевым и Л.В. Ершовым, Е.Онатом и В.Прагером, А.М. Жуковым и др. Упругопластическое деформирование несоосной толстостенной трубы рассмотрено в работах А.В. Ковалева и А.Н. Спорыхина, Т.А. Кульпиной, в исследовании Н.А. Ярдыковой – деформирование эллиптической трубы.

Анализ научных источников по исследованию краевых задач с возмущёнными границами в условиях ползучести показал, что во-первых, решения ограничены в основном первым приближением, а во-вторых, в работах не рассматриваются вопросы оценки погрешности полученных приближенных аналитических решений и их сходимости.

Выделен класс задач, посвященный напряженно-деформированному состоянию толстостенной трубы при различных видах нагружения, свойствах материала, степени поврежденности, учете эффекта упрочнения и т.д. в работах

^[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

^[2] Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.

Л.М. Качанова, Н.Н. Малинина, Ю.Н. Работнова, В.П. Радченко и Н.Н. Попова с соавторами, И.В. Стасенко, R.J. Gu и F.A. Cozzarelli, J. Jelwan, G. Pearce, R.K. Penny, D.L. Marriot, L.H. You и др.

В обзоре обоснована необходимость применения статистических методов исследования задач ползучести, поэтому отдельное внимание уделено вопросу построения стохастических реологических моделей, рассмотренных в работах В.В. Болотина, В.Н. Исуткиной, В.А. Кузнецова, В.А. Ломакина, Н.Н. Попова, В.П. Радченко, Ю.П. Самарина, А.А. Свешникова, М. Kaminski и др.

По результатам аналитического обзора сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Во второй главе решается нелинейная краевая задача установившейся ползучести для толстостенной трубы с внутренним контуром радиуса $r = a$ и внешним – радиуса $r = b$, возмущённым по пространственным переменным, находящейся под внутренним давлением q , методом малого параметра до приближения третьего порядка включительно в полярных координатах (r, θ) . Уравнение внешнего возмущённого контура трубы, конкретный вид которого определён в главах 3,4, содержит малый параметр δ .

В пункте 2.1 рассматривается постановка задачи, которая решается в условиях плоского деформированного состояния $\dot{\epsilon}_{zz} = 0$. Предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь, так же пренебрегаем деформацией ползучести, накопленной на первой стадии. Предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0$. В решении задачи в качестве нулевого приближения используется хорошо известное аналитическое решение задачи установившейся ползучести толстостенной трубы^[3]. Используется разложение тензора напряжений σ_{ij} , тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}$, вектора скоростей перемещений \dot{u}_i по малому параметру δ до членов третьего порядка включительно. Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\sigma_{r\theta} = 0, \quad (1)$$

которые линейны относительно компонент напряжений и, следовательно, выполняются для каждого приближения. Аналогично для каждого приближения выполняются соотношения типа Коши-Эйлера

[3] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{r}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} \right). \quad (2)$$

В качестве определяющих соотношений принимается степенная аппроксимация закона установившейся ползучести

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3)$$

– девиатор напряжений, σ_e – интенсивность напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, n , A – постоянные характеристики материала. Определяющие соотношения раскладываются в степенной ряд по параметру δ . Уравнения (1)–(3) образуют краевую задачу для каждого приближения с граничными условиями, рассмотренными в пункте 2.2.

В пункте 2.2 линеаризации подвергаются граничные условия в напряжениях на внешней возмущённой границе трубы, при этом уравнение внешней возмущённой границы представляется в виде ряда: $r = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k r_k(\theta)$.

В пункте 2.3 приведён метод решения краевой задачи для первого и последующих приближений в напряжениях, в котором используется функция (или комбинация функций) вида

$$\xi^{(k)}(r, \theta) = R_k(r) \sin(f\theta), \quad (4)$$

такая, что

$$\dot{u}_r^{(k)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial \theta}, \quad \dot{u}_\theta^{(k)} = \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial r}. \quad (5)$$

Здесь $k = 1, 2, 3$ – номера приближений, коэффициент f в (4) определяется для каждого приближения задачи, исходя из вида граничных условий. Данное представление для скоростей перемещений позволяет тождественно удовлетворить условию несжимаемости. Формула (5) используется в (2), преобразованные соотношения типа Коши-Эйлера (2) – в линеаризованных соотношениях (3). Уравнения равновесия (1), выраженные через определяющие соотношения (3), позволяют получить уравнение для определения функции $R_k(r)$:

$$\begin{aligned} & R_k^{IV} + 2(3-p)R_k'''r^{-1} + [p^2 - 4p(f^2 + 1) + 3 + 2f^2]R_k''r^{-2} + \\ & + [p^2(4f^2 - 1) - p(6f^2 - 4) - 3 + 2f^2]R_k'r^{-3} + [-3p^2f^2 + 2pf^2 + f^4]R_kr^{-4} = \\ & = 2Lr^{p-3} \left[r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} + f \frac{\partial B_f^{(k)}}{\partial r} + \frac{f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}}{r} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

где $p = 2/n$, $L = 3A \left(\frac{\sqrt{3}}{n} b^p Q \right)^{n-1}$, $Q = \frac{q}{(b/a)^p - 1}$; $T_f^{(k)} = T_f^{(k)}(r)$, $B_f^{(k)} = B_f^{(k)}(r)$ – функции, зависящие от предыдущих приближений.

Для решения уравнения (6) необходимо найти решение соответствующего однородного уравнения, в котором используется степенное представление $R_k(r) = r^\mu$. Для конкретного n из уравнения

$$\mu^4 - 2p\mu^3 + [p^2 + p(2 - 4f^2) + 2f^2 - 4]\mu^2 + [(4f^2 - 2)p^2 + (4 - 2f^2)p]\mu + (-3f^2p^2 + 2f^2p + f^4) = 0 \quad (7)$$

определяем значения μ_i

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4p(2f^2 - 1) - 4(f^2 - 2)^2} \pm 4\sqrt{p^2(4f^4 - f^2 + 1) - 4p(f^2 - 1)^2 - 4f^4 + 4}. \quad (8)$$

При $f = 1$ корни уравнения (7) согласно (8) являются действительными $\forall n$, а при $f = 2, 3, 4$ корни являются комплексными соответственно при $n \geq 2, 42$; $n \geq 2, 17$; $n \geq 2, 10$. В задачах, рассмотренных в главах 3, 4, принимается показатель степени $n \geq 2, 42$ при решении приближений, поскольку это неравенство выполняется для подавляющего большинства металлических материалов^[3].

Тогда решение однородного уравнения, соответствующего (6), при $f = 1$

$$R_k(r) = C_{k1}r^{\mu_1} + C_{k2}r^{\mu_2} + C_{k3}r^{\mu_3} + C_{k4}r^{\mu_4}, \quad (9)$$

где C_{ki} ($i = \overline{1, 4}$) – константы интегрирования k -го приближения. Для случая $f = 2, 3, 4$ корни однородного уравнения, соответствующего (6), при $n \geq 2, 42$ представимы в виде:

$$R_k(r) = C_{k1}r^{(p+\alpha)/2} \cos(\beta \ln r) + C_{k2}r^{(p+\alpha)/2} \sin(\beta \ln r) + C_{k3}r^{(p-\alpha)/2} \cos(\beta \ln r) + C_{k4}r^{(p-\alpha)/2} \sin(\beta \ln r), \quad (10)$$

где $\alpha = \alpha(p)$ и $\beta = \beta(p)$ – известные значения для конкретного материала.

Решение неоднородного уравнения (6) определяется исходя из вида его правой части методом вариации произвольных постоянных.

В третьей главе рассматривается решение задачи установившейся ползучести толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, со смещённым на малую величину δ (малый параметр) центром внешней окружности радиуса $r = b$ относительно центра внутренней окружности радиуса $r = a$. Для данной задачи выполняются все предположения и допущения, принятые в главе 2. Решение всех трёх приближений проводится с помощью метода, описанного в главе 2.

В пункте 3.1 приведено уравнение внешнего контура трубы: $(r \cos \theta - \delta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = b^2$, которое раскладывается в ряд по параметру δ .

В пункте 3.2 построено первое приближение данной задачи методом, описанном в главе 2:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \rho_{rr}^{(1)} \cos \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \rho_{\theta\theta}^{(1)} \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \rho_{r\theta}^{(1)} \sin \theta. \quad (11)$$

В пунктах 3.3 и 3.4 содержится постановка задачи и построение решения для второго приближения с учётом линеаризованных определяющих соотношений и граничных условий для второго приближения. Скорость перемещений представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_r^\rho(r, \theta) + \tilde{u}_r^\psi(r) = \dot{u}_r^\rho(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi(r), \\ \dot{u}_\theta^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_\theta^\rho(r, \theta) = \dot{u}_\theta^\rho(r) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\dot{u}_r^\rho = \dot{u}_r^\rho(r)$, $\dot{u}_r^\psi = \dot{u}_r^\psi(r)$, $\dot{u}_\theta^\rho = \dot{u}_\theta^\rho(r)$ – неизвестные, подлежащие определению функции. Отдельно строится решение для \dot{u}_r^ρ , \dot{u}_θ^ρ с использованием функции вида (4), где $f = 2$, и отдельно – решение для \dot{u}_r^ψ .

$$R_2(r) = \sum_{i=1}^4 [C_{2i}(r) + c_{2i}] m_i(r). \quad (13)$$

Здесь C_{2i} – известные функции радиуса r ; c_{2i} – константы интегрирования, $m_1(r) = r^{(p+l)/2} \cos(z \ln r)$, $m_2(r) = r^{(p+l)/2} \sin(z \ln r)$, $m_3(r) = r^{(p-l)/2} \cos(z \ln r)$, $m_4(r) = r^{(p-l)/2} \sin(z \ln r)$, $l = l(p)$ и $z = z(p)$ – известные значения для конкретного материала. Решение второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)} &= \rho_{r\theta}^{(2)}(r) \sin 2\theta, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = \rho_{rr}^{(2)}(r) \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(2)}(r), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} &= \rho_{\theta\theta}^{(2)}(r) \cos 2\theta + \Psi_{\theta\theta}^{(2)}(r). \end{aligned} \quad (14)$$

В пункте 3.5 построено решение для третьего приближения в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(3)} &= \chi_{r\theta}^{(3)}(r) \sin 3\theta + \kappa_{r\theta}^{(3)}(r) \sin \theta, \quad \sigma_{rr}^{(3)} = \chi_{rr}^{(3)}(r) \cos 3\theta + \kappa_{rr}^{(3)}(r) \cos \theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} &= \chi_{\theta\theta}^{(2)}(r) \cos 3\theta + \kappa_{\theta\theta}^{(3)}(r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

В пункте 3.6 проведён анализ результатов аналитического решения в зависимости от величины $\tilde{\delta} = \delta/a$ на модельном примере трубы с реологическими характеристиками материалов:

углеродистая сталь	$n = 3,03,$	$A = 9,04 \cdot 10^{-9} \text{ МПа}^{-n} \text{ ч}^{-1};$
сплав ХН73МБТЮ(ЭИ698)	$n = 10,96,$	$A = 4,57 \cdot 10^{-33} \text{ МПа}^{-n} \text{ ч}^{-1};$

при $a = 0,115$ м, $b = 0,15$ м под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа.

В пункте 3.7 получено численное решение задачи путем построения конечно-элементной модели с помощью программного комплекса ANSYS с целью оценки погрешности приближённого аналитического решения.

В пункте 3.8 проведено сравнение результатов приближённого аналитического и конечно-элементного решений задачи для осесимметричной и несосной трубы из модельных материалов до второго порядка приближения и с учетом третьего порядка приближения на основе значений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ в 15 равноотстоящих точках по координате r_i : $a \leq r_i \leq b + \delta \cos \theta + \delta^2(\cos 2\theta - 1)/4b$ ($i = \overline{1, 15}$) при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Вычисление погрешности проведено по двум нормам:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|} \cdot 100\% \text{ и } \sigma = \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2}{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (16)$$

где $\omega = r, \theta$; $k = 2, 3$ – номера порядков приближений; $\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} = \sigma_{\omega\omega}^{(0-k)}(r_i, \theta)$, $\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}} = \sigma_{\omega\omega}^{\text{ANS}}(r_i, \theta)$ – расчётные значения для аналитического и численного решений соответственно с учетом второго или третьего порядка приближений.

Показано, что для труб из модельных материалов различия в решении при использовании приближений до второго порядка или приближений до третьего порядка включительно для $\sigma_{\theta\theta}$ при любом θ составляют приблизительно 0,5% при величине $\tilde{\delta} = 0,04$, которая является предельно допустимой величиной разностенности по ГОСТ^[4]. Следовательно, для целей практического использования решения задачи можно ограничиться использованием приближений до второго порядка включительно. На рисунке 1 представлены типичные графики $\sigma_{\theta\theta}(\tilde{r} = r/a)$, где $\sigma_{\theta\theta}^{(0-k)}$ ($k = \overline{0, 3}$) – тангенциальные напряжения до k -го порядка приближения приближённого аналитического решения включительно, $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$ – тангенциальные напряжения для конечно-элементного решения.

В пункте 3.9 проведено сравнение результатов приближённого аналитического решения с решением по методике, применяемой в инженерных расчётах, в которой используется нулевое решение задачи о толстостенной трубе при постоянной толщине стенки $\eta = a - b - \delta$. Показано, что приближённое аналитическое решение в отличие от инженерного подхода обеспечивает уточнение расчётов в опасном месте сечения (минимальной толщине стенки) трубы до 7%.

В четвертой главе рассматривается решение задачи установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптически возмущенной внешней границей методом малого параметра до второго порядка приближения включительно.

[4] ГОСТ 8732-78 (СТ СЭВ 1481-78). Трубы стальные бесшовные горячедеформированные. М.: ИПК Изд-во Стандартов, 1998. 10 с.

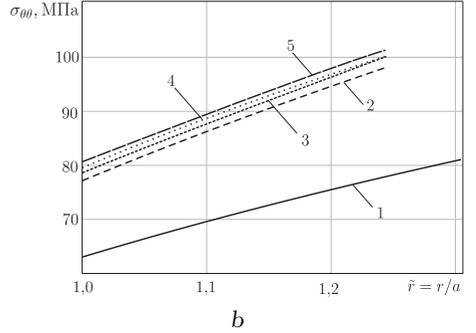
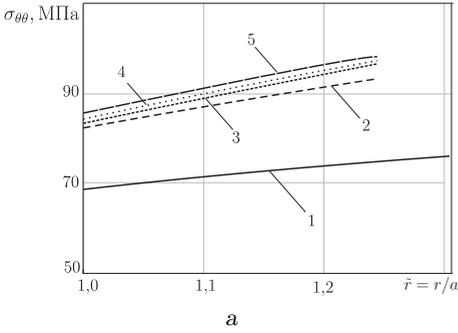


Рисунок 1 — Тангенциальные напряжения для несоосных труб из углеродистой стали (а) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при $\theta = \pi$, $\tilde{\delta} = 0,06$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

В пункте 4.1 приведена постановка задачи о толстостенной трубе с внутренним контуром в виде окружности радиуса $r = h$, внешним эллиптическим контуром с большой полуосью $r = a$ и малой полуосью $r = b$, находящейся под внутренним давлением q . Для данной задачи выполняются все допущения, принятые в главе 2, и уравнения (1)–(3). Эллиптичность внешнего контура характеризуется эксцентриситетом: $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. В качестве малого параметра принимается величина сжатия окружности радиуса $r = a$ к эллипсу по оси ординат: $\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}$, причем $\delta \ll 1$.

Принимая центр эллипса за полюс, уравнение эллиптического внешнего контура трубы в полярных координатах в виде

$$r = b/\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = a(1 - \delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta) \cos^2 \theta} \quad (17)$$

раскладываем в ряд по степеням δ .

В пункте 4.2 построено первое приближение данной задачи. Вводится предположение, что

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(1)}(r, \theta) &= \tilde{u}_r^\rho(r, \theta) + \tilde{u}_r^\psi(r) = \dot{u}_r^\rho(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi(r), \\ \dot{u}_\theta^{(1)}(r, \theta) &= \tilde{u}_\theta^\rho(r, \theta) = \dot{u}_\theta^\rho(r) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\dot{u}_r^\rho(r)$, $\dot{u}_r^\psi(r)$, $\dot{u}_\theta^\rho(r)$ — неизвестные, подлежащие определению, функции.

Применяя метод решения, предложенный в главе 2, получаем решение первого приближения задачи в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= \rho_{rr}^{(1)} \cos 2\theta(r) + \Psi_{rr}^{(1)}(r), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \rho_{\theta\theta}^{(1)}(r) \cos 2\theta + \Psi_{\theta\theta}^{(1)}(r), \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} &= \rho_{r\theta}^{(1)}(r) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

В пункте 4.3 построено второе приближение данной задачи, где скорость перемещений представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(2)}(r, \theta) &= \dot{u}_r^V(r) \cos 4\theta + \dot{u}_r^W(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^U(r), \\ \dot{u}_\theta^{(2)}(r, \theta) &= \dot{u}_\theta^V(r) \sin 4\theta + \dot{u}_\theta^W(r) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Применяя метод решения, изложенной в главе 2, напряжения получаем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)} &= \sigma_{r\theta}^V \sin 4\theta + \sigma_{r\theta}^W \sin 2\theta, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}^V \cos 4\theta + \sigma_{rr}^W \cos 2\theta + \sigma_{rr}^U, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} &= \sigma_{\theta\theta}^V \cos 4\theta + \sigma_{\theta\theta}^W \cos 2\theta + \sigma_{\theta\theta}^U. \end{aligned} \quad (21)$$

В пункте 4.4 анализируются результаты приближенного аналитического решения до второго порядка приближений включительно в зависимости от величины δ на модельном примере трубы при $h = 0,115$ м, $a = 0,15$ м, $q = 22,07$ МПа из материалов, описанных в пункте 3.6.

В пункте 4.5 получено численное решение задачи путем построения конечно-элементной модели с целью оценки погрешности приближенного аналитического решения.

В пункте 4.6 вычисление погрешности приближённого аналитического решения к конечно-элементному решению на основе норм (16), используемых в пункте 3.8, показало, что при $\delta = 6\%$ погрешность аналитического решения от численного составляет порядка 10%. На рисунке 2 приведены типичные графики зависимости $\sigma_{\theta\theta}(\tilde{r} = r/h)$.

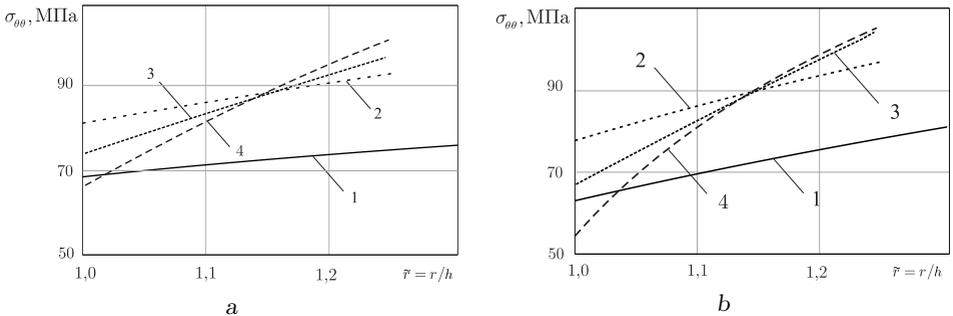


Рисунок 2 — Тангенциальные напряжения для труб с эллиптически возмущённой внешней границей из углеродистой стали (a) и сплава ЭИ698 (b) при $\theta = \pi/2$, $\delta = 0,04$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

В пятой главе проведена оценка надёжности модельной несоосной трубы из материалов и с размерами, рассмотренными в главе 3, по деформационному критерию отказа при стохастическом возмущении внешней границы.

В пункте 5.1 используется метод статистических испытаний для расчёта на надёжность модельной трубы на основе приближенного аналитического решения, полученного в главе 3, до второго порядка приближения включительно. Срок службы изделия t^* определяется исходя из достижения перемещением $u = u(t)$ критического значения u^* (например, на внешнем контуре), т.е. отказ наступает при достижении $u(t) \geq u^*$. Предполагается нормальный закон распределения для выборки из 30 случайных величин δ . Получены оценки для статистических характеристик выборки, приведена методика построения доверительного интервала времени отказа.

В пункте 5.2 приводится статистический анализ времени отказа, определяются статистические характеристики распределения времени отказа.

В пункте 5.3 приводится расчёт критического времени работоспособности несоосной трубы на основе функции надёжности $P(t)$ с использованием функции Лапласа. Получены осреднённые значения времени безотказной работы модельных труб, рассмотренных в главе 3.

В заключении перечислены основные результаты исследований, выполненных в настоящей диссертации:

1. Предложен аналитический метод построения приближённого решения для толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущённой внешней границей методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно и предложена методика решения задачи для каждого приближения для случая плоского деформированного состояния.

2. Для двух видов возмущения внешней границы толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением, построены приближённые аналитические решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести методом малого параметра: в случае несоосности трубы – до приближения третьего порядка включительно; для случая эллиптически возмущённого внешнего контура – до приближения второго порядка включительно.

3. Проведено исследование зависимости изменения тангенциальных и радиальных напряжений в модельных задачах для труб из углеродистой стали и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) в зависимости от величины малого параметра $\tilde{\delta}$. Показано, что при $\tilde{\delta} \leq 4\%$ (это соответствует нормативным ГОСТовским требованиям на максимально допустимую разностенность при изготовлении труб) третий порядок приближений вносит уточнение ко второму не более 0,5% при $n = 3,03$ и $n = 10,96$, а при $\tilde{\delta} = 10\%$ уточнение

составляет менее 8% при $n = 3,03$ и 5% при $n = 10,96$ в наиболее опасном сечении несоосной толстостенной трубы. В наиболее опасном сечении толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей при $\delta \leq 4\%$ второй порядок приближений вносит уточнение к первому не более 4% при $n = 3,03$ и не более 2% при $n = 10,96$.

4. Разработаны две конечно-элементные математические модели толстостенной трубы: для несоосной трубы и для трубы с эллиптически возмущённым внешним контуром и получены численные решения задач для анализируемых частных случаев.

5. Проведено исследование погрешности приближённого аналитического решения по сравнению с конечно-элементным решением для модельных примеров несоосной трубы и трубы с эллиптическим внешним контуром. Показано, что погрешность приближённого аналитического решения к численному для модельных примеров несоосных труб при $\tilde{\delta} = 0,04$ составляет не более 2%; для модельных примеров трубы с эллиптически возмущённой внешней границей – не превышает 7%.

6. Разработана методика расчета на надёжность толстостенной трубы с возмущённым внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, в условиях установившейся ползучести по деформационному критерию отказа. В методике используется построенное приближённое аналитическое решение данной задачи методом малого параметра до второго порядка приближения включительно. Выполнен вариативный параметрический анализ показателей надёжности несоосной толстостенной трубы с возмущёнными границами в зависимости от показателя нелинейности установившейся ползучести, различной величины предельно допустимого перемещения, различных значений доверительной вероятности и внутренних давлений.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

- [1] Москалик, А. Д. Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести / А. Д. Москалик // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – № 4(33). – С. 76–85. (doi: 10.14498/vsgtu1290)
- [2] Москалик, А. Д. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползуче-

сти / А. Д. Москалик // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 4(37). – С. 65–84. (doi: 10.14498/vsgtu1365)

- [3] Москалик, А. Д. Оценка конечно-элементного и приближенного решений установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущенной внешней границей / В. П. Радченко, А. Д. Москалик // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – № 2(28). – С. 111–122.
- [4] Москалик, А. Д. Сравнительный анализ приближенного аналитического и конечно-элементного решений для несоосной трубы / В. П. Радченко, А. Д. Москалик, И. Е. Адеянов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 3(36). – С. 79–93. (doi: 10.14498/vsgtu1340)

Публикации в прочих изданиях

- [5] Москалик, А. Д. Анализ напряженно-деформированного состояния толстостенного несоосного цилиндра, находящегося под внутренним давлением, в условиях установившейся ползучести методом малого параметра / А. Д. Москалик // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. IX Всероссийской научной конференции с международным участием (Самара, 21-23 мая 2013 г.): в 2 ч. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. – Самара : СамГТУ, 2013. – С. 139–143.
- [6] Москалик, А. Д. Анализ решений задачи установившейся ползучести для несоосной трубы на основе первого и второго приближений метода малого параметра / А. Д. Москалик // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16-21 июня 2014 г.): в 2 ч. Ч.2 / под ред. Н.Ф. Морозова, Б.Г. Миронова, А.В. Манжирова. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – С. 65–67.
- [7] Москалик, А. Д. Решение краевой задачи с возмущенными границами для трубы в условиях установившейся ползучести / И. Е. Адеянов, А. Д. Москалик // Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения», г. Самара, 25 августа–1 сентября 2014 г. – Самара : СамГТУ, 2014. – С. 43.
- [8] Москалик, А. Д. Решение внешней краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы / А. Д. Москалик // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. X Всероссийской научной конференции с международным участием (Самара, 25-27 мая 2016 г.): в 2 ч.

Ч.1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. – Самара : СамГТУ, 2016. – С. 148–152.

- [9] Москалик, А. Д. Конечно-элементный и приближенный аналитический анализ для одной задачи установившейся ползучести с возмущенной границей / А. Д. Москалик // Механика деформируемого твердого тела: сб. трудов IX Всероссийской конференции, Воронеж, 12-15 сентября 2016 г. – Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2016. – С. 127–129.
- [10] Москалик, А. Д. Анализ численного и приближенного аналитического решений теории установившейся ползучести для трубы с эллиптическим внешним контуром / А. Д. Москалик // «Математическое моделирование в естественных науках». Материалы XXV Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов, Пермь : Изд-во ПНИПУ, 2016. – С. 233–236.

Научное издание

Москалик Анна Давидовна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук на тему:
Аналитический метод приближённого решения краевых задач
установившейся ползучести с возмущёнными границами

Подписано в печать 20.02.2017. Формат 60 × 90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 120.

Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244