

*На правах рукописи*

Ардазишвили Роман Вячеславович

**Трехмерные кромочные волны в пластинах и  
оболочках**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого  
твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Саратов – 2016

Работа выполнена на кафедре математической теории упругости и биомеханики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
**Вильде Мария Владимировна**

Официальные оппоненты: **Жаворонок Сергей Игоревич**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, ФГБУН Институт прикладной  
механики Российской Академии наук  
(ИПРИМ РАН), г. Москва, старший  
научный сотрудник

**Землянухин Александр Исаевич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский  
государственный технический универ-  
ситет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов,  
заведующий кафедрой «Прикладная  
математика и системный анализ»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный  
университет», г. Ростов-на-Дону

Защита состоится «2» февраля 2017 г. в 15.30 на заседании дис-  
сертационного совета Д 212.243.10 при ФГБОУ ВО «Саратовский на-  
циональный исследовательский государственный университет имени  
Н.Г.Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская,  
83, к. 9, ауд. 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиоте-  
ке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследователь-  
ского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского и на  
сайте <http://www.sgu.ru/research/dissertation-council/d-212-243-10>.

Автореферат разослан «\_\_\_» ноября 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Шевцова Юлия Владиславовна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Поверхностные волны, начало исследования которых было положено в 1885 г. работой Рэля, находят широкое применение в сейсмологии и сейсморазведке, а также в различных методах неразрушающего контроля поверхностного слоя элементов конструкций и целостности соединений. Большую практическую значимость имеет изучение закономерностей распространения поверхностных волн в тонкостенных элементах конструкций — пластинах и оболочках. При этом следует различать волны, распространяющиеся вдоль лицевых поверхностей, и волны, локализованные у краев (торцов) пластины или оболочки — краевые, или кромочные волны. Исследование последних представляет собой более сложную задачу, потому что такие волны являются, по сути, волновыми пакетами, состоящими из поверхностной волны и комплекса объемных волн, возникающих вследствие многократного отражения поверхностной волны от лицевых поверхностей. До последнего времени подобного рода волны рассматривались, в основном, на основе прикладных теорий пластин и оболочек, “усредняющих” волновую картину по толщине.

В связи с появлением высокочувствительной измерительной аппаратуры в настоящее время становится актуальным изучение поверхностных волн в высокочастотных диапазонах, выходящих за рамки применимости прикладных двумерных теорий. Рассмотрение кромочных волн на основе трехмерных уравнений теории упругости связано со значительными вычислительными трудностями, поскольку, за исключением случая смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, допускающих разделение переменных, записать дисперсионное уравнение в аналитической форме не представляется возможным. По-видимому, именно этим объясняется тот факт, что работы, посвященные исследованию кромочных волн в пластинах с точки зрения трехмерной теории упругости, весьма немногочисленны и начали появляться только в последнее время (*Zernov V., Kaplunov J., 2008, Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю., 2010*). Трехмерные кромочные волны в оболочках, по-видимому, ранее не рассматривались. В упомянутых работах исследование ограничивается отдельными частными случаями. Между тем, с точки зрения практического примене-

ния важно иметь полное представление о системе кромочных волн, возможных в данном теле.

**Целью** данной диссертационной работы является исследование системы трехмерных кромочных волн в пластинах и оболочках в широком диапазоне изменения частоты и длины волны, изучение предельного поведения скоростей данных волн при стремлении волнового числа к бесконечности, форм колебаний и их эволюции при изменении волнового числа, характера демпфирования кромочных волн распространяющимися модами.

**Задачи**, рассмотренные в работе, состоят в исследовании

- антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластине как со свободными, так и с жестко закрепленными лицевыми поверхностями, на торце которой ставятся условия свободного края;
- системы кромочных волн в пластине как со свободными, так и с жестко закрепленными лицевыми поверхностями, на торце которой запрещено перемещение в одном из касательных направлений;
- фундаментальных кромочных волн в тонкой оболочке;
- кромочных волн высшего порядка в тонкой оболочке, на торце которой ставятся условия свободного края.

Как первый этап исследования рассмотрена задача о распространении трехмерных поверхностных волн в упругом полупространстве, на поверхности которого ставятся как условия отсутствия напряжений, так и граничные условия другого типа.

**Методология и методы исследования.** Методика исследования кромочных волн, принятая в данной работе, состоит в совместном использовании асимптотических методов и метода численного эксперимента. При исследовании волн высшего порядка используется представление о связи с соответствующим типом поверхностных волн. Численные результаты получены методом разложения по модам, позволяющим тождественно удовлетворить уравнениям движения и граничным условиям на полубесконечных лицевых поверхностях.

**Научная новизна.** В диссертационной работе впервые

- исследованы антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластине со свободным торцом, установлено существование бесконечного спектра таких волн и изучены их свойства;

- исследована система кромочных волн высшего порядка в пластинах со смешанными граничными условиями на торце;
- обнаружена и исследована фундаментальная симметричная кромочная волна в пластине со смешанными граничными условиями на торце;
- предложен численно-аналитический метод решения задач о колебаниях полубесконечного полого цилиндра, основанный на методе разложения по модам и использовании специально построенной фундаментальной системы решений дифференциального уравнения Бесселя;
- на основе трехмерных уравнений теории упругости исследованы кромочные волны в тонкой оболочке, ранее изучавшиеся только на основе прикладных двумерных теорий.

**Теоретическая и практическая значимость** работы определяется тем, что в ней представлено систематическое исследование проблемы существования и свойств трехмерных кромочных волн в пластинах и оболочках, расширяющее и углубляющее современные научные представления о волновых процессах в упругих тонкостенных телах. Результаты работы могут быть использованы для разработки новых методов неразрушающего контроля, совершенствования методов расчета различных элементов конструкций на динамические нагрузки с учетом локализованных резонансных форм колебаний (краевой резонанс), других приложений в различных областях техники, а также в сейсмологии и сейсморазведке.

Исследования по теме диссертационной работы выполнены при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00545) и Минобрнауки РФ (госзадание № 2014/203, код проекта 1617).

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Если торец пластины или оболочки свободен либо закреплен в одном из касательных направлений, то в ней существует бесконечное счетное множество трехмерных кромочных волн высшего порядка, асимптотическое поведение которых при большом значении волнового числа может быть описано с помощью методик, предложенных в данной работе.

2. Использование специальной фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, предложенной в данной работе, позволяет преодолеть ряд вычислительных трудностей при построении мод тонкостенного полого цилиндра.

3. Существование фундаментальных кромочных волн в оболочке, установленное ранее только на основе теории Кирхгофа–Лява, подтверждается с точки зрения трехмерной теории упругости. В достаточно тонкой оболочке как изгибная, так и тангенциальная волна продолжают существовать при любом значении волнового числа, в пределе вырождаясь в волны, локализованные в окрестности угловых окружностей.

**Достоверность результатов** обеспечивается использованием классических динамических уравнений теории упругости, строгостью применяемых математических методов, тщательным контролем точности при выполнении вычислений. Она подтверждается согласованностью результатов численного исследования и асимптотического анализа, соответствием построенной картины изучаемого процесса общим физическим представлениям о волновых процессах в упругих телах, сравнением результатов, полученных по трехмерной и прикладным двумерным теориям в области применимости последних.

**Апробация работы.** Результаты исследований, выполненных в диссертации, докладывались на

- Международной научной конференции “Теории оболочек и пластин в механике и биологии: от микро- до наноразмерных структур” (Минск, Беларусь, 2013);
- Международной школе-конференции молодых ученых МЕХАНИКА-2013 (Цахкадзор, Армения, 2013);
- Конференции механико-математического факультета Саратовского государственного университета “Актуальные проблемы математики и механики” (Саратов, 2014);
- IX, X Всероссийских школах-семинарах “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Дивноморское, 2014, 2015);
- XLII Международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики” (АРМ–2014) (Санкт-Петербург (Репино), 2014);

- VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014);
- XVII Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 2014);
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015 );
- Всероссийской научной школе-конференции “Механика предельного состояния и смежные вопросы” (Чебоксары, 2015);
- Всероссийской научной конференции с международным участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” (Москва, 2015).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 14 работах, из них 4 статьи в журналах из перечня рецензируемых изданий ВАК РФ ([8], [10–12]), 5 статей в сборниках трудов международных конференций, 3 статьи в сборниках трудов и 2 статьи в сборниках тезисов всероссийских конференций.

**Личный вклад автора.** Все результаты, представленные в данной работе, получены автором. Соавторам публикаций принадлежит постановка задач и обсуждение результатов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 136 наименований. Общий объем работы составляет 143 страницы, включая 50 рисунков и 3 таблицы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и приводится обзор работ, посвященных исследованию поверхностных упругих волн, кромочных волн и краевых резонансных явлений в тонкостенных упругих телах. Формулируются цель работы и решаемые задачи, отмечается научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** рассматриваются трехмерные поверхностные волны в упругом полупространстве. Приводится постановка задачи о гармонических колебаниях упругого полупространства, отнесенного к декартовой системе координат  $(x, y, z)$  и занимающего область

$0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$ . Вводятся безразмерные переменные (знак “ $\sim$ ” далее опущен)

$$\begin{aligned} x &= h\pi^{-1}\tilde{x}, \quad y = h\pi^{-1}\tilde{y}, \quad z = h\pi^{-1}\tilde{z}, \quad \{u_x, u_y, u_z\} = h\pi^{-1}\{\tilde{u}_x\tilde{u}_y, \tilde{u}_z\}, \\ \tilde{\omega} &= h\pi^{-1}\omega c_2^{-1}, \quad \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} = \\ &= E[2(1 + \nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xy}, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$  — вектор перемещений,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  — компоненты тензора напряжений,  $\omega$  — круговая частота,  $c_2$  — скорость волны сдвига,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h$  — характерный размер.

Вектор перемещений  $\mathbf{u}$  представлен в виде

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (2)$$

Уравнения для потенциалов  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$  имеют вид

$$\Delta\varphi + \kappa^2\omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} + \omega^2\boldsymbol{\psi} = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$ . Записаны выражения для компонентов тензора напряжений через потенциалы  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$ . Условие замыкания принято в виде

$$\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (4)$$

Рассматриваются следующие варианты однородных граничных условий на поверхности полупространства  $x = 0$ :

а) граница полупространства свободна от напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0; \quad (5)$$

б) запрещено перемещение в одном из касательных направлений:

$$\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0 \text{ (I)}, \quad \sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0 \text{ (II)}; \quad (6)$$

в) запрещено перемещение в обоих касательных направлениях;

г) запрещено перемещение в нормальном направлении;



д) запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении;

е) запрещено перемещение во всех направлениях.

С целью исследования вопроса существования поверхностной волны рассматриваются частные решения уравнений (3) вида

$$\varphi = C_1 e^{-r_1 x} e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \quad \psi = \mathbf{C} e^{-r_2 x} e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{C} = \{C_3, C_4, C_2\}^T$ ,  $\gamma$  и  $s$  – волновые числа в направлениях  $y$  и  $z$ , соответственно,  $r_1 = \sqrt{\gamma^2 + s^2 - \kappa^2 \omega^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{\gamma^2 + s^2 - \omega^2}$ ,  $C_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – произвольные константы.

Во втором параграфе рассматривается трехмерная поверхностная волна в случае свободной поверхности. Записано условие равенства нулю определителя однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_i$ , которая получается после подстановки (7) в граничные условия (5) и в условие (4). Далее вводится параметр  $\alpha$ , характеризующий направление распространения волны и связанный с параметрами  $\gamma$  и  $s$  соотношениями  $\alpha = \gamma_1 \cos \alpha$ ,  $s = \gamma_1 \sin \alpha$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2 + s^2}$ . Подстановкой  $\omega = c\gamma_1$  дисперсионное уравнение приводится к виду

$$(2 - c^2)^2 - 4\sqrt{1 - \kappa^2 c^2} \sqrt{1 - c^2} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) совпадает с уравнением для определения скорости волны Рэлея  $c_R$ . Таким образом, показано, что трехмерная поверхностная волна в данном случае представляет собой волну Рэлея, распространяющуюся в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с осью  $y$ . Получены выражения для перемещений и напряжений, определяющие форму колебаний в данной волне.

В третьем параграфе рассматривается случай граничных условий б). Процедура удовлетворения граничным условиям (6), вариант I, аналогичная случаю свободной поверхности, приводит к уравнению

$$[2(\gamma^2 + s^2) - \omega^2] (2s^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2 - 4s^2 r_1 r_2 = 0, \quad (9)$$

которое после введения угла распространения записывается в виде

$$(2 - \theta)(2 \sin^2 \alpha - \theta) + \theta \cos^2 \alpha - 4\sqrt{1 - \kappa^2 \theta} \sqrt{1 - \theta} \sin^2 \alpha = 0, \quad (10)$$

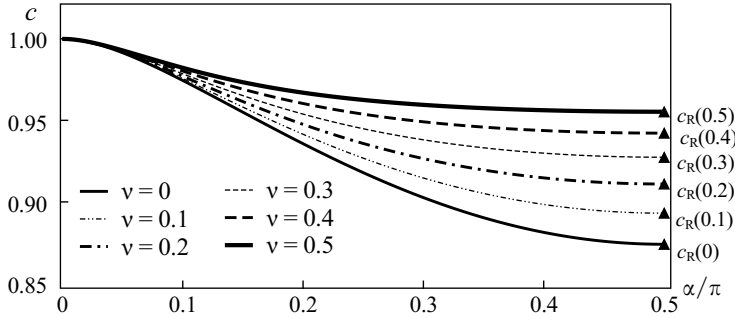


Рисунок 1 — Зависимость скорости поверхностной волны от угла распространения в случае граничных условий  $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$

где  $\theta = c^2$ . Показано, что уравнение (10) имеет единственный корень в интервале  $\theta \in (0, 1)$  при любых значениях параметров задачи, кроме  $\alpha = 0$ . На рисунке 1 приведены графики зависимости скорости волны от угла распространения для различных значений коэффициента Пуассона. Анализ формы колебаний показывает, что при  $\alpha = \pi/2$  найденная волна совпадает с волной Рэлея, а при  $\alpha = 0$  вырождается в объемную волну сдвига.

В случае граничных условий (6), вариант II, получается уравнение, совпадающее с уравнением (10) с точностью до замены  $\sin^2 \alpha$  на  $\cos^2 \alpha$  и наоборот. В этом случае трехмерная поверхностная волна совпадает с волной Рэлея при  $\alpha = 0$  и вырождается в объемную волну сдвига при  $\alpha = \pi/2$ . Для этого случая также получены выражения для перемещений и напряжений, определяющие форму колебаний.

В четвертом параграфе показано, что в случаях в)–е) трехмерная поверхностная волна не существует.

В первом параграфе **второй главы** приводится постановка задачи о распространении кромочных волн в полубесконечной пластине и описывается численно-аналитический метод решения задачи, основанный на методе разложения по модам. Считается, что пластина занимает область  $0 \leq x < \infty$ ,  $|y| \leq h$ ,  $-\infty < z < \infty$  (см. рисунок 2). Используются безразмерные переменные (1), в которых  $h$  теперь означает полутолщину пластины. Постановка задачи включает в себя уравнения

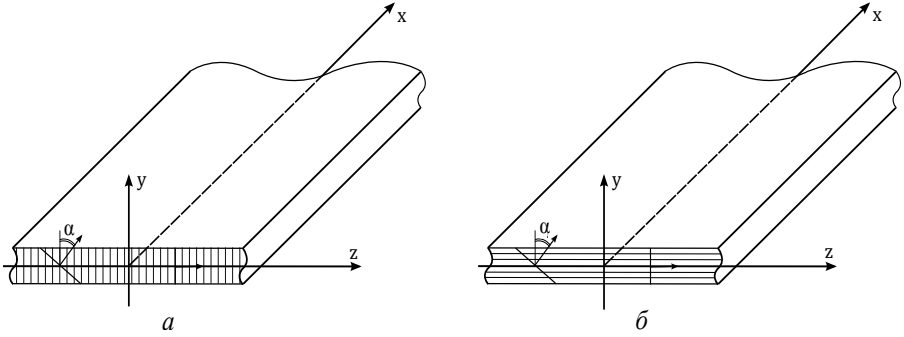


Рисунок 2 — Пластина со смешанными граничными условиями на торце (3), (4), граничные условия (5), (6) и граничные условия на лицевых поверхностях  $y = \pm\pi$ : условия свободного края

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \quad (11)$$

и условия жестко заземленного края

$$u_x = u_y = u_z = 0. \quad (12)$$

Для изучения кромочных волн разыскиваются решения поставленной задачи, изменяющиеся по переменной  $z$  по закону  $\cos(sz)$ . Такие решения можно интерпретировать как стоячие кромочные волны, а параметр  $s$  — как волновое число. Скорость волны вычисляется по формуле  $c = \frac{\omega_0}{s}$ , где  $\omega_0$  — собственная частота поставленной краевой задачи при данном  $s$ . Для численного определения величины  $\omega_0$  решение представляется в виде разложения по модам — частным решениям уравнений движения, удовлетворяющим однородным граничным условиям на лицевых поверхностях (11) или (12). Для удовлетворения граничным условиям на торце применяется метод коллокаций. При выборе числа мод в разложении контролировалась точность удовлетворения граничным условиям и сходимость решения при увеличении числа членов разложения.

Во втором параграфе рассматриваются антисимметричные кромочные волны высшего порядка в случае свободного торца. Теоретическое исследование, позволяющее установить основные свойства этих

волн, основано на асимптотическом анализе задачи при  $s \rightarrow \infty$  и идее о связи кромочных волн с трехмерной поверхностной волной. Для построения приближенной собственной формы рассматривается стоячая трехмерная поверхностная волна. Анализ асимптотического поведения напряжений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях (11), показывает, что при  $s \rightarrow \infty$  наибольшим из напряжений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях  $y = \pm\pi$ , является напряжение  $\sigma_y^R$  при  $\nu \neq 0$  и напряжения  $\sigma_{xy}^R, \sigma_{yz}^R$  при  $\nu = 0$ . На основании этого получаются асимптотики фазовых скоростей в виде

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} c_R \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{при } \nu \neq 0, \\ c_R \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{при } \nu = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Формулы (13) показывают, что в рассматриваемой пластине существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка, предельной скоростью которых при  $s \rightarrow \infty$  является скорость волны Рэлея.

Отсутствие ортогональности системы мод приводит к тому, что кромочные волны высшего порядка демпфируются распространяющимися модами. Степень демпфирования характеризуется мнимой поправкой к частоте (коэффициент демпфирования). На рисунке 3 представлены результаты для  $\nu = 0.25$ . Здесь  $c$  — фазовая скорость,  $\Gamma$  — коэффициент демпфирования,  $\delta_R = \omega - c_R s$ , жирным линиям соответствует численное решение, тонким — асимптотика на бесконечности, штрихпунктирным — приближенные формулы в переходной области. В ходе численного исследования была обнаружена дополнительная волна, которая появляется при  $s \geq 0.3$ . Данной волне был присвоен номер  $k = 0.5$ .

Аналогичное исследование было проведено для случая жестко заземленных лицевых поверхностей. Основное отличие здесь состоит в том, что в рассматриваемом случае для каждой волны с номером  $n$  существует значение волнового числа, приближенно определяемое формулой  $s_{cr,n}^{(\infty)} = \sqrt{\frac{4n^2 c_R^2 - 1}{4(1 - c_R^2)}}$ , после которого демпфирование данной волны распространяющимися модами прекращается.

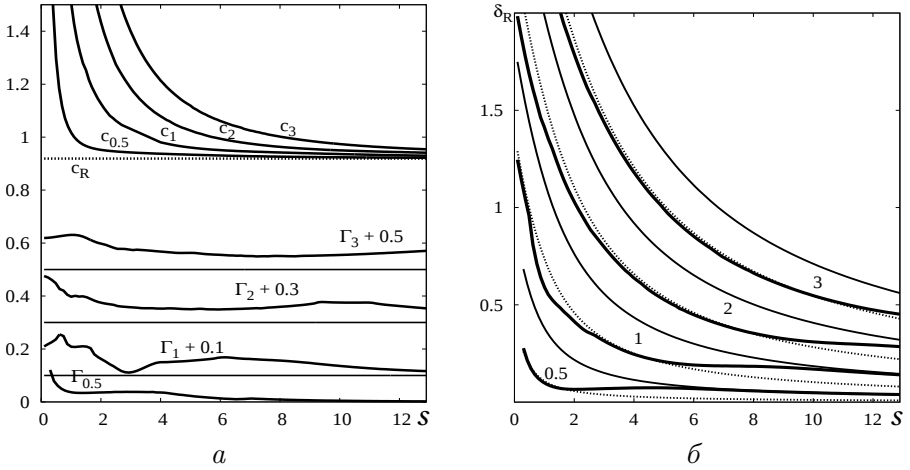


Рисунок 3 — Результаты для антисимметричных волн в случае свободного торца: а) фазовые скорости и коэффициент демпфирования, б) сравнение с асимптотикой

Далее изучаются кромочные волны высшего порядка в случае смешанных граничных условий (6) на торце. Численному исследованию предшествует асимптотический анализ при  $s \rightarrow \infty$ , в котором для построения приближенной собственной формы используется решение для трехмерной поверхностной волны, полученное в третьем параграфе первой главы. Для пластины со свободными лицевыми поверхностями и граничными условиями на торце (6), вариант I (см. рисунок 2а), асимптотики фазовых скоростей имеют вид

$$c_n^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{\theta(s)}} \sqrt{1 + \frac{\gamma_n^2}{s^2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где  $\theta(s)$  — корень уравнения (10) при  $\alpha = \arctg(s/\gamma_n)$ ,  $\gamma_n = n - 0.5$  для симметричных волн и  $\gamma_n = n$  для антисимметричных волн. В случае граничных условий (6), вариант II (см. рисунок 2б), значения  $\gamma_n$  для симметричных и антисимметричных волн меняются местами, и  $\theta(s)$  следует считать корнем уравнения, которое получается из (10) заменой  $\cos \rightarrow \sin$  и наоборот. Таким образом, установлено, что и в том, и в другом случае существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. При закреплении на торце в направлении

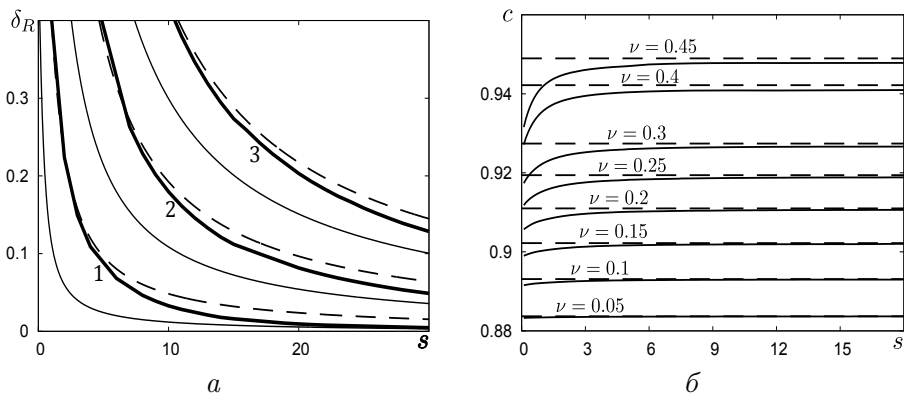


Рисунок 4 — Результаты для случая смешанных граничных условий на торце: *a*) сравнение численного решения с асимптотикой, *б*) фазовая скорость фундаментальной волны

оси  $y$  скорости всех кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея, а при закреплении в направлении оси  $z$  — к скорости волны сдвига. Аналогичные результаты получены для случая жестко защемленных лицевых поверхностей. На рисунке 4*a* приведены результаты для симметричных волн и граничных условий (6), вариант I ( $\nu = 0.45$ ). В диссертации приведены также результаты для других случаев закрепления лицевых поверхностей и торца.

В четвертом параграфе второй главы рассматривается фундаментальная кромочная волна при смешанных граничных условиях на торце, которая обнаружена только в одном случае: когда лицевые поверхности свободны, а на торце ставятся условия (6), вариант I. При  $s \rightarrow \infty$  скорость найденной волны стремится к некоторой постоянной величине, не совпадающей со скоростью волны Рэлея (см. рисунок 4*б*, где сплошные линии — численное решение, горизонтальные штриховые — значения скорости волны Рэлея при указанном  $\nu$ ).

**Третья глава** посвящена исследованию трехмерных кромочных волн в тонкой полубесконечной цилиндрической оболочке. Область, занятая оболочкой, определяется в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  неравенствами  $b \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z < \infty$  (см. рисунок 5). Постановка задачи аналогична случаю пластины, однако теперь все соотношения записываются в цилиндрических координатах.

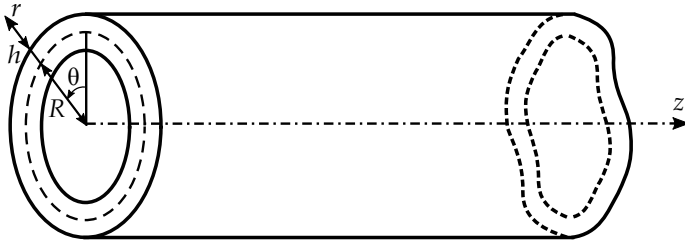


Рисунок 5 — Полубесконечная цилиндрическая оболочка, отнесенная к цилиндрической системе координат

В качестве масштабного фактора при введении безразмерных переменных используется радиус срединной поверхности  $R = (a + b)/2$ . Также вводится полутолщина оболочки  $h = (a - b)/2$  и параметр  $\eta = h/R$ . Оболочка считается тонкой, если  $\eta \ll 1$ .

Для отделения окружной координаты  $\theta$  все искомые величины представляются в виде произведения функции, не зависящей от  $\theta$ , на  $\cos p\theta$  или  $\sin p\theta$ . Решение такого вида можно интерпретировать как стоячую кромочную волну, при этом параметр  $p$  играет роль волнового числа. Под скоростью волны, определяемой по формуле  $c = \omega_0/p$ , в данном исследовании понимается скорость распространения возмущений в окружном направлении вдоль срединной поверхности.

Во втором параграфе получено решение, описывающее цилиндрическую поверхностную волну в полупространстве со свободной поверхностью. Записано решение для расходящейся волны, содержащее функцию Ганкеля первого рода. Для сходящейся волны функцию Ганкеля первого рода следует заменить на функцию Ганкеля второго рода.

В третьем параграфе рассматривается проблема построения мод полого цилиндра. Потенциалы  $\varphi, \psi$  ищутся в виде линейной комбинации функций  $\text{Cb}_p(r; \alpha), \text{Sb}_p(r; \alpha)$ , представляющих собой частные решения уравнения

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{p^2}{r^2} F + \alpha^2 F = 0, \quad (15)$$

удовлетворяющие условиям

$$\text{Cb}_p(1; \alpha) = 1, \quad \left. \frac{d\text{Cb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} = 0, \quad \text{Sb}_p(1; \alpha) = 0, \quad \left. \frac{d\text{Sb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} = \alpha. \quad (16)$$

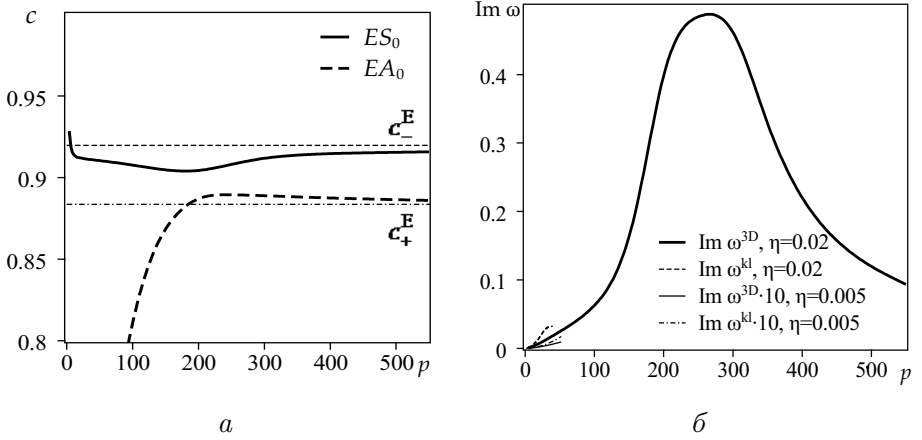


Рисунок 6 — Результаты для фундаментальных кромочных волн в оболочке: а) дисперсионные кривые для волн  $ES_0$  и  $EA_0$ , б) коэффициент демпфирования волны  $ES_0$

Использование такой фундаментальной системы более удобно в случае полого цилиндра, особенно тонкостенного. Функции  $Sb_p(r; \alpha)$ ,  $Sb_p(r; \alpha)$  выражаются через стандартные цилиндрические функции.

Удовлетворение граничным условиям свободного края при  $r = 1 \pm \eta$  и соотношению (4) в цилиндрической системе координат приводит к дисперсионному уравнению, которое сводится к определителю шестого порядка. После нахождения корней этого уравнения ищется решение краевой задачи для полубесконечного цилиндра в виде разложения по модам. Коэффициенты разложения определяются так же, как и в пластине.

В четвертом параграфе изучаются фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке, которые для краткости обозначены как  $EA_0$  и  $ES_0$ . Волна  $ES_0$  соответствует тангенциальной волне в теории Кирхгофа–Лява, а волна  $EA_0$  — изгибной волне. В диссертации приведены графики, иллюстрирующие указанное соответствие. При  $p \rightarrow \infty$  волна  $EA_0$  переходит в волну, локализованную у наружной угловой окружности, волна  $ES_0$  — у внутренней (см. рисунок 6а, где  $c_{\pm}^E = \frac{c^E}{1 \pm \eta}$ ,  $c^E$  — скорость волны, локализованной около ребра четвертьпространства). Большой интерес представляет изучение демпфирования вол-



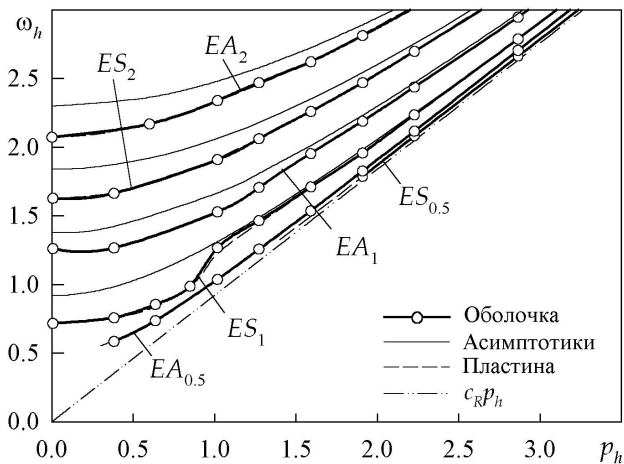


Рисунок 7 — Дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка в оболочке и в пластине

ны  $ES_0$  распространяющейся модой. Численное исследование показало, что при увеличении волнового числа коэффициент демпфирования значительно возрастает по сравнению с его значениями в области применимости теории Кирхгофа–Лява, а потом начинает убывать (см. рисунок 6б).

В пятом параграфе изучается система кромочных волн высшего порядка  $ES_k$ ,  $EA_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Асимптотический анализ, аналогичный случаю пластины, но использующий поверхностную волну в цилиндрической системе координат, приводит для тонкой оболочки к приближенной формуле для частот, применимой при  $p \gg \frac{m\pi}{2\eta}$ . В отличие от пластины, в оболочке область применимости этой асимптотики ограничена неравенством  $p < \frac{m\pi}{2\sqrt{2}\eta^{3/2}}$ , что связано с наличием точки поворота. В тонкой оболочке точка поворота появляется у гармоник весьма больших номеров, мало интересных для практики. Для небольших значений  $p$  предложена модель типа полубесконечной пластины, принципы построения которой основаны на том, что кромочные волны высшего порядка относятся к классу коротковолновых высокочастотных колебаний. На рисунке 7 для  $\eta = 0.02$ ,  $\nu = 0.25$  представлены дисперсионные кривые для оболочки и пластины в сравнении с асимп-

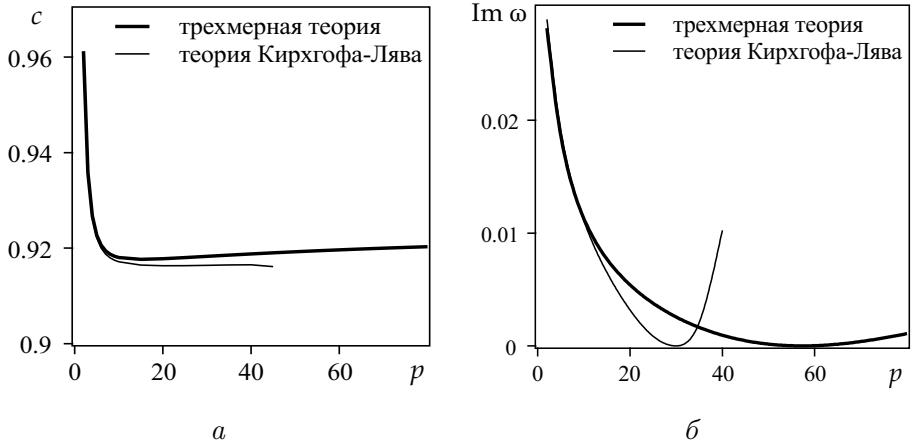


Рисунок 8 — Результаты для тангенциальной кромочной волны в случае смешанных граничных условий на торце: а) фазовая скорость, б) коэффициент демпфирования

тотиками (здесь  $\omega_h = \frac{\eta\omega}{\pi}$ ,  $p_h = \frac{\eta p}{\pi}$ ). Графики для оболочки и пластины практически совпадают, что показывает применимость предложенной модели. Исключение составляют области сближения дисперсионных кривых “симметричных” и “антисимметричных” кромочных волн, где формы колебаний становятся существенно асимметричными. При некоторых отличных от нуля значениях волнового числа появляются дополнительные волны, которым присвоен номер 0.5.

Следующий параграф посвящен исследованию фундаментальных кромочных волн в оболочке случае смешанных граничных условиях на торце. Численное решение подтвердило факт существования изгибной кромочной волны в случае, когда на торце запрещены перемещения в тангенциальном направлении, установленный ранее только на основе теории Кирхгофа–Лява. Тангенциальная кромочная волна исследуется при смешанных граничных условиях на торце  $z = 0$  вида

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_r = 0. \quad (17)$$

На рисунке 8 для  $\eta = 0.02$ ,  $\nu = 0.3$  приведены графики фазовой скорости и коэффициента демпфирования в сравнении с аналогичными результатами, полученными по теории Кирхгофа–Лява. Область сов-

падения графиков соответствует области применимости теории Кирхгофа–Лява для оболочки данной толщины. Интересно отметить точку минимума на рисунке 8б, в которой коэффициент демпфирования с точностью до вычислительной погрешности обращается в нуль.

В **заключении** приводится краткая сводка основных результатов и намечаются направления дальнейшего развития темы диссертации.

## Основные результаты и выводы

1. В пластинах со свободным торцом существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка как в случае свободных, так и в случае жестко заземленных лицевых поверхностей. Коротковолновым пределом фазовых скоростей данных волн является скорость волны Рэлея.
2. Установлено существование бесконечных спектров кромочных волн высшего порядка в пластинах со смешанными граничными условиями на торце и двух случаях закрепления лицевых поверхностей (свободные и жестко заземленные поверхности). В зависимости вида граничных условий на торце предельной скоростью является либо скорость волны Рэлея, либо скорость волны сдвига.
3. Обнаружена и исследована фундаментальная волна, существующая в случае симметричных колебаний пластины со свободными лицевыми поверхностями, на торце которой запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям.
4. Предложена методика асимптотического исследования трехмерных кромочных волн в полубесконечном полом цилиндре, а также методика численного исследования этих волн, основанная на методе разложения по модам и использовании специальной фундаментальной системы решений дифференциального уравнения Бесселя.
5. Установлена связь фундаментальных трехмерных кромочных волн с кромочными волнами в теории оболочек Кирхгофа–Лява. На коротких волнах продолжение изгибной волны локализуется у наружной угловой окружности, а тангенциальной волны — у

внутренней угловой окружности. Система кромочных волн высшего порядка в тонкой оболочке в основных чертах аналогична случаю пластины.

6. Показано, что кромочные волны в оболочке со смешанными граничными условиями на торце, исследованные ранее только в рамках теории Кирхгофа–Лява, существуют также с точки зрения трехмерной теории упругости при точном удовлетворении всем граничным условиям.

### Публикации по теме диссертации

1. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в пластинах при смешанных граничных условиях на торце / Р. В. Ардазишвили // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тез. докл. IX Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 26–30 мая 2014 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. – С. 12.
2. Ардазишвили, Р. В. Влияние способа закрепления лицевых поверхностей на демпфирование антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластинах / Р. В. Ардазишвили // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 г. : сборник трудов. – Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – С. 199–201.
3. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Теории оболочек и пластин в механике и биологии: от микро- до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures : материалы междунар. науч. конф., Минск, Беларусь, 16–20 августа 2013 г. / под общей ред. Г. И. Михасева, Х. Альтенбаха. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 62–64.
4. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в пластинах с жёстко защемлёнными лицевыми поверхностями при

- смешанных граничных условиях на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.) : в 2 ч. Ч.1 / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. — С. 21–24.
5. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в полубесконечном полумесяце цилиндра со свободным торцом / М. В. Вильде, Р. В. Ардазишвили // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тез. докл. X Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015. — С. 22.
  6. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в цилиндрической оболочке со смешанными граничными условиями на торце: теория оболочек и трехмерная теория упругости / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Материалы Всероссийской научной школы-конференции “Механика предельного состояния и смежные вопросы”, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.) : в 2 ч. Ч.1. / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова, Ю. Н. Радаева. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015. — С. 82–86.
  7. Ардазишвили, Р. В. Трехмерная краевая фундаментальная тангенциальная волна в тонкой оболочке в случае смешанных граничных условий на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник материалов Всероссийской научной конференции, Москва, 15-17 декабря 2015 г. — М.: ИПРИМ РАН, 2015. — С. 26–28.
  8. Ардазишвили, Р. В. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 1, ч. 1. — С. 50–56.
  9. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Труды XVII

- Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 14-17 сентября 2014 г.) в 2 т. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. — Т.1. — С. 49–53.
10. Ардазишвили, Р. В. Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — Т. 37, № 4. — С. 53–64. (doi: 10.14498/vsgtu1360)
  11. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах с жёстко зацементированными лицевыми поверхностями при различных способах закрепления на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 2. — С. 187–193.
  12. Ардазишвили, Р. В. Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 4(26). — С. 109–124.
  13. Ardazishvili, R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface / R. V. Ardazishvili // Proc. of Young Scientists School–Conference “MECHANICS-2013” (October 1–4, 2013, Tsaghkadzor, Armenia). — Institute of Mechanics of NAS of the Republic of Armenia, 2013. — P. 74–79.
  14. Ardazishvili, R. V. Antisymmetric higher order edge waves in plates with fixed faces / R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde // Proc. of the XLII Summer School–Conference “Advanced problems in mechanics (APM)”, St. Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014. — 1 CD-ROM — P. 199–204.