

На правах рукописи



СЕМЕНОВ Владимир Викторович

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ
В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ
АВТОГЕНЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

Специальность 01.04.03 — Радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2016

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Вадивасова Татьяна Евгеньевна

Официальные оппоненты:
Ряшко Лев Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет
имени Б.Н. Ельцина»,
профессор кафедры математической физики
Купцов Павел Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный техни-
ческий университет имени Гагарина Ю.А.»,
профессор кафедры «Приборостроение»

Ведущая организация: Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Защита состоится « 7 » октября 2016 г. в 17ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 на базе Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.243.01, д.ф.-м.н.



Аникин Валерий
Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Долгое время понятие “шум” воспринималось исключительно как помеха, как деструктивный фактор, наличие которого ухудшает функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с негативным воздействием шумов (работы Стратоновича, Рытова, Малахова и др.). Широкое распространение получили задачи разработки методов борьбы с шумами. К примеру, защита радиоэлектронных средств различного назначения от радиопомех и сегодня представляет собой одну из важнейших проблем, возникающих как при разработке, так и при использовании радиотехнических устройств и систем (работы Максимова, Харкевича, Варакина и др.).

Флуктуации присущи всем реальным системам и в принципе неустраняемы. Из этого следует ограниченность детерминированного подхода при рассмотрении, в частности, проблем теории нелинейных колебаний. Переход к статистическому описанию динамических систем послужил основой для развития ряда исследований в области статистической радиофизики. Важно отметить, что данная тематика не ограничивается задачами радиофизики, а имеет междисциплинарный характер. В последнее время в понимании вызванных шумом процессов произошли существенные изменения. Было установлено, что источники шума в нелинейных динамических системах могут порождать принципиально новые режимы функционирования, например, незатухающие колебания. Эти эффекты получили название индуцированных шумом переходов (работы Ланды, Horsthemke, Arnold и др.). За последние 30-40 лет обнаружены явления, коренным образом изменившие понимание термина “шум”. Было показано, что в нелинейных системах случайные воздействия могут индуцировать новые более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать рост усиления и отношения сигнал/шум (работы Gammaitoni, Lindner, Schimansky-Geier, Неймана, Анищенко и др.). Широкий спектр вызванных шумом эффектов, которые существенным образом зависят как от нелинейных свойств динамической системы, так и от характеристик шума, серьезно затрудняет формирование общей концепции поведения динамических систем в присутствии шума.

Проблематика исследований стохастических объектов включает в себя важные вопросы, касающиеся влияния шума на бифуркационные явления. Вблизи бифуркаций малые возмущения (в том числе случайные) могут существенным образом влиять на поведение динамических систем (работы Башкирцевой, Ряшко и др.). Изучение бифуркационных явлений в системах с шумом продолжает быть актуальным направлением в нелинейной динамике, в рамках которого

остается много нерешенных задач. Одной из таких задач является анализ стохастических бифуркаций. Под стохастическими бифуркациями понимают бифуркационные явления в системах с источником шума. Не всегда ясно, как определить момент бифуркации в зашумленной системе, и как могут повлиять различные источники шума на ту или иную бифуркацию. Согласно работам Арнольда стохастические бифуркации делятся на феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. Несмотря на большое число теоретических и численных работ, посвященных исследованию влияния шума на различные бифуркации, общая картина бифуркационных явлений в присутствии шума остается незавершенной. Причина этого состоит в нестрогом определении стохастической бифуркации, а также в сильной зависимости стохастических явлений от индивидуальных свойств системы.

Бифуркация Андронова-Хопфа, с которой связан переход в режим генерации, является одной из важнейших бифуркаций в динамических системах. Стохастическая бифуркация Андронова-Хопфа состоит в возникновении характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. В точках детерминированного цикла имеет место локальный максимум плотности вероятности, а в неустойчивой точке равновесия - минимум. Стохастическая бифуркация Андронова-Хопфа была исследована в ряде работ для различной статистики шума. В частности, в работах Ebeling аналитически и численно было показано, что суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля с аддитивным шумом происходит не в одной точке (как это следует из квазигармонического приближения), а при прохождении через так называемый бифуркационный интервал, соответствующий постепенной перестройке вероятностного распределения. Ширина этого интервала растет с ростом интенсивности шума. Таким образом, при фиксированном значении управляющего параметра, соответствующего режиму генерации, рост интенсивности шума приводит к переходу внутрь бифуркационного интервала. При этом кратерообразная форма вероятностного распределения разрушается. Существование бифуркационного интервала при воздействии цветного параметрического шума обосновывается в теоретических исследованиях Olarrea и Lefever. Там же отмечается запаздывающий характер суперкритической бифуркации при некоторых значениях времени корреляции шума. Анализ гармонического осциллятора Хопфа с параметрическим белым шумом, проведенный в работах Башкирцевой и Ряшко, также выявил запаздывание бифуркации Андронова – Хопфа. К сожалению, вблизи бифуркаций, где система

структурно неустойчива, а также при большом шуме, как приближенные аналитические методы, так и методы численного моделирования могут приводить к существенным ошибкам. *В такой ситуации особенно важное значение приобретают физические эксперименты. Однако, в научной литературе число публикаций, посвященных экспериментальному исследованию стохастических бифуркаций, невелико.* Экспериментальное подтверждение существования бифуркационного интервала для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа было дано только в работе Gronzoni для аналоговой модели брюсселятора с низкочастотным параметрическим шумом. *Вопрос существования бифуркационного интервала при субкритической бифуркации Андронова-Хопфа ранее не рассматривался ни теоретически, ни экспериментально.*

В ряде случаев стохастические бифуркации анализируются в тесной взаимосвязи с другими индуцированными шумом эффектами. Так, в работах Захаровой когерентный резонанс рассматривался с точки зрения стохастических бифуркаций, имеющих место в генераторах с жестким возбуждением. Явление когерентного резонанса первоначально было обнаружено в возбудимых системах. Данное явление заключается в существовании оптимального уровня шума, при котором индуцированные шумом колебания становятся наиболее близкими к регулярным. Различают возбудимые системы I и II типа. Для систем I типа возбудимый режим связан с существованием нелокальной седло-узловой бифуркации точек равновесия, в результате которой из сепаратрисного контура рождается предельный цикл (это так называемая SNIPER-бифуркация от слов saddlenode-infinite-period bifurcation). Рождению предельного цикла предшествует возбудимый режим, связанный с существованием сепаратрисного контура, обеспечивающего возврат траектории в устойчивую точку равновесия. В случае возбудимости II типа сепаратрисный контур отсутствует, а возврат в устойчивую точку равновесия из состояния возбуждения обеспечивается существованием в фазовом пространстве некоторой петли, образованной линиями быстрых и медленных движений. Классическим примером возбудимой системы II типа может служить осциллятор ФитцХью-Нагумо.

Обнаруженный в последние годы когерентный резонанс в генераторах с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа (в генераторах с жестким возбуждением) исследовался численно и с применением приближенных аналитических методов, а также экспериментально (работы Ушакова и др., Захаровой и др., Анищенко и др.). Когерентный резонанс наблюдается не только в области бистабильности, где система имеет два аттрактора: предельный цикл и устойчивую точку равновесия, но и в подпороговом режиме, у границы касательной бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого циклов, где колебания в детерминированной системе не возникают.

В последнее время актуальной стала проблема управления динамическими системами, в том числе системами, содержащими источники шума и демонстрирующими различные стохастические эффекты. Одной из задач в этом направлении является управление эффектом когерентного резонанса с целью получения максимально регулярного поведения системы при оптимальном шумовом воздействии. Известно, что когерентный резонанс в возбудимых системах как I, так и II типа может контролироваться с помощью запаздывающей обратной связи (работы Schöll, Prager). Аналогичное влияние запаздывающей обратной связи было установлено и для когерентного резонанса в модели Стюарта-Ландау с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа (работы Sethia, Schöll). В отмеченных исследованиях используются теоретические методы анализа и численное моделирование. *При этом на сегодняшний день практически отсутствуют работы, в которых задача управления эффектом когерентного резонанса рассматривалась средствами физического эксперимента.* В то же время, как уже было сказано выше, экспериментальные методы очень важны в задачах с шумом, поскольку теоретический анализ нелинейных стохастических систем в большинстве случаев является приближенным.

Изучение свойств стохастических бистабильных систем представляет собой особый класс задач. Бистабильное поведение типично для широкого круга динамических систем, встречающихся в различных областях физики, химии, биологии, экологии, климатологии и других наук. Простейший вид бистабильности - это сосуществование в фазовом пространстве двух устойчивых состояний равновесия. В такой системе без внешних воздействий в установившемся режиме нет колебаний. Однако, добавление источника шума может приводить к возникновению случайных переключений между состояниями равновесия. В этом случае говорят о стохастическом бистабильном осцилляторе (работы Kramers, Hänggi).

Шум в бистабильных системах вызывает не только стохастические переключения, но также отвечает за ряд фундаментальных эффектов, таких как стохастический резонанс, стохастическая синхронизация, индуцированный шумом хаос и т.д. Анализ стохастических бифуркаций и индуцированных шумом переходов (новых типов поведения) в бистабильных системах продолжает привлекать внимание исследователей. Все вышеперечисленные явления существенно зависят от конкретного типа бистабильного осциллятора, а также от характеристик шума. Большое число работ посвящено динамике осциллятора, описывающего движение частицы в двухъямном потенциальном поле с постоянным трением (осциллятор Крамерса). Однако, осциллятор Крамерса не является универсальной моделью, охватывающей все свойства бистабильных осцилляторов. Можно предположить, к примеру, что наличие нелинейной диссипации может существенным образом изменить картину наблюдаемых явлений. *Особенности*

поведения бистабильного осциллятора с нелинейной, зависящей от мгновенного состояния диссипацией составляют проблему до настоящего времени не описанную в научной литературе. При этом важной задачей является создание достаточно простой и более универсальной модели такого осциллятора, доступной как для численного анализа, так и для эксперимента.

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования.

Целью диссертационной работы является решение актуальной задачи радиофизики, состоящей в экспериментальном исследовании индуцированных шумом эффектов в нелинейных колебательных системах: стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в различных моделях автогенераторов, когерентного резонанса в возбудимых и невозбудимых системах, охваченных запаздывающей обратной связью, а также стохастических бифуркаций в двухъямном осцилляторе с нелинейным трением.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Методами численного и радиотехнического экспериментов провести анализ стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля, генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе при наличии аддитивного и параметрического гауссова белого шума. Для этого создать аналоговую модель генератора и разработать программное обеспечение для считывания необходимых данных и обработки их на компьютере. Численно и экспериментально исследовать эволюцию вероятностного распределения при вариации параметров рассматриваемых систем и интенсивности шума средствами компьютерного моделирования и радиотехнического эксперимента. Исследовать экстремумы вероятностного распределения при наличии шума. Сравнить полученные экспериментальные данные с результатами теоретического анализа.
2. Провести анализ стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа в генераторе с жестким возбуждением при наличии аддитивного и параметрического гауссова шума. Для этого создать аналоговую радиотехническую модель генератора и провести анализ эволюции вероятностного распределения при вариации параметров и интенсивности шума средствами численного моделирования и экспериментально. Исследовать эволюцию экстремумов вероятностного распределения при наличии шума. Сравнить полученные данные с результатами для суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

3. Экспериментально исследовать особенности когерентного резонанса в осцилляторе ФитцХью-Нагумо при наличии запаздывающей обратной связи. Для этого сначала создать радиотехническую модель системы, разработать электронное устройство, реализующее линию запаздывания, а также необходимое программное обеспечение для записи и обработки временных реализаций на компьютере. Провести эксперименты, по результатам которых установить влияние спектральных характеристик шума на эффект когерентного резонанса при отсутствии запаздывающей обратной связи. Установить зависимость времени корреляции и среднеквадратичного отклонения интерспайкового интервала от времени корреляции шума. Установить зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний от времени запаздывания как для случая белого гауссова, так и для случая цветного шума. Сравнить полученные экспериментальные данные с результатами численного и теоретического анализа.
4. Исследовать особенности когерентного резонанса в генераторе с жестким возбуждением при наличии запаздывающей обратной связи и аддитивного гауссова шума. Провести теоретический анализ системы при отсутствии шума в квазигармоническом приближении. Выявить особенности влияния запаздывающей обратной связи на бифуркации в детерминированной системе. Разработать и реализовать экспериментальную установку. В численном и физическом экспериментах получить зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний от времени запаздывания в системе с шумом, а также установить эволюцию вероятностного распределения амплитуды колебаний с ростом времени запаздывания. Обосновать наблюдаемые эффекты на основе результатов квазигармонического анализа детерминированной системы. Сравнить полученные результаты с результатами исследования осциллятора ФитцХью-Нагумо с шумом и запаздывающей обратной связью.
5. Разработать простую и достаточно общую модель бистабильного осциллятора, отличного от классической модели зависимостью коэффициента трения от динамических переменных. Создать экспериментальную установку. Численно и экспериментально исследовать динамику двухъямного осциллятора с нелинейным трением в присутствии шума. Установить эволюцию вероятностного распределения с ростом шума. Исследовать зависимость частоты Райса от интенсивности шума в исследуемой системе. Провести анализ структуры фазового пространства системы и на ее основе дать объяснение наблюдаемым явлениям. Получить описание динамики системы на основе сравнения с осциллятором Крамерса при конечном трении, для чего ввести эффективные характеристики системы.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

Положения:

1. В физически реализуемых генераторах при воздействии аддитивного шума как субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, так и седло-узловая бифуркация рождения циклов характеризуются наличием бифуркационного интервала, соответствующего постепенной трансформации формы стационарного вероятностного распределения при изменении управляющих параметров.
2. Запаздывающая обратная связь одинаковым образом влияет на динамику возбудимых и невозбудимых систем, демонстрирующих эффект когерентного резонанса, и позволяет управлять степенью регулярности колебаний.
3. Наличие нелинейного трения в модели стохастического осциллятора, описывающей движение в бистабильном потенциальном поле, при определенной форме нелинейности приводит к появлению индуцированных шумом переходов: первоначально происходит подавление бистабильности и переход к унимодальному распределению плотности вероятности, однако при дальнейшем росте шума наблюдается обратный процесс перехода к бистабильному поведению и формирования соответствующего вероятностного распределения с двумя максимумами.

Результаты:

1. В физическом эксперименте подтверждены характерные черты стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, известные из теоретических и численных исследований.
2. Экспериментально и численно установлена типичная эволюция стационарного распределения, соответствующая стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и стохастической седло-узловой бифуркации циклов в генераторе с жестким возбуждением: установлено существование бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узловой бифуркации рождения циклов при наличии аддитивного шума, установлен запаздывающий характер бифуркации Андронова-Хопфа при наличии как аддитивного, так и мультипликативного шума.
3. Показано, что введение запаздывающей обратной связи позволяет изменять характеристики (ширина спектральной линии, время корреляции и др.) индуцированных шумом колебаний в режиме когерентного резонанса как в возбудимых, так и в невозбудимых системах, таких как генератор с жестким возбуждением. При этом можно добиться более регулярного поведения системы по сравнению с динамикой при отсутствии обратной связи.

4. Предложена достаточно общая модель осциллятора, описывающая движение в бистабильном потенциальном поле при наличии нелинейной диссипации. На примере данной модели численно и экспериментально показана возможность управления динамикой осциллятора с помощью внешнего шума с изменяемой интенсивностью.

Научная новизна: результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. В физическом эксперименте с использованием радиотехнических моделей нелинейных систем установлена последовательность бифуркационных изменений вероятностного распределения при вариации управляющих параметров (сценарий стохастической бифуркации) суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа при наличии аддитивного или мультипликативного (параметрического) белого гауссова шума в генераторе Ван дер Поля, генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе.
2. В численном и физическом экспериментах установлен сценарий стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и стохастической седло-узловой бифуркации предельных циклов при наличии аддитивного или мультипликативного (параметрического) белого гауссова шума в генераторе с жестким возбуждением.
3. В физическом эксперименте установлены особенности влияния запаздывающей обратной связи на характеристики индуцированных шумом колебаний в системе ФитцХью-Нагумо в режиме когерентного резонанса.
4. В численном и физическом экспериментах установлены особенности влияния запаздывающей обратной связи на характеристики индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса, а также дано исчерпывающее объяснение полученным результатам.
5. Предложен и исследован бистабильный осциллятор с двухъямным потенциалом и нелинейным трением, поведение которого качественно отличается от поведения осциллятора Крамерса, установлены особенности влияния шума на динамику исследуемой системы, установлены причины наблюдаемых явлений, а также введены эффективные характеристики исследуемой системы для сопоставления полученных результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осциллятора Крамерса с конечным (постоянным) трением.

Научная и практическая значимость результатов диссертации обусловлена тем, что они существенно расширяют современные представления нелинейной теории колебаний и статистической радиофизики в области стохастической

ческих бифуркаций и сопутствующих им индуцированных шумом эффектов. Научно-практическая значимость состоит в следующем:

1. Экспериментально установлен сценарий перехода к автоколебательному режиму в присутствии аддитивного и мультипликативного шума, соответствующий бифуркации Андронова-Хопфа в детерминированном случае. Показан общий характер эффектов, наблюдаемых в случае субкритической и суперкритической бифуркации. Также установлен характер стохастической седло-узловой бифуркации предельных циклов, предшествующей субкритической бифуркации Андронова-Хопфа.
2. Показана возможность управления характеристиками колебаний систем, демонстрирующих эффект когерентного резонанса. Показано, что характер влияния запаздывающей обратной связи не имеет принципиальных различий для возбудимых и невозбудимых систем.
3. Установлен факт качественных изменений динамики модели бистабильного осциллятора с нелинейной диссипацией при изменении интенсивности шума, а также выявлены причины обнаруженных эффектов.

Полученные результаты могут быть применены при создании новых радиофизических устройств с учетом роли динамического шума, при разработке новых методов управления радиофизическими устройствами, основанными на использовании источников шума, при математическом моделировании стохастических явлений в нелинейных системах и интерпретации экспериментальных данных в различных сферах научных исследований. Материалы диссертации частично используются в курсах лекций по теории нелинейных колебаний и теории флуктуаций в колебательных системах. Предполагается дальнейшее внедрение результатов работы в учебном процессе.

Достоверность научных выводов работы подтверждается соответствием результатов, полученных в численных и физических экспериментах, а также соответствием между теоретическими и экспериментальными данными. Также отмечается соответствие между полученными в рамках диссертационной работы результатами и некоторыми результатами других авторов, представленными в научной литературе.

Апробация работы. Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научная школа-конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2012)
- Международная конференция “Динамика, бифуркации и странные аттракторы” (Нижний Новгород, 2013)
- Международная конференция “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics” (Нижний Новгород, 2014)

- Международная конференция “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems. Unraveling Complexity” (Саратов, 2014)
- Научный семинар “Applications of Complex Networks”, Берлинский технический университет (Берлин, 2014),

а также на научных семинарах кафедры Радиофизики и нелинейной динамики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1008), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №15-02-02288 и №14-52-12002).

Личный вклад. Все результаты, представленные в данной работе, были получены лично автором в ходе численных и физических экспериментов. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях (10 статей [1–10] в журналах, рекомендованных ВАК, 1 глава книги [11] и 4 работы в сборниках тезисов конференций [12–15]).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации **134** страницы текста с **44** рисунками. Список литературы содержит **124** наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

Первая глава диссертационной работы посвящена экспериментальному исследованию бифуркации Андронова-Хопфа в различных динамических системах и установлению таких явлений, как существование бифуркационного интервала и сдвиг бифуркации Андронова-Хопфа при наличии аддитивного и мультипликативного белого гауссова шума.

В п. 1.1 представлено описание методов проведения численных и физических экспериментов.

В п. 1.2 исследуется влияние шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля. Рассматривается как случай аддитивного случайного воздействия, так и шумовой модуляции параметра гене-

рации. Стохастические уравнения генератора с аддитивным шумом имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ((\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t)) - x^2)y - x + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь переменные x , y и время t являются безразмерными величинами. Параметр ε управляет режимом генерации. Второе уравнение содержит аддитивный шум, $n(t)$, а также источник мультипликативного шума $n_1(t)$, осуществляющий шумовую модуляцию параметра генерации. Источники $n(t)$ и $n_1(t)$ – являются независимыми нормированными белыми гауссовыми источниками ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n_1(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\langle n_1(t)n_1(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$). Величины D и D_1 задают интенсивности аддитивного и мультипликативного шума, соответственно.

Описывается полученная численно и экспериментально эволюция плотности вероятности в системе с аддитивным шумом ($D_1 = 0$) при вариации параметров ε и D , которая полностью согласуется с выводами теории, изложенной в работе Ebeling. Показано наличие бифуркационного интервала при бифуркации Андронова-Хопфа, соответствующего постепенной перестройке от уни-модального распределения к распределению в форме замкнутого кратера (рис. 1). Оценка границ бифуркационного интервала, полученная в численных экспериментах, близка к теоретическим результатам. Приводится описание эволю-

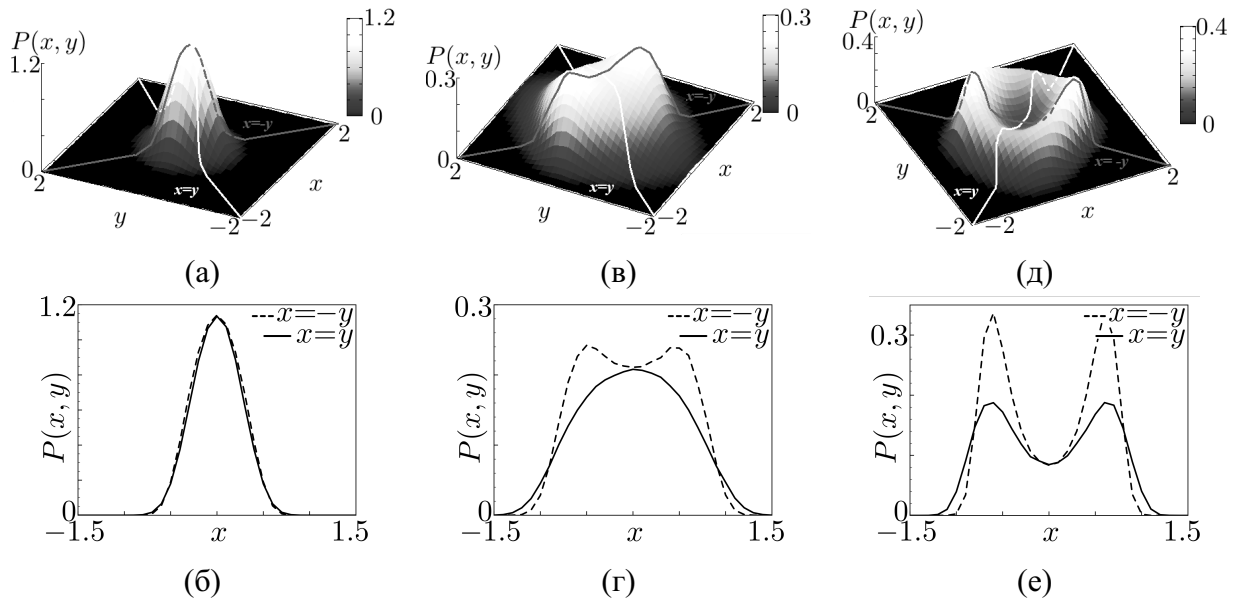


Рис. 1: Вероятностные распределения системы (1) и соответствующие сечения $x = y$ и $x = -y$: а,б: $\varepsilon = -0.20$, $D = 0.035$, в,г: $\varepsilon = 0$, $D = 0.35$, д,е: $\varepsilon = 0.20$, $D = 0.035$.

Мультипликативный шум отсутствует: $D_1 = 0$.

ции вероятностного распределения в системе (1) при наличии параметрического (мультипликативного) шума ($D_1 \neq 0$). Показывается, что суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в этом случае носит запаздывающий характер, т.е.

переход к распределению в форме кратера происходит в области $\varepsilon > 0$, причем бифуркационный интервал не наблюдается вплоть до очень больших значений интенсивности шума. При численном исследовании в области больших значений параметра ε и интенсивности мультипликативного шума D_1 показан эффект, подобный образованию бифуркационного интервала. Он связан с сильной асимметрией распределения и проявляется в возникновении распределений с тремя максимумами.

В п. 1.3 приводятся результаты исследований генератора Анищенко-Астахова как при наличии аддитивного шума, так и при шумовой модуляции параметра генерации. Представленные результаты показывают, что в генераторе Анищенко-Астахова с аддитивным шумом также как и в генераторе Ван дер Поля наблюдается разрушение кратерообразной формы распределения при увеличении интенсивности шума. Однако в случае генератора Анищенко-Астахова происходит разрушение стенки кратера только с одной стороны. В системе с параметрическим случайным воздействием рост интенсивности шума приводит к иной перестройке вероятностного распределения, при которой происходит одновременное “просаживание” стенок кратера и формирование пика в центре кратера.

В п. 1.4 приводятся результаты исследований брюсселятора при шумовой модуляции управляющих параметров. В данной системе параметрический шум может быть как аддитивным, так и мультипликативным. В обоих случаях было выявлено существование бифуркационного интервала, что полностью согласуется с результатами работ Frongoni, в которых модель брюсселятора рассматривалась при наличии узкополосного параметрического шума, являющегося мультипликативным. Таким образом, спектральные характеристики параметрического шума в данном случае не являются принципиальными. Необходимо отметить, что в брюсселяторе начало (левая граница) бифуркационного интервала не определяется строго, поскольку не связана с возникновением новых экстремумов вероятностного распределения, как это имеет место в осцилляторе Ван дер Поля с аддитивным шумом, или иной качественной перестройкой формы распределения.

В п. 1.5 рассматривается модификация генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением. В численных и физических экспериментах исследуется влияние аддитивного белого гауссова шума на систему, также рассматривается случай шумовой модуляции параметра генерации. Стохастические уравнения системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ((\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t)) + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D}n(t), \\ \gamma > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $n(t)$ и $n_1(t)$ – нормированные гауссовы источники белого (соответственно, аддитивного и мультипликативного) шума, D и D_1 – интенсивности шумов. В отсутствие шума в (2) при $\varepsilon = 0$ имеет место субкритическая (“жесткая”) бифуркация Андронова - Хопфа. В присутствие аддитивного шума, как и в случае генератора Ван дер Поля с мягким возбуждением (п.1.2), стохастической бифуркации соответствует не одна точка при изменении параметра ε , а некий бифуркационный интервал, в пределах которого происходит соответствующая перестройка формы распределения. Последовательность преобразований плотности вероятности при бифуркациях в (2) проиллюстрирована на рис.2. Стохастическая субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при увеличении параметра ε протекает следующим образом. До бифуркации распределение имеет форму замкнутого кратера с пиком посередине, и в обоих характерных сечениях поверхности $P(x, y)$ можно видеть центральный максимум, два минимума и два максимума по бокам (рис.2а). На левой границе бифуркационного интервала в сечении $x = y$ центральный максимум и два минимума сливаются и исчезают. В пределах бифуркационного интервала сечения плотности вероятности выглядят в соответствии с рис.2б. Т.е. в этой области существует замкнутый кратер, но не существует замкнутой “канавки” внутри кратера, а в начале координат поверхность $P(x, y)$ имеет форму седла. Правая граница бифуркационного интервала соответствует слиянию и исчезновению центрального максимума и боковых минимумов в сечении $x = -y$, после чего распределение принимает форму кратера с минимумом в начале координат (рис.2в). Стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов, также характеризуется бифуркационным интервалом. При шумовой модуляции параметра ε стохастическая субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, проявляющаяся в исчезновении центрального максимума распределения, носит запаздывающий характер. Кроме того, полученные результаты показывают наличие бифуркационного интервала у седло-узловой бифуркации. В то же время бифуркационного интервала при бифуркации Андронова-Хопфа выявлено не было.

Результаты, представленные в первой главе, отражены в публикациях [1–5, 9, 11, 12, 15].

Во второй главе экспериментально оценивается возможности управления характеристиками когерентного резонанса при наличии запаздывающей обратной связи как в возбудимых системах (на примере осциллятора ФитцХью-

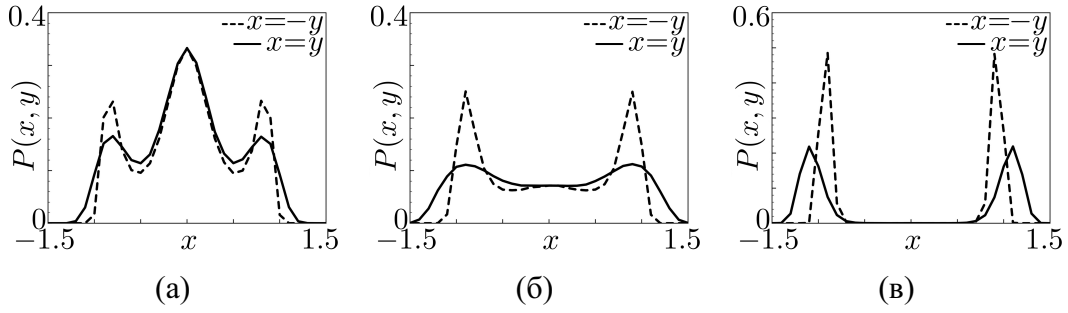


Рис. 2: Вероятностные распределения системы (2) и соответствующие сечения $x = y$ и $x = -y$. а) $\gamma = 1, \varepsilon = -0.1, D = 0.01$; б) $\gamma = 1, \varepsilon = -0.045, D = 0.04$; в) $\gamma = 1, \varepsilon = 0.01, D = 0.01$. Мультипликативный шум отсутствует: $D_1 = 0$

Нагумо), так и в невозбудимых системах (на примере генератора Ван дер Поля с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа).

В п. 2.1 в физическом эксперименте рассматривается генератор ФитцХью-Нагумо с запаздывающей обратной связью при наличии цветного шума. Работа экспериментальной установки при наличии запаздывающей обратной связи описывается уравнениями:

$$\begin{cases} R_0 C \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3} x^3 - y, \\ R_0 C \frac{dy}{dt} = x + a + \eta(t) + K[y(t - \tau) - y(t)], \\ R_0 C \tau_c \frac{d\eta}{dt} = -\eta + \sqrt{\tau_c} \sqrt{2D} n(t). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь x и y - напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки. Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы обеспечить количественное совпадение безразмерных переменных математической модели и соответствующих величин в (3). Величины $R_0 = 10$ кОм, $C = 10$ нФ определяют масштаб времени в реальном эксперименте. Случайное слагаемое $\eta(t)$, входящее во второе уравнение системы (3), описывает цветной шум с временем корреляции τ_c и единичной дисперсией. Показана возможность управления характеристиками индуцированных шумом стохастических колебаний возбуждимого осциллятора (3) в режиме когерентного резонанса с помощью запаздывающей обратной связи, путем вариации времени запаздывания. Экспериментально полученная зависимость времени корреляции от времени запаздывания (рис. 3а), демонстрирующая возможность получения менее или более когерентных колебаний, полностью согласуется с выводами работ Schöll, в которых система (3) рассматривалась численно. Спектральные характеристики шумового воздействия в данном случае не играют принципиальной роли, поскольку аналогичные результаты были получены при замене цветного шума $\eta(t)$ белым гауссовым шумом.

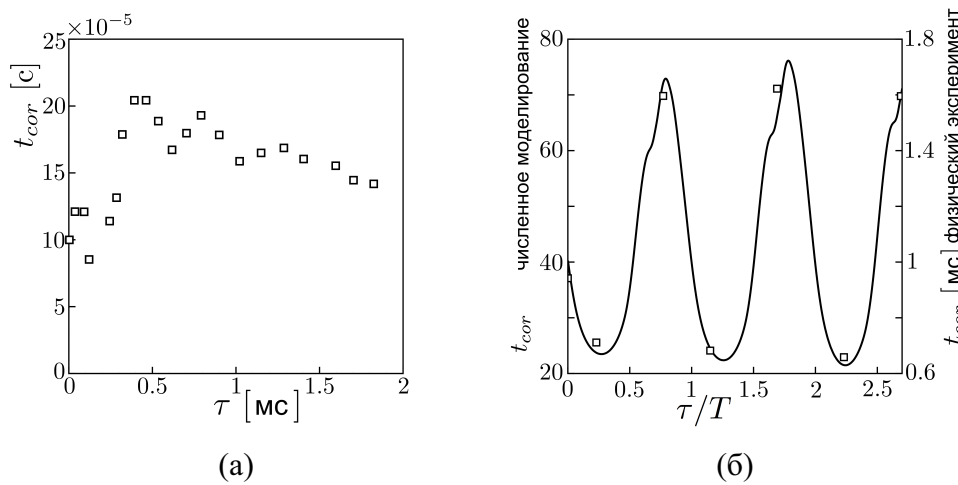


Рис. 3: (а) Зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний в системе ФитцХью-Нагумо при наличии запаздывающей обратной связи (система (3)) от времени запаздывания. Значения параметров: $\tau_c = 0.05$, $K = 0.5$, $D = 0.0625$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$ (б) Зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением с запаздывающей обратной связью, полученная в численных (сплошная линия) и физических экспериментах (черные незаполненные квадраты). Значения параметров: $K = 0.024$, $D = 0.01$, $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = -0.06$ (численный эксперимент), $\varepsilon = -0.093$ (физический эксперимент), $T = 2\pi$

В п. 2.2 рассматривается детерминированная модель генератора с жестким возбуждением (система (2)), содержащая запаздывающую обратную связь. В квазигармоническом приближении показано, что запаздывающая обратная связь модулирует бифуркационное значение параметра ε , соответствующее субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узловой бифуркации предельных циклов.

В п. 2.3 численно и экспериментально исследуется модель генератора с жестким возбуждением с запаздывающей обратной связи при наличии аддитивного шума. В численных и физических экспериментах подтверждаются данные, полученные в п. 2.2. Показывается возможность управления характеристиками индуцированных шумом колебаний (на примере времени корреляции) путем изменения времени запаздывания (рис. 3б). Изменения характеристик индуцированных шумом колебаний рассматриваются совместно со стохастическими Р-бифуркациями, наблюдаемыми при вариации времени запаздывания. Наблюдаемые явления объясняются изменением бифуркационных значений при вариации времени запаздывания и смещением “рабочей точки”. Результаты, представленные во второй главе, отражены в работах [6, 7, 13, 14].

В третьей главе приведены результаты численного и экспериментального исследования динамики бистабильного осциллятора при наличии нелинейного трения, которое зависит от мгновенных значений координаты и скорости.

В п. 3.1 приводится описание исследуемой модели. Проводится сравнительный анализ уравнений системы с уравнениями осциллятора Крамерса с конечной (постоянной) диссипацией.

В п. 3.2 рассматривается одна из модификаций исследуемой системы. В переменных $y, v = \dot{y}$ (координата-скорость) исследуемая система описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{y} = v, \\ \varepsilon \dot{v} = -y - c_1(v - ay + by^3) + c_3(v - ay + by^3)^3 - \\ - c_5(v - ay + by^3)^5 + \varepsilon av - 3\varepsilon by^2v - \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon, a, b, c_{1,3,5}$ - параметры системы. Первое уравнение содержит источник аддитивного белого гауссова шума с интенсивностью D . Показано, что с ростом шума в исследуемой системе происходят стохастические Р-бифуркации, соответствующие первоначальному процессу разрушения бистабильности и переходу к моностабильному поведению, который затем сменяется обратным эффектом при дальнейшем росте шума: наблюдается формирование вероятностного распределения с двумя максимумами, отвечающего режиму бистабильности (рис. 4а). Выявлены следствия стохастических бифуркаций, такие как немонотонный характер зависимости дисперсии колебаний динамической переменной y (рис. 4б), а также частоты Райса (рис. 4 в), от интенсивности шума.

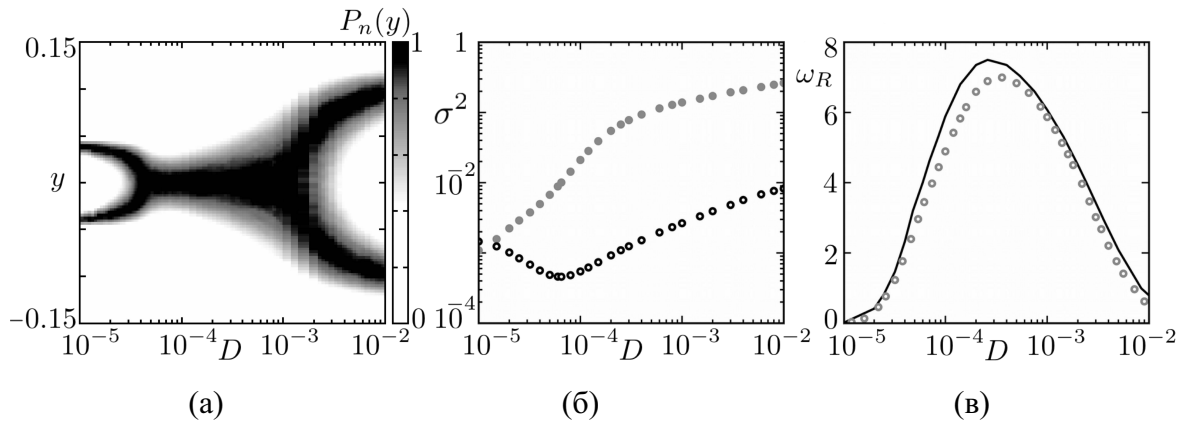


Рис. 4: Система (4):(а) Эволюция нормированного вероятностного распределения $P_n(y) = P(y)/P_{max}(y)$ с ростом интенсивности шума D . (б) зависимость дисперсии колебаний $y(t)$ (черные незаполненные круги) и $v(t)$ (серые заполненные круги) от интенсивности шума. (в) зависимость частоты Райса от интенсивности шума: полученная в численном эксперименте (серые круги) и результат вычислений с использованием эффективных характеристик (сплошная линия). Значения параметров:

$$\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100.$$

В п. 3.3 представлено описание наблюдаемых явлений с помощью эффективных характеристик: эффективной интенсивности шума D_{eff} , и эффективно-

го потенциала в виде U_{eff} . Показано, что введение эффективных характеристик позволяет определить частоту Райса из теоретических выражений, справедливых для осциллятора Крамерса. Приводится описание динамики исследуемой системы с помощью нормальной формы бифуркации вил, $\dot{z} = \mu z - z^3$, которая бистабильна при $\mu > 0$ и моностабильна при $\mu < 0$.

В п. 3.4 исследуется структура фазового пространства предложенной системы. Выявляется причина наблюдаемых явлений, которая заключается в особой форме нуллины $\dot{v} = 0$.

В п. 3.5 система (4) исследуется в физическом эксперименте. Описанные в п. 3.2 явления качественно повторяются в динамике аналоговой модели системы (4). Результаты, представленные в третьей главе, отражены в работах [8, 10].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. На примере генератора Ван дер Поля с мягким возбуждением, генератора Анищенко-Астахова и брюсселятора экспериментально было показано, что типичным эффектом влияния аддитивного шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в присутствии ангармоничности является существование бифуркационного интервала, соответствующего эволюционной перестройке формы вероятностного распределения динамических переменных при вариации управляющего параметра.
2. На примере генераторов Ван дер Поля и Анищенко-Астахова экспериментально показано, что изменение интенсивности мультипликативного шума позволяет управлять сдвигом суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в сторону увеличения значений управляющего параметра, соответствующих бифуркации.
3. В численных и физических экспериментах было установлено, что характер стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа может сильно различаться для различных динамических систем. Так, в брюсселяторе и мультипликативный, и аддитивный шум приводят не только к запаздыванию бифуркации по параметру, но и к появлению бифуркационного интервала. В то же время, в генераторах Ван дер Поля и Анищенко-Астахова при мультипликативном шуме бифуркационный интервал не наблюдается. Кроме того, качественно различен вид вероятностного распределения, характерный для бифуркационного интервала в различных системах. В генераторе Ван дер Поля в бифуркационном интервале наблюдается распределение с двумя симметричными максимумами, а в генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе бифуркационному интервалу соответствует унимодальное распределение, постепенно трансформирующееся в распределение в форме замкнутого кратера.

4. В генераторе с жестким возбуждением были выявлены особенности влияния аддитивного и мультипликативного шума на субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа, аналогичные влиянию шума на бифуркационные явления в генераторе Ван дер Поля с мягким возбуждением: аддитивный шум приводит к существованию бифуркационного интервала и сдвигу бифуркационных значений управляющего параметра в сторону больших значений, наличие мультипликативного шума приводит только к сдвигу бифуркационных значений параметров в сторону больших значений в генераторе. Для седло-узловой бифуркации в генераторе с жестким возбуждением как в случае аддитивного, так и мультипликативного шума был обнаружен бифуркационный интервал, а также сдвиг бифуркации в сторону больших бифуркационных значений параметров.
5. На примере генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением и осциллятора ФитцХью-Нагумо было экспериментально показано, что характер влияния запаздывающей обратной связи на динамику возбудимых и невозбудимых систем имеет общий характер и позволяет управлять степенью регулярности колебаний в режиме когерентного резонанса. Для генератора Ван дер Поля показана связь данного эффекта со стохастическими бифуркациями.
6. Представлена модель бистабильного осциллятора, рассматриваемая как описывающая движение в бистабильном потенциальном поле при наличии нелинейной диссипации, зависящей от координаты и скорости. Численно и экспериментально установлены особенности динамики системы в присутствии аддитивного шума, такие как индуцированные шумом переходы, связанные с исчезновением и повторным появлением бистабильности. Эти переходы приводят к немонотонной зависимости средней частоты колебаний от интенсивности шума.

Публикации автора по теме диссертации

1. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование эволюции вероятностного распределения в автогенераторах с аддитивным шумом / В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко // *Письма в ЖТФ*. — 2013. — Т. 39, № 14. — С. 16–24.
2. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в автогенераторах с аддитивным и параметрическим шумом / В.В. Семенов, К.В. Закорецкий, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2013. — Т. 9, № 3. — С. 421–434.

3. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование разрушения автоколебаний под действием аддитивного источника шума / В.В. Семенов // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2013. — Т. 21, № 3. — С. 43–51.
4. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование стохастических явлений в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа / В.В. Семенов, А.С. Листов, Т.Е. Вадивасова // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2014. — Т. 22, № 5. — С. 43–57.
5. Купцова, А.А. Исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в автогенераторе методом численного моделирования / А.А. Купцова, В.В. Семенов, А.С. Листов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 59–64.
6. Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи. Натурный эксперимент / В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Е. Шёлль, А.С. Захарова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 43–51.
7. Time-delayed feedback control of coherence resonance near subcritical Hopf bifurcation: Theory versus experiment / V. Semenov, A. Feoktistov, T. Vadivasova et al. // *Chaos*. — 2015. — Vol. 25, no. 3. — P. 033111.
8. Индуцированные шумом эффекты в модели бистабильного осциллятора с переменной диссипацией / В.В. Семенов, А.Б. Нейман, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2016. — Т. 24, № 1. — С. 5–15.
9. Загорецкий, К.В. Экспериментальное исследование влияния параметрического шума на бифуркацию Андронова-Хопфа в брюселляторе / К.В. Загорецкий, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова // *Радиотехника и электроника*. — 2016. — Т. 61, № 9. — С. 1–10.
10. Noise-induced transitions in a double-well oscillator with nonlinear dissipation / V.V. Semenov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, V. S. Anishchenko // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 052210.
11. Experimental Studies of Noise Effects in Nonlinear Oscillators: in *Nonlinear Dynamics and Complexity* / V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, A. V. Feoktistov et al. — Springer International Publishing, Switzerland, 2014. — Pp. 261–290.
12. Semenov, V. V. Experimental research of stochastic Andronov-Hopf bifurcation in self-sustained oscillators with additive and parametric noise / V. V. Semenov // Сборник тезисов международной конференции "Динамика, бифуркации и странные аттракторы Нижний Новгород, Россия, 1-5 июля. — 2013. — P. 101.

13. *Semenov, V. V.* The effect of coherence resonance in different time-delayed systems / V. V. Semenov, A. V. Feoktistov, T. E. Vadivasova // International Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics"(NWP-2014), Program and Abstracts, Nizhny Novgorod, Russia, 17-23 July. — 2014. — P. 27.
14. *Feoktistov, A.* Control of noise-induced oscillations in a Generalized Van der Pol oscillator / A. Feoktistov, V. Semenov // International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems Book of abstracts, Saratov, Russia, 19-23 May. — 2014. — P. 18.
15. *Semenov, V. V.* Experimental studies of stochastic Andronov-Hopf bifurcation / V. V. Semenov, T. E. Vadivasova, A. S. Zakharova // International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems Book of abstracts, Saratov, Russia, 19-23 May. — 2014. — P. 40.