

ФГБОУ ВО «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи

Круглов Вячеслав Павлович

**КОНЕЧНОМЕРНЫЕ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ
СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРЫ,
ГЕНЕРИРУЮЩИЕ ГРУБЫЙ ХАОС**

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П.

Саратов 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на базовой кафедре динамических систем факультета нелинейных процессов

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор **Кузнецов Сергей Петрович**, ФГБУН «Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук», зав. лабораторией, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского», профессор

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Крысько Антон Вадимович**, Кафедра «Прикладная математика и системный анализ» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.»,

кандидат технических наук, доцент

Сафин Ансар Ризаевич,

Кафедра формирования и обработки радиосигналов ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "МЭИ"».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», г. Нижний Новгород.

Защита состоится «8» сентября 2016 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 по специальности 01.04.03 – радиофизика на базе ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. В.А. Артисевич и на сайте Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,



Аникин Валерий Михайлович

Актуальность темы исследования

В последние два десятилетия значительное внимание привлекает идея применения хаотических сигналов, в частности, в системах коммуникации, поскольку, как можно полагать, хаос обладает рядом преимуществ и особенностей в сравнении с другими типами сигналов. Как отмечено в монографии¹, принципиальным для практического использования генераторов хаоса является вопрос относительно воспроизводимости устройств от образца к образцу и чувствительности хаотических режимов к изменению внешних и внутренних параметров. Следуя терминологии теории колебаний, привлекаемые для практического использования системы должны обладать свойством грубости.² В современной теории динамических систем его формализуют как структурную устойчивость. Среди систем с хаотической динамикой свойство грубости в строгом математическом смысле присуще только гиперболическому хаосу, что определяет необходимость проработки проблемы реализации хаотической динамики именно этого типа для систем радиофизики и электроники.

Степень разработанности темы исследования. Предложенные в математических работах примеры гиперболического хаоса (отображения Аносова, аттрактор Плыкина, соленоид Смейла–Вильямса)³ представляли собой абстрактные геометрические конструкции, и в течение многих лет вопрос о физической реализации и перспективах практического применения систем с гиперболическим хаосом оставался открытым. К настоящему времени, в результате цикла исследований, проведенных в основном саратовской группой под руководством С.П. Кузнецова, указаны и изучены примеры физически реализуемых систем с гиперболическими аттракторами.⁴

Один из продуктивных подходов к построению генераторов хаоса состоит в использовании схем в виде кольцевых цепочек, составленных из нелинейных активных и пассивных элементов и фильтров первого и второго порядка. Такие схемы в разных вариантах были предложены, исследованы теоретически и численно, а также созданы в виде реальных электронных устройств в ИРЭ РАН группой А.С. Дмитриева и его сотрудников.¹ Генерация в них обусловлена наличием обратной связи в силу замыкания кольца, а не автоколебательной природой индивидуальных элементов. Заслуживает внимания вопрос о построении на аналогичной основе генераторов грубого гиперболического хаоса.

Помимо конечномерных систем, с точки зрения реализации гиперболического хаоса могут представлять интерес также распределенные системы кольцевой структуры с периодическими граничными условиями, описываемые уравнениями с частными производными. Первые примеры такого рода

¹ Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424с.

² Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916с.

³ Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, 192-212;

Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997, 7, 1353-2001.

⁴ Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике //УФН, 2011, **181**, №2, 121-149.

указаны в работах ⁵ (модифицированное уравнение Свифта-Хохенберга и параметрически возбуждаемая нелинейная струна). В рамках диссертационного исследования предпринят дальнейший поиск такого рода систем на основе нелинейных уравнений, известных в теории волн ⁶, имея в виду возможность их целенаправленной модификации для обеспечения гиперболического хаоса посредством введения дополнительных обратных связей или периодической модуляции параметров.

Цели и задачи работы

Целью диссертационной работы является разработка и изучение физически реализуемых систем кольцевой структуры, как конечномерных, так и распределенных, с грубой (структурно устойчивой) хаотической динамикой, отвечающей аттракторам типа соленоида Смейла–Вильямса, и проведение их исследования посредством компьютерного моделирования с обоснованием гиперболической природы хаоса.

Перед диссертационным исследованием были поставлены следующие основные конкретные задачи.

1. Построение и исследование кольцевой схемы генератора хаоса с нелинейным элементом, управляемым периодической последовательностью радиоимпульсов с прямоугольной огибающей или модулированного сигнала с синусоидальной огибающей.
2. Построение и исследование кольцевой схемы генератора хаоса с нелинейным элементом и периодически перестраиваемым полосовым фильтром.
3. Построение и исследование модельной автономной системы с аттрактором Смейла-Вильямса на основе кольцевой структуры из автоколебательных элементов с резонансным механизмом передачи возбуждения по кольцу.
4. Построение и исследование модельных распределенных систем, в которых хаотическая динамика обусловлена трансформацией пространственной фазы попеременно рождающихся паттернов в соответствии с растягивающим отображением окружности.
5. Разработка и применение методик компьютерной проверки гиперболической природы аттракторов на основе анализа статистики распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий.

Научная новизна

⁵ Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Hyperbolic Chaos of Turing Patterns. Phys. Rev. Lett., 108, 2012, 194101; Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source. Phys. Rev. E, 87, 2013, 040901.

⁶ Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium //Reviews of Modern Physics, 65, 1993, No 3, 851-1112.

Предложены новые схемы кольцевых неавтономных систем, генерирующих хаос, обусловленный присутствием аттрактора в виде соленоида Смейла–Вильямса в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Впервые предложен пример автономной распределенной системы, описываемой уравнениями с частными производными, где реализуется гиперболический аттрактор типа Смейла–Вильямса. Впервые показана возможность реализации гиперболического хаоса в модельной распределенной системе типа реакция – диффузия при периодической модуляции коэффициентов диффузии. Впервые проведена проверка гиперболичности аттракторов на основе анализа статистики углов пересечения в отношении конечномерных моделей распределенных систем, построенных методом Галеркина.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы определяется тем, что указаны новые примеры систем с гиперболическим хаосом, допускающих физическую реализацию, что существенно расширяет круг объектов, к которым применима строгая математическая теория. Практическая значимость работы определяется тем, что она открывает возможность создания генераторов хаоса в радиофизике и электронике, характеризующихся свойством грубости, то есть малой чувствительностью к изменению параметров, помехам, погрешностям изготовления, что является принципиальным преимуществом с точки зрения возможных приложений хаоса.

Методология и методы исследования

Для построения систем с гиперболическими хаотическими аттракторами, обладающими свойством грубости, использованы подходы радиофизики и теории колебаний, такие как модуляция параметров, введение дополнительных обратных связей, генерация гармоник при нелинейном преобразовании сигнала.⁷ Для описания систем используются модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Для распределенных систем также выводятся и исследуются модели, полученные аппроксимацией на базе конечного числа пространственных мод (метод Галеркина⁸). Для численного решения уравнений используются разработанные в литературе методы, для которых обоснованы сходимости и устойчивость.⁹ Привлекаются методы компьютерного исследования хаотической динамики, в том числе построение фазовых портретов аттракторов и расчеты показателей Ляпунова.¹⁰ На уровне конечномерных моделей используются специально разработанные методики проверки формальных критериев гиперболического хаоса, в том числе условия отсутствия касаний устойчивых и неустойчивых подпро-

⁷ Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 432с.

⁸ Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988. 352с.

⁹ Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512с.

¹⁰ Шустер Г. Детерминированный Хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 240с.

Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356с.

странств векторов возмущения на принадлежащих аттрактору фазовых траекториях.¹¹

Положения, выносимые на защиту

- 1) Грубый хаос, обусловленный гиперболическим аттрактором в виде солениоида Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре, осуществим в кольцевой схеме, составленной из двух диссипативных осцилляторов с отличающимися вдвое частотами, и нелинейного элемента, управляемого периодической последовательностью радиоимпульсов с прямоугольной огибающей или модулированным сигналом с гладкой синусоидальной огибающей.
- 2) Генерация грубого хаоса, отвечающего аттрактору Смейла–Вильямса, может быть реализована в устройстве в виде кольцевой схемы, содержащей активный квадратичный нелинейный элемент и два полосовых фильтра, один из которых периодически перестраивается, так что наибольшая и наименьшая частоты на периоде перестройки различаются вдвое.
- 3) Грубый гиперболический хаос, обусловленный аттрактором Смейла–Вильямса, реализуется в автономной системе на основе кольцевой структуры, содержащей квадратичный нелинейный элемент и достаточно большое число автоколебательных подсистем, частоты которых плавно меняются от одного элемента к другому, так что при полном обходе кольца достигается двукратное изменение.
- 4) Гиперболический хаос, обусловленный трансформацией пространственной фазы попеременно рождающихся паттернов в соответствующем отображении окружности, реализуется в предложенной автономной распределенной системе на основе модифицированного уравнения Свифта-Хохенберга, и в неавтономной системе типа реакция-диффузия с периодической модуляцией коэффициентов диффузии.
- 5) На защиту выносятся результаты проверки гиперболической природы аттракторов, опирающейся на анализ статистики распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, в применении к конкретным примерам систем кольцевой структуры, в том числе для распределенных систем на основе конечномерных моделей, построенных методом Галеркина.

Достоверность результатов работы определяется применением апробированных в радиофизике подходов к конструированию кольцевых схем, содержащих нелинейные элементы, а также распределенных систем на основе модификации эталонных моделей, выработанных в теории нелинейных волн, использованием схем численного решения уравнений, обеспечивающих аппрок-

¹¹ Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity, 1993, 6, 779-798. Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A, 2000, 270, 301-307.

симацию и устойчивость при тестированном надлежащим образом выборе шагов интегрирования.

Личный вклад соискателя. Все включенные в диссертацию результаты получены лично автором, производившим выбор методик решения задач, программирование, численные расчеты, графическую обработку и анализ данных. Постановка задач и интерпретация результатов выполнялись совместно с научным руководителем и другими соавторами совместных опубликованных работ.

Публикации и апробация

Основные результаты диссертации были представлены докладами на X и XI международных школах «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2010, 2013 гг.), XVI и XVII научных школах «Нелинейные волны» (Нижний Новгород, 2012, 2016 гг.), Международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" (Нижний Новгород, 2013), Международной конференции "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems" (Саратов, 2014), Международной конференции "Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's" (Нижний Новгород, 2014), Международной школе-конференции "Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015" (Нижний Новгород, 2015), 12-й молодежной конференции им. Ивана Анисимкина "Современные проблемы радиотехники и электроники" (Москва, 2015), Международной конференции "Geometry, Dynamics, Integrable Systems" (Ижевск, 2016), XVI Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (Волгоград, 2010 г.), на V, VI, VIII, IX и X Всероссийских конференциях молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2010, 2011, 2013-2015 гг.), на научных школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2009–2014 гг.), на Студенческой научной конференции Саратовского государственного университета (2012 г.) а также на научных семинарах базовой кафедры динамических систем СГУ.

Частично результаты диссертации получены в процессе выполнения Работ, поддержанных грантом РФФИ 16-32-00449 (руководитель Круглов В.П.), а также грантами РФФИ 11-02-91334, 12-02-00342, 14-02-31162, 16-02-00135, грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-1726.2014.2, грантом Президента РФ для молодых ученых МК-905.2010.2, грантом DAAD (Forschungsstipendien für Doktoranden und Nachwuchswissenschaftler), грантом Российского научного фонда № 15-12-20035.

По результатам диссертации опубликовано 25 работ, из них статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК – 7 [1-7], статей в сборниках и тезисов докладов – 19 [8-26].

Структура и объем работы. Работа содержит 140 страниц, из них 87 страниц основного текста, 45 страниц иллюстраций и список литературы из 51 наименования на 8 страницах.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, и заключения.

Во Введении обсуждается актуальность, научная новизна и значимость результатов работы, изложено ее краткое содержание, приводятся сведения о публикациях и апробации.

В первой главе рассмотрены варианты построения систем кольцевой структуры, содержащих два полосовых фильтра и элемент с квадратичной нелинейностью и насыщением [1,3].

Функционирование схемы в одном варианте обеспечивается периодическим воздействием на систему последовательности радиоимпульсов или, в другом варианте – модулированного сигнала с синусоидальной огибающей [1]. Математически модель описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Произведен также переход к уравнениям для медленных комплексных амплитуд и к отображению возврата Пуанкаре.

Модельные уравнения системы в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\dot{x} = -\omega_0 u - \gamma x + \gamma g(t)y, \quad \dot{u} = \omega_0 x, \quad \dot{y} = -2\omega_0 v - \gamma y + \gamma x^2 / (1 + x^2), \quad \dot{v} = 2\omega_0 y. \quad (1)$$

Здесь γ – коэффициент затухания, собственная частота первого осциллятора равна ω_0 , а второго – $2\omega_0$. Функция

$$g(t) = \begin{cases} a^2 \sin(\omega_0 t), & nT \leq t \leq nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau \leq t \leq (n+1)T, \end{cases} \quad T = 2\pi N \omega_0^{-1}$$

описывает внешний сигнал (последовательность радиоимпульсов с прямоугольной модуляцией). a – коэффициент усиления.

На рис. 1 (а) представлена итерационная диаграмма отображения Пуанкаре для фазы колебаний второго осциллятора, которая определена как аргумент числа $y + iv$ в моменты времени, отвечающие целому числу периодов модуляции, и отнесена к интервалу от 0 до 2π . Преобразование фазы соответствует топологическому типу, требуемому для реализации гиперболического аттрактора в виде соленоида Смейла – Вильямса. В самом деле, реализуется двукратно растягивающее отображение окружности: при проходе величиной ψ_n интервала от 0 до 2π образ ψ_{n+1} проходит этот интервал дважды.

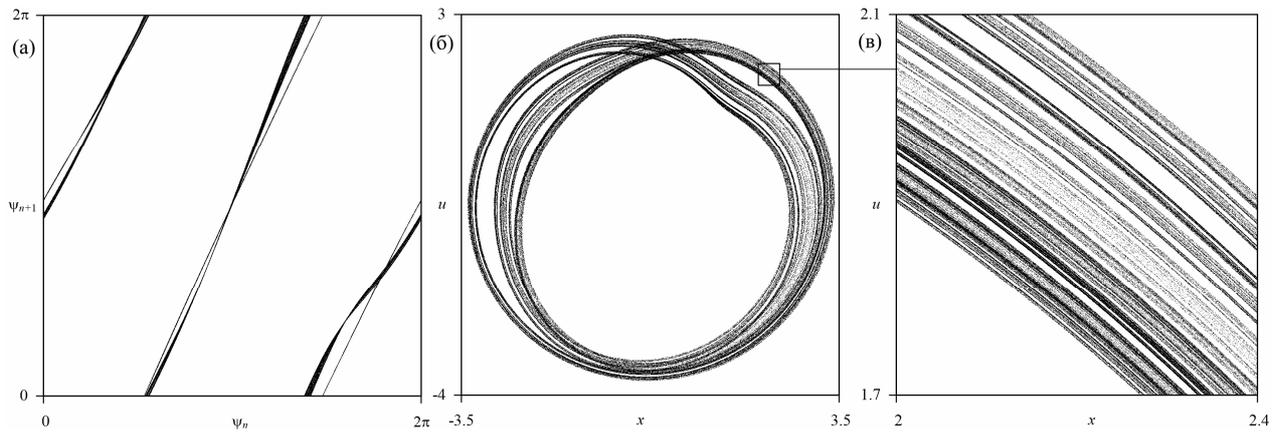


Рис. 1 (а). Итерационная диаграмма для фазы второго осциллятора; (б) аттрактор системы в сечении Пуанкаре на плоскости динамических переменных (x, u) и (в) его увеличенный фрагмент при значениях $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$. Показатели Ляпунова аттрактора отображения Пуанкаре $\Lambda_1 = 0.676$, $\Lambda_2 = -0.87$, $\Lambda_3 = -4.80$, $\Lambda_4 = -5.49$.

На рис. 1 (б) изображен аттрактор отображения Пуанкаре за период внешнего воздействия в проекции на плоскость (x, u) и его увеличенный фрагмент (в). На рисунке отчетливо видна фрактальная структура аттрактора, характерная для соленоида Смейла-Вильямса.

Старший показатель Ляпунова положительный, что является количественным подтверждением присутствия хаоса и близок к величине $\ln 2$. Остальные показатели отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает двукратное растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем, что соответствует гиперболическому аттрактору типа Смейла-Вильямса, вложенному в четырехмерное фазовое пространство.

Вариант модели, в которой вспомогательный сигнал имеет вид последовательности радиоимпульсов с гладкой огибающей, описывается уравнениями (1), в которых следует положить

$$g(t) = \begin{cases} a^2 \sin^2(\pi t/\tau) \sin(\omega_0 t), & nT \leq t \leq nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau \leq t \leq (n+1)T, \quad T = 2\pi N \omega_0^{-1}. \end{cases}$$

Для модифицированной системы были получены аналогичные результаты. В частности, при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ в сечении Пуанкаре реализуется аттрактор Смейла-Вильямса с показателями Ляпунова $\Lambda_1 = 0.684$, $\Lambda_2 = -2.11$, $\Lambda_3 = -3.67$, $\Lambda_4 = -5.28$.

Следующая предложенная в первой главе схема кольцевой структуры составлена из двух колебательных подсистем, одна из которых представляет собой перестраиваемый фильтр с периодическим изменением центральной частоты полосы пропускания от исходного значения до удвоенной величины [3]. Проведено численное исследование, подтвердившее, что динамика фазы колебаний описывается растягивающим отображением окружности, вычислены показатели Ляпунова и построены графики их зависимости от параметров системы, вид которых подтверждает структурную устойчивость аттрактора.

Модель математически описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x - \omega_0 u + a\gamma y, \quad \dot{u} = \omega_0 x, \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega_0 v + a\gamma x^2 / (1 + x^2), \quad \dot{v} = \omega_0 (1 + \sin^2(\pi t / T))^2 y. \end{aligned} \quad (2)$$

здесь γ – коэффициент затухания, a – коэффициент усиления, ω_0 – частота первого осциллятора, T – период модуляции.

На рис. 2 (а) представлена итерационная диаграмма отображения для фазы колебаний первого осциллятора. На рис. 2 (б) изображен аттрактор отображения возврата Пуанкаре за период модуляции частоты в проекции на плоскость (x, u) и его увеличенный фрагмент (в). Наблюдается сходство с портретом аттрактора Смейла-Вильямса. Аттрактор обладает фрактальной структурой.

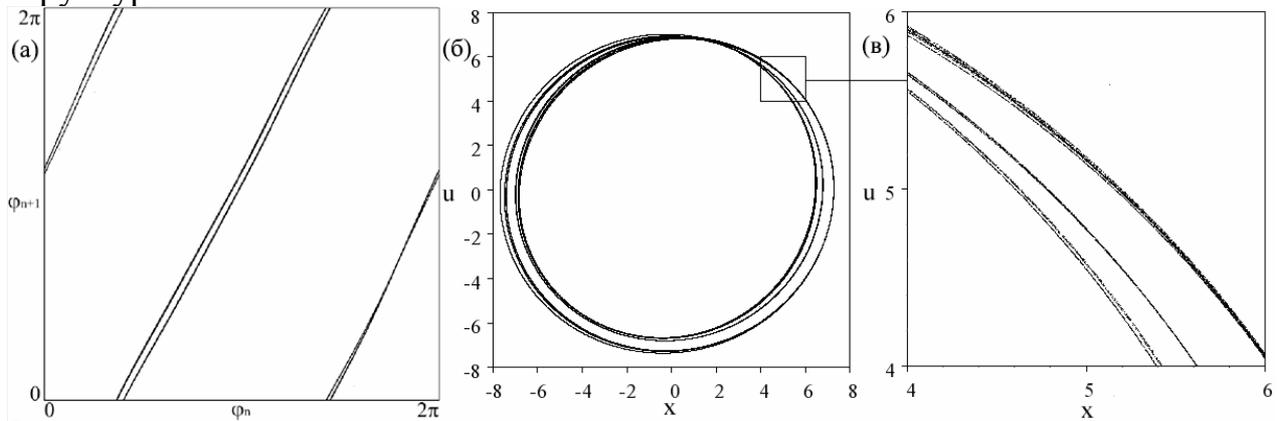


Рис. 2 (а). Итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора при значениях $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$.; (б) аттрактор системы в сечении Пуанкаре на плоскости динамических переменных (x, u) и (в) его увеличенный фрагмент (в). Показатели Ляпунова аттрактора в сечении Пуанкаре составили $\Lambda_1 = 0.690$, $\Lambda_2 = -2.20$, $\Lambda_3 = -4.46$, $\Lambda_4 = -6.01$.

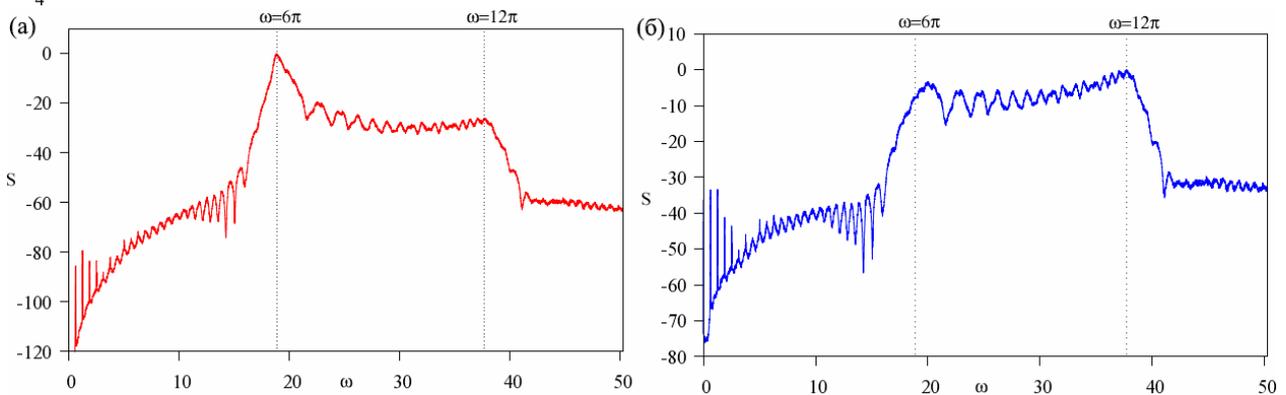


Рис. 2. Спектры плотности мощности сигналов от первого (а) и второго (б) осцилляторов ($\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). По оси ординат использован логарифмический масштаб (децибелы).

На рис. 3 представлены спектры плотности мощности сигналов от первого и второго осцилляторов, полученные в численных расчетах для генерируемого системой хаотического сигнала. Спектры колебаний сплошные, это под-

тверждает хаотическое поведение исследуемой системы. Наибольшей интенсивностью обладают составляющие спектров сигналов в интервале между частотой первого осциллятора ω_0 и максимальной частотой второго осциллятора $2\omega_0$. Максимум плотности мощности первого осциллятора приходится на частоту ω_0 , второго – на $2\omega_0$. Также в спектрах имеются дискретные составляющие, обусловленные модуляцией частоты второго осциллятора.

Во **второй** главе рассмотрена автономная система с аттрактором типа Смейла-Вильямса, динамика которой осуществляется вблизи гетероклинического цикла кольцевой цепочки из автогенераторов при поочередной активации элементов с передачей возбуждения по кольцу [2]. Большое число элементов вводится для того, чтобы обеспечить резонансную передачу возбуждения между соседними звеньями по кольцу, собственные частоты которых близки. При этом собственные частоты постепенно уменьшаются от начала к концу цепи, так что частоты первого и последнего осцилляторов отличаются в два раза, а передача возбуждения между последним и первым элементами цепи осуществляется через квадратичный нелинейный элемент, так что частота и фаза колебаний удваиваются.

Цепочка описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - (A + \frac{3}{2}x_N^2 + x_0^2 - 2\sum_{k=0}^N x_k^2)\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= \varepsilon x_N^2, \\ \ddot{x}_k - (A + \frac{3}{2}x_{k-1}^2 + x_k^2 - 2\sum_{k=0}^N x_k^2)\dot{x}_k + 2^{-2k/N}\omega_0^2 x_k &= \varepsilon x_{k-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ε – коэффициент связи, ω – частота осциллятора 0.

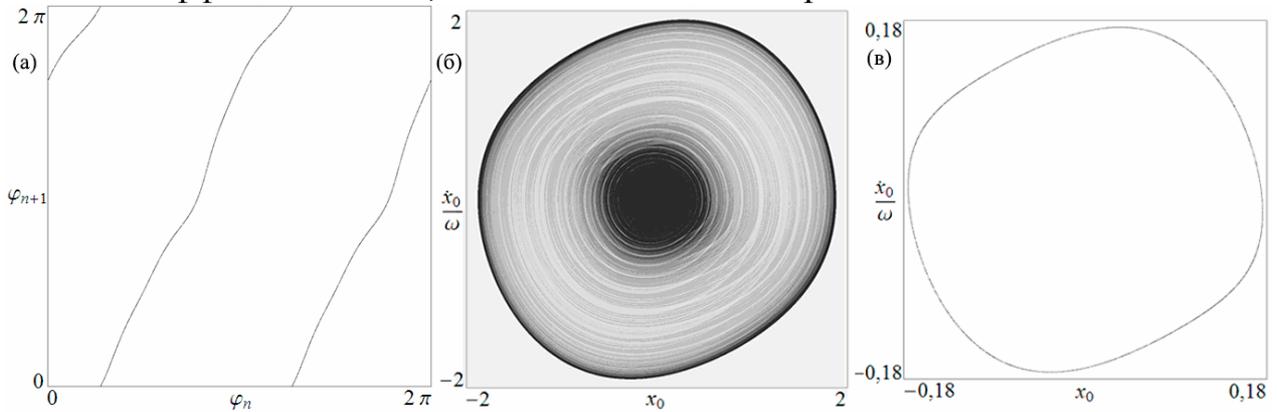


Рис. 4. (а) Итерационная диаграмма для фаз, полученная при численном решении модели (3) при $N = 14$, $A = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.2$. Фаза определяется как $\varphi = \arg(x_0 + i\dot{x}_0 / \omega_0)$. Портрет аттрактора потоковой системы (б) и портрет аттрактора отображения Пуанкаре (в) в проекции на фазовую плоскость осциллятора с нулевым номером. Три старших показателя Ляпунова аттрактора отображения Пуанкаре составили $\Lambda_1 = 0.6936$, $\Lambda_2 = -76.4$, $\Lambda_3 = -143.95$.

На рис. 4 (а) показана диаграмма фаз φ_{n+1} от φ_n , построенная с применением специальной адаптированной для данной задачи процедуры отображения Пуанкаре. Вид диаграммы говорит о том, что реализуется гиперболический аттрактор, соответствующий надстройке над соленоидом Смейла-Вильямса. Рис. 4 (б) демонстрирует портреты аттрактора в проекции на фазо-

вую плоскость одного из осцилляторов. На панели (а) показан аттрактор поточковой системы в проекции из фазового пространства размерности $2(N+1)$. На панели (в) приведен аттрактор в отображении Пуанкаре. Это соленоид Смейла-Вильямса, хотя присущая ему тонкая канторова структура не различима из-за высокой степени сжатия фазового объема.

Старший показатель Ляпунова положительный и близок к величине $\ln 2$. Следовательно, мы можем считать, что старший показатель связан с угловой координатой в фазовом пространстве $2(N+1)$, вдоль которой происходит растяжение. Второй показатель отрицательный, его абсолютная величина достаточно большая, чтобы обеспечить сжатие фазового объема.

В третьей главе рассматриваются примеры распределенных систем, демонстрирующих гиперболический хаос и описываемых уравнениями с частными производными.

Первая модель – это автономная система, построенная на основе модификации уравнения Свифта–Хохенберга [4].

Модель описывается системой уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \partial_t u + (1 + \partial_x^2)^2 u &= \mu u + u^3 - \frac{1}{5} uv^2 + \varepsilon v \cos 3x, \\ \partial_t v &= -v + u^2 v + u^2, \end{aligned} \quad (4)$$

с периодическими граничными условиями:

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t), \quad (5)$$

где L – длина среды. Первое уравнение системы (4) представляет собой модифицированное уравнение Свифта-Хохенберга. Функция $\varepsilon \cos 3x$ в последнем слагаемом правой части описывает пространственную неоднородность среды. Второе уравнение вспомогательное и не содержит производных по координате. В соответствии с периодическими граничными условиями, функции u и v , описывающие паттерны, периодические в пространстве, и их можно представить в виде рядов Фурье.

На рис. 5 представлена пространственно-временная зависимость переменных u и v , полученная при численном моделировании пространственно-временной динамики системы. Диаграмма иллюстрирует эволюцию паттернов в системе. Можно видеть, что в процессе эволюции во времени пространственный фазовый сдвиг паттернов от одного периода модуляции к другому меняется нерегулярным образом.

На рис. 6 (а) изображена диаграмма для пространственной фазы первой гармоники переменной u . Как видно из диаграммы, динамика фазы описывается растягивающим отображением окружности. В самом деле, за полный проход точкой φ_n интервала от 0 до 2π ее образ φ_{n+1} проходит этот интервал дважды в обратном направлении. На рис. 6 (б) изображена проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей первой пространственной гармоники переменной u .

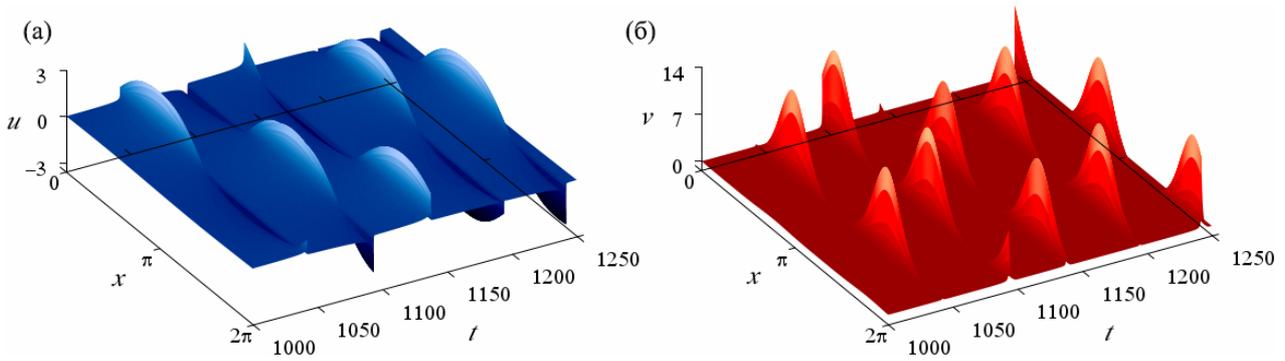


Рис. 5. (а) Пространственно-временная зависимость переменной $u(x,t)$. (б) Пространственно-временная зависимость переменной $v(x,t)$. Реализации получены численным решением системы (4)-(5) при значениях параметров схемы $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$, $\Delta t = 0.001$ $\Delta x = L/64 \approx 0.098$.

Старший показатель Ляпунова аттрактора отображения Пуанкаре, близок к $\ln 2$, показателю Ляпунова растягивающего отображения окружности. Остальные показатели для отображения отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным за одну итерацию. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла-Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной), но в бесконечномерном фазовом пространстве.

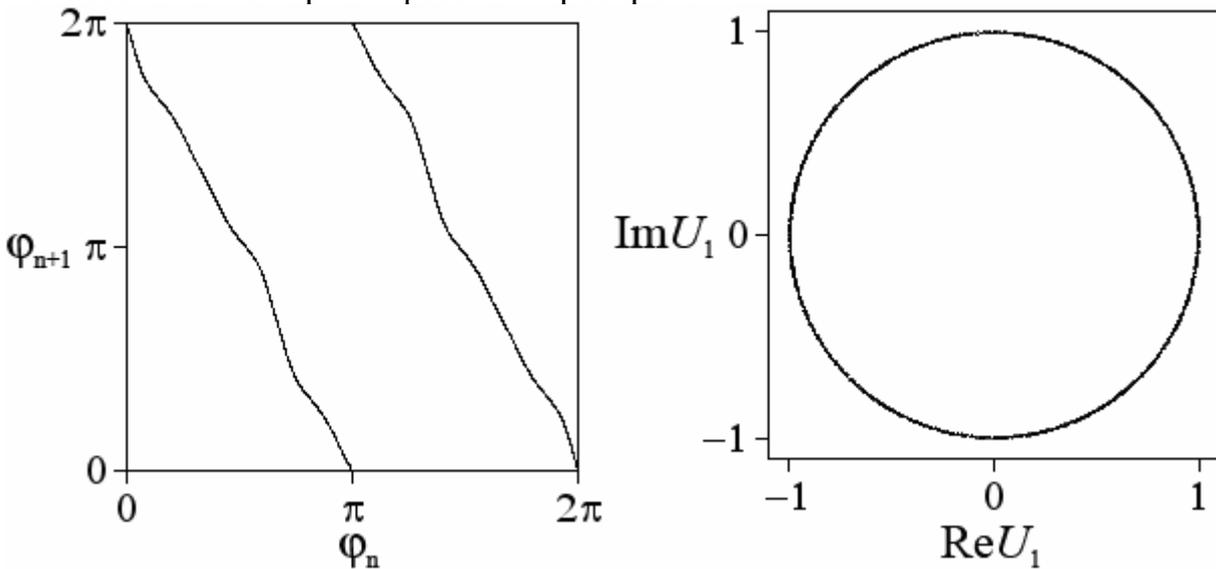


Рис. 6 (а). Диаграмма для пространственной фазы первой гармоники U_1 переменной u . (б). Проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей переменной U_1 . Первые четыре показателя Ляпунова аттрактора отображения Пуанкаре: $\Lambda_1 = 0.665$, $\Lambda_2 = -42.26$, $\Lambda_3 = -44.53$, $\Lambda_4 = -46.44$.

Поскольку функционирование распределенной системы основано на взаимодействии пространственных гармоник, приближенно динамику можно описать конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в качестве переменных которой выступают несколько наиболее значимых Фурье-компонент переменных u и v . Минимальное число переменных, которые необходимо учитывать, равно пяти:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= (\mu - \frac{1}{5}w^2 + 3|C_1|^2 - \frac{2}{5}|C_2|^2)C_1 - \frac{2}{5}C_2C_1^*w + \frac{1}{2}\varepsilon C_2^*, \\
\dot{C}_2 &= (2|C_1|^2 - 1)C_2 + (w+1)C_1^2, \\
\dot{w} &= -w + 2\operatorname{Re}(C_2C_1^{*2}) + 2|C_1|^2(w+1).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь C_1 – комплексная амплитуда первой гармоники переменной u , C_2 – комплексная амплитуда второй гармоники переменной v , w – вещественная амплитуда нулевой гармоники переменной v . Кроме системы (6) была рассмотрена семимерная система, учитывающая четвертую гармонику переменной v .

Для конечномерных систем были получены результаты, подтверждающие наличие аттрактора Смейла-Вильямса при $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$. Показано, что имеет место качественное соответствие поведения распределенной и конечномерных систем. Семимерная система является более точным приближением к распределенной системе, по сравнению с пятимерной системой (6). Были построены портреты аттракторов отображения Пуанкаре, итерационные диаграммы для фаз, вычислены показатели Ляпунова.

Вторая распределенная система – неавтономная, сконструированная на базе модели реакция – диффузия типа брюсселятора с периодически модулированными коэффициентами диффузии [6]:

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= (A - u)(1 + \varepsilon \cos 3k_0 x) - Bu + u^2 v + \gamma(t)\sigma \partial_{xx} u, \\
\partial_t v &= Bu - u^2 v + \gamma(t)\partial_{xx} v,
\end{aligned} \tag{7}$$

где функция

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & nT < t \leq nT + T/2, \\ 1/4, & nT + T/2 < t \leq (n+1)T \end{cases}$$

описывает периодическое переключение коэффициентов диффузии. Геометрия среды кольцевая (периодические граничные условия):

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t), \tag{8}$$

где L – длина среды. Множитель $(1 + \varepsilon \cos 3k_0 x)$ обеспечивает пространственно неоднородное затухание формирующихся в среде структур.

На рис. 7 (а) и (б) изображены пространственно-временные реализации переменных u и v , полученные при численном решении уравнений (7)-(8) с помощью явно-неявной разностной схемы. Можно видеть, что пространственная фаза паттернов от одного периода модуляции к другому меняется нерегулярно.

На рис. 8 (а) приводится итерационная диаграмма пространственной фазы Фурье-гармоники с $k = 2$ переменной u . Она близка к итерационной диаграмме отображения Бернулли: если фаза проходит интервал $[0, 2\pi]$, ее образ проходит этот интервал дважды в обратном направлении. На рис. 8 (б) представлена проекция аттрактора стробоскопического отображения на плоскость дей-

ствительной и мнимой частей комплексной амплитуды второй гармоники переменной u . Аттрактор представляет собой соленоид Смейла-Вильямса, причем при увеличении фрагмента аттрактора можно различить тонкую канторову поперечную структуру, характерную для соленоида.

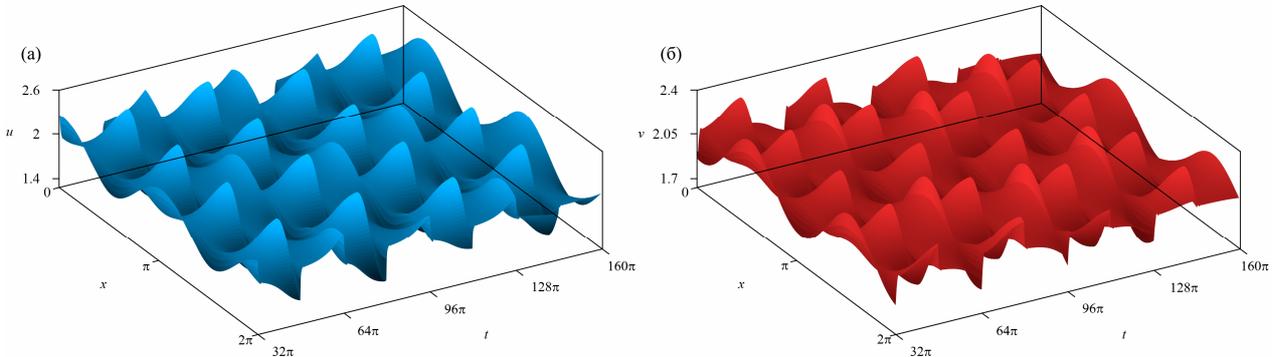


Рис. 7 (а). Пространственно-временная реализация переменной u ; (б). Пространственно-временная реализация переменной v . Значения параметров: $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $L = 2\pi$, $T = 32\pi$

Старший показатель Ляпунова положительный и близок $\ln 2$. Он соответствует расширению вдоль угловой переменной в фазовом пространстве. Остальные показатели отрицательные, а их абсолютные значения достаточно большие и обеспечивают сжатие фазового пространства.

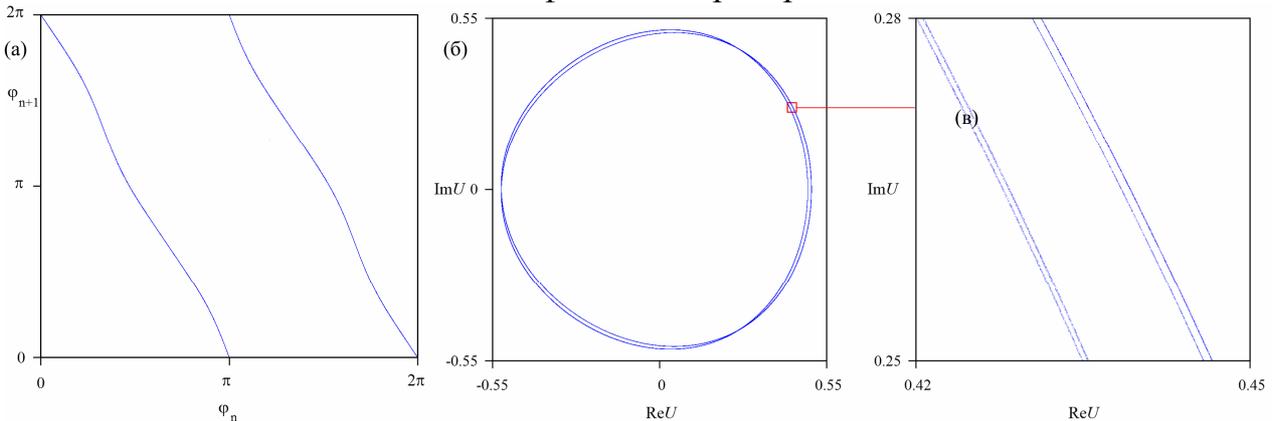


Рис. 8. (а) Итерационная диаграмма фазы пространственной Фурье-гармоники с $k = 2$ переменной u . (б) Портрет аттрактора стробоскопического отображения в проекции на плоскость действительной и мнимой частей гармоники переменной u с волновым числом $k = 2$ и его увеличенный фрагмент (в). Показатели Ляпунова аттрактора отображения Пуанкаре составили $\Lambda_1 = 0.68$, $\Lambda_2 = -2.53$, $\Lambda_3 = -30.71$, $\Lambda_4 = -31.91$, $\Lambda_5 = -44.99$, $\Lambda_6 = -44.03$, $\Lambda_7 = -65.55$, $\Lambda_8 = -71.32$.

Была введена минимальная система укороченных уравнений, корректно описывающая качественный характер динамики. Для конечномерной системы получены результаты, подтверждающие наличие аттрактора Смейла-Вильямса, в частности, при параметрах $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $T = 32\pi$. Были построены портреты аттракторов отображения Пуанкаре, итерационные диаграммы для фаз, вычислены показатели Ляпунова.

Четвертая глава посвящена компьютерной проверке гиперболической природы аттракторов систем, рассмотренных в предыдущих главах диссертации, и некоторых других примеров [5, 6, 7].

Устойчивые и неустойчивые многообразия траекторий гиперболического аттрактора могут пересекаться лишь под ненулевым углом. На этом свойстве гиперболических аттракторов основан метод численной проверки гиперболичности¹¹. Благодаря использованию новой модификации алгоритма,¹² объем вычислений оказывается относительно небольшим, что позволяет эффективно применять тест к системам произвольной размерности. В диссертационной работе метод применяется только к системам с одномерным неустойчивым подпространством, однако его можно распространить и на системы с произвольными размерностями устойчивых и неустойчивых подпространств.

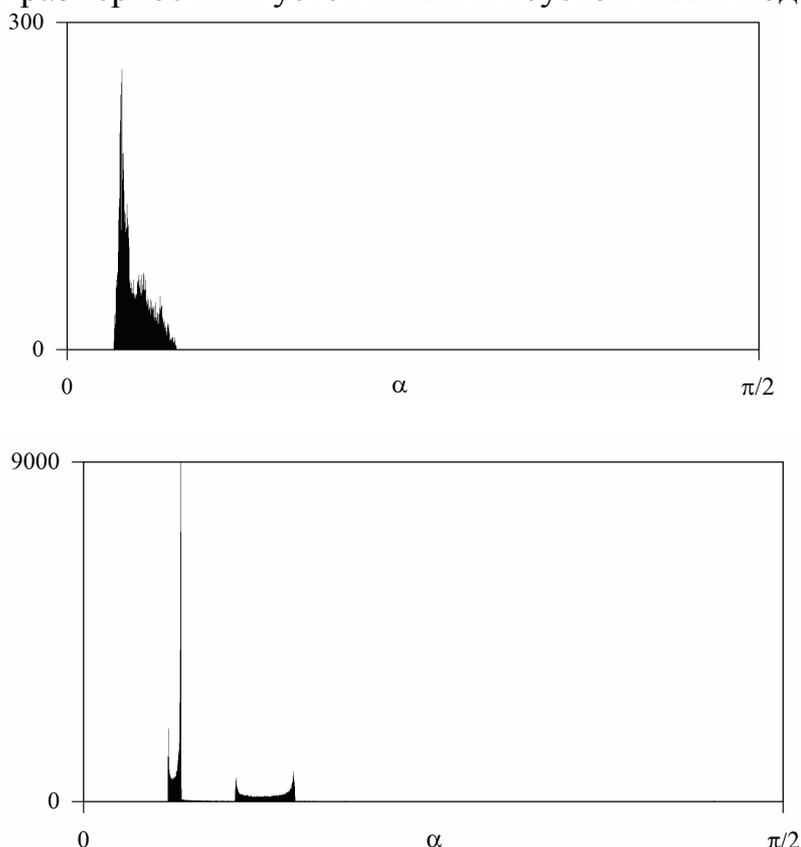


Рис. 9. Диаграммы для распределений углов между многообразиями принадлежащей аттрактору типичной траектории. Гистограмма для системы (1) с нелинейным элементом, управляемым периодической последовательностью радиоимпульсов с прямоугольной огибающей, $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ (а). Гистограмма для пятимерной модели модифицированного уравнения Свифта-Хохенберга (6), $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$.

Проведенные расчеты подтверждают предположение о том, что аттракторы рассмотренных систем однородно гиперболические. На рис. 9 приводятся гистограммы распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых подпространств для орбит на аттракторах двух тестируемых систем. Можно видеть, что распределения удалены от нуля, т.е. касания многообразий отсутствуют.

В заключении обобщаются результаты диссертации и обсуждаются возможные направления дальнейшего развития работ.

¹² Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E., 2012, **85**, 015203.

Основные результаты и выводы

1. Предложены системы кольцевой структуры с хаотической динамикой, обусловленной наличием в фазовом пространстве аттракторов типа Смейла – Вильямса.
2. Показана возможность гиперболического хаоса в цепочке автоколебательных элементов с медленно изменяющейся по кольцу рабочей частотой, где обеспечивается резонансная передача возбуждения между звеньями цепочки и квадратичное нелинейное преобразование сигнала от последнего к первому элементу.
3. Впервые предложена автономная распределенная система, а также неавтономная распределенная система типа реакция-диффузия с периодической модуляцией коэффициентов диффузии, где гиперболический хаос реализуется благодаря трансформации пространственной фазы попеременно рождающихся паттернов в соответствии с растягивающим отображением окружности.
4. Развита методика проверки гиперболической природы аттракторов, примененная для многочисленных примеров конкретных систем и опирающаяся на анализ статистики распределения углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, в том числе для распределенных систем на основе их конечномерных моделей, построенных методом Галеркина.

Публикации по теме диссертации

- [1] **В.П. Круглов.** Кольцевой неавтономный генератор гиперболического хаоса. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, **18**, 2010, №5, 138-150.
- [2] **V.P. Kruglov** and S.P. Kuznetsov. An autonomous system with attractor of Smale - Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **16**, 2011, 3219–3223.
- [3] **В.П. Круглов.** Аттрактор типа Смейла – Вильямса в кольцевой системе с периодической модуляцией частоты. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, **20**, 2012, №1, 124-128.
- [4] **V.P. Kruglov**, S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky. Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system. Regular and Chaotic Dynamics, **19**, 2014, No 4, 483-494.
- [5] **В.П. Круглов**, А.С. Кузнецов, С.П. Кузнецов. Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн. Нелинейная динамика, 2014, т. 10, №3, 265-277.
- [6] **В.П. Круглов.** Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, **22**, 2014, №6, 79-93.
- [7] S.P. Kuznetsov, **V.P. Kruglov.** Verification of Hyperbolicity for Attractors of Some Mechanical Systems with Chaotic Dynamics. Regular and Chaotic Dynamics, **21**, 2016, No 2, 160–174.
- [8] **В.П. Круглов.** Аттрактор типа Смейла – Вильямса в кольцевой неавтономной системе. Шестнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых. Материалы конференции, информационный бюллетень. Волгоград, 22-29 апреля 2010 г. Екатеринбург: Волгоград: Изд-во АСФ России, 2010, с.568-569.

- [9] **В.П. Круглов.** Кольцевой неавтономный генератор гиперболического хаоса. В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009. 16-18 ноября 2009 г. Материалы научной школы-конференции. Саратов, ООО ИЦ «Наука», 2010, с.73-76.
- [10] **В.П. Круглов.** Аттрактор типа Смейла – Вильямса в кольцевой неавтономной системе, описываемой уравнениями с гладкими коэффициентами. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов V Всероссийской конференции молодых ученых. 6-8 сентября 2010 г. Изд-во Саратовского университета, 2010, 50-51.
- [11] **В.П. Круглов** Аттрактор типа Смейла - Вильямса в кольцевой неавтономной системе, описываемой уравнениями с гладкими коэффициентами. Материалы IX международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур", 4-9 октября 2010 г. Саратов, 2010, 120.
- [12] **В.П. Круглов.** Аттрактор типа Смейла – Вильямса в кольцевой системе с периодической модуляцией частоты. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых. 13-15 сентября 2011 г. Изд-во Саратовского университета, 2011, 122-123.
- [13] **В.П. Круглов.** Автономная система с аттрактором Смейла-Вильямса на основе кольцевой структуры из осцилляторов ван дер Поля с резонансным механизмом передачи возбуждения. В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010. 6 октября, 24, 26 ноября 2010 г. Материалы научной школы-конференции. Саратов, ООО ИЦ «Наука», 2011, с.61-64.
- [14] **В.П.Круглов.** Генератор гиперболического хаоса на основе кольцевой схемы, содержащей периодически перестраиваемый фильтр. Нелинейные волны – 2012. XVI научная школа. 29 февраля – 6 марта 2012 г. Тезисы докладов молодых ученых. РАН, ИПФ РАН, НГГУ, Нижний Новгород, 2012, с. 80.
- [15] **В.П. Круглов.** Кольцевые системы с гиперболическим хаотическим аттрактором типа Смейла – Вильямса. Материалы итоговой студенческой научной конференции. 14 мая 2012 г. Саратов, изд. Саратовского университета, 2012, с.6-8.
- [16] **V.P. Kruglov.** Ring systems with hyperbolic attractors. International Conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov (Nizhni Novgorod, Russia, July 1-5, 2013). Book of Abstracts. Nizhni Novgorod, 2013, p.68.
- [17] **В.П. Круглов, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский.** Гиперболический хаос в автономной пространственно распределенной системе. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции молодых ученых. 3-5 сентября 2013 г. Изд-во Саратовского университета, 2013, 133-134.
- [18] **В.П. Круглов, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский.** Аттрактор типа Смейла – Вильямса в автономной пространственно распределенной системе. Материалы X международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур", 7-12 октября 2013 г. Саратов, 2013, с.22.
- [19] **V.P. Kruglov.** Attractor of Smale-Williams type in modified Brusselator model. Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» 19-23 May 2014, Saratov: Saratov State University, 2014, 26.
- [20] **В.П. Круглов.** Аттрактор Смейла-Вильямса в модели Брюсселятора. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов IX Всероссийской конференции молодых ученых. 2-4 сентября 2014 г. Изд-во Саратовского университета, 2014, 79-80.
- [21] **V.P. Kruglov, A.S. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky.** Some distributed systems with chaotic pattern dynamics associated with Smale-Williams attractors. International Conference "Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's". Nizhni Novgorod, Russia, December 10-15, 2014. Book of Abstracts, Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University, 2014, с.17-19.

- [22] **V.P. Kruglov**. Hyperbolic chaos in model systems with ring geometry. International Conference-School "Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015" (DBC-II) (Nizhny Novgorod, Russia, July 20-24, 2015). Book of Abstracts. Nizhny Novgorod, 2015, p.16-17.
- [23] **В.П. Круглов**, С.П. Кузнецов. Гиперболический хаос в распределенных системах с кольцевой геометрией. Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов X Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 8-10 сентября 2015 г. Саратов, изд-во «Техно-Декор», 2015, 69-70.
- [24] Л.М.-Б. Хаджиева, **В.П. Круглов**. Аттрактор Смейла-Вильямса в модифицированной модели Неймарка. Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов X Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 8-10 сентября 2015 г. Саратов, изд-во «Техно-Декор», 2015, 182-183.
- [25] **В.П. Круглов**. Модели распределенных систем с аттрактором типа Смейла – Вильямса. Нелинейные волны – 2016. XVII научная школа. 27 февраля – 4 марта 2016 г. Тезисы докладов молодых ученых. ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2016, с. 85.
- [26] L. Khadzhieva and **V. Kruglov**. Smale-Williams attractor in a modified Neimark model // Sixth International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016”: Book of abstracts. — Moscow–Izhevsk: Publishing Center “Institute of Computer Science”. 2016. p. 27.