

На правах рукописи

МАКСИМЕНКО Владимир Александрович

ЭВОЛЮЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМАХ
ЭЛЕКТРОННОЙ ПРИРОДЫ

01.04.03 – Радиоп физика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Саратов – 2015

Работа выполнена на кафедре физики открытых систем факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

Научный руководитель:

Короновский Алексей Александрович, д.ф.–м.н., профессор, профессор кафедры физики открытых систем ФБГОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

Официальные оппоненты:

Панкратов Андрей Леонидович, д.ф.–м.н., старший научный сотрудник отдела терагерцевой спектроскопии Института физики микроструктур Российской академии наук, г. Нижний Новгород

Прохоров Михаил Дмитриевич, д.ф.–м.н., доцент, заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, г. Саратов

Ведущая организация: Институт прикладной физики Российской Академии наук, г. Нижний Новгород

Защита состоится « » _____ 2015 г. в часов минут в ауд. корпуса СГУ на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 по специальности 01.04.03 в Саратовском государственном университете (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета (Саратов, ул. Университетская, 42).

Автореферат разослан « » апреля 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета



В.М. Аникин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Настоящая диссертационная работа посвящена анализу динамических режимов, реализующихся в пространственно-распределенных системах электронной природы и включает в себя исследование устойчивости стационарного состояния распределенных систем, анализ нестационарных режимов пространственно-временной динамики (периодических, квазипериодических, хаотических и гиперхаотических), реализующихся в автономных системах и системах под внешним воздействием, а также изучение установления синхронных режимов в распределенных системах, связанных однонаправленно и взаимно.

Анализ поведения реальных систем и процессов зачастую подразумевает построение их нелинейных математических моделей. При этом, в зависимости от особенностей исследуемого объекта и специфики поставленной задачи, подобные математические модели могут быть довольно разнообразны (графы, дискретные отображения, системы с непрерывным временем). Динамические переменные, входящие в математическую модель, определяют *состояние* исследуемой системы, а математический аппарат модели является оператором эволюции, определяющим изменение этого состояния с течением времени.

Системы с непрерывным временем являются одними из наиболее распространённых моделей, описывающих процессы, протекающие в реальных системах различной природы. Оператор эволюции таких систем имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а состояние системы представляется вектором $(x_1(t^*), \dots, x_N(t^*))^T$ в N -мерном фазовом пространстве, координаты которого соответствуют в каждый момент времени t^* значениям динамических переменных.

Наряду с динамическими системами, состояние которых характеризуется набором чисел, для описания весьма широкого класса реальных объектов, необходимо использовать функции, поскольку состояние рассматриваемой системы может эволюционировать во времени в разных пространственных точках системы по-разному. В частности, состояние систем, описывающих приборы и устройства СВЧ-электроники, часто задаётся пространственными распределениями напряжённости электрического поля \mathbf{E} , объёмной плотности носителей заряда ρ , потенциала φ и т.д.¹ Подобные динамические системы являются пространственно-распределёнными, их состояние определяется в бесконечномерном фазовом пространстве, а оператор эволюции представляется в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.

¹Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков*, В 2-х томах, М.: Физматлит, 2003;

Учитывая тот факт, что пространственно-распределённые системы являются моделями для широкого круга различных сложных радиофизических объектов (например, реальных приборов СВЧ-электроники), изучение возможности реализации в них сложных динамических режимов и управления ими представляет большой интерес для современной радиофизики, а полученные результаты могут найти свое применение в задачах разработки систем радиолокации, связи, скрытой передачи информации и т.п.²

В то же самое время, изучение сложного поведения и закономерностей (включая анализ устойчивости динамических режимов), наблюдаемых в пространственно-распределённых системах, является нетривиальной задачей. Это связано с тем, что для анализа распределённых систем, как правило, используются методы и подходы, разработанные для динамических систем конечной размерности с сосредоточенными параметрами. Непосредственное применение таких методов не всегда учитывает особенности, связанные с пространственно-распределённой природой исследуемых систем и в целом ряде случаев приводит к неполным или некорректным результатам. Таким образом, возникает необходимость разработки специальных методов анализа устойчивости динамических режимов в пространственно-распределённых системах.

Среди инструментов, применяемых как для анализа устойчивости стационарного состояния систем, так и для количественной оценки сложных хаотических режимов, наиболее известным и широко используемым является расчет спектра показателей Ляпунова. Данный инструмент активно используется для изучения сложной динамики систем со сосредоточенными параметрами³.

При этом, для нахождения полного спектра показателей Ляпунова для систем с малым числом степеней свободы используется численный метод, основанный на применении алгоритма Бенеттина, включающий процедуру периодической ортогонализации и нормировки возмущений⁴.

Прямое применение этого метода для анализа пространственно-временной динамики возможно только для систем, которые естественным образом дискретизованы в пространстве⁵, например к массивам связанных осцилляторов или отображениям. В остальных случаях, прямое применение численных методов расчёта показателей Ляпунова, разработанных для систем с конечной размерностью фазового пространства, к непрерывным пространственно-распределённым системам является довольно сложным.

²V.S. Anishchenko A.N. Pavlov, Phys. Rev. E 57 (1998) 2455;

³С.П. Кузнецов, *Динамический хаос*, М.: Физматлит, 2006;

⁴G. Benettin et al, Meccanica, 15 (1980) 9;

⁵S. Lepri et al, Chaos 7(4)(1997) 701;

Основной причиной этого является то, что возмущение состояния распределённой системы определяется в фазовом пространстве не вектором, как в случае сосредоточенных систем, а с помощью набора функций, которые зависят от пространственных координат, что требует модификации процедур ортогонализации и нормализации, необходимых для расчёта спектра показателей Ляпунова⁶.

В настоящее время попытки применения показателей Ляпунова для анализа динамики пространственно-распределённых систем, как правило, сводятся в конечном итоге, к использованию тех же самых способов расчёта, что и для систем со сосредоточенными параметрами.

В частности, широко используется вычисление старшего показателя по временной реализации, представляющей собой сигнал, регистрируемый в одной из точек пространства распределённой системы (подобный подход применяется также для анализа систем со сосредоточенными параметрами⁷). Однако, такой способ расчёта не является эффективным и имеет серьёзные ограничения. Анализ, основанный на значении старшего показателя Ляпунова, не позволяет диагностировать квазипериодические и гиперхаотические колебательные режимы, а также установление синхронных режимов динамики связанных распределённых систем. Кроме того, результат может сильно зависеть от выбора точки пространства.

При расчете по временной реализации значений следующих в спектре показателей Ляпунова возникает проблема, связанная с тем, что каждый последующий показатель Ляпунова определяется все с меньшей точностью. Использование нелинейных разложений с большим числом слагаемых улучшает качество определения показателей Ляпунова по сравнению с линейным случаем, однако, при этом возникает ряд особенностей, таких как (1) требование малого уровня шума в системе, (2) существование предела по числу определяемых показателей Ляпунова по временному ряду конечной длины и (3) возникновение ложных значений показателей Ляпунова. Кроме того, данный подход является достаточно сложным и требует дополнительных вычислений и расчета характеристик, таких как фрактальная размерность аттрактора и вектора Ляпунова. Таким образом, оценка значений спектра показателей Ляпунова по временному ряду является нетривиальной и весьма сложной задачей.

Для расчёта нескольких старших показателей Ляпунова для распределённых систем в ряде случаев используется алгоритм Бенеттина. При этом, исследуемая пространственно-распределённая система заменяется дискретной моделью, которая рассматривается как конечномерная дина-

⁶С.П. Кузнецов, Д.И. Трубецков, Известия вузов. Радиофизика 47 (5-6) (2004) 383;

⁷A. Wolf et al, Physica D 16(1985) 285;

мическая система с очень большой размерностью⁸. При использовании данного подхода возникает целый ряд особенностей, связанных с большой размерностью фазового пространства такой дискретизованной системы. Кроме того, метод не учитывает особенностей, связанных с пространственно-распределённой природой исходной системы.

Таким образом, при расчёте спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем возникает целый ряд сложностей, решение которых представляет большой интерес для различных отраслей современной науки, и, прежде всего, учитывая специфику объектов изучения, для радиофизики. В частности, большой интерес представляет изучение сложной динамики пространственно-распределённых систем, являющихся моделями реальных устройств СВЧ-электроники, при помощи спектра показателей Ляпунова⁹, включая анализ устойчивости стационарного состояния, переход от периодических колебательных режимов к хаотическим и гиперхаотическим, а также диагностику установления синхронных режимов в связанных распределённых системах.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертационной работы является изучение эволюции динамических режимов пространственно-распределённых нелинейных систем электронной природы, включая анализ устойчивости неоднородного в пространстве стационарного состояния пространственно-распределённых систем, описывающих коллективную динамику носителей заряда в рамках гидродинамического приближения, а также изучение режимов нестационарной пространственно-временной динамики (периодических, квазипериодических, хаотических, гиперхаотических режимов) данных систем при помощи спектра показателей Ляпунова.

Основные положения, выносимые на защиту

1. В пространственно-распределённой активной среде, где нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля описывается формулой Эсаки-Тсу, при малых значениях приложенного напряжения реализуется близкое к однородному по пространству стационарное состояние, которому соответствует спектр близких по значениям показателей Ляпунова. При увеличении значения приложенного напряжения состояние системы становится отличным от однородного и значения показателей Ляпунова в спектре начинают различаться. При этом, как в стационарном состоянии,

⁸П.В. Кушцов, Известия вузов. ПНД 18(5) (2010) 93;

⁹N.M. Ryskin et al, Applied Radio Electronics 12(1) (2013) 37; А.А. Короновский и др. Изв. РАН. Серия физическая 67(12) (2003) 1705.

так и в режиме генерации, в спектре показателей Ляпунова остаются попарно одинаковые значения, что связано с существованием возмущений, характеризующихся одинаковыми коэффициентами затухания/нарастания и частотами с противоположным знаком, но одинаковой абсолютной величиной.

2. При внешней периодической модуляции значения приложенного напряжения, в пространственно-распределённой системе, в случае, когда зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля имеет падающий участок, в зависимости от частоты модуляции в системе возможна реализация квазипериодического режима, характеризующегося модуляцией скорости возникающих в ней нестационарных электронных структур, и хаотическая, соответствующая структурам, появляющимся в разные моменты времени и движущимся с различными скоростями.
3. В пространственно-распределённой системе, где зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля описывается соотношением Эсаки-Тсу, а закон инжекции носителей заряда определяется характеристикой эмиттера, существуют стационарные состояния, характеризующиеся одинаковым распределением электрического поля, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, в зависимости от величины дифференциальной проводимости эмиттера.
4. В случае, когда пространственно-распределённая система связана с конечномерной подсистемой, для расчета спектра показателей Ляпунова в опорное состояние необходимо включить все величины (кроме тех, которые могут быть выражены через остальные с помощью функциональных соотношений, а также операторов интегрирования и дифференцирования по пространственной координате), определив при этом динамику зависящих только от времени величин во всех точках рассматриваемой пространственно-распределённой системы.

Научная новизна. Научная новизна результатов, изложенных в диссертационной работе, заключается, главным образом, в обнаружении закономерностей эволюции динамических режимов в пространственно-распределённых системах электронной природы, включая переход от стационарных состояний к нестационарным режимам пространственно-временной динамики (периодическим, квазипериодическим, хаотическим и гиперхаотическим (в случае автономной и неавтономной динамики систем)), а также установление синхронных режимов в пространственно-распределённых системах, связанных однонаправленно и взаимно.

В диссертационной работе впервые рассмотрены следующие вопросы:

- Исследована пространственно-временная динамика набора возмущений стационарного неоднородного по пространству состояния модельной распределённой системы, описываемой в рамках гидродинамического приближения, где нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля содержит падающий участок и описывается формулой Эсаки-Тсу, и рассчитаны закономерности изменения их собственных частот и коэффициентов нарастания/затухания при приближении значения управляющего параметра к критической величине, соответствующей возникновению неустойчивости.

- Предложен метод расчёта спектра показателей Ляпунова для систем, состояние которых определяется набором динамических переменных, включающим в себя величины, зависящие как только от времени, так и от времени и пространственной координаты.

- Рассмотрен вопрос о выборе опорного состояния системы, необходимого для расчёта спектра показателей Ляпунова и сформулировано правило, согласно которому, в силу особенностей конкретной математической модели, возможно исключение из состояния некоторых динамических переменных.

- При помощи спектра показателей Ляпунова проведена диагностика установления режима обобщённой хаотической синхронизации в пространственно-распределённых пучково-плазменных системах (диодах Пирса), связанных однонаправленно и взаимно.

- С использованием спектра показателей Ляпунова проведена диагностика колебательных режимов в пространственно-распределённой системе электронной природы, в которой нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля содержит падающий участок и описывается формулой Эсаки-Тсу, связанной с системой с малым числом степеней свободы.

Научная и практическая значимость. Научная значимость результатов, полученных в рамках настоящей диссертационной работы, обусловлена решением важной фундаментальной проблемы радиофизики и нелинейной динамики, связанной с изучением эволюции динамических режимов в пространственно-распределённых системах электронной природы. Практическая значимость работы связана, главным образом, с возможностью использования полученных результатов и разработанных подходов для анализа широкого класса систем, являющихся моделями реальных пучково-плазменных, электронно-волновых и твердотельных устройств СВЧ-электроники, что может найти широкое применение при изучении сложных режимов пространственно-временной динамики, реализующихся в ре-

альных приборах, где исследуемые системы подвергаются влиянию внешних электромагнитных полей, резонансных контуров и волноведущих систем. Кроме того, применение спектра показателей Ляпунова для анализа синхронных режимов в связанных распределенных системах представляет большой интерес в контексте разработки систем скрытой передачи информации, основанных на принципах динамического хаоса.

Обоснование и достоверность. Математические методы, разработанные в рамках диссертационной работы, так же, как аналитические и численные методы, использованные в ней, базируются на известных ранее законах нелинейной динамики и радиофизики и апробированных математических и численных алгоритмах. Достоверность полученных результатов подтверждается их непротиворечивостью и соответствием их общепризнанным и опубликованным ранее данным. Полученные в работе результаты не противоречат результатам, опубликованным в работах других авторов.

Личный вклад. Основу диссертации составляют результаты, полученные лично соискателем. Им выполнены все аналитические и численные расчёты. Постановка задач, разработка методов их решения, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены либо лично автором, либо совместно с научным руководителем.

Апробация работы. Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных — кандидатов наук (МК-672.2012.2, 2012-2013), ведущих научных школ РФ (НШ-1430.2012.2, 2012-2013), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы” в рамках мероприятия 1.1 “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров” (соглашение № 14.В37.21.0059, 2012-2013), в рамках мероприятия 1.5 “Проведение научных исследований коллективами под руководством приглашенных исследователей” (соглашение № 14.В37.21.1207, 2012-2013), Российского фонда фундаментальных исследований (12-02-31035 мол_а, 13-02-90406 Укр_ф_а) и Российского научного фонда (соглашение № 14-12-00222).

Исследования, вошедшие в диссертационную работу, были поддержаны стипендиальной программой Фонда некоммерческих программ Династия для студентов физиков (2012), грантом Фонда некоммерческих программ “Династия” для аспирантов и молодых учёных без степени (2014), стипендиальной программой Президента РФ для молодых учёных, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (2015).

Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов 20-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2010), 22-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2012), 23-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2013), 24-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Россия, 2014), XIII Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (Москва, Россия, 2011), XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (Москва, Россия, 2012), XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (Москва, Россия, 2013), XIV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (Москва, Россия, 2014), IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, Россия, 2010), X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, Россия, 2013), XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике (Саратов, Россия, 2012), Международной Научно-Технической Конференции, приуроченной к 50-летию МРТИ-БГУИР (Минск, Беларусь, 2014).

Результаты работы опубликованы в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах, таких как “Physical Review Letters”, “Physical Review B”, “Applied Physics Letters”, “Europhysics Letters”, “Physics of Plasmas”, “Physics of Wave Phenomena”, “Письма в Журнал Технической Физики”, “Вестник Тамбовского государственного университета”, “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика”, “Известия РАН. Серия физическая”. По материалам диссертации получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Публикации. Результаты работы опубликованы в реферируемых научных журналах (16 статей), рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук, в трудах конференций (19 статей и тезисов докладов). Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 121 страницу текста и 42 иллюстрации. Библиографический список содержит 126 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение диссертационной работы отражает актуальность выбранной темы исследования, содержит цель работы, описание научной новизны и практической значимости полученных результатов, положения и результаты, выносимые на защиту, а также сведения об апробации результатов.

В первой главе диссертационной работы описывается метод расчёта спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем, состояние которых определяется набором динамических переменных $X_i(x, t), i = \overline{1, N}$, зависящих от времени и пространственной координаты $x \in [0, L]$. Для расчета спектра показателей Ляпунова опорное состояние таких систем и его возмущение определяются при помощи N -мерных вектор-функции

$$U(x, t) = (X_1(x, t), \dots, X_N(x, t))^T, V(x, t) = (\tilde{X}_1(x, t), \dots, \tilde{X}_N(x, t))^T, \quad (1)$$

где $\|X_i\| \gg \|\tilde{X}_i\|$. Временная эволюция возмущений описывается оператором эволюции системы, линеаризованным в окрестности опорного состояния, построение ортогонального набора возмущений выполняется при помощи процедуры Грама-Шмидта, где скалярное произведение возмущений в момент времени t_0 определяется как

$$(V_j(x, t_0), V_k(x, t_0)) = \sum_{i=1}^N \int_0^L \tilde{X}_i^j(x, t_0) \tilde{X}_i^k(x, t_0) dx. \quad (2)$$

Апробация метода проводится на примере модельной системы, описываемой в рамках гидродинамического приближения при помощи системы уравнений непрерывности и Пуассона

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} (n - n_0), \quad J = env_d(F). \quad (3)$$

Данная модель является универсальной для описания процессов электронного транспорта в активных средах, характеризующихся различными типами зависимости скорости носителей заряда от напряженности электрического поля. В рамках данной главы рассмотрена нелинейная зависимость, содержащая участок отрицательной дифференциальной проводимости и описываемая формулой Эсаки-Тсу

$$v_d(F) = v_0 \frac{F/F_c}{1 + (F/F_c)^2}. \quad (4)$$

При помощи спектра показателей Ляпунова показано, что в исследуемой системе при увеличении значения приложенного к системе постоянного

напряжения наблюдается переход от стационарного состояния к периодической пространственно-временной динамике. При этом, внешнее воздействие, реализуемое через периодическую модуляцию величины приложенного напряжения, приводит к усложнению колебательных режимов, в частности, к реализации квазипериодических и хаотических колебаний.

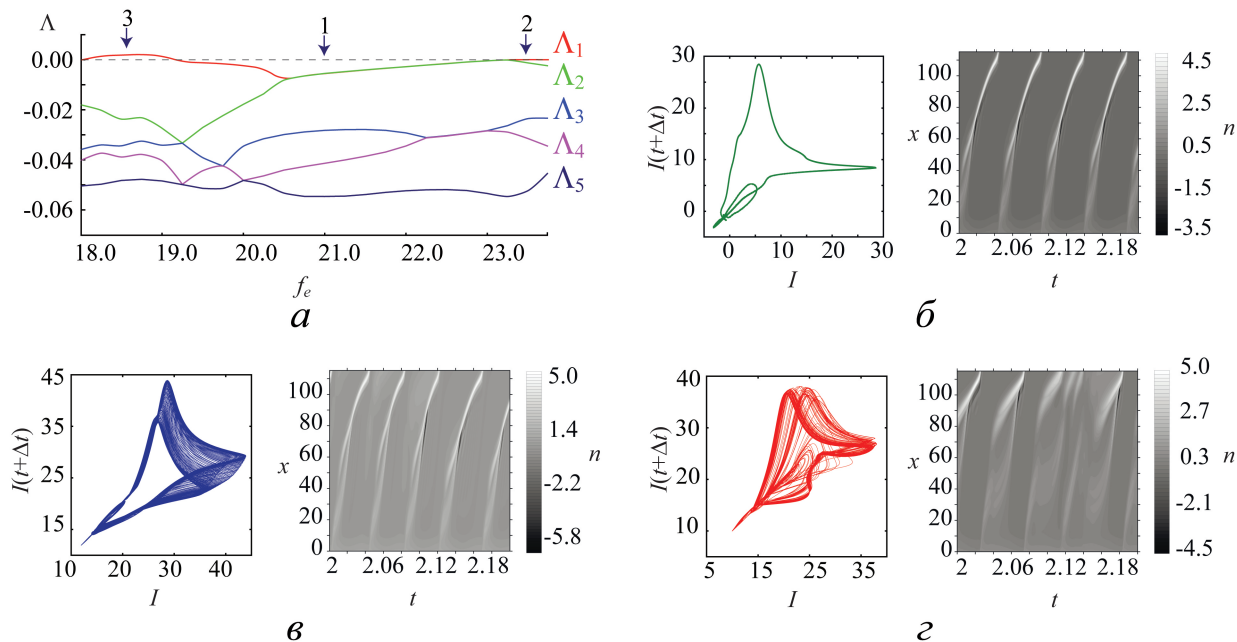


Рис. 1: (а) зависимости пяти условных показателей Ляпунова $\Lambda_1, \dots, \Lambda_5$, характеризующих неавтономную динамику исследуемой системы, от частоты внешнего воздействия f_e , фазовые портреты колебаний тока I , текущего через систему, и пространственно-временные зависимости концентрации носителей заряда $n(x, t)$, соответствующие случаю периодической (б), квазипериодической (в) и хаотической (з) динамики. Значения управляющего параметра, использованные для построения зависимостей (б, в, з), показаны стелками (1, 2, 3) на рисунке (а)

На рисунке 1, а показан спектр условных показателей Ляпунова, рассчитанный для исследуемой пространственно-распределенной системы, в зависимости от частоты внешнего воздействия. Видно, что при изменении управляющего параметра старший показатель Ляпунова может иметь отрицательное, нулевое и положительное значение. Для этих случаев на рисунках 1, б, в, з приведены фазовые портреты колебаний тока, текущего через систему, и пространственно-временные зависимости концентрации носителей заряда в ней. Анализ полученных зависимостей свидетельствует о том, что в рассмотренных случаях в системе реализуются, соответственно, периодический (б), квазипериодический (в) и хаотический (з) режимы колебаний.

В рамках **первой главы** также рассмотрен вопрос о расчете спектра показателей Ляпунова для систем, описывающих взаимодействие между распределённой активной средой и конечномерной динамической системой

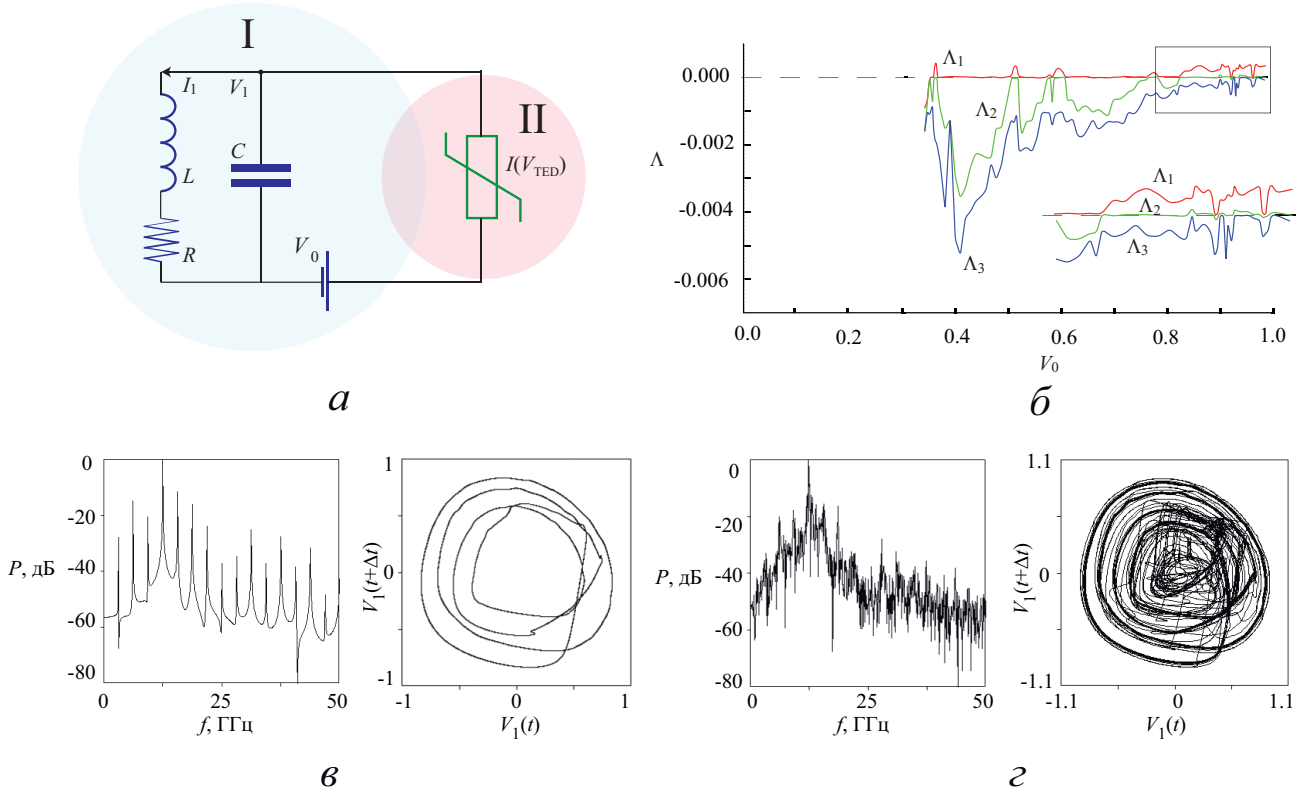


Рис. 2: (а) схематическая иллюстрация колебательного контура (I), содержащего пространственно-распределённый нелинейный элемент (II), (б) спектр показателей Ляпунова $\Lambda_1, \dots, \Lambda_3$ в зависимости от напряжения питания V_0 (область хаотической динамики показана детально на врезке), спектры мощности и фазовые портреты колебаний напряжения в контуре, соответствующие периодическому (в) и хаотическому (з) режиму колебаний

со сосредоточенными параметрами. Показано, что состояние таких систем, включающее в себя как динамические переменные, зависящие только от времени $X_i(t)$, так и от времени и пространственной координаты $Y_i(x, t)$, может быть описано в бесконечномерном фазовом пространстве, что дает возможность применения разработанного метода расчета показателей Ляпунова. В качестве конкретного примера исследована динамика модельной распределённой системы электронной природы (3)-(4), связанной с внешним RLC-контуром (рисунок 2, а).

Анализ спектра показателей Ляпунова (рисунок 2, б), рассчитанного для данной системы, спектров мощности и фазовых портретов колебаний напряжения V_1 в контуре (рисунок 2, в, з) показал, что увеличение управляющего параметра V_0 (напряжения питания) приводит к возникновению хаотической пространственно-временной динамики.

Вторая глава диссертационной работы посвящена аналитическому и численному исследованию поведения возмущений стационарного состояния пространственно-распределенной системы и выявлению закономерностей пространственно-временной динамики возмущений опорного состоя-

ния при приближении управляющего параметра к критическому (бифуркационному) значению, соответствующему возникновению неустойчивости. На примере модельной пространственно-распределенной системы (3)-(4) продемонстрирована возможность аналитической оценки старшего показателя Ляпунова в случае, когда стационарное состояние исследуемой системы характеризуется близкими к однородному распределениями напряженности электрического поля и концентрации носителей заряда. Показано, что при малых значениях управляющего параметра (напряжения, приложенного к рассматриваемой системе) все возмущения, существующие в исследуемой системе, характеризуются одинаковым коэффициентом затухания.

Помимо приближённой аналитической оценки старшего показателя Ляпунова в рамках данной главы разработан метод, позволяющий описать пространственные распределения всего набора возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния и вычислить их собственные частоты колебаний и коэффициенты нарастания/затухания, не прибегая к численному интегрированию пространственно-временной динамики системы. Показано, что пространственное распределение возмущения напряженности электрического поля $\check{F}(x)$, эволюционирующее во времени согласно закону $\check{F}(x)e^{\sigma t}$, где $\sigma = \lambda + i\omega$, описывается уравнением

$$\frac{d^2\check{F}}{dx^2} + \left(\frac{\sigma}{\beta v_d} + \frac{v'_d}{v_d} \left(\nu + 2 \frac{dF}{dx} \right) \right) \frac{\check{F}}{dx} + \left(\frac{d^2F}{dx^2} \frac{v'_d}{v_d} + \left(\nu + \frac{dF}{dx} \right) \frac{dF}{dx} \frac{v''_d}{v_d} \right) \check{F} = 0 \quad (5)$$

с граничным условием

$$\frac{d\check{F}}{dx}(x_0) = \frac{\nu}{v_d(F_e)} \left(\frac{dJ_0}{dF}(F_e) - v'_d(F_e) - \frac{v'_d(F_e)}{\nu} \frac{dF}{dx}(x_0) \right) \check{F}(x_0), \quad (6)$$

определяющимся характеристикой эмиттера $J_0(F_e)$, и условием

$$\check{U}(\lambda, \omega) = \int_0^L \check{F}(x) dx, \quad \check{U}(\lambda, \omega) = 0, \quad (7)$$

соответствующим постоянной разности потенциалов, приложенной к границам системы. В данном случае ν, β — параметры, характеризующие активную среду, $F_e = F(x_0)$, где $F(x)$ — стационарное распределение электрического поля, $v_d = v_d(F)$ — скорость носителей заряда в зависимости от напряжённости электрического поля.

На рисунке 3, а, б, в показаны зависимости $\check{U}(\lambda, \omega)$, нули которых определяют пару чисел (λ, ω) , характеризующих коэффициент нарастания/затухания и частоту колебаний возмущения стационарного состояния систе-

мы. Представленные на рисунке зависимости соответствуют случаям, когда значение бифуркационного параметра оказывается меньше критического (*a*), равным критическому (*b*) и превышает критическое (*в*). Видно, что в исследуемой пространственно-распределенной системе для стационарного состояния существуют пары возмущений, характеризующиеся одинаковым значением коэффициента затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной. На рисунке 3, *г* представлены зависимости коэффициентов затухания $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ возмущений от значения приложенного напряжения. В диссертационной работе показано, что данные зависимости совпадают со значениями показателей Ляпунова, рассчитанными при помощи алгоритма Бенеттина, что позволяет объяснить наличие одинаковых показателей Ляпунова в спектре пространственно-распределённой системы.

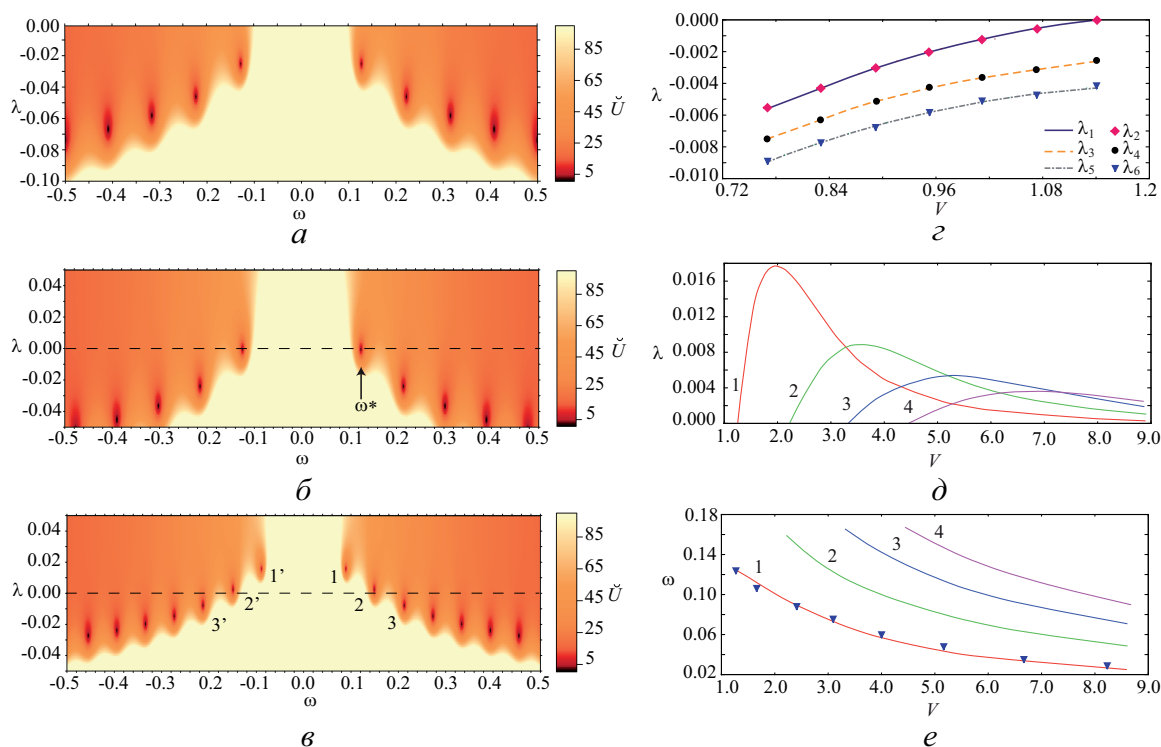


Рис. 3: Зависимости $\tilde{U}(\lambda, \omega)$, соответствующие случаям, когда значение бифуркационного параметра оказывается меньше критического (*a*), равным критическому (*b*) и превышает критическое (*в*) и зависимости коэффициентов затухания $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ возмущений от значения приложенного напряжения в стационарном режиме (*г*), зависимости коэффициентов λ (*д*) и частот колебания ω (*е*) возмущений от значения приложенного напряжения V в случае, когда $V > V^*$, где V^* — критическое. Точками показаны значения частоты колебаний опорного состояния системы.

В результате анализа зависимости коэффициентов λ (рисунок 3, *д*) и частот колебания ω (рисунок 3, *е*) возмущений от значения приложенного напряжения V в случае, когда $V > V^*$, где V^* — критическое, была обнаружена связь между частотой колебаний первого возмущения и частотой

колебаний состояния системы в нестационарном режиме (рисунок 3, *e*). Обнаруженная связь была подтверждена в рамках численного моделирования динамики возмущений стационарного состояния исследуемой системы.

В третьей главе диссертационной работы проиллюстрировано применение предложенного в первой главе метода расчета спектра показателей Ляпунова для анализа нестационарных режимов пространственно-временной динамики распределённых систем электронной природы. В качестве конкретных примеров рассмотрены диод Пирса — модельная модель пучково-плазменной системы и лампа обратной волны с поперечным полем — базовая модель электронно-волнового резонансного взаимодействия. При помощи показателей Ляпунова исследована автономная динамика данных систем и определены области, соответствующие периодическим и хаотическим режимам. Показано, что в ЛОВ с поперечным полем возможна реализация гиперхаотических режимов, характеризующихся наличием в спектре нескольких (более двух) положительных показателей Ляпунова. Применение показателей Ляпунова для исследуемых систем проиллюстрировано на рисунке 4, где представлены спектры показателей Ляпунова (*a*, *b*), рассчитанные для ЛОВ с поперечным полем и диода Пирса, соответственно, и бифуркационные диаграммы (*b*, *z*) колебаний комплексной амплитуды электрического поля в ЛОВ $|F|$ и плотности пространственного заряда ρ в диоде Пирса.

Помимо случая автономной динамики в рамках данного раздела были рассмотрены динамические режимы, реализующиеся в связанных пространственно-распределённых системах. На рисунке 5 проиллюстрировано применение показателей Ляпунова для детектирования синхронизации в пучково-плазменных системах в случае взаимной (*a*) и однонаправленной (*b*) связи.

Показано, что переход положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений связан с установлением хаотической обобщенной синхронизации.

В рамках **третьей главы** также рассмотрен вопрос выбора опорного состояния системы, необходимого для корректного расчета спектра показателей Ляпунова пространственно-распределённой системы. На основании рассмотрения оператора эволюции исследуемых систем было сформулировано предположение о возможности исключения некоторых величин из набора, определяющего состояние системы. Данное предположение было проверено на примере исследованных в диссертационной работе модельных систем. На основании полученных результатов было сформулировано правило выбора необходимого набора величин, характеризующих состояние системы.

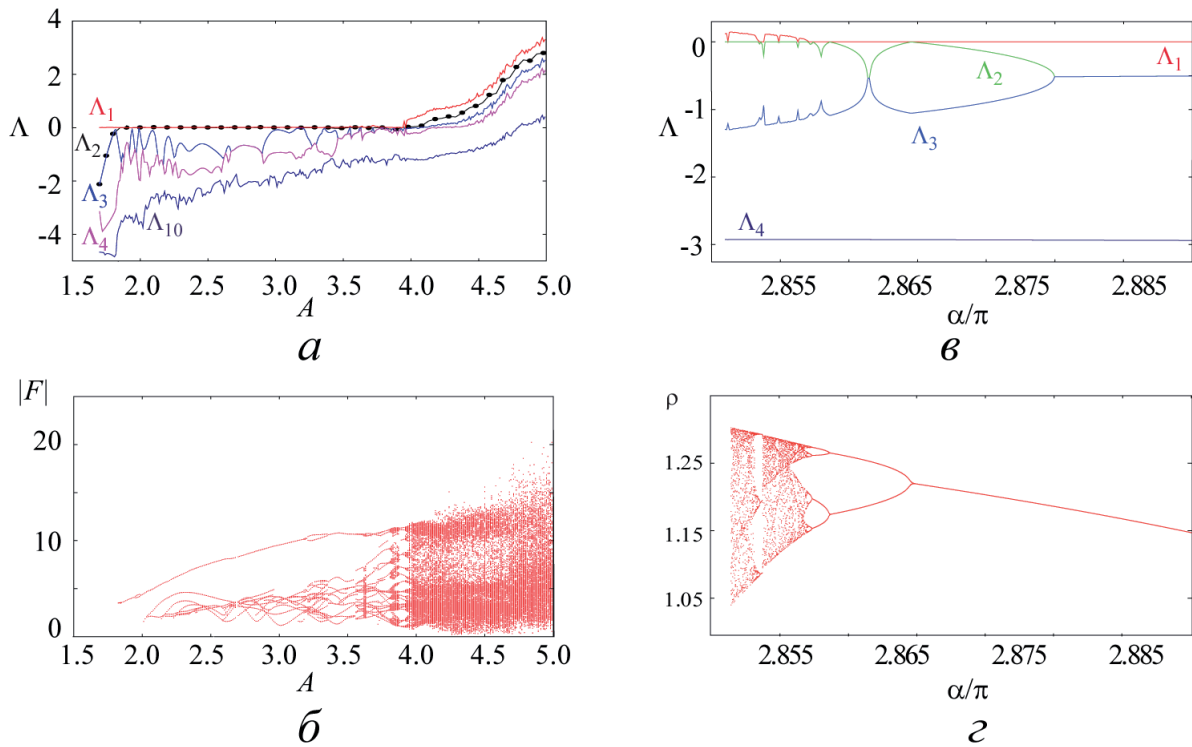


Рис. 4: Спектры показателей Ляпунова, характеризующие автономную динамику ЛОВ с поперечным полем (а) и диода Пирса (в), бифуркационные диаграммы колебаний комплексной амплитуды электрического поля в ЛОВ $|F|$ (б) и плотности пространственного заряда ρ в диоде Пирса (г)

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Основные результаты и выводы

1. Изучена эволюция динамических режимов в модельной пространственно-распределенной системе, описывающей в рамках гидродинамического подхода коллективную динамику носителей заряда в электрическом поле и характеризующейся нелинейной зависимостью скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля, описываемой формулой Эсаки-Тсу. Показано, что внешнее периодическое воздействие оказывает существенное влияние на динамику данной системы. При помощи расчета спектра показателей Ляпунова было доказано, что в зависимости от частоты внешнего воздействия динамика системы может быть периодической, квазипериодической и хаотической.
2. Рассмотрен вопрос о расчете спектра показателей Ляпунова для систем, описывающих взаимодействие между распределенной активной средой и конечномерной динамической системой со сосредоточенны-

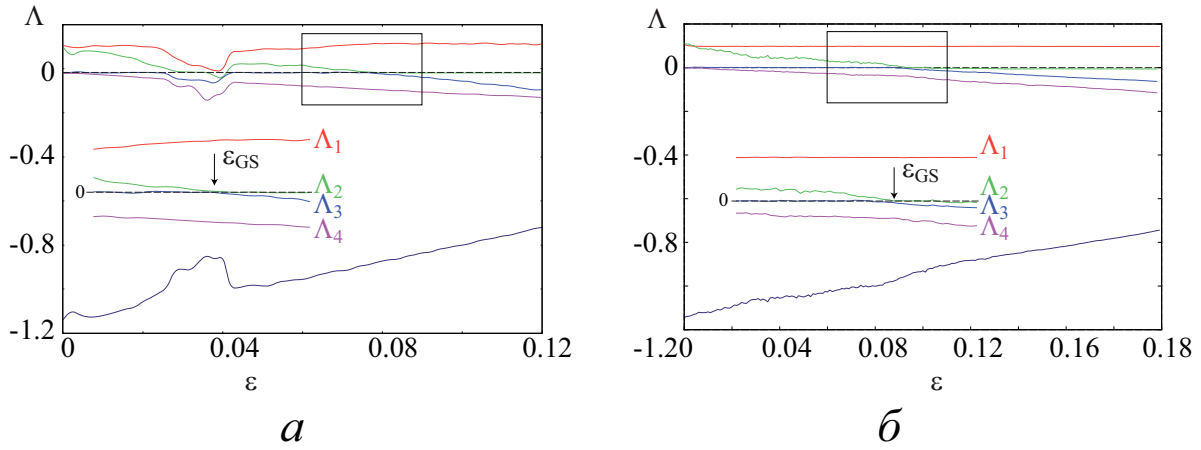


Рис. 5: Спектры показателей Ляпунова, рассчитанные для связанных пучково-плазменных систем в случае взаимной (а) и однонаправленной (б) связи. Величина ε характеризует силу связи. Область значений силы связи, соответствующая установлению режима обобщенной синхронизации, показана подробно на врезках

ми параметрами. Показано, что состояние таких систем, включающее в себя как динамические переменные, зависящие только от времени $X_i(t)$, так и от времени и пространственной координаты $Y_i(x, t)$, может быть описано в бесконечномерном фазовом пространстве, что дает возможность применения разработанного метода расчета показателей Ляпунова. В качестве конкретного примера в работе была рассмотрена модельная распределенная система электронной природы, связанная с внешним RLC-контуром. При помощи расчета спектра показателей Ляпунова было показано, что варьирование параметров контура приводит к возникновению хаотической пространственно-временной динамики распределенной системы.

3. В работе рассмотрена динамика возмущений стационарного во времени состояния модельной пространственно-распределенной системы. Показано, что в приближении однородного в пространстве стационарного состояния системы возможна аналитическая оценка величины старшего показателя Ляпунова. В работе было продемонстрировано, что данная оценка остается справедливой при малых значениях напряжения, приложенного к рассматриваемой системе. Кроме того, было обнаружено, что в данном случае все возмущения состояния данной системы характеризуются одинаковым коэффициентом затухания. Для точного описания динамики набора возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния в диссертационной работе предложен метод, позволяющий вычислять коэффициенты затухания всех возмущений, их собственные частоты и, соответственно, пространственные профили в каждый момент времени, не используя

при этом численное моделирование временной эволюции основного состояния и возмущений. При помощи данного подхода было обнаружено, что в стационарном состоянии в системе существуют пары возмущений, характеризующихся одинаковым коэффициентом затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной. Полученный результат позволил объяснить наличие попарно одинаковых показателей Ляпунова в спектре, рассчитанном для данной системы, при помощи алгоритма Бенеттина.

4. Рассмотрено поведение связанных пространственно-распределенных систем и изучены процессы возникновения в них режима хаотической синхронизации. В качестве примеров были рассмотрены пучково-плазменные системы, находящиеся в режиме хаотической генерации и связанные друг с другом как однонаправленно, так и взаимно. Для расчета спектра показателей Ляпунова, описывающего данное взаимодействие, была рассмотрена динамическая система, состояние которой включало в себя распределения всех величин, характеризующих каждую из взаимодействующих систем. При помощи показателей Ляпунова была рассмотрена динамика данных систем при увеличении силы связи между ними. Было показано, что как в случае однонаправленной, так и в случае взаимной связи, переход положительного показателя в область отрицательных значений связан с установлением режима обобщенной хаотической синхронизации в пространственно-распределенных системах.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

- [1] Maksimenko V. A., Makarov V. V., Koronovskii A. A., Alekseev K. N., Balanov A. G., and Hramov A. E., The effect of collector doping on the high-frequency generation in strongly coupled semiconductor superlattice // *Europhysics Letters*. 2015. V. 109. P. 47007.
- [2] Makarov V. V., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Alekseev K. N., Maksimenko V. A., Greenaway M. T., Fromhold T. M., Moskalenko O. I., and Balanov A. G., Sub-terahertz amplification in a semiconductor superlattice with moving charge domains // *Applied physics letters*. 2015. V. 106. P. 043503.
- [3] Hramov A. E., Koronovskii A. A., Kurkin S. A., Makarov V. V., Gaifullin M. B., Alekseev K. N., Alexeeva N., Greenaway M. T., Fromhold T. M., Patane A., Kusmartsev F. V., Maximenko V. A., Moskalenko O. I., and Balanov A. G., Subterahertz chaos generation by coupling a superlattice to a linear resonator // *Phys.Rev.Lett*. 2014. V. 112. P. 116603.
- [4] Фролов Н. С., Максименко В. А., Ильенко К., Короновский А. А., Храмов А. Е., Применение спектра показателей Ляпунова для анализа динамики пучково-плазменных систем, моделируемых с помощью метода крупных частиц // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2014. Т. 78. № 2. С. 237.

- [5] Максименко В. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Макаров В. В., Москаленко О. И., Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Модель для исследования коллективного транспорта заряда на омических контактах сильносвязанной полупроводниковой наноструктуры // Изв. РАН. Сер. физическая. 2014. Т. 78. № 12. С. 1285.
- [6] Макаров В. В., Храмов А. Е., Короновский А. А., Москаленко О. И., Максименко В. А., Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Переход к хаосу и хаотическая генерация в полупроводниковой сверхрешетке во внешней резонансной системе // Изв. РАН. Сер. физическая. 2014. Т. 78. № 12. С. 1277.
- [7] Koronovskii A. A., Hramov A. E., Maximenko V. A., Moskalenko O. I., Alekseev K. N., Greenaway M. T., Fromhold T. M., and Balanov A. G., Lyapunov stability of charge transport in miniband semiconductor superlattices // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. P. 165304.
- [8] Koronovskii A. A., Maximenko V. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E., Alekseev K. N., and Balanov A. G., Transition to microwave generation in semiconductor superlattice // Physics of wave phenomena. 2013. V. 21. N. 1. P. 48.
- [9] Макаров В. В., Короновский А. А., Куркин С. А., Левин Ю. И., Москаленко О. И., Максименко В. А., Храмов А. Е., Бифуркации и переходы к хаосу в системе “полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе” // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 5. С. 40.
- [10] Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Устойчивость стационарного состояния сильносвязанной полупроводниковой сверхрешетки, описываемой в рамках полуклассического подхода // Изв. РАН. Сер. физическая. 2013. Т. 77. № 12. С. 1751.
- [11] Hramov A. E., Koronovskii A. A., Maximenko V. A., and Moskalenko O. I., Computation of the spectrum of spatial Lyapunov exponents for the spatially extended beam-plasma systems and electron-wave devices // Physics of Plasmas. 2012. V. 19. P. 082302.
- [12] Баланов А. Г., Короновский А. А., Максименко В. А., Сельский А. О., Храмов А. Е., Безразмерные нелинейные уравнения для описания динамики полупроводниковой сверхрешетки в полуклассическом приближении // Вестник ТГУ. 2012. Т. 17. № 4. С. 1118.
- [13] Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Эволюция возмущения опорного состояния полупроводниковой сверхрешетки вблизи порога генерации // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20. № 5. С. 165.
- [14] Короновский А. А., Москаленко О. И., Максименко В. А., Храмов А. Е., О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. № 7. С. 611.
- [15] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., К вопросу о расчете спектра пространственных Ляпуновских экспонент в пространственно-распределенных пучково-плазменных системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 2. С. 158.
- [16] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова // Изв. РАН. Сер. физическая. 2011. Т. 75. № 12. С. 1689.

- [17] Свидетельство № 2014617871. Программа для моделирования электронного транспорта в полупроводниковой наноструктуре с омическими контактами. Максименко В. А., Храмов А. Е., Короновский А. А., Макаров В. В. ФГБОУ ВПО СГТУ имени Гагарина Ю.А. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 05.08.2014.
- [18] Свидетельство № 2012613430. Программа для расчета пространственных Ляпуновских экспонент гидродинамической модели диода Пирса. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Максименко В. А. ФГБОУ ВПО СГУ имени Чернышевского Н.Г. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.04.2012.
- [19] Максименко В. А., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Метод анализа устойчивости сильносвязанных полупроводниковых наноструктур // Труды Международной Научно-Технической Конференции, приуроченной к 50-летию МРТИ-БГУИР. Минск. 18–19 марта 2014. С. 52.– Минск: БГУИР, 2014.
- [20] Максименко В. А., Короновский А. А., Макаров В. В., Москаленко О. И., Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Храмов А. Е., Модель для исследования пространственно–временной динамики заряда в полупроводниковых сверхрешетках с омическими контактами // Материалы XIV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” Москва. 26-31 мая 2014. Ученые записки физического факультета МГУ. 2014. Т 4. С. 144321.
- [21] Максименко В. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Макаров В. В., Москаленко О. И., Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Влияние параметров эмиттера и коллектора на характеристики электронного транспорта в полупроводниковой сверхрешетке // материалы 24-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь. 7–13 сентября 2014. С. 823.- Севастополь:Вебер, 2014.
- [22] Макаров В. В., Храмов А. Е., Короновский А. А., Максименко В. А., Баланов А. Г., Переход к хаосу в полупроводниковой сверхрешетке, связанной с внешним резонатором // материалы 24-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь. 7–13 сентября 2014. С. 147.- Севастополь:Вебер, 2014.
- [23] Алексеев К. Н., Баланов А. Г., Максименко В. А., Москаленко О. И., Короновский А. А., Храмов А. Е., Показатели Ляпунова для пространственно-распределенных систем // Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн”. Москва. 20-25 мая 2013. С. 4.-Москва: МГУ, 2013.
- [24] Максименко В. А., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Баланов А. Г., Алексеев К. Н., Устойчивость стационарного состояния сильносвязанной полупроводниковой сверхрешетки // Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн”. Москва. 20-25 мая 2013. С. 3.-Москва: МГУ, 2013.
- [25] Максименко В. А., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Баланов А. Г., Алексеев К. Н., Анализ устойчивости стационарного состояния сильно связанной полупроводниковой сверхрешетки // Материалы 23-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь. 8-13 сентября 2013.-Севастополь: Вебер, 2013

- [26] Фролов Н. С., Короновский А. А., Максименко В. А., Ильенко К., Опанасенко А. Н., Яценко Т. Ю., Храмов А. Е., Расчет спектра пространственных показателей Ляпунова для пучково-плазменных систем, описываемых в рамках метода крупных частиц // Материалы 23-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь. 8-13 сентября 2013. С. 769.- Севастополь: Вебер, 2013
- [27] Максименко В. А., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Баланов А. Г., Алексеев К. Н., Критерий устойчивости стационарного состояния силь но связанной полупроводниковой структуры GaAs-AlGaAs // Материалы 10-й Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”. Саратов. 7-12 октября 2013.- Саратов: СГУ, 2013.
- [28] Фролов Н. С., Короновский А. А., Максименко В. А., Храмов А. Е., Анализ сложной динамики распределенных систем электроники свч, моделируемых в рамках рс-метода // Материалы 10-й Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”. Саратов. 7-12 октября 2013. С. 126.- Саратов: СГУ, 2013.
- [29] Баланов А. Г., Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., А. Е. Храмов, Расчет спектра показателей Ляпунова и анализ динамических режимов в полупроводниковой сверхрешетке // Материалы XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. Саратов. 6-12 февраля 2012. С. 34.- Саратов: СГУ, 2012
- [30] Moskalenko O. I., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Maximenko V. A., Alekseev K. N., and Balanov A. G., Influence of titled magnetic field on synchronization of domains of charge in semiconductor superlattices // Материалы XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. Саратов. 6-12 февраля 2012. С. 22.- Саратов: СГУ, 2012
- [31] Короновский А. А., Баланов А. Г., Максименко В. А., Москаленко О. И., А. О. Сельский, Храмов А. Е., Влияние наклонного магнитного поля и температуры на поведение полупроводниковой сверхрешетки // Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах”. Москва. 21-26 мая 2012. С. 21.- Москва: МГУ, 2012.
- [32] Максименко В. А., Баланов А. Г., Алексеев К. Н., Храмов А. Е., Короновский А. А., Москаленко О. И., Переход к генерации в полупроводниковой сверхрешетке // Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах”. Москва. 21-26 мая 2012. С. 26.- Москва: МГУ, 2012.
- [33] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Расчет показателей Ляпунова для систем свч-электроники: выбор величин, входящих в состояние системы // Сборник “СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии”, Материалы 22-й Международной Крымской конференции. Севастополь. 10-14 сентября 2012. С. 787.- Севастополь: Вебер, 2012.
- [34] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова // Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн». Москва. 23-28 мая. 2011. С. 31.- Москва: МГУ, 2011.
- [35] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., О возникновении обобщенной синхронизации во взаимно связанных пучково-плазменных

системах // Сборник “СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии”, Материалы 20-й Международной Крымской конференции. Севастополь. 13-17 сентября 2010. С. 895.- севастополь: Вебер, 2010

- [36] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Расчет пространственных показателей Ляпунова для моделей электронных систем // Сборник “СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии”, Материалы 20-й Международной Крымской конференции. Севастополь. 13-17 сентября 2010. С. 906.- севастополь: Вебер, 2010
- [37] Короновский А. А., Максименко В. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е., Разработка и применение метода расчета показателей Ляпунова для пространственно распределенных систем электронной природы // Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур”. Саратов. 4-9 октября 2010. С. 140.- Саратов: СГУ. 2010.

МАКСИМЕНКО Владимир Александрович

ЭВОЛЮЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМАХ
ЭЛЕКТРОННОЙ ПРИРОДЫ

Автореферат

Подписано к печати Формат
Бумага Гарнитура "Times"
Усл. печ. л. ... (...). Тираж 120 экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета.
Типография СГУ.
410012, Саратов, Большая Казачья, 112а, корпус 8.